

Лабораторна робота ФПЕ-11

ВИВЧЕННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ У КОЛИВАЛЬНОМУ КОНТУРІ

Мета роботи: вивчення резонансу у послідовному колі R, C, L .

Прилади та обладнання (рис.4.1): PQ – звуковий генератор ГЗ-102; РО – електронний осцилограф С1-75; ФПЭ-11 – касета ФПЕ-11; МО – магазин опорів; МЄ – магазин ємностей.

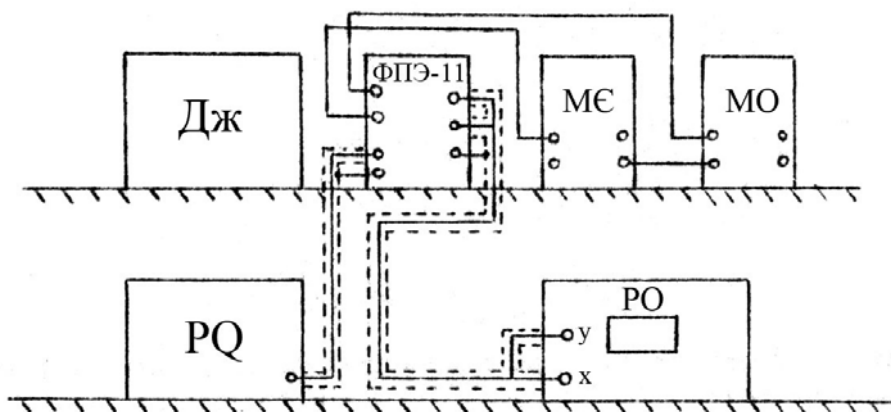


Рис. 4.1. Загальна схема досліду

Теоретичні відомості

Розглянемо процеси, які проходять у послідовному коливальному контурі, приєднаному до джерела, електрорушійна сила якого змінюється з часом за гармонічним законом

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t . \quad (4.1)$$

Введемо такі позначення: U – напруга на конденсаторі ємністю C , U_L – напруга на котушці індуктивності, I – сила струму у контурі. Якщо вважати миттєві значення струмів та напруг однаковими на усіх ділянках кола (квазістаціонарний струм), то струм і напруга в контурі будуть підпорядковані законам, встановленим для сталого струму. За другим правилом Кірхгофа сума напруг на елементах контуру дорівнює ЕРС, що діє в цьому ж контурі (рис. 4.2). Таким чином, можемо записати:

$$U_L + IR + U = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t . \quad (4.2)$$

Напруга на котушці чисельно дорівнює ЕРС самоіндукції

$$U_L = -\mathcal{E}_i = L \frac{dI}{dt}, \quad (4.3)$$

Струм у колі визначає зміну заряду конденсатора, тому

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CU)}{dt} = C \frac{dU}{dt}. \quad (4.4)$$

Підставивши (4.3) в (4.4) в (4.2), отримаємо

$$LC \frac{d^2U}{dt^2} + RC \frac{dU}{dt} + U = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t. \quad (4.5)$$

Розділимо всі частини рівняння LC

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC} U = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t$$

Введемо такі позначення

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad \beta = \frac{R}{2L}.$$

Представимо рівняння (4.5) у канонічній формі

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2\beta \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = \mathcal{E}_0 \omega_0^2 \cos \Omega t. \quad (4.6)$$

Розв'язуючи рівняння (4.6), отримуємо закон зміни напруги на конденсаторі з часом. Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку (4.6) дорівнює сумі повного розв'язку відповідного однорідного рівняння (4.7) та частинного розв'язку неоднорідного рівняння (4.6).

