

СБОРНИК
ЗАДАЧ
ПО
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКЕ

Допущено
Министерством высшего
и среднего специального
образования СССР
в качестве
учебного пособия
для студентов
физических специальностей
высших учебных
заведений



Издательство
«Высшая школа»
Москва — 1972

С23 Сборник задач по теоретической физике. Учебн. пособие для вузов. М., «Выш. школа», 1972.

336 стр. с илл.

На обороте тит. л. авт.: Л. Г. Гречко, В. И. Сугаков, О. Ф. Томасевич, А. М. Федорченко.

В «Сборнике задач по теоретической физике» представлены задачи по курсу теоретической физики: классической механике, электродинамике, нерелятивистской квантовой механике, статистической физике и термодинамике.

Каждому разделу этого сборника предшествует краткое изложение основных законов и соотношений, используемых для решения содержащихся в нем задач, а также сведения о необходимом математическом аппарате. В конце сборника приведены ответы и указаны методы решения более сложных задач. Задачи даны в Международной системе единиц СИ.

Сборник рассчитан на студентов физических факультетов университетов, а также студентов физических специальностей высших учебных заведений. Ряд задач предназначен для студентов, специализирующихся по теоретической физике. Некоторые задачи могут быть использованы студентами физико-математических факультетов педагогических институтов.

530.1

2—3—2

54—72

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

кафедра теоретической физики ЛГУ
(зав. отделом теоретической физики академик В. А. Фок);
доц. кафедры теоретической физики
МОПИ им. Н. К. Крупской А. А. СЕНКЕВИЧ

Л. Г. ГРЕЧКО, В. И. СУГАКОВ,
О. Ф. ТОМАСЕВИЧ, А. М. ФЕДОРЧЕНКО
Научный редактор А. А. СЕНКЕВИЧ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В «Сборнике задач по теоретической физике» собраны задачи, значительная часть которых предлагалась в течение ряда лет на практических занятиях, проводимых по курсам классической механики, электродинамики, квантовой механики и статистической физики в Киевском ордена Ленина государственном университете им. Т. Г. Шевченко. Содержание пособия соответствует программе этих курсов для университетов, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования СССР.

При составлении этого сборника был в основном использован «Курс теоретической физики» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, а также другие учебники и учебные пособия, рекомендованные программой по курсу теоретической физики для университетов. Некоторые задачи были взяты из уже опубликованных сборников задач, список которых приведен в конце книги, но многие задачи являются оригинальными.

Авторы отмечают, что решение приводимых в сборнике задач предполагает твердое знание основ курса теоретической физики, которые кратко изложены в каждом разделе данного пособия. Задачи даны в Международной системе единиц СИ.

Авторы отдают отчет в том, что первому изданию этого сборника присущи некоторые недостатки, а поэтому заранее благодарят тех лиц, которые своими предложениями и заме-

чаниями будут способствовать его улучшению.

Раздел задач по классической механике составлен А. М. Федорченко, по электродинамике—В. И. Сугаковым, по статистической физике и термодинамике—Л. Г. Гречко, по квантовой механике—О. Ф. Томасевич.

Авторы

РАЗДЕЛ I

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

§ 1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ, ФОРМУЛЫ И ПОНЯТИЯ

Механика систем с конечным числом степеней свободы. Под частицей в механике понимается материальное тело, обладающее массой m , положение которого в пространстве можно описать тремя координатами.

Механическое состояние системы n частиц характеризуется заданием $3n$ координат и их производных по времени. Закон изменения состояния механической системы со временем определяется уравнениями Ньютона:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где \mathbf{F}_i — равнодействующая всех сил, действующих на i -ю частицу, включающая как внутренние (силы, источником которых являются частицы системы), так и внешние силы (силы, источник которых не включен в систему и величина которых в любой момент времени считается заданной).

