Теорія похибок і обробка результатів вимірювань у фізичній лабораторії

У повсякденному житті, на виробництві, у фізичній лабораторії ми часто виконуємо ті, чи інші вимірювання. У цьому розділі наведені деякі уявлення теорії вимірювань. Для більш повного викладу студенти повинні знати теорію ймовірностей, математичну статистику та деякі інші розділи математики, які студенти першого курсу ще не знають. Тому нижче даються тільки основні уявлення про похибки вимірювань і наводяться методи обчислення тих з них, які найчастіше зустрічаються на практиці. Для більш знайомства з теорією похибок слід звернутися до спеціальної літератури.

1. Вимірювання фізичних величин

Вимірюванням називають послідовність експериментальних операцій для знаходження фізичної величини, що характеризує об'єкт чи явище. Виміряти – значить порівняти вимірювану величину з іншою, однорідною з нею величиною, прийнятою за еталон.

Завершується вимірювання визначенням ступеня наближення знайденого значення до істинного або до істинного середнього. Істинним середнім характеризуються величини, що носять статистичний характер, наприклад, середній зріст людини, середня енергія молекул газу тощо. Такі ж параметри, як маса тіла або його об'єм, характеризуються істинним значенням. У цьому випадку можна говорити про ступінь наближення знайденого середнього значення фізичної величини до її істинного значення.

Виміри можуть бути як прямими, коли шукану величину знаходять безпосередньо за дослідними даними, так і непрямими, коли остаточну відповідь на запитання знаходять через відомі залежності між фізичною величиною, що нас цікавить, і величинами, які можна отримати експериментально за допомогою прямих вимірювань.

2. Похибки вимірювань

Недосконалість вимірювальних приладів і органів чуття людини, а часто – і природа самої вимірюваної величини призводять до того, що результат при будь-яких вимірах отримують з певною точністю, тобто експеримент дає не істинне значення вимірюваної величини, а наближене.

Точність вимірювання визначається близькістю цього результату до істинного значення вимірюваної величини або до істинного середнього. Кількісною мірою точності вимірювання є похибка. Загалом вказують абсолютну похибку вимірювання.

Абсолютною похибкою даного вимірювання x називається різниця між її виміряним значенням x_i та істинним значенням цієї величини:

$$\Delta x_1 = x_1 - x.$$

У досліді істинне значення вимірюваної величини x невідомо наперед, тому абсолютну похибку відносять до середнього значення $\langle x \rangle$ і знаходять за формулою:

$$\Delta x_1 = x_1 - \langle x \rangle.$$

Абсолютна похибка Δx_1 має ту саму розмірність, що і вимірювана величина *x*. Вона може бути як додатною, так і від'ємною.

Мірою відносного відхилення знайденого значення фізичної величини від істинного (або ж середнього) значення є відносна похибка. Її визначають як модуль відношення абсолютної похибки до істинного значення вимірюваної величини

$$\delta = \left|\frac{\Delta x}{x}\right|. \qquad (1)$$

Відносна похибка – величина безрозмірна, яка виражається у відсотках або в частках одиниці. Зі співвідношення (1) виходить, що $|\Delta x| = \delta \cdot |x|$.

3. Основні типи похибок вимірювань

1. **Грубі похибки (промахи)** виникають в результаті недбалості або неуважності експериментатора. Наприклад, відлік вимірюваної величини випадково проведено без необхідних приладів, невірно прочитана цифра на шкалі тощо. Цих похибок легко уникнути.

2. **Випадкові похибки** виникають через різні причини, дія яких різна в кожному з дослідів, вони не можуть бути передбачені заздалегідь. Ці похибки підкоряються статистичним закономірностям і вираховуються за допомогою методів математичної статистики.

3. **Систематичні похибки** з'являються внаслідок хибного методу вимірювання, несправності приладів тощо $-\sigma_{\text{метод}}$. Один з видів систематичних похибок – похибки приладів, що визначають точність вимірювання приладів – $\sigma_{\text{прил}}$. При зчитуванні результату вимірювань є неминучим округлення, яке пов'язане з ціною поділки і, відповідно, точністю приладу. Це призводить до появи похибки округлення - $\sigma_{\text{окр}}$. Цих видів похибок неможливо уникнути і вони повинні бути враховані поряд із випадковими похибками.

У запропонованих методичних вказівках наведено кінцеві формули теорії похибок, необхідні для математичної обробки результатів вимірювань.

4. Визначення інтервалу довіри для прямих вимірів

Розглянемо правила обробки результатів вимірювань за наявності лише випадкових похибок.

