

## Лабораторна робота № 1-4

### Визначення прискорення сили тяжіння за допомогою перекидного маятника

**Мета роботи:** вивчення перекидного маятника, визначення прискорення сили тяжіння.

**Обладнання:** перекидний маятник, електронний секундомір, вимірювальна лінійка.

#### 4.1. Теоретичні відомості

Фізичним маятником називається тверде тіло, яке під дією сили тяжіння здатне коливатись навколо горизонтальної осі (рис.4.1). Точка О перетину вертикальної площини, що проходить через центр мас маятника С, з горизонтальною віссю називається точкою підвісу. Відхилення маятника від положення рівноваги характеризується кутом  $\varphi$ .

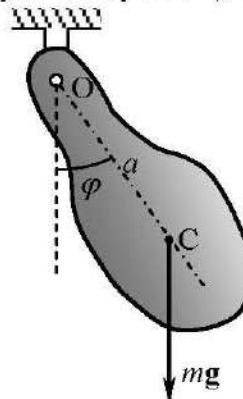


Рис. 4.1

Будемо вважати, що моменти сил тертя та опору незначні. В цьому випадку рух маятника визначається лише моментом сили тяжіння

$$M = -mg a \sin \varphi,$$

де  $a$  – відстань ОС від точки підвісу до центра мас.

Застосовуючи основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла (5.18) ([T5-2-1-2.htm](#)), матимемо:

$$I \varphi'' = -mg a \sin \varphi, \quad (4.1)$$

де  $I$  – момент інерції маятника відносно осі О,  $\varphi'' = d^2 \varphi / dt^2$  – кутове прискорення.

Для малих відхилень від положення рівноваги  $\sin \varphi \approx \varphi$ , тому рівняння (4.1) набуде вигляду:

$$\varphi'' + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (4.2)$$

де уведене позначення

$$\omega_0^2 = mg a / I$$

Розв'язок цього рівняння добре відомий (див. п.20.3.1.6 (V20-03-1-6.htm)) – це гармонічні коливання з частотою  $\omega_0 = \sqrt{mga/I}$ , при яких кут відхилення маятника від рівноважного положення (тобто рівняння руху) визначається функцією

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (4.3)$$

де  $\varphi_0$  – амплітуда коливань,  $\alpha$  – початкова фаза.

Період коливань фізичного маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}. \quad (4.4)$$

Якщо момент інерції маятника відносно осі, що проходить через центр мас С паралельно до осі качання, дорівнює  $I_0$ , то згідно з теоремою Штейнера (5.20)(T5-2-1-3.htm)

$$I = I_0 + m a^2. \quad (4.5)$$

Підставимо цей вираз у формулу (4.4):

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + m a^2}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mga} + \frac{a^2}{g}}. \quad (4.6)$$

Останній вираз дозволяє з'ясувати поведінку функції  $T(a)$  при дуже великих ( $a \rightarrow \infty$ ) та малих ( $a \rightarrow 0$ ) значеннях параметра “ $a$ ”. Очевидно, що при  $a \rightarrow \infty$   $T(a) \approx 2\pi \sqrt{a/g}$ , тобто  $T(a) \sim a^{1/2}$ . Для дуже малих значень “ $a$ ”  $T(a) \sim a^{-1/2}$ . У таких випадках кажуть, що при  $a \rightarrow 0$  період прямує до нескінченності як  $a^{1/2}$ , у той час як при  $a \rightarrow 0$  період також прямує до нескінченності, але на цей раз, як  $a^{-1/2}$ .

Функція (4.6) неперервна на інтервалі  $(0, \infty)$  і прямує до нескінченності на краях цього інтервалу. Відповідно, вона повинна досягти певного мінімального значення  $T_{\min}$  при  $a \in (0, \infty)$ . Окрім того, формула (4.6) описує залежність  $T(a)$  як для “прямого”, так і для “оберненого” маятника. З огляду на ці міркування можна дуже просто побудувати графік функції  $T(a)$ , показаний на рис.4.2.

