Лабораторна робота № 1-9
Вивчення розподілу Больцмана

Мета роботи: експериментальна перевірка розподілу Больцмана для дрібних частинок, зважених у рідині.

Обладнання: вузька циліндрична посудина з прозорою рідиною, у якій зважені дрібні частинки; джерело світла; фотоприймач; вимірювач фотоструму; масштабна лінійка.

Теоретичні відомості

У стані теплової рівноваги розподіл однакових частинок за швидкостями та координатами визначається виключно енергією частинок $\boldsymbol{E}$ і температурою системи $\boldsymbol{T}$ (тут під $\boldsymbol{T}$ розуміють абсолютну температуру, що вимірюється у кельвінах). Для запису цього розподілу, що називається розподілом Максвелла - Больцмана, введемо деяку декартову систему координат ***x, y, z,*** що служить для визначення положення частинки, а швидкість частинки будемо характеризувати складовими v_x, v_y, v_z уздовж осей ***x, y, z***.

У такому разі розподіл запишеться у вигляді:

$$\mathrm{d}\,n_{x,y,z,v_x,v_y,v_z} = A\,e^{-\frac{E}{kT}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_x\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_y\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_z, \qquad (9.1)$$

де $\mathrm{d}\,n_{x,y,z,v_x,v_y,v_z}$ – кількість частинок, координати яких лежать у межах від *x, y, z* до *x* + d*x, y* + d*y,* z + d*z*, а складові швидкості у межах від v_x, v_y, v_z до $v_x+\mathrm{d}\,v_x$, $v_y+\mathrm{d}\,v_y$, $v_z+\mathrm{d}\,v_z$, A – нормуючий множник, вид якого ми уточнювати не будемо, $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/К – константа, що має назву сталої Больцмана, E – енергія частинки, що залежить від її координати і швидкості.

Якщо нас цікавить розподіл $dn_{x,y,z}$ частинок тільки за координатами, а їхні швидкість може бути якою завгодно, то необхідно проінтегрувати розподіл (9.1) за швидкостями. Для цього припускаємо, що зовнішні сили, які діють на частинки, є консервативними, запишемо енергію $\boldsymbol{E}$ у вигляді суми кінетичної та потенціальної енергій:

$$E = E_k\left(v_x, v_y, v_z\right) + E\left(x, y, z\right)$$

і підставимо цей розподіл у формулу (9.1), розділивши у ній члени, що залежать від координат і складових швидкостей:

$$\mathrm{d}\,n_{x,y,z,v_x,v_y,v_z} = A\,e^{-\frac{E_n(x,y,z)}{kT}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z\cdot e^{-\frac{E_k(v_x,v_y,v_z)}{kT}}\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_x\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_y\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_z.$$

Виконаємо інтегрування за усіма швидкостями, тобто візьмемо від цього виразу потрійний інтеграл по v_x, v_y, v_z у межах від $-\infty$ до $+\infty$

$$\mathrm{d}\,n_{x,y,z} = \int\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}\,n_{x,y,z,v_x,v_y,v_z} = A\,e^{-\frac{E_n(x,y,z)}{kT}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z\cdot\int\int_{-\infty}^{\infty}\int e^{-\frac{E_k(v_x,v_y,v_z,)}{kT}}\,\mathrm{d}\,v_x\,\mathrm{d}\,v_y\,\mathrm{d}\,v_z.$$

Потрійний інтеграл правої частини цієї формули не залежить від координат; введемо його у нормуючий множник $\boldsymbol{A}$ і перепишемо результат інтегрування у вигляді:

$$dn_{x,y,z} = A^1 \cdot e^{-\frac{E_n(x,y,z)}{kT}} dx\,dy\,dz, \qquad (9.2)$$

де A^1 – новий нормуючий множник, який дорівнює

$$A^1 = A\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{E_k(v_x,v_y,v_z)}{kT}} dv_x dv_y dv_z,$$