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2\beta \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0. \quad (4.7)$$

За умови, що $\omega_0^2 > \beta^2$ розв'язком рівняння (4.7) є функція

$$U_1 = U_{10} e^{-\beta t} \cos \omega t. \quad (4.8)$$

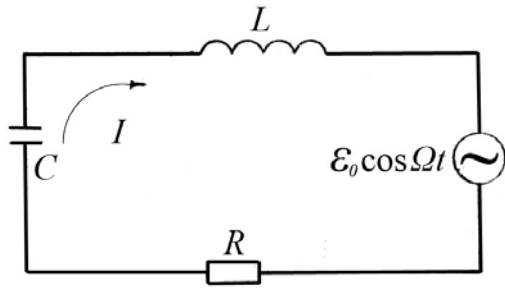


Рис. 4.2. Схема коливального контуру

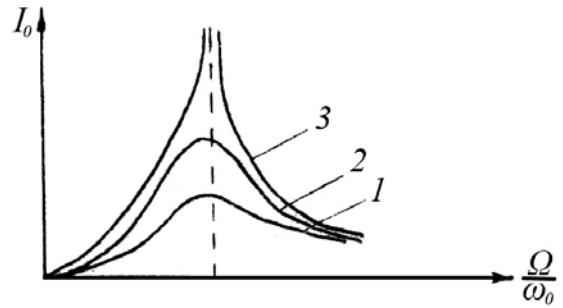


Рис. 4.3. Резонансні криві

Це – рівняння загасаючих коливань (див. лабораторну роботу 3 (ФПЕ-10)). Загасання визначається множником $e^{-\beta t}$. За час $\tau = 1/\beta$, який називають часом релаксації, амплітуда коливань зменшується в e разів. Загасання коливань у контурі зумовлено нагріванням провідників, тобто перетворенням енергії електричного та магнітного полів на теплову (внутрішню) енергію. Складова U_1 визначає перехідний процес при встановленні коливань, Якщо ж $t \gg \tau$, то ця складова в загальному розв'язку зникає. Під дією джерела змінної ЕРС в колі встановлюються коливання з частотою цього джерела, але із зсувом фаз

$$U = U_0 \cos(\Omega t + \varphi). \quad (4.9)$$

Підставляючи (4.9) в (4.6) матимемо

$$U_0 = \frac{\mathcal{E}_0 \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad (4.10)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (4.11)$$

Отже, амплітуда та фаза напруги на конденсаторі, а також амплітуда сили струму в контурі залежать від співвідношення частоти джерела ЕРС Ω та частоти $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

Струм в контурі

$$I = C \frac{dU}{dt} = -\Omega C U_0 \sin(\Omega t + \varphi) = I_0 \cos(\Omega t + \varphi_1),$$

де $\varphi_1 = \varphi + \pi/2$.

Амплітуда сили струму

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0 C \omega_0^2 \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}. \quad (4.12)$$

Графік залежності I_0 від Ω/ω_0 зображено на рис.4.3. З графіка видно, що амплітуда сили струму різко зростає, якщо кутова частота Ω джерела ЕРС наближається до частоти ω_0 . Це явище називається резонансом в електричному колі, а криві – резонансними кривими. Значення максимуму сили струму залежить від β : при $\beta=0$ $I_0 \rightarrow \infty$ (крива 3); при збільшенні β максимальне значення I_0 зменшується (криві 1, 2).

Кут φ_1 визначає різницю фаз коливань сили струму у контурі та зовнішньої ЕРС:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\beta\Omega}. \quad (4.13)$$

Графік залежності φ_1 від частоти Ω зображено на рис. 4.4. Криві 1 та 2 відповідають різним значенням β . При $\Omega = \omega_0$ $\operatorname{tg} \varphi_1 = 0$ і $\varphi_1 = 0$.

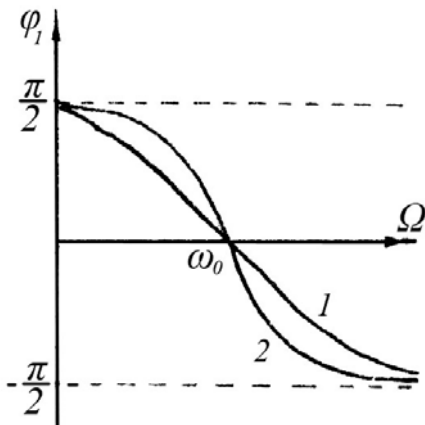


Рис. 4.4. Залежність різниці фаз коливань сили струму в контурі та зовнішньої ЕРС від частоти зовнішньої ЕРС