Нехай у фізичному експерименті проводять *n* прямих вимірів деякої величини *x* і дістають значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Сукупність цих значень називається вибіркою з нескінченно великого ряду значень, котрі могла б прийняти випадкова величина *x*. При великому числі вимірів ближче усього до істинного значення величини *x* лежить середнє арифметичне результатів вимірювання $\langle x \rangle$, яке обчислюється за формулою:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{2}$$

У теорії його називається ***<u>вибірковим середнім</u>***.

Відхилення окремих значень $x_1, x_2, ..., x_n$ від вибіркового середнього $\langle x \rangle$ називаються абсолютними похибками результатів окремих вимірювань:

$$\Delta x_1 = x_1 - \langle x \rangle;$$
$$\Delta x_2 = x_2 - \langle x \rangle;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta x_n = x_n - \langle x \rangle.$$

Для оцінки відхилення вибіркового середнього $\langle x \rangle$ від істинного значення вимірюваної величини вводиться середня квадратична похибка середнього $S_{\langle x \rangle}$, яка обчислюється за формулою:

$$S_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^{\,2}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \langle x \rangle \right)^2}. \tag{3}$$

З цієї формули видно, що точність знаходження середнього значення можна підвищити, збільшуючи число n, оскільки $S_{\langle x \rangle}$ зменшується, взагалі, зі зростанням n. Однак необхідно врахувати, що коли $S_{\langle x \rangle}$ стане меншим за сумарну систематичну похибку, подальше збільшення n не призведе до підвищення точності результату. В такому випадку точність вимірювань буде визначатися систематичними похибками. Тому на практиці число n невелике – від 3 до 10.

Із скінченого числа вимірювань неможливо точно знайти істинне (або теоретичне середнє) значення вимірюваної величини x. Завдання вимірювання – оцінити величину x, тобто вказати інтервал значень, до якого із заданою ймовірністю довіри α (іноді використовують іншу назву α – коефіцієнт надійності) потрапляє вимірювана величина x.

Позначимо через β_1 і β_2 межі інтервалу, що визначаються таким чином:

$$\beta_1 = \langle x \rangle - \Delta x_{\text{вип}},$$
$$\beta_2 = \langle x \rangle + \Delta x_{\text{вип}}, \tag{4}$$

де $\Delta x_{\text{вип}} = \Delta x_{\text{випадкове}}$; $\Delta x_{\text{вип}}$ – напівширина інтервалу довіри :

$$\Delta x_{\text{вип.}} = t_{\alpha,n} \cdot S_{\langle x \rangle}, \tag{5}$$

де $t_{\alpha,n}$ – коефіцієнт Стьюдента, який залежить від імовірності довіри α та числа вимірів n (табл. 1).

Запис

$$\beta_1 \le x \le \beta_2 \tag{6}$$

означає, що шукана величина x буде знаходитись з імовірністю α (наприклад, $\alpha = 0{,}8$ або 80%) в інтервалі значень від β_1 до β_2. Ширина цього інтервалу – $2\Delta x_{\text{вим}}$ (див. рис.1).

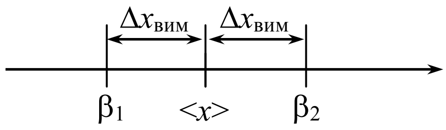

Рис. 1

Якщо використати (4) – (6), то можна записати:

$$\langle x \rangle - t_{\alpha,n} \cdot S_{\langle x \rangle} \le x \le \langle x \rangle + t_{\alpha,n} \cdot S_{\langle x \rangle},$$

або з імовірністю α

$$x = \langle x \rangle \pm t_{\alpha,n} \cdot S_{\langle x \rangle}. \qquad (7)$$

Формула (7) є ***кінцевою формулою запису результату*** при проведенні прямих вимірювань за умови переважання випадкових похибок над систематичними.

Таблиця 1

udgtso 'tedz, нtso 'teq[α	**Кількість вимірів *n***													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40	60	100
0,8		3,08	1,89	2,35	1,53	1,48	1,44	1,42	1,40	1,38	1,33	1,30	1,30	1,29
0,9		6,31	2,92	2,35	2,13	2,02	1,94	1,89	1,86	1,73	1,73	1,68	1,67	1,66
0,95		12,7	4,30	3,19	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,09	2,02	2,00	1,98

Розглянемо приклад розрахунку напівширини інтервалу довіри за заданим коефіцієнтом надійності α.