а $dn_{x,y,z}$ означає число частинок, швидкість яких довільна, а координати знаходяться у межах від ***x, y ,z*** до ***x+dx, y+dy, z+dz***. Розподіл, що виражається формулою (9.2), називається розподілом Больцмана. Застосуємо розподіл (9.2) до ансамблю однакових частинок масою *m*, що зважені у рідині, яка знаходиться при температурі ***T***. Будемо вважати, що рідину налито у вертикально витягнуту посудину. Положення частинки у стовпі рідини будемо характеризувати висотою *h*, що відрахована від дна посудини. Початок декартової системи координат *x, y, z* виберемо на дні посудини, вісь *z* направимо вертикально вгору (*z = h*), а осі ***x*** та ***y*** направимо горизонтально, як показано на рис.9.1

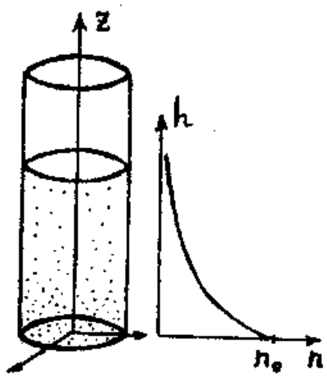


Рис. 9.1

На частинки у рідині діє сила $F = F_т - F_А$, яка дорівнює різниці сили тяжіння $F_T = mg = \rho\tau g$, (ρ –густина частинки, τ - її об'єм, g - прискорення сили тяжіння),та сили Архімеда $F_A = \rho_1\tau g$ (ρ_1 - густина рідини).

Оскільки сила F_A стала, та частинки у полі сили тяжіння мають потенціальну енергію

$$E_П = F \cdot z = \tau(\rho - \rho_1)gh.$$

При цьому розподіл (9.2) набирає вигляду:

$$dn_{x,y,z} = A^1 e^{-\frac{\tau(\rho-\rho_1)gh}{kT}} dx\,dy\,dz. \qquad (9.3)$$

Розподіл Больцмана є справедливим для будь-яких частинок, тому його можна застосувати і для важких частинок. Якщо в якості таких частинок узяти, наприклад, піщинки, то зрозуміло, що вони розмістяться у деякому шарі біля дна посудини. Це є наслідком розподілу Больцмана, тому що при великих масах частинок їхня потенціальна енергія є настільки великою ($E_п >> kT$), що показник експоненти у формулі (9.2) дуже швидко змінюється з висотою, і за межами шару піску функція розподілу (9.2) практично рівна нулю.

Для того, щоб важкі частинки не осідали на дно, а розподілялись в достатньо великому шарі за висотою, необхідно, щоб їх потенціальна енергія була достатньо малою. Цього можна досягти, вміщуючи частинки у рідину, густина якої близька до густини матеріалу частинок. Щоб ефект був добре помітним, частинки повинні бути досить малими.

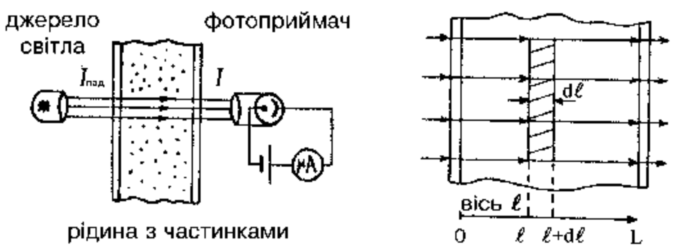
Введемо об'ємну густину частинок n, яка дорівнює кількості частинок в одиниці об'єму, тобто відношенню $\mathrm{d}n_{x,y,z}/\mathrm{d}V$ числа частинок $\mathrm{d}n_{x,y,z}$ в елементарному об'ємі $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ до величини цього об'єму. Тоді Формулу (9.3), після ділення на $\mathrm{d}V$ можна записати у такому вигляді

$$\mathrm{d}\,n\left(h\right) = A^{1}e^{-\frac{\tau(\rho-\rho_1)gh}{kT}}. \tag{9.4}$$

Знайдемо A'. Для цього введемо величину n_0 – густину частинок біля дна посудини. Покладаючи у формулі (9.4) $h = 0$, отримаємо $A^{1} = n_0$. Таким чином, розподіл густини частинок за висотою h остаточно запишеться так:

$$\mathrm{d}\,n\left(h\right) = n_0 e^{-\frac{\tau(\rho-\rho_1)gh}{kT}}. \tag{9.5}$$

Ця формула є безпосереднім наслідком розподілу Больцмана, тому її підтвердження буде означати одночасно і експериментальний доказ розподілу Больцмана. Для такого підтвердження слід скористатися яким-небудь методом визначення густини частинок і дослідити залежність виміряної густини від висоти.