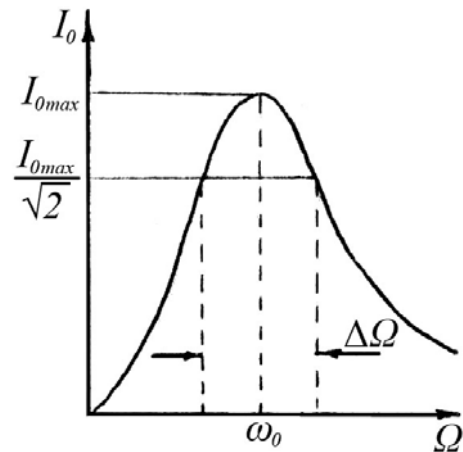


Рис.4.5. Визначення добротності контуру за шириною резонансної кривої.

Величина $Q = \omega/2\beta$ (тут $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклічна частота загасаючих коливань) називається добротністю коливального контуру. Добротність контуру визначається гостротою резонансних кривих. Знайдемо ширину резонансної кривої $\Delta\Omega$ на рівні $I_0 = I_{0\max}/\sqrt{2}$ (рис. 4.5). З формули (4.12) випливає, що максимальне значення сили струму $I_{0\max} = \frac{\mathcal{E}_0 C \omega_0^2}{2\beta}$, а

$$I_0 = \frac{2\beta\Omega I_{0\max}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}. \quad (4.14)$$

За умови $I_0 = I_{0\max}/\sqrt{2}$ формула (4.14) матиме вигляд:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\beta\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}. \quad (4.15)$$

Вираз (4.15) можна перетворити таким чином

$$2\beta\Omega = \omega_0^2 - \Omega^2,$$

або $2\beta\Omega = (\omega_0 - \Omega)(\omega_0 + \Omega)$. Величина $\omega_0 - \Omega = \Delta\Omega/2$, а поблизу резонансу $\omega_0 \approx \Omega$. Після підстановки отримаємо, що $\Delta\Omega = 2\beta$.

$$\frac{\Delta\Omega}{\omega_0} = \frac{2\beta}{\omega_0} \approx \frac{1}{Q}. \quad (4.16)$$

За умов малого загасання виконуються співвідношення $\beta \ll \omega_0$ і $\omega \approx \omega_0$, а відносна ширина резонансної кривої чисельно дорівнює величині, яка обернено пропорційна добротності контуру. Якщо відомі параметри коливального контуру, то добротність може бути розрахована за формулою

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.16a)$$

Принципова електрична схема експериментальної установки показана на рис.4.6.

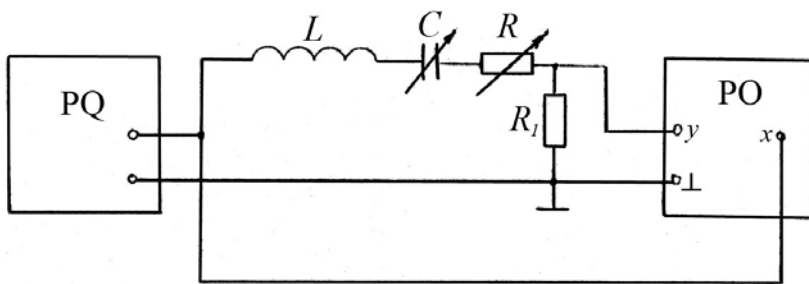


Рис. 4.6. Принципова електрична схема експериментальної установки

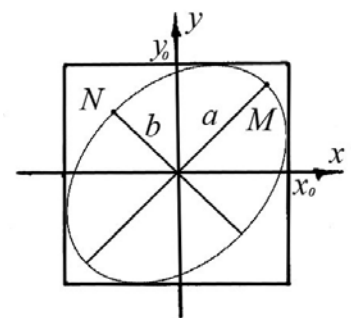


Рис. 4.7. Фігура Ліссажу

Коливальний контур складається з котушки L , магазину ємностей C , змінного резистора R та резистора R_1 . Напряга на резисторі R_1 , яка пропорційна силі струму у контурі, подається на вхід "Y" електронного осцилографа, а сигнал звукового генератора – на вхід "X". Для зняття резонансних кривих, змінюючи

частоту звукового генератора PQ , вимірюють залежність сили струму в контурі від частоти генератора $I_0 = f(\Omega)$ при різних значеннях опору резистора R .

