Лабораторна робота 1-5

Визначення коефіцієнта в'язкості рідини методом Стокса

Мета роботи: вивчення руху матеріальної точки під дією сили, що пропорційна швидкості; визначення коефіцієнта в'язкості гліцерину. Ця мета досягається при вимірюванні часу, за який свинцеві кульки проходять у гліцерині певну відстань.

Обладнання: скляний циліндр із рідиною, в'язкість якої досліджується (гліцерин), термометр, ареометр, мікрометр, секундомір, масштабна лінійка, дрібні кульки.

5.1. Теоретичні відомості

На рухоме тіло у в'язкій рідині діє сила опору, яка залежить від багатьох факторів таких як геометричної форми тіла, характеру обтікання, коефіцієнта в'язкості рідини тощо. Характер обтікання тіла рідиною визначається числом Рейнольдса (Re).

При великих значеннях Re обтікання стає турбулентним з утворенням вихорів позаду тіла. У вихровій області тиск знижений, у результаті чого виникає різниця тисків між передньою та задньою поверхнями тіла, що обумовлює силу опору. Таким чином, повна сила опору складається з опору тертя та опору тиску, а їх відносний внесок визначається значенням числа Re. Обтікання буде ламінарним за виконання умови:

$$Re < Re_{кр}, \tag{5.1}$$

де $Re_{кр}$ – критичне значення числа Рейнольдса, яке, в залежності від рідини і коливається від десятків до декількох тисяч. Під час обтікання кульки безмежною в'язкою рідиною, густина якої ρ_1, та виконанні нерівності

$$Re = \frac{v r \rho_1}{\eta} << 1, \tag{5.2}$$

сила опору F_C визначається формулою Стокса :

$$F_C = 6\pi r \eta v, \tag{5.3}$$

де η – коефіцієнт в'язкості рідини, v – швидкість кульки, r – її радіус,

Критерій (5.2) забезпечує не лише застосування формули Стокса, а й ламінарність обтікання, тому що у цьому випадку, безперечно, виконується також умова (5.1). Практично, це відповідає повільному обтіканню кульки в'язкою рідиною або її повільному руху.

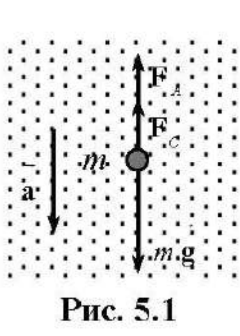

Рис. 5.1

З'ясуємо характер руху кульки маси m під час повільного падіння у безмежній в'язкій рідині. У цьому випадку на неї діють три сили: сила тяжіння $m\mathbf{g}$, Архімедова сила $\mathbf{F}_A$ та сила опору $\mathbf{F}_C$, як показано на рис.5.1. Згідно з другим законом Ньютона:

$$m\vec{\mathbf{a}} = m\vec{\mathbf{g}} + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_A,$$

де $\mathbf{a}$ – прискорення кульки. Проектуючи це рівняння на напрямок вектора прискорення, одержимо:

$$m\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = mg - F_A - F_C,$$

або

$$\rho V\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} + 6\pi r\eta v = Vg(\rho - \rho_1), \tag{5.4}$$

де ρ – густина матеріалу кульки, V – її об'єм.

Для того, щоб розв'язати рівняння (5.4) перепишемо його таким чином:

$$\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{6\pi r\eta}{\rho V}\left[v - \frac{Vg(\rho - \rho_1)}{6\pi\eta r}\right], \tag{5.5}$$

зауваживши при цьому, що величина

$$B = \frac{Vg(\rho - \rho_1)}{6\pi r\eta} \tag{5.6}$$

не залежить від часу і має розмірність швидкості. Це дозволяє подати рівняння (5.5) у вигляді диференційного рівняння з роздільними змінними

$$\frac{\mathrm{d}\,(v - B)}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{6\pi r\eta}{\rho V}(v - B), \tag{5.7}$$

або

$$\frac{\mathrm{d}\,(v - B)}{v - B} = -\frac{6\pi r\eta}{\rho V}\mathrm{d}\,t. \tag{5.8}$$

Після інтегрування маємо

$$\ln(v - B) = -\frac{6\pi r\eta}{\rho V}t + \ln \boldsymbol{C}, \tag{5.9}$$

де довільна стала записана у вигляді $\ln \boldsymbol{C}$.