а) **б)**

Рис. 9.2

У даній роботі використовується оптичний метод визначення густини частинок. Суть методу полягає у тому, що інтенсивність світла, яке проходить крізь шар прозорої рідини з непрозорими частинками, за рахунок поглинання та розсіяння частинками виявляється тим меншою, чим більше частинок зустрічає на своєму шляху світло; тому через зменшення інтенсивності світла, що пройшло, можна визначити густину частинок. Оскільки цей метод визначення густини частинок є непрямим (ми безпосередньо визначаємо не саму густину, а пов'язану з нею інтенсивність світла, що пройшло), нам необхідно мати формулу, що пов'язує густину частинок n з інтенсивністю світла I. Для цього звернемося до рис.9.2а. На ньому зображено проходження паралельного пучка світла крізь плоский шар рідини з частинками, розміщений між двома прозорими стінками. При цьому введені позначення: $I_{пад}$ – інтенсивність світла, що падає, I – інтенсивність світла, що пройшло.

Падаюче світло спочатку проходить крізь першу стінку, де його інтенсивність зменшується за рахунок часткового відбивання, можливого розсіювання та деякого поглинання у матеріалі стінки. Позначимо через α_1 відповідний коефіцієнт ослаблення. Тоді інтенсивність світла, що потрапило у рідину, буде дорівнювати $I_1 = \alpha_1 I_{пад}$. Для обчислення коефіцієнта ослаблення світла у рідині уведемо координату l, яку відраховуємо вздовж нормалі від першої стінки до другої (рис.9. 2,б). Розглянемо інтенсивність світла у рідині як функцію координати – $I(l)$. Зрозуміло, що $I(0) = \alpha_1 I_{пад}$. На малому відрізку шляху від l до $l + \mathrm{d}l$ світло розсіюється на частинках, що знаходяться у заштрихованому об'ємі (рис. 9.2,б). Розмір цього об'єму дорівнює $S\,\mathrm{d}l$ (S – площа поперечного перерізу пучка), а число частинок, що у ньому містяться, дорівнює $n \cdot S \cdot \mathrm{d}l$. Це число невелике, тому що $\mathrm{d}l$ є малим. Під час розсіювання світла на одній частинці його інтенсивність I

знижується на деяку малу частку, яку ми позначимо літерою α, тобто інтенсивність розсіяного світла буде рівною $I\alpha$; зрозуміло, що під час розсіювання на $nS\,\mathrm{d}\,l$ частинках, які практично не перекривають одна одну у шарі $\mathrm{d}\,l$ на просвіт (через те, що число цих частинок невелике), сумарна інтенсивність розсіяного світла буде дорівнювати добутку інтенсивності світла, що розсіяне однією частинкою, на число частинок: $I\alpha \cdot nS\,\mathrm{d}\,l$. Ця величина є не що інше, як спад інтенсивності на відрізку $\mathrm{d}\,l$:

$$\mathrm{d}\,I = -I\alpha\, nS\,\mathrm{d}\,l \qquad (9.6)$$

(знак мінус уведено у зв'язку з тим, що I спадає із зростанням l, тобто $\mathrm{d}\,I < 0$, якщо $\mathrm{d}\,l > 0$). Співвідношення (9.6) є диференційним рівнянням у змінних I, l. Ці змінні легко розділити. Для цього поділимо обидві частини співвідношення (9.6) на I:

$$\frac{\mathrm{d}\,I}{I} = -\chi\,\mathrm{d}\,l,$$

де $\chi = \alpha\, nS$.

