Лабораторна робота 1-2

Вивчення динаміки твердого тіла на прикладі фізичного маятника

Мета роботи: дослідження законів коливального руху на прикладі фізичного маятника, визначення прискорення вільного падіння

Обладнання: фізичний маятник (однорідний сталевий стержень), лінійка, секундомір.

2.1.Теоретичні відомості

Фізичним маятником називається будь-яке тверде тіло, яке під дією сили тяжіння може вільно коливатись навколо нерухомої горизонтальної осі. У даній роботі фізичним маятником є однорідний сталевий стрижень довжини *L*. На стрижень нанесено шкалу і по ньому може переміщуватися опорна призма, гостре ребро якої є віссю коливань маятника. Переміщуючи опорну призму можна змінювати відстань між віссю – точка О, навколо якої здійснюються коливання стрижня, та центром мас С маятника (рис.2.1).

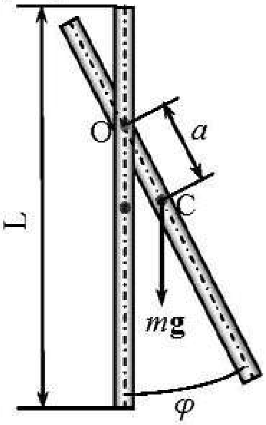

Рис. 2.1

Будемо вважати малими моменти сил тертя та опору. У цьому випадку рух маятника визначається тільки моментом сили тяжіння, модуль якого:

$$M = mga \cdot \sin\varphi,$$

де a – відстань ОС між віссю та центром мас, φ – кут відхилення маятника від положення рівноваги. Якщо в дану мить маятник віддаляється від положення рівноваги (рухається ліворуч на рис. 2.1), то вектори моменту сили та кутового прискорення мають протилежні напрями, відтак їхні проекції на вісь обертання мають протилежні знаки і тому основне рівняння динаміки обертального руху ($M = I\beta$, де M – момент сили, I – момент інерції, $\beta = \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{\varphi}$ – кутове прискорення) набуває вигляду:

$$I\ddot{\varphi} = -mga \cdot \sin\varphi \qquad (2.1)$$

Для малих відхилень від положення рівноваги, коли $\sin\varphi \simeq \varphi$, рівняння (2.1) запишеться як:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \qquad (2.2)$$

де введено позначення $\omega_0^2 = mga/I$. Розв'язком цього диференціального рівняння є рівняння гармонічних коливань

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \tag{2.3}$$

в якому $\omega_0 = \sqrt{mga/I}$ – циклічна частота, φ_0 – амплітуда коливань, α – початкова фаза. У цьому легко переконатися, підставивши функцію (2.3) у рівняння (2.2). Амплітуда коливань φ_0 та початкова фаза α залежать від того, як збуджуються коливання маятника, тобто визначаються так званими початковими умовами задачі – початковим кутовим відхиленням $\varphi_0 = \varphi(t=0)$ і початковою кутовою швидкістю $\frac{d\varphi}{dt}(t=0)$.

Період коливань $T = 2\pi/\omega_0$ визначається параметрами маятника та прискоренням вільного тяжіння *g*:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}. \tag{2.4}$$

Позначимо через I_0 момент інерції маятника відносно осі, що проходить через центр мас С і паралельна до осі коливань. Відповідно до теореми Штейнера:

$$I = I_0 + ma^2, \tag{2.5}$$

де I_0 – момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас, m – маса тіла, a – відстань між осями. Таким чином, маємо

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mga} + \frac{a}{g}}. \tag{2.6}$$

Формула (2.6) встановлює залежність періоду коливань *T* фізичного маятника від відстані *"a"* між точкою підвісу та центром мас.

З'ясуємо поведінку функції $T(a)$ при дуже великих ($a \to \infty$) та дуже малих ($a \to 0$) значеннях *"a"*. Очевидно, що при $a \to \infty$ $T \simeq 2\pi\sqrt{a/g}$ (дріб $I_0/mga \to 0$), тобто $T(a) \sim a^{1/2}$. Якщо ж $a \to 0$, то $a/g \to 0$ і $T \simeq 2\pi\sqrt{I_0/mga}$, тобто $T(a) \sim a^{-1/2}$. У такому випадку кажуть, що при $a \to \infty$ період $T(a) \to \infty$ як $a^{1/2}$, у той час, коли при $a \to 0$ період також прямує до нескінченності, але на цей раз як $a^{-1/2}$. Функція (2.6) є неперервною на інтервалі $(0, \infty)$ і прямує до нескінченності на краях інтервалу. Відповідно, вона повинна досягати деякого мінімального значення $a_0(0, \infty)$. Проаналізувавши функцію (2.6) на екстремум нескладно одержати, що її мінімуму відповідає $a_0 = \sqrt{I_0/m}$.