Для вимірювання зсуву фаз φ використовують фігури Ліссажу, які отримують на екрані осцилографа. Нехай є дві синусоїдні напруги однакової частоти Ω . Якщо їх подати на вертикальні і горизонтальні відхиляючі пластини осцилографа, то відбудуться відповідні зміщення електронного променя на екрані:

$$\begin{array}{ll} \text{по горизонталі} & x = x_0 \cos \Omega t, \\ \text{по вертикалі} & y = y_0 \cos(\Omega t + \varphi), \end{array}$$

де φ – зсув фаз між напругами; x_0 та y_0 – амплітуди зміщення променя, які пропорційні амплітудам напруги та коефіцієнтам підсилення відповідних каналів осцилографа. Виключивши час з двох останніх рівнянь, отримаємо

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (4.17)$$

Вираз (4.17) є рівнянням еліпса, який описується електронним променем на екрані осцилографа. Якщо коефіцієнти підсилення підібрати так, щоб задовольнялася рівність $x_0 = y_0$, то рівняння (4.17) набуде вигляду

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi = x_0^2 \sin^2 \varphi. \quad (4.18)$$

Формула (4.18) – рівняння еліпса, осі якого утворюють кути $\pi/4$ з осями координат. При $\varphi = 0$ еліпс вироджується в пряму $y = x$, а при $\varphi = \pi/2$ – в коло радіуса $x_0 = y_0$. Для точки M еліпса (рис.4.7) $y = x$, відповідно $a^2 = x^2 + y^2 = 2x^2$, отже рівняння (4.18) для цієї точки матиме вигляд:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x^2 \cos \varphi &= x_0^2 \sin^2 \varphi, \\ 2x^2(1 - \cos \varphi) &= x_0^2 \sin^2 \varphi, \\ 2a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} &= 4x_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Звідки

$$a^2 = 2x_0^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (4.19)$$

Аналогічно для точки N еліпса, де $y = -x$ (рис. 4.7), можна одержати

$$b^2 = 2x_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (4.20)$$

З виразів (4.19) та (4.20) маємо

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a}. \quad (4.21)$$

Таким чином, для визначення зсуву фаз між напругами однакої частоти достатньо виміряти півосі еліпса a та b на екрані осцилографа. Зсув фаз φ може бути розрахований за формулою (4.18).

Для отримання фігур Ліссажу на вхід "Y" осцилографа подається напруга з резистора R_1 , яка пропорційна силі струму, а на вхід "X" – напруга зі звукового генератора. В результаті вимірювань та розрахунків за формулою (4.21) отримуємо кут φ_1 – зсув фаз між струмом у контурі та зовнішньою ЕРС.

Порядок виконання роботи

Перевірити електричну схему дослідної установки, показану на рис.4.8.