Інтегруючи обидві частини цієї рівності, отримаємо:

$$\ln I = -\chi l + C,$$

Де C – стала інтегрування. Звідси знаходимо залежність I від l:

$$I(l) = C_1 \cdot e^{-\chi l}, \quad C_1 = e^{C}.$$

З умови $I(0) = \alpha_1 I_{\text{пад}}$ при $l = 0$ знаходимо $C_1 = \alpha_1 I_{\text{пад}}$, звідки

$$I(l) = \alpha_1 I_{\text{пад}} e^{-\chi l}.$$

Ця формула описує експоненціальне ослаблення інтенсивності світла під час його проходження крізь рідину. Скористаємося нею для визначення інтенсивності світла біля внутрішнього краю другої стінки, тобто при $\ell = L$ (L – товща шару рідини):

$$I(L) = \alpha_1 I_{\text{пад}}\, \mathrm{e}^{-\chi L}.$$

Світло повинно пройти також крізь другу стінку; при цьому воно знову втрачає частину своєї інтенсивності. Позначивши відповідний коефіцієнт послаблення через α_2, знайдемо остаточний вираз для інтенсивності світла I що пройшло:

$$I = \alpha_1 \alpha_2 I_{\text{пад}}\, \mathrm{e}^{-\chi L}.$$

Подамо цю формулу у вигляді залежності I від n:

$$I = I_0 e^{-\beta n}, \qquad (9.7)$$

де $I_0 = \alpha_1 \alpha_2 I_{\text{пад}}$, $\beta = \alpha SL$. Фізичний смисл величини I_0 встановити просто: покладаючи у формулі $n = 0$, матимемо $I_0 = I(0)$. Таким чином, I_0 означає інтенсивність світла, що пройшло крізь шар чистої рідини.

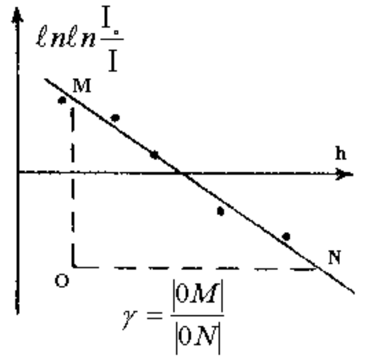


Рис. 9.3

Для вимірювання інтенсивності світла, що пройшло, можна скористатися фотоелектричним приймачем світлового випромінювання, приєднаним до вимірювального приладу, наприклад, до мікроамперметра (див.рис.9.2а). Вважаємо показання приладу i пропорційними інтенсивності світла I. Введемо відповідний коефіцієнт перерахунку a. Тоді $i_0 = \alpha I_0$, $i = aI$ – покази приладу, що відповідають інтенсивностям I_0 та I. Помноживши обидві частини рівності (9.7) на a, отримаємо кінцеву робочу формулу, що пов'язує I та n:

$$i = i_0 e^{-\beta n}, \tag{9.8}$$

Звідси маємо:

$$n = \frac{1}{\beta} \ln \frac{i_0}{i}.$$

Підставивши n у формулу (9.5), отримаємо:

$$\ln \frac{i_0}{i} = \beta n_0 e^{-\frac{\tau(\rho - \rho_1) g h}{kT}}.$$

Цю залежність зручно подати у вигляді, лінійному за h. Для цього прологарифмуємо це співвідношення:

$$\ln \ln \frac{i_0}{i} = \ln \beta n_0 - \frac{\tau(\rho - \rho_1) g h}{kT}. \tag{9.9}$$

Таким чином, графік залежності $\ln \ln (i_0 / i)$ від h (див. рис.9.3) повинен мати вигляд прямої лінії з кутовим коефіцієнтом $\gamma = \frac{\tau(\rho - \rho_1) g}{kT}$. Визначивши γ так, як показано на рис.9.3, можна обчислити сталу Больцмана:

$$k = \frac{\tau(\rho - \rho_1) g}{\gamma T} \tag{9.10}$$

Опис експериментальної установки

Спрощену схему експериментальної установки подано на рис.9.4.

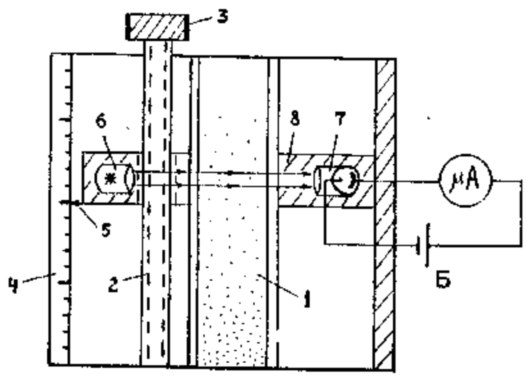


Рис. 9.4

1-посудина з рідиною, в якій зважені дрібні частинки, 2-мікриметричний гвинт, 3-рукоятка обертання мікрометричного гвинта, 4-шкала, 5-показник, 6-освітлювач, 7-фотоприймач, 8-металічна станина, Б-джерело живлення.