Остаточно

$$v(t) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{6\pi r\eta}{\rho V}t} + B. \tag{5.10}$$

Таким чином, залежність швидкості руху кульки від часу $v(t)$ визначається за формулою:

$$v(t) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{6\pi r\eta}{\rho V}t} + \frac{Vg(\rho - \rho_1)}{6\pi r\eta}. \tag{5.11}$$

Довільна стала C визначається початковою швидкістю, з якою кулька потрапляє у рідину, тобто з умови

$$v(t=0)=v_0. \tag{5.12}$$

(Відлік часу, природно, ведеться від моменту перетину кулькою поверхні рідини).

Використовуючи загальний розв'язок (5.11) та умову (5.12), визначаємо, що

$$C=v_0-\frac{Vg(\rho-\rho_1)}{6\pi r\eta}. \tag{5.13}$$

Остаточно

$$v(t)=\frac{Vg(\rho-\rho_1)}{6\pi r\eta}-\left[\frac{Vg(\rho-\rho_1)}{6\pi r\eta}-v_0\right]e^{-\frac{6\pi r\eta}{\rho V}t}. \tag{5.14}$$

Проаналізуємо розв'язок (5.14). При $t\to\infty$, $v\to v_{уст}=\frac{Vg(\rho-\rho_1)}{6\pi r\eta}$ – усталена швидкість руху. Умова $t\to\infty$ з фізичної точки зору означає, що $t>>\tau$, де $\tau=\rho V/6\pi r\eta$ – так званий ***час релаксації***, тобто час, за якого рух набуде усталеного характеру ($a=0$)

Використовуючи прийняті позначення, запишемо розв'язок (5.14) у більш зручному вигляді:

$$v(t)=v_{уст}-(v_{уст}-v_0)e^{-t/\tau}. \tag{5.15}$$

Графік цієї функції, зображений на рис.5.2, дає наочне уявлення про характер руху кульки.

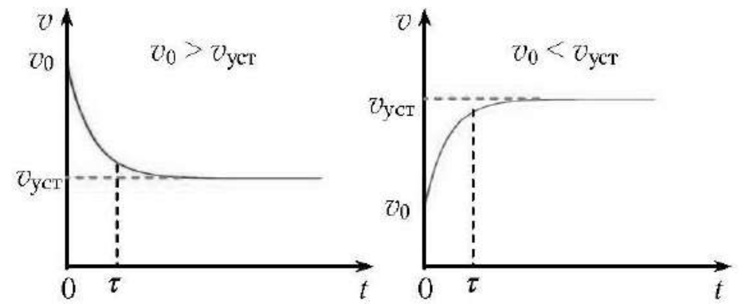

Рис. 5.2

Таким чином, незалежно від швидкості v_0, з якою кулька потрапляє до рідини, через час $t>>\tau$ з достатньою точністю можна говорити далі про рівномірний рух кульки зі швидкістю $v_{уст}$.

Вимірявши усталену швидкість падіння кульки $v_{уст}$ та знаючи її радіус, а також величини густин речовини кульки ρ та рідини ρ_1, можна обчислити коефіцієнти в'язкості рідини за формулою

$$\eta=\frac{2}{9}gr^2\frac{\rho-\rho_1}{v_{уст}}. \tag{5.16}$$

У цьому полягає ідея методу Стокса.

У роботі пропонується визначити коефіцієнт в'язкості гліцерину. Гліцерин відносять до рідин, коефіцієнт в'язкості яких має значну температурну залежність при температурах, близьких до кімнатної.

Окрім того, у реальному експерименті мають справу з водним розчином гліцерину, тому що на повітрі він поглинає водяну пару. Наявність води значно позначається на його густині та в'язкості. Уявлення про ступінь залежності в'язкості від температури та відсоткового складу гліцерину у розчині дають літературні дані, наведені у таблиці 5.1. Вимірювати в'язкість гліцерину, не знаючи його температури та густини (відсоткового вмісту води), немає ніякого сенсу.