Окрім того, формула (2.6) описує залежність $T(a)$ як для "прямого", так і для "оберненого" маятника. Усі ці міркування дають змогу дуже просто побудувати графік функції *T*(*a*), показаний на рис. 2.2. З наведених графіків видно, що при підвішуванні маятника, наприклад, у точках O_1 і O_2 відповідні періоди дорівнюють T_1 і T_2. Для прикладу на рисунку зображено маятник – стержень, але, природно, усі отримані результати стосуються будь-якого фізичного маятника.

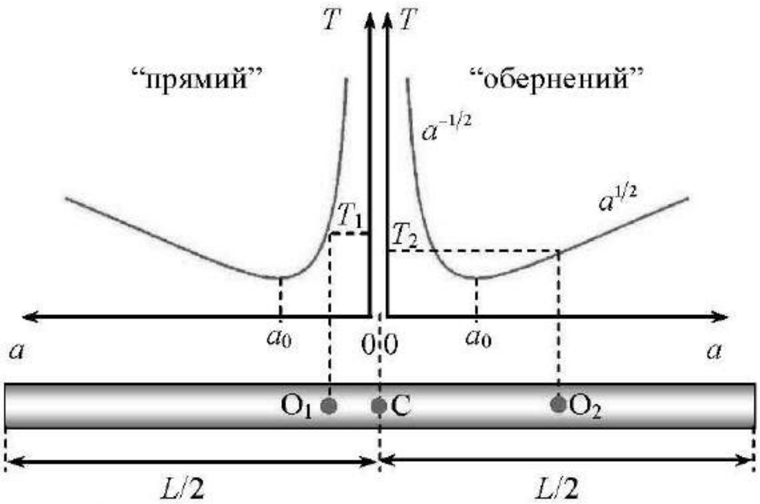

Рис.2.2. Залежність періоду коливань *T* фізичного маятника від відстані *“a”* між точкою підвісу та центром мас. Осі *T* вважати такими, що співпадають.

Для однорідного стержня $I_0 = (1/12)mL^2$, і формулу (2.6) можна переписати в такому вигляді:

$$T^2 a = \left(4\pi^2/g\right)a^2 + \pi^2 L^2/3g. \qquad (2.7)$$

Це дає можливість спростити експериментальну перевірку теоретичної залежності $T(a)$, звівши її до простої лінійної функції у змінних $T^2 a$ і a^2. Графік функції $T^2 a$ від a^2 має вигляд прямої з кутовим коефіцієнтом

$$k = 4\pi^2/g. \qquad (2.8)$$

Пряма має зсув по осі $T^2 a$ на величину

$$b = \pi^2 L^2/3g, \qquad (2.9)$$

як показано на рис.2.3.

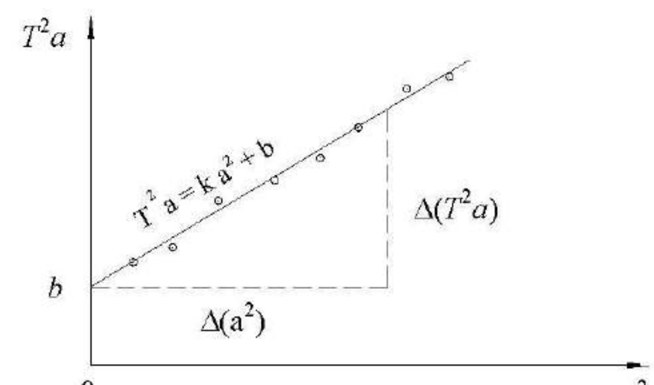

Рис. 2.3. Експериментальна перевірка теоретичної залежності *T*(*a*).

Якщо, з урахуванням похибки експерименту, отримані точки вкладаються на пряму, то це є свідченням справедливості теоретичної залежності (2.6). У цьому випадку через експериментальні точки можна провести найкращу, тобто найбільш близьку до усіх значень ($T^2 a$; a^2) пряму, що дасть можливість визначити кутовий коефіцієнт

$$k = \frac{\Delta\left(T^2 a\right)}{\Delta a^2}$$

і прискорення сили тяжіння g за формулою (2.8).

Точками на рис.2.3 зображено розраховані за експериментальними значеннями T і a величини $T^2 a$ та a^2.

Величини T і a одержують, зміщуючи точку підвісу маятника О і виміряючи відповідні значення параметрів.

2.2. Порядок виконання роботи

1. Ознайомтеся з конструкцією фізичного маятника. Визначте положення центра мас маятника, зрівноваживши його на зручній для цього опорі.