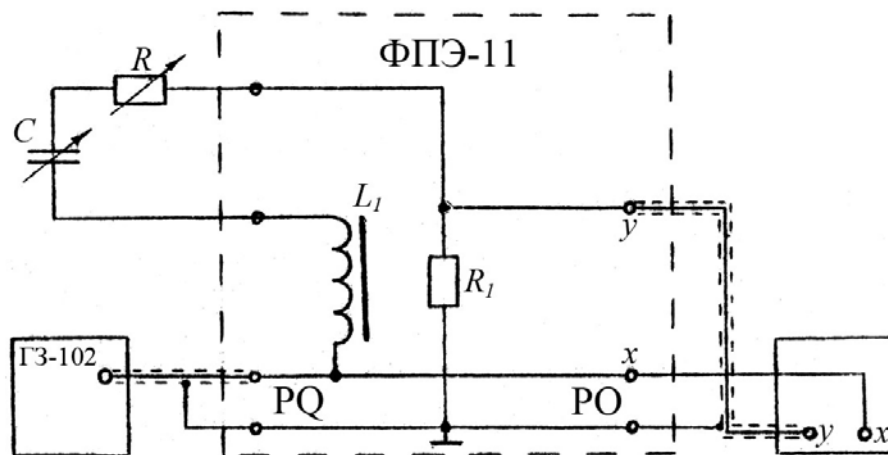


Рис.4.8. Електрична схема експериментальної установки

R і C – магазини опорів та ємностей, зібрані в окремих касетах лабораторного стенду, ФПЭ-11 – касета для вивчення вимушених коливань в коливальному контурі, ГЗ-102 – звуковий генератор, PQ – осциллограф С1-72.

Завдання 1. Зняття резонансних кривих.

1. Встановити на магазині ємностей C ємність $C = 3 \cdot 10^{-3} \text{ мкФ}$, а на магазині опорів R опір $R = 1 \text{ Ом}$.

2. Увімкнути лабораторний стенд і прилади. Подати зі звукового генератора сигнал частотою 10 кГц на вхід "Y" осцилографа. На екрані осцилографа повинне з'явитися зображення синусоїди. Ручками "Яркость", "Фокус" та "Синхронизация" добитися стійкого зображення.

3. Плавню змінюючи частоту генератора знайти частоту $f_{\text{рез}}$, за якої амплітуда синусоїди максимальна (резонансна частота). Приблизне значення резонансної

частоти можна оцінити за формулою $f_{рез} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, використавши значення індуктивності $L = 100 \text{ мГн}$.

4. Обертаючи ручки “Усиление” на передній панелі осцилографа досягти того, щоб синусоїда при частоті $f_{рез}$ займала весь екран.

5. Встановити частоту сигналу генератора 2 кГц . Виміряти амплітуду A синусоїди в поділках шкали. Занести в табл. 1 значення частоти генератора (2 кГц), відповідну амплітуду A та значення коефіцієнта підсилення K_y у $V/под$.

6. Виміряти амплітуди синусоїди при інших значеннях частот у діапазоні від 2 до 16 кГц . Частоту змінювати з інтервалом $1-2 \text{ кГц}$, а поблизу резонансу з інтервалом $0,2 \text{ кГц}$. Результати занести в табл. 1.

Таблиця 1

$R = 10 \text{ Ом}$	$f, \text{ кГц}$																
	$A, \text{ дел}$																
	$K_y, \text{ В/дел}$																
	$I_0, \text{ мА}$																
$R = 500 \text{ Ом}$	$f, \text{ кГц}$																
	$A, \text{ дел}$																
	$K_y, \text{ В/дел}$																
	$I_0, \text{ мА}$																
$R = 3000 \text{ Ом}$	$F, \text{ кГц}$																
	$A, \text{ дел}$																
	$K_y, \text{ В/дел}$																
	$I_0, \text{ мА}$																

7. Розрахувати і занести в табл. 1 амплітуди струму I_0 в контурі, розрахувавши їх за формулою

$$I_0 = \frac{A \cdot K_y}{R_1}$$

де $R_1 = 100 \text{ Ом}$.

8. Встановити значення опору магазину $R = 500 \text{ Ом}$. Провести вимірювання згідно пп.5 – 7. Результати занести у табл.1.

9. Встановити значення опору магазину $R = 3000 \text{ Ом}$. Провести вимірювання згідно пп. 5 – 7. Результати занести у табл.1.

10. Побудувати на одному графіку залежності I_0 від частоти f для трьох значень опору R .

11. За графіками $R = 10\text{ Ом}$ $R = 500\text{ Ом}$ визначити ширину резонансної кривої Δf на рівні $I_0 = I_{0\text{max}}/\sqrt{2}$ (див. рис. 4.5) та обчислити добротність контуру за формулою

$$Q = \frac{f_{\text{рез}}}{\Delta f}.$$

Завдання 2. Визначення залежності резонансної частоти $f_{\text{рез}}$ від ємності C .