Таблиця 5.1

Розчин гліцерину водний					
% гліцерину	**В'язкість η, 10^{-3} Па·с**				
	10°C	**15°C**	**20°C**	**25°C**	**30°C**
100	3900	2656	1495	942	622
99	3090	2120	1194	772	509
98	2460	1700	971	627	423
97	1950	1358	802	521	353
96	1585	1105	659	434	295
95	1270	897	543	365	248

5.2. Методика експерименту

Експериментальна установка досить проста – скляна циліндрична посудина, заповнена гліцерином. Діаметр посудини ≈ 5 см, довжина ≈ 1 м ≈ 1 м. На стінках посудини нанесено позначки, відстань між ними l вимірюється за допомогою лінійки. Верхня позначка розташована трохи нижче відкритої поверхні гліцерину. На момент її проходження швидкість кульки встигає набрати усталеного значення.

Час t руху кульки між позначками вимірюється секундоміром, що дозволяє визначити $v_{уст}$ за формулою:

Природно, напрошується питання – як слід проводити експеримент з визначення коефіцієнта в'язкості "невідомої рідини" (якщо ми не маємо жодних уявлень про її коефіцієнт в'язкості). Часто у таких випадках студенти проводять серію вимірювань $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ та визначають середній коефіцієнт в'язкості $\langle \eta \rangle$, зовсім не замислюючись про правомірність такого усереднення.

Яке було б ваше ставлення до отриманого у такий спосіб експериментального значення $\langle \eta \rangle$, якби виявилось, що критерій застосовності формули Стокса не виконується? Імовірно, скептичне. Ситуація може здатися надуманою. Однак це не так. Під час формального, точніше кажучи, безграмотного підходу до експерименту результат міг би бути саме таким.

$$S(3\tau) = \int_0^{3\tau} v(t)\,dt = v_{уст} \cdot \tau \left(\frac{t}{\tau} - 1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right)\Bigg|_0^{3\tau} \approx 2 v_{уст} \cdot \tau \approx \frac{8}{81} g r^4 \frac{\rho(\rho - \rho_1)}{\eta^2}.$$

Природно, напрошується питання – як слід проводити експеримент з визначення коефіцієнта в'язкості "невідомої рідини" (якщо ми не маємо жодних уявлень про її коефіцієнт в'язкості). Часто у таких випадках студенти проводять серію вимірювань $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ та визначають середній коефіцієнт в'язкості $\langle \eta \rangle$, зовсім не замислюючись про правомірність такого усереднення.

Яке було б ваше ставлення до отриманого у такий спосіб експериментального значення $\langle \eta \rangle$, якби виявилось, що критерій застосовності формули Стокса не виконується?

Імовірно, скептичне. Ситуація може здатися надуманою. Однак це не так. Під час формального, точніше кажучи, безграмотного підходу до експерименту результат міг би бути саме таким.

Як ви поставитесь до цього результату, якщо з'ясується, що значення η_1, η_2, ..., η_n містять систематичну залежність (закономірність), наприклад, від радіуса кульки r?

Це приклад неправильно проведеного експерименту, хоч і бездоганного у вимірах, розрахунках. У цьому випадку необхідно проводити подальші вимірювання, використовуючи більш дрібні кульки, збільшуючи відстань верхньої позначки від відкритої поверхні гліцерину.

Критерієм надійності експерименту є відсутність систематичної залежності η від r; ця залежність може носити тільки випадковий характер, пов'язаний з випадковими похибками. ***Тільки у цьому разі можна усереднювати результати вимірювань*** та робити висновки щодо справедливості теоретичних положень.

Порядок виконання роботи

1. Відберіть 10 кульок різного діаметра і за допомогою мікрометра виміряйте їх середні діаметри. Густину матеріалу кульок ρ і гліцерину ρ_1 вказано на робочому столі.
2. Якщо густину ρ_1 не вказано, виміряйте її за допомогою ареометра, попередньо перемішавши гліцерин мішалкою. Визначте також температуру гліцерину.
3. Використайте дані таблиці 5.1 та проаналізуйте застосовність формули Стокса. З'ясуйте, на якій відстані від відкритої поверхні гліцерину слід установлювати верхню позначку. Для розрахунків використовуйте "найгірші" значення r і η, тобто максимальний радіус відібраних кульок і в'язкість 95% розчину гліцерину при кімнатній температурі. Якщо ця відстань виявиться надто малою, візьміть до уваги практичні міркування.
4. Взявши кульку пінцетом, обережно опустіть її на середину відкритої поверхні гліцерину і, спостерігаючи за її рухом, виміряйте за допомогою секундоміра час проходження кульки між двома позначками. При відліках бажано, щоб око знаходилось на рівні відповідної позначки. Відстань між позначками вимірюється масштабною лінійкою. Усі результати вимірювань слід заносити до таблиці 5.2.
5. Визначте усталені швидкості падіння кульки і обчисліть за формулою (5.16) коефіцієнти в'язкості гліцерину. Переконайтесь, що отримані значення η не виявляють систематичної залежності від радіуса кульки. Побудуйте для цього графік $\eta(r)$.
6. Визначте середнє значення коефіцієнта в'язкості гліцерину $\langle\eta\rangle$. Розглядаючи η_1, η_2, ..., η_n як результати прямих вимірів, обчисліть вибірковий стандарт середнього $S_{<\eta>}$, скориставшись таблицею 5.2.
7. Виведіть формулу для розрахунку систематичної похибки η:

$$\left(\frac{\sigma_\eta}{\eta}\right)^2 = 4\left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 + \frac{\sigma_\rho^{\ 2} + \sigma_{\rho_1}^{\ 2}}{(\rho - \rho_1)^2} + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2. \quad (5.19)$$

   Обчисліть похибку σ, скориставшись таблицею 5.3.
8. Оцініть похибку $\langle\sigma\rangle$ у залежності від величин σ_η і $S_{<\eta>}$. Занотуйте кінцевий результат, вказавши густину температуру гліцерину.
9. Використовуючи таблицю 5.1 оцініть відсотковий вміст води у досліджуваному гліцерині.

Таблиця 5.2

n	d (мм)	t (с)	$v_{уст}$ (м/с)	η (Па·с)	$\eta_i - \langle\eta\rangle$ (Па·с)	$(\eta_i - \langle\eta\rangle)^2$ (Па·с)^2
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

***Параметри розрахунків*:**

Густина матеріалу кульок $\rho = 11,3 \cdot 10^3$ кг/м^3

Густина гліцерину $\rho_1 =$

Відстань між позначками $l =$

Температура гліцерину $t =$

До таблиці 5.3 заносимо систематичні похибки параметрів, що входять у розрахункову формулу (5.19).

Таблиця 5.3

$\sigma_{\rho_1} =$	(кг/м^3)	$\sigma_r =$	(мм)
$\sigma_t =$	(с)	$\sigma_g =$	(м/с^2)
$\sigma_l =$	(м)	$\sigma_\rho =$	(кг/м^3)

Формули для розрахунків:

1) $\sum_{i=1}^{20} \eta_i =$ (Па·с)

2) $< \eta > = \dfrac{\sum_{i=1}^{20} \eta_i}{n} =$ (Па·с)

3) $\sum_{i=1}^{20} (\eta_i - < \eta >)^2 =$ (Па·с)^2

4) $S_{<\eta>} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (\eta_i - < \eta >)^2}{n(n-1)}} =$ (Па·с)

5) $\dfrac{\sigma_\eta}{\eta} \cdot 100\% =$

6) $\sigma_{<\eta>} =$ (Па·с)

Контрольні запитання

1. Коефіцієнти в'язкості. Формула Ньютона для сили внутрішнього тертя.
2. Ламінарний і турбулентний рух. Число Рейнольдса .
3. Формула Стокса. Умова її застосування.
4. Виведіть диференціальне рівняння руху кульки у безмежній в'язкій рідині. Отримайте його розв'язок $v(t)$ і проведіть відповідний аналіз.
5. У чому полягає ідея вимірювання коефіцієнта в'язкості рідини методом Стокса?
6. Які кульки слід використовувати для вимірювань? Чи повинна кулька змочуватися рідиною?
7. На якій відстані від відкритої поверхні гліцерину слід наносити верхню позначку?
8. Що є критерієм надійності даного експерименту?
9. Як обчислюються похибки у даній роботі?
10. Дайте відповіді на запитання, що запропоновані в основному тексті.

Література

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1. "Техніка",К.,1999.
2. Савельев И. В. Курс общей физики. В 3 т. Т.1. § 75,76,78. – М. : Наука, 1977.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. §96,101. – М. : Наука, 1974.
4. Руководство к лабораторным занятиям по физике / Под ред. Л.Л. Гольдина . – М.: Наука, 1973.с. 140-146, 672.