Формула (4.6) дає можливість експериментально визначити прискорення сили тяжіння. Дійсно, підвішуючи маятник на різних відстанях  $a_1$  і  $a_2$  від центра мас, можна виміряти відповідні періоди коливань  $T_1$  і  $T_2$ . Використовуючи співвідношення (4.6), отримаємо систему рівнянь:

$$T_1^2 = 4\pi^2 \left[ (I_0 + m a_1^2) / m g a_1 \right],$$

$$T_2^2 = 4\pi^2 \left[ (I_0 + m a_2^2) / m g a_2 \right].$$

Якщо з рівнянь виключити  $I_0$ , то отримаємо:

$$g = 4\pi^2 \left( a_1^2 - a_2^2 \right) / \left( a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2 \right). \quad (4.7)$$

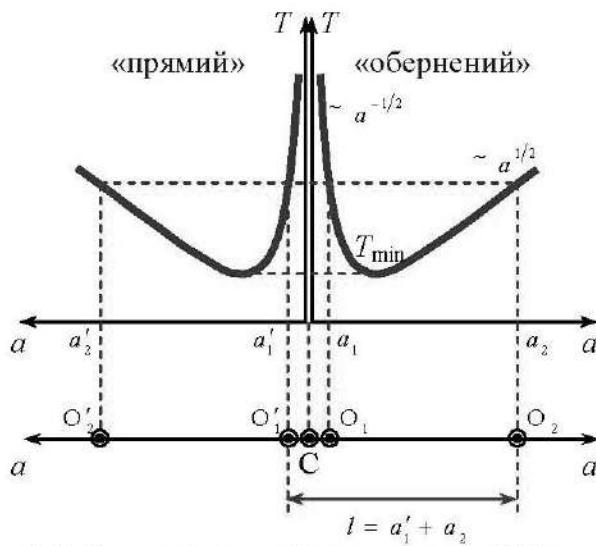


Рис.4.2. Залежність періоду коливань  $T$  фізичного маятника від відстані “ $a$ ” між точкою підвісу й центром мас.

Оси  $T$  слід вважати співпадаючими:  $a_1 = a'_1$ ;  $a_2 = a'_2$ . Одне й те ж саме значення періоду  $T$  (за умови  $T > T_{\min}$ ) досягається під час підвішування маятника в точках  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O'_1$ ,  $O'_2$ .

Однак формулу (4.7) можна значно спростити. Припустимо, що нам вдалося знайти положення точок  $O_2$  і  $O'_1$ , розташованих по різні боки від центра мас (див. рис.4.2). У такому випадку  $T_1 = T_2 = T$ , і формула (4.7) набуває простішого вигляду:

$$g = 4\pi^2 l / T^2, \quad (4.8)$$

де  $l = a'_1 + a'_2$ .

Усі величини, що входять до формул (4.8), можуть бути легко виміряні з великою точністю. Найбільшою складністю є визначення точок підвісу, в яких періоди “прямого” і “оберненого” маятників практично співпадають (звідси назва – перекидний).

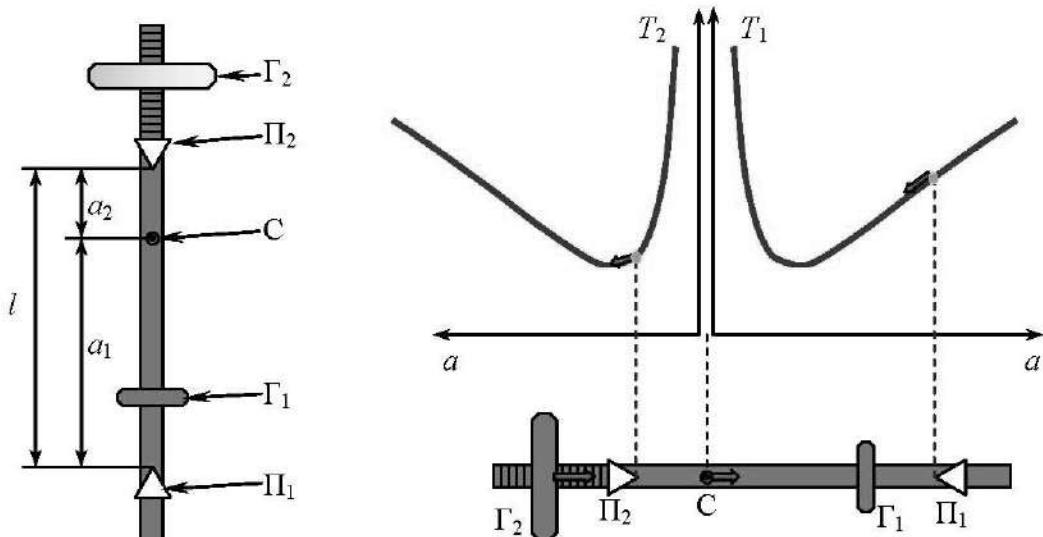


Рис. 4.3  
Конструкція перекидного маятника

Рис. 4.4  
Вплив переміщення різних елементів перекидного маятника на значення періодів  $T_1$  і  $T_2$ , положення центра мас  $C$  (тут  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  – рухомі опорні приставки,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  – рухомі тягарці),