2. Закріпіть опорну призму на крайній поділці шкали, тобто на максимальній відстані від центра мас; виміряйте за допомогою масштабної лінійки відповідну відстань "*a*". Приведіть маятник у коливальний рух таким чином, щоб амплітуда коливань не перевищувала 10° $(\sin\varphi \approx \varphi)$. Виміряйте не менше трьох разів час *t* 10-ти повних коливань і за цими даними розрахуйте середнє значення періоду коливань $\langle T \rangle$. Експериментальні результати занесіть у табл.2.1.

3. Зміщуючи опорну призму через 2-3 поділки шкали, визначте для кожного значення "*a*" середнє значення періоду коливань $\langle T \rangle$ так само як у пункті 2. Такі вимірювання треба провести не менше ніж для 15 положень опорної призми.

4. За отриманими значеннями $\langle T \rangle$ обчисліть відповідні значення $T^2 a$ і a^2 (при розрахунках вважайте, що $T \equiv \langle T \rangle$). Результати обчислень занесіть до табл.2.1.

5. На аркуші міліметрового паперу побудуйте графік залежності $T(a)$; визначте $T_{\min}$ та відповідне значення $a = a_0$, яке слід порівняти з теоретичним значенням a_0 для маятника-стержня:

$$a_0 = \sqrt{\frac{I_0}{m}} = \frac{L}{\sqrt{12}} = 0,29L.$$

6. На аркуш міліметрового паперу нанесіть експериментальні точки ($T^2 a$ залежно від a^2); проведіть пряму, найближчу до усіх точок. Зробіть висновок відносно справедливості теоретичної залежності $T(a)$.

7. Визначте кутовий коефіцієнт прямої k і значення параметра b.

8. За формулою (2.8) розрахуйте прискорення вільного падіння g і порівняйте його з табличним значенням. За значенням параметра b визначте довжину маятника $L_{\text{екс}}$ та порівняйте з результатом безпосереднього вимірювання довжини маятника $L_{\text{вим}}$ (табл.2.2).

Табл. 2.1

	a, м	$T\,(\text{с}) = t/10$	$\langle T\rangle\,(\text{с})$	$a^2\,(\text{м}^2)$	$\langle T\rangle^2 a\,(\text{с}^2\cdot\text{м})$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					

12					
13					
14					
15					

Табл. 2.2

$T_{\min}\,(\text{с}) =$	$k\left(\text{с}^2/\text{м}\right) =$
$a_0\,(\text{м}) =$	$b\left(\text{м}\cdot\text{с}^2\right) =$
$g_{\text{табл}} = 9{,}8\ \text{м}/\text{с}^2$; $g_{\text{екс}} =$	$L_{\text{екс}}\,(\text{м}) =$; $L_{\text{вим}}\,(\text{м}) =$
Похибка $\varepsilon = \left(\left\|g_{\text{екс}} - g_{\text{табл}}\right\|/g_{\text{табл}}\right)\cdot 100\% =$	

2.3. Контрольні запитання

1. Як скласти рівняння руху фізичного маятника? Яким є його розв'язок для малих відхилень від положення рівноваги (гармонічні коливання)?

2. Сформулюйте основне рівняння динаміки обертального руху.

3. Покажіть шляхом безпосередньої підстановки, що функція (2.3) є розв'язком диференціального рівняння (2.2).

4. Які фактори визначать амплітуду коливань маятника і початкову фазу?

5. Сформулюйте та доведіть теорему Штейнера.

6. Виведіть залежність періоду коливань фізичного маятника T від відстані "a" між центром мас і точкою підвісу. Проаналізуйте поведінку функції $T(a)$ при $a \to 0$ та $a \to \infty$. Покажіть, що $T_{\min}$ досягається при $a_0 = \sqrt{I_0 / m}$.

7. Як здійснюється експериментальна перевірка теоретичної залежності $T(a)$?

8. Як у даній роботі визначається прискорення сили тяжіння?

Література

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцік П.П. ЗАГАЛЬНИЙ КУРС ФІЗИКИ: Навч. посібник для студентів вищих техн. і пед. закладів освіти. У 3-х томах. -К.: Техніка, 1999.

2. Савельев И. В. КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ. В 3-х томах. М.: Наука. Главная редакция физико-математической науки. -1977.

3. Иродов И.Е. МЕХАНИКА. Основные законы. Учебное пособие для вузов. М.: Лаборатория базовых знаний, 2000

4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. _ М.: Наука, 1974.

5. Руководство к лабораторным занятиям по физике /Под ред. Л.Л. Гольдина . М.: Наука, 1973.