1. Встановити ємність $C = 1 \cdot 10^{-3} \text{ мкФ}$ та опір $R = 10\text{ Ом}$.

Перемикач “Разветка” на правій панелі осцилографа перевести в положення “X”. На екрані осцилографа повинен спостерігатися еліпс.

2. Змінюючи частоту звукового генератора досягти перетворення еліпса на пряму, розташовану приблизно під кутом 45° до осі X. За необхідності змінити K_y . При цьому частота генератора Ω дорівнює резонансній частоті $f_{\text{рез}}$. Значення C та $f_{\text{рез}}$ занести до табл.2.

3. Виміряти $f_{\text{рез}}$ згідно з п.2 для інших значень ємності C від $1 \cdot 10^{-3}$ до $1 \cdot 10^{-2} \text{ мкФ}$ з інтервалом $1 \cdot 10^{-3} \text{ мкФ}$. Результати занести в табл. 2.

4. Обчислити значення величини $Z = 1/(2\pi f_{\text{рез}})^2$. Побудувати графік залежності величини Z від C , який повинен мати вигляд прямої, що проходить через початок координат.

Будуючи графік треба мати на увазі наступне: точність значення ємності, яка встановлюється на магазині ємностей, складає 5%. Тому на графіку треба зобразити межі, у яких може лежати значення C , як це показано на рис. 4.9. При цьому істинна залежність $Z(C)$ повинна лежати між прямими 1 і 2, перша з яких (пряма 1) не виходить за нижні межі значень, а друга (пряма 2) – за верхні межі значень. Побудуйте обидві ці прямі.

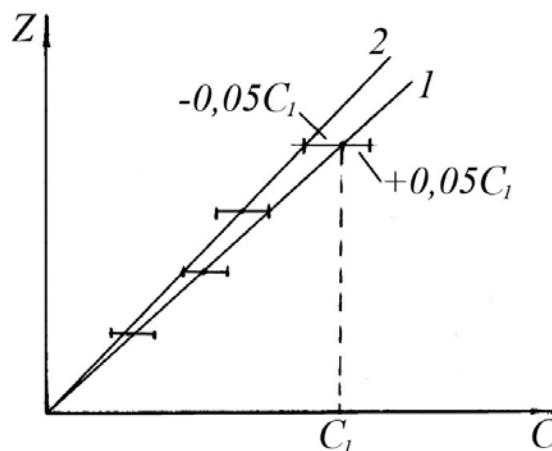


Рис. 4.9. Залежність величини Z від ємності C .

5. Розрахувати значення індуктивності котушки як тангенс кута нахилу прямих на графіку $Z(C)$:

$$L = \frac{\Delta Z}{\Delta C}; \quad L_{cp} = \frac{L_1 + L_2}{2}.$$

де L_1 та L_2 визначаються відповідно за прямими 1 та 2.

Оцінити похибку визначення L :

$$\delta = \frac{\Delta L}{L_{cp}} = \frac{L_2 - L_{cp}}{L_{cp}}$$

Таблиця 2

$C \cdot 10^{-9} \Phi$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_{рез}, кГц$										
$Z \cdot 10^{-10}$										

Контрольні запитання

1. Як виводиться рівняння сталих вимушених коливань у контурі?
2. Вивести формулу залежності амплітуди сили струму у коливальному контурі від частоти зовнішньої ЕРС.
3. Вивести формулу для розрахунку кута зсуву фаз за допомогою фігур Ліссажу.
4. Що називається резонансом?
5. Що таке добротність коливального контуру ?
6. Показати, що резонанс струмів настає за частоти зовнішньої ЕРС $\Omega = \omega_0$.

Література

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. В 3 т. Т.2. Електрика і магнетизм. К.: Техніка. 2001 р.
2. Савельев І.В. Курс общей фізики. -М.: Высш.шк.,1989. -Т.2.
3. Лабораторные занятия по физике / Под ред. Л.Л. Гольдина. - М.:Наука,1973.
4. Сивухин Д.В. Общий курс фізики. – М.: Наука, 1977.-Т.3.