Існує багато різноманітних конструкцій перекидного маятника, одна з яких зображенна на рис.4.3. На сталевому стержні закріплено дві опорні призми ( $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ ) і тягарці ( $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$ ), переміщуючи які, можна у досить широких межах змінювати період. Нанесені на поверхню стержня шкали визначають положення рухомих елементів конструкції. Їх вплив на періоди  $T_1$  і  $T_2$  ілюструє рис.4.4.

Видно, що переміщення  $\Pi_2$  більше впливає на період  $T_2$ , ніж переміщення  $\Pi_1$  на  $T_1$ . При цьому положення центра мас майже не змінюється, оскільки призми досить легкі. Однак невеликий зсув тягарця  $\Gamma_2$  у напрямку стрілки призводить до значного зміщення центра мас С. Це означає, що відстань  $a_2$  збільшується, а  $a_1$  на стільки ж зменшується. Обидва періоди зменшуються, однак  $T_2$  значно швидше, завдяки чому їх можна вирівняти. При цьому різниця періодів  $T_1$  та  $T_2$  буде перебувати в межах випадкового розкиду результатів повторних вимірювань. Це дає змогу розглядати набір значень  $T_1$  і  $T_2$  як єдиний набір  $T$  та розрахувати відповідне середнє значення  $\langle T \rangle$  і вибірковий стандарт середнього  $s_{\langle T \rangle}$ .

Фактично ми розглядаємо  $T_1 - T_2$  як випадкову похибку.

Розглянемо, як випадкова похибка вимірювання позначиться на похибці  $g$ . Для цього слід скористатися формулою (4.7) замість (4.8), яка не враховує відмінностей у періодах. Відповідний розрахунок приводить до такого результату:

$$s_{\langle g \rangle} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T_1} s_{\langle T \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T_2} s_{\langle T \rangle}\right)^2} = \frac{8\pi^2 l \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{|a_1 - a_2| \cdot T^3} s_{\langle T \rangle},$$

де  $s_{\langle g \rangle}$  - вибірковий стандарт середнього значення  $g$ . Вираз для відносної похибки виглядає зовсім просто:

$$\frac{s_{\langle g \rangle}}{g} = \frac{2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{|a_1 - a_2|} \frac{s_{\langle T \rangle}}{T}. \quad (4.9)$$

Аналогічно розраховується систематична похибка:

$$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \frac{4(a_1^2 + a_2^2)}{(a_1 - a_2)^2} \left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right)^2}, \quad (4.10)$$

де  $\sigma_l$ ,  $\sigma_T$ ,  $\sigma_\pi$  - систематичні похибки величин  $l$ ,  $T$ ,  $\pi$ . Ці вирази показують, що відносна похибка  $g$  необмежено зростає, якщо різниця  $a_1 - a_2$  прямує до нуля, тобто якщо  $T_1 \rightarrow T_{\min}$  (рис.4.2). Тому планувати експеримент слід так, щоб  $a_1$  і  $a_2$  відрізнялись одне від одного досить вагомо. Неважко, однаке, показати, що при значній відмінності  $a_1$  і  $a_2$  зростає затухання коливань, що призводить до пониження точності вимірювання періоду. Задовільні результати можна отримати, якщо вибрати