Нехай вимірювання деякого проміжку часу τ повторено три рази (*n* = 3). Розрахована за формулою (3) похибка середнього виявилась рівною $S_{\langle\tau\rangle} = 0{,}1\,\text{c}$, а середнє значення $\langle\tau\rangle = 2{,}3\,\text{c}$. Якою повинна бути напівширина інтервалу довіри $\Delta\tau$, щоб коефіцієнт надійності $\alpha = 0{,}8$? У табл.1 на перетині стовпчика *n* = 3 і рядка $\alpha = 0{,}8$ знаходимо значення коефіцієнта Стьюдента $t_{\alpha,n} = t_{0{,}8;3} = 1{,}89$. Остаточна відповідь:

$$\Delta\tau = t_{\alpha,n} \cdot S_{\langle\tau\rangle} = (1{,}89 \times 0{,}1)\ \text{c}.$$

5. Розрахунок середньої квадратичної похибки при непрямих вимірюваннях

Припустимо, що у фізичному експерименті шукану величину знаходять непрямим шляхом, тобто використовують певну функціональну залежність

$$y = f(a, b, c) \tag{8}$$

яка називається розрахунковою або робочою формулою. (Наприклад, при вирахуванні густини речовини за відомою масою та об'ємом робоча формула має вигляд $\rho = m/V$).

Похибка у вимірюванні "*y*" залежить від похибок, допущених у прямих вимірюваннях величин *a, b, c*… Передбачаючи, що похибки *a, b, c* … за абсолютним значенням значно менші ніж самі величини, можна на підставі (8) отримати за допомогою диференціального числення вираз для ***середньої квадратичної похибки вимірювання величини*** "*y*":

$$S_{\langle y\rangle} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a} \Bigg/ \begin{matrix} a = \langle a\rangle \\ b = \langle b\rangle \\ \ldots \end{matrix} \right)^2 S_{\langle a\rangle}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \Bigg/ \begin{matrix} a = \langle a\rangle \\ b = \langle b\rangle \\ \ldots \end{matrix} \right)^2 S_{\langle b\rangle}^2 + \ldots} \tag{9}$$

Отже, для розрахунку середньої квадратичної похибки вимірювання величини "*y*" необхідно вирахувати частинні похідні, враховуючи функціональну залежність від безпосередньо вимірюваних величин.

Послідовність розрахунку шуканої величини "*y*"при непрямих вимірюваннях

1. Виміряти незалежні величини *a, b, c*... , що входять до робочої формули (8), і визначити вибіркові середні значення величин $\langle a\rangle, \langle b\rangle, \langle c\rangle, \ldots$. Підставивши ці значення у формулу (8), визначити вибіркове середнє значення величини "*y*" :

$$\langle y\rangle = f(\langle a\rangle, \langle b\rangle, \langle c\rangle \ldots)$$

2. За формулою (3) обчислити середні квадратичні похибки $S_{\langle a\rangle}, S_{\langle b\rangle}, S_{\langle c\rangle} \ldots$ і використати їх для визначення $S_{\langle y\rangle}$ за формулою (9).

3. Як і для прямих вимірів, кінцевий результат записується у вигляді, аналогічному (7) :

$$y = \langle y\rangle \pm t_{\alpha,n} S_{\langle y\rangle} \quad \text{з імовірністю } \alpha.$$

Коефіцієнт Стьюдента для даного числа вимірів *n* і заданої ймовірності довіри α знаходимо за табл. 1.

6. Оцінка систематичної похибки

Сумарну систематичну похибку σ_Σ (сумарне стандартне відхилення) обчислюють за формулою

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{\sigma_{\text{прил.}}^2 + \sigma_{\text{окр.}}^2 + \sigma_{\text{метод.}}^2 + \sigma_{\text{суб.}}^2 + \ldots} \tag{10}$$

Похибка $\sigma_{\text{прил.}} = \dfrac{\Delta}{3}$, де Δ - максимальна похибка, вказана у паспорті приладу. Для електровимірювальних приладів $\Delta = r \cdot A_m \cdot 10^{-2}$, де r – клас точності приладу, A_m – номінальне значення вимірюваної величини ("розмах шкали"). Максимальну похибку Δ можна також оцінити за ціною поділки δ шкали приладу $\Delta = \dfrac{1}{2}\delta$ або остаточно $\sigma_{\text{прил.}} = \delta/6$. Для приладів із цифровим табло Δ дорівнює половині одиниці найменшого розряду. Похибка зчитування зі шкали $\sigma_{\text{окр.}} = \dfrac{\delta}{\sqrt{12}}$.

Окрім $\sigma_{\text{прил.}}$ та $\sigma_{\text{окр.}}$, до σ_{Σ} входить також похибка методики $\sigma_{\text{метод.}}$ та інші. У виразі (10) можна знехтувати тими складовими, значення яких не перевищує 30 % максимальної з похибок.