Уравнения (1) с точки зрения математики представляют собой систему $3n$ дифференциальных уравнений. Поэтому основная задача механики сводится к решению системы (1). Как известно из теории дифференциальных уравнений, для отыскания однозначного решения системы (1) необходимо задать $6n$ величин ($\mathbf{r}_i^0, \dot{\mathbf{r}}_i^0$) в некоторый момент времени. Другими словами, механическое состояние произвольной системы в любой последующий момент времени определяется начальным механическим состоянием ($\mathbf{r}_i^0, \dot{\mathbf{r}}_i^0$) и силами, которые действуют на каждую частицу системы.

Уравнения (1) справедливы только в инерциальных системах координат. Под инерциальными системами координат понимают такие системы координат, в которых любая частица, на которую не действуют силы, т. е. изолированная частица, удаленная от других частиц, движется равномерно и прямолинейно. Первый закон механики утверждает, что такие системы координат существуют.

Силы взаимодействия между двумя частицами определяются по формуле

$$\mathbf{F}_{ij} = f(r_{ij}) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}},$$

в которой отражены их свойства (рис. 1):

1) $F_{ij} = -F_{ji}$;

2) $F_{ij} \parallel r_{ij}$;

3) величина силы взаимодействия зависит только от взаимного расстояния между частицами.

Три закона Ньютона, полученные из опытов и наблюдений над механическим движением, представляют собой основу классической механики. Все остальные механические законы и утверждения, справедливые при определенных условиях и для определенных моделей, являются следствиями, вытекающими из трех законов Ньютона.

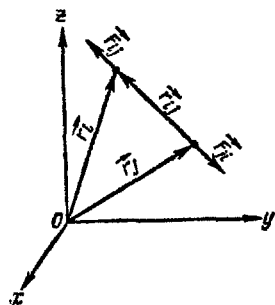


Рис. 1

В неинерциальной системе координат, т. е. движущейся ускоренно, уравнения (1), вообще говоря, не имеют места. Однако и в этом случае можно сохранить вид уравнений (1), но при этом приходится вводить так называемые силы инерции, происхождение которых уже нельзя объяснить действием каких-либо частиц. Их появление обусловлено тем, что система координат обладает ускорением.

Уравнение движения частицы в неинерциальной системе координат имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_и,$$

где $\mathbf{F}_и = -m(\ddot{\mathbf{R}}_0 + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] + 2[\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}])$ — сила инерции; $\ddot{\mathbf{R}}_0$ — ускорение начала координат неинерциальной системы; $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения этой же системы координат [см. формулы (23) и (24)].

Исходя из второго закона Ньютона (1) и первого свойства сил взаимодействия, можно доказать, что производная по времени от вектора количества движений системы равна сумме всех внешних сил $\mathbf{F}_{вн}$, т. е.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{вн}, \quad (2)$$

где $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i$, n — число частиц в системе. Величину \mathbf{p} часто называют также импульсом.

Если система замкнута, т. е. $\mathbf{F}_{вн} = 0$, то из уравнения (2) следует закон сохранения количества движения:

$$\mathbf{p} = \text{const.}$$

Если ввести понятие координаты центра масс системы по формуле

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{M},$$

где $M = \sum_{i=1}^n m_i$, то уравнение (2) можно записать в виде

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_{\text{вн}}. \quad (3)$$

Если система замкнута, т. е. $\mathbf{F}_{\text{вн}} = 0$, то из уравнения (3) следует

$$\dot{\mathbf{R}} = \text{const.}$$

Другими словами, скорость центра масс замкнутой системы остается постоянной.

На основании уравнения (2) можно получить уравнение движения с переменной массой — уравнение реактивного движения. В простейшем случае, если от массы основного тела происходит отделение или присоединение масс с одинаковыми скоростями, уравнение реактивного движения (формула Мещерского) имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = F_{\text{вн}} - \frac{dm_1}{dt} \mathbf{u}_1 - \frac{dm_2}{dt} \mathbf{u}_2, \quad (4)$$

где m_1 — присоединяющаяся масса; \mathbf{u}_1 — ее скорость относительно движущегося тела переменной массы; m_2 и \mathbf{u}_2 — соответствующие величины для отделяющихся масс.

Исходя из второго закона Ньютона (1) и первых двух свойств сил взаимодействия, можно доказать, что производная по времени от вектора момента количества движения системы равна сумме моментов всех внешних сил \mathbf{N} , т. е.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i] = \mathbf{N}, \quad (5)$$

где $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i]$.