Освітлювач і фотоприймач (для спрощення фотоприймач на схемі показаний як фотоелемент) нерухомо закріплені на металічній станині 8. Під час обертання рукоятки 3 мікрометричного гвинта 2 відбувається переміщення станини, завдяки чому можна експериментально вивчати залежність фотоструму I від висоти h. Вимірюється h за шкалою 4 проти покажчика 5. У верхній частині посудини зважених частинок майже немає, що дозволяє визначити i_0, пропорційне інтенсивності світла, що пройшло крізь шар чистої рідини.

Виконання роботи

1. Увімкніть і налагодьте експериментальну установку і виконайте вимірювання відповідно до інструкції, що знаходиться на робочому місці.

2. Результати вимірювань занесіть до таблиці 9.1. Занесіть до протоколу також температуру оточуючого середовища t^o (у ^oC) і параметри установки: густину рідини ρ^1, густину частинок ρ та діаметр частинок d.

Обробка результатів

1. Вирахуйте подвійні натуральні логарифми від i_0/i. Результати занесіть до таблиці 9.1. (i_0 - найбільше значення струму i).
2. За табличними даними на аркуші міліметрового паперу побудуйте графік залежності $\ln\ln\left(i_0/i\right)$ від h, тобто, нанесіть експериментальні точки і проведіть за допомогою лінійки пряму лінію, найбільш близьку до усіх експериментальних точок.
3. Обчисліть кутовий коефіцієнт γ прямої лінії та за формулою (9.10) визначте сталу Больцмана ($T = t^o + 273$, $g = 9,8$ м$/$с^2).
4. Застосуйте формули з Додатка 1 лабораторної роботи 1-7 «Кореляційний аналіз» до експериментальних даних цієї лабораторної роботи та зробіть висновок відносно справедливості розподілу Больцмана.

Таблиця 9. 1.

Висота h, 10^2 м														
i														
i_0/i														
$\ln\ln\left(i_0/i\right)$														

$t\,(^{\circ}C) =$	$\rho_1\,(\text{кг}/\text{м}^3) =$	$d\,(\text{м}) =$	$i_0\,(\text{под}) =$	$k_{\text{експ}} =$
$T\,(\text{К}) =$	$\rho\,(\text{кг}/\text{м}^3) =$	$\tau\,(\text{м}^3) =$	$\gamma\,(\text{м}^{-1}) =$	$k_{\text{теор}} =$

Контрольні запитання

1. Що називається функцією розподілу частинок за координатами і (або) швидкостями? Укажіть розмірність функції розподілу.
2. Запишіть розподіл Больцмана.
3. Виведіть формулу розподілу густини частинок по висоті.
4. Виведіть закон спаду інтенсивності світла в непрозорій рідині.
5. У чому полягає метод визначення густини, що використовується у даній роботі?
6. Яким чином у даній роботі перевіряється розподіл Больцмана?
7. Як за експериментальними даними можна визначити сталу Больцмана?
8. Поясніть, чому для перевірки розподілу Больцмана слід використовувати дрібні частинки, густина яких близька до густини рідини.
9. Виведіть формулу для висоти h, на якій густина частинок спадає на
(а) - 50%; (б) - 95%; (в) - 99,9% у порівнянні з n_0. У випадку (б) розрахуйте масу й розміри частинок піску у воді, поклавши $\rho = 2\rho_1$, необхідні для спостереження стовпа зважених піщинок висотою $h = 10$ см.

Література

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1. “Техніка”, К., 1999.
2. Савельев И.В. Курс общей физики.В 3 т. Т.1. §75,76,77. - М.: Наука,1977.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. §96,97. - М.: Наука,1974.
4. Руководство к лабораторным занятиям по физике /Под ред. Л.Л.Гольдина. - М.: Наука,1973.