$$3 > a_1/a_2 > 1,5.$$

## 4.2. Порядок виконання роботи

1. Ознайомтеся з конструкцією перекидного маятника. Тягарець  $\Gamma_2$  розмістіть якнайближче до призми  $\Pi_2$ .
2. Приведіть маятник у коливальний рух на одній з опорних призм так, щоб амплітуда коливань не перевищувала  $10^\circ$  і виміряйте час 10-ти коливань  $t_1$ . Повторіть це вимірювання ще два рази. Знайдіть середнє значення часу  $\langle t_1 \rangle$ . Результати вимірювань занесіть до табл. 1.
3. Переверніть маятник і виміряйте час 10-ти коливань  $t_2$  на іншій опорній призмі тричі і по одержаним результатам визначте середнє значення  $\langle t_2 \rangle$ . Результати вимірювань занесіть до табл. 1.
4. Переміщуючи тягарець  $\Gamma_2$  уздовж шкали, нанесеної на стержні, з кроком 1–2 поділки, проводьте вимірювання проміжків часу  $t_1$  та  $t_2$  описано в п.2, 3 і визначте середні значення  $\langle t_1 \rangle$  та  $\langle t_2 \rangle$  для різних положень тягарця  $\Gamma_2$ .
5. На аркуші міліметрового паперу на одній діаграмі побудуйте графіки залежності середніх значень  $\langle t_1 \rangle$  і  $\langle t_2 \rangle$  від  $n$ , де  $n$  – поділка шкали. Точка перетину цих кривих визначить оптимальне положення тягарця  $\Gamma_2$ , при якому значення періодів  $T_1 = \langle t_1 \rangle / 10$  та  $T_2 = \langle t_2 \rangle / 10$  будуть найбільш близькими. Точку перетину позначте  $n_0$ .
6. Встановіть маятник на призму  $\Pi_2$ , а тягарець  $\Gamma_2$  закріпіть у положенні  $n_0$ . Приведіть маятник у коливальний рух з відхиленням у межах кута  $10^\circ$  і виміряйте час  $t$  50-ти коливань. Вимірювання проведіть тричі.
7. Підвісьте маятник на призму  $\Pi_1$ , не змінюючи положення тягарця. Повторіть вимірювання часу 50-ти коливань (три серії вимірювань) (див. п. 6). Дані пп. 4, 5 занесіть до табл.4.2.
8. Для кожної з шести серій вимірювань визначити значення періоду коливань  $T$ . Знайти середнє значення періоду  $\langle T \rangle$ .
9. Виміряти параметр  $l$  – відстань між призмами  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ .
10. За формулою (4.8) визначте прискорення вільного падіння  $\langle g \rangle$ , підставляючи замість  $T$  його середнє значення  $\langle T \rangle$ .
11. Використовуючи вирази (4.9) і (4.10), оцініть похибку визначення  $\langle g \rangle$ .

### Параметри розрахунків:

$$l(\text{м}) = \dots; a_1(\text{м}) = \dots; a_2(\text{м}) = \dots;$$
$$\sigma_l(\text{м}) = \dots; \sigma_T(\text{с}) = \dots; \sigma_g = \dots$$

### **Визначення похибок:**

$$S_{\langle T \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (T_i - \langle T \rangle)^2}{6 \cdot 5}} = \dots$$

$$\left( S_{\langle g \rangle} / g \right) \cdot 100\% = \dots; \quad \left( \sigma_{\langle g \rangle} / g \right) \cdot 100\% = \dots$$

### **Остаточный результат:**

$$\langle g \rangle = \dots ; \quad S_{\langle g \rangle} = \dots ; \quad \sigma_{\langle g \rangle} = \dots$$

Табл. 4.1

Таблиця 4.2

	Час 50-ти коливань, с	Період $T_i$ , с	$T_i - \langle T \rangle$ , с	$(T_i - \langle T \rangle)^2$ , с <sup>2</sup>
$n$	Призма $\Pi_1$			
1				
2				
3				
	Призма $\Pi_2$			
1				
2				
3				
	$\langle T \rangle = \frac{\sum_{i=1}^6 T_i}{6}$		$\sum_{i=1}^6 (T_i - \langle T \rangle)^2 =$	

### 4.3. Контрольні запитання

1. Момент сил і момент імпульсу системи матеріальних точок відносно деякого початку (точки О). Зв'язок між ними – рівняння моментів для системи матеріальних точок.
2. Закон збереження моменту імпульсу для системи матеріальних точок.
3. Момент імпульсу і момент сил відносно деякої осі. Рівняння моментів відносно цієї осі.
4. Момент інерції твердого тіла відносно нерухомої осі обертання. Теорема Штейнера. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.
5. Рівняння руху фізичного маятника. Його розв'язок для малих відхилень від положення рівноваги – гармонічні коливання.
6. Залежність періоду коливань Т фізичного маятника від відстані “a” між центром мас і точкою підвісу.
7. Метод вимірювання прискорення сили тяжіння g за допомогою перекидного маятника.
8. Як слід планувати експеримент, щоб забезпечити мінімальну похибку у вимірюванні g?
9. Дайте відповіді на запитання, які пропонуються в тексті.

### Література

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1. “Техніка”, К.,1999.
2. Савельев И. В. Курс общей физики. В 3 т. Т.1.– М. : Наука, 1977.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. – М. : Наука, 1974.
4. Руководство к лабораторным занятиям по физике /Под ред. Л.П. Гольдина . – М.: Наука, 1973.с.