Якщо проаналізувати питання про $\sigma_{\text{прил.}}$, $\sigma_{\text{окр.}}$ і $\sigma_{\text{метод.}}$, то виявиться, що останньою з них можна знехтувати, оскільки в навчальній лабораторії, як правило, використовуються добре відпрацьовані методики, які дають малі $\sigma_{\text{метод.}}$. Оскільки $\sigma_{\text{прил.}}$ менша ніж $\sigma_{\text{окр.}}$, то для оцінки сумарного стандартного відхилення використовують $\sigma_{\text{окр.}}$:

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma_{\text{окр.}} = \frac{\delta}{\sqrt{12}}. \tag{11}$$

Сумарне стандартне відхилення $\sigma_{\langle y\rangle\Sigma}$ непрямих вимірів величини "*y*" розраховується за формулою, аналогічною (8):

$$\sigma_{\langle y\rangle\Sigma} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a} \Bigg/ \begin{matrix} a = \langle a\rangle \\ b = \langle b\rangle \\ \dots \end{matrix} \right)^2 \sigma^2_{\langle a\rangle\Sigma} + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \Bigg/ \begin{matrix} a = \langle a\rangle \\ b = \langle b\rangle \\ \dots \end{matrix} \right)^2 \sigma^2_{\langle b\rangle\Sigma} + \dots} \tag{12}$$

Якщо у формулах присутні табличні величини, похибки округлення табличної величини обчислюється як $\sigma_{\text{табл.}} = \dfrac{m}{\sqrt{12}}$, де m – одиниця розряду, до якого проводиться округлення.

Приклад: число $\pi = 3{,}14\dots$, $\langle \pi \rangle = 3{,}14$; m = 0,01; $\sigma_{\langle\pi\rangle} = \dfrac{0{,}01}{\sqrt{12}}$.

7. Зіставлення систематичної та випадкової похибок

Зіставляючи систематичні та випадкові похибки, врахуємо три можливих випадки.

1. Нехай виконується умова

$$S_{\langle x\rangle} > 3\sigma_{\Sigma}. \qquad (13)$$

Тоді можна знехтувати систематичною похибкою. Кінцевий результат запишеться у вигляді (7).

2. Нехай виконується умова

$$\sigma_{\Sigma} > 3S_{\langle x\rangle}. \qquad (14)$$

У цьому випадку можна знехтувати випадковою похибкою, і кінцевий результат записати у вигляді: $x = \langle x\rangle \pm \Delta x_{сист.}$ з імовірністю α. Тут $\Delta x_{сист}$ (Δx систематичне – напівширина інтервалу довіри) визначається так: $\Delta x_{сист.} = \gamma_{\alpha} \cdot \sigma_{\Sigma}$, де γ_{α} – коефіцієнти Чебишева. Ці коефіцієнти залежать від імовірності α, з якою істинне значення шуканої фізичної величини потрапляє до інтервалу довіри з напівшириною $\Delta x_{сист}$.

Величина γ_{α} для різних значень α має такі значення:

$\gamma_{\alpha}=1{,}8$ при $\alpha = 0{,}7$; $\gamma_{\alpha}=2{,}2$ при $\alpha = 0{,}8$; $\gamma_{\alpha}=3{,}2$ при $\alpha = 0{,}9$.

3. Нехай $\sigma_{\Sigma} \approx S_{\langle x\rangle}$; у цьому випадку результат вимірювань записується у формі:

$x = \langle x\rangle$, $\Delta x_{сист} =$ (число), з імовірністю $\alpha =$ (число).

$S_{\langle x\rangle} =$ (число), *n*=(число).

Інтервал довіри для випадкової похибки при цьому не визначають.

8. Обговорення результатів вимірювань

Припустимо, що дослід завершено, знайдено $\langle x\rangle$, розраховані систематичні і випадкові похибки, визначена напівширина інтервалу довіри для заданого коефіцієнта надійності α. Однак отриманий результат сумнівний.

Приклад. Визначили дослідним шляхом прискорення вільного падіння g. Отримали результат $|g| = \langle g\rangle \pm \Delta x_{сист} = (11{,}2 \pm 0{,}8)\ м/с^2$, вважаючи $\alpha = 0{,}99$. Бачимо, що відоме для даної місцевості значення $|g|$ ($|g|$= 9,8 м/с^2) не потрапляє до вирахуваного інтервалу довіри. Такий результат міг бути отриманий внаслідок значної систематичної похибки, що вносить експериментатор – $\sigma_{суб}$, або була запропонована невірна методика визначення $|g|$ (велика $\sigma_{метод}$), що призвела до невірної оцінки напівширини інтервалу довіри $\Delta x_{сист.}$. Питання про усунення чи зменшення систематичних похибок різного роду є досить складним, тому у кожному випадку розв’язується окремо.