Следует иметь в виду, что радиусы-векторы \mathbf{r}_i частиц системы, входящие в определение момента внешних сил и момента количества движения, необходимо отсчитывать от одной и той же точки, так как в общем случае момент внешних сил и момент количества движения системы зависят от выбора начала координат.

Третий закон Ньютона дает возможность ввести понятие потенциала сил по формуле

$$\mathbf{F}_{ij} = -\nabla_i U(r_{ij}), \quad (6)$$

где функция $U(r_{ij})$ зависит только от расстояния между взаимодействующими частицами.

С помощью понятия потенциала сил можно доказать на основании законов Ньютона следующую теорему: изменение энергии механической системы равно работе внешних сил, т. е.

$$d\left(T + \frac{1}{2} \sum_{ij} U_{ij}\right) = dA, \quad (7)$$

где, по определению, $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$; $dA = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_{\text{вн}})_i \cdot d\mathbf{r}_i$.

Для замкнутых систем имеет место закон сохранения энергии:

$$E = T + \frac{1}{2} \sum_{ij} U_{ij} = \text{const.} \quad (8)$$

Если часть внешних сил имеет потенциал V , то формулу (7) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(T + \frac{1}{2} \sum_{ij} U_{ij} + V \right) = - \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{f}_i,$$

где \mathbf{f}_i — непотенциальные силы.

Таким образом, для замкнутой механической системы всегда существует семь интегралов движения (другими словами, семь функций координат и скоростей), которые при движении системы остаются постоянными. В общем случае число интегралов движения, не зависящих от времени, для замкнутой системы равно $2f - 1$, где f — число степеней свободы. Семь вышеупомянутых интегралов движения играют особую роль в физике. Можно назвать две главные причины особой роли этих интегралов движения: 1) они существуют всегда, независимо от количества частиц в системе (в тривиальном случае одной частицы не все они являются независимыми); 2) их существование можно доказать также, исходя из фундаментальных свойств пространства-времени. Так закон сохранения количества движения следует из однородности пространства (все точки его равноценны); закон сохранения момента количества движения следует из изотропности пространства (все направления в пространстве равноценны); закон сохранения энергии следует из однородности времени (все моменты времени эквивалентны).

Уравнения движения в форме уравнений Ньютона не являются единственной формой уравнений движения. С помощью функции Лагранжа и обобщенных координат уравнениям (1) можно придать следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q'_i, \quad (8')$$

где \mathcal{L} — функция Лагранжа, определяемая как $\mathcal{L} = T - V$ (T — кинетическая, V — потенциальная энергия системы); q_i — обобщенные координаты, т. е. любые координаты, удовлетворяющие единственному требованию, чтобы декартовы координаты (в которых записана система уравнений Ньютона) могли быть однозначно выражены в любой момент времени через них, а именно

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_f, t);$$

$$Q'_i = \sum_{s=1}^n \mathbf{f}_s \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q_i},$$

где \mathbf{f}_s — непотенциальные силы, индекс f — число степеней свободы.

Если в системе имеются непотенциальные силы, но соответствующую им обобщенную силу можно записать в виде

$$Q'_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

где U — некоторая функция координат и скоростей, то в этом случае уравнения Лагранжа II рода принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (9)$$

где $\mathcal{L} = T - V + U$. Например, сила Лоренца

$$\mathbf{f} = e\mathbf{E} + e[\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}],$$

определяемая равенствами

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A},$$

будет непотенциальной силой. Она может быть записана в виде

$$f_x = eE_x + e[\dot{y}B_z - \dot{z}B_y] = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} \right),$$

где

$$U = e\varphi + e(\mathbf{r}\mathbf{A}).$$

Уравнения Лагранжа в виде (9) могут быть получены из вариационного принципа, который формулируется следующим образом. Если ввести функционал S , называемый действием, по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, q_i, \dot{q}_i) dt, \quad (10)$$

то истинное движение будет описываться такими функциями $q_i(t)$, которые обеспечивают минимум функционала S при условии, что $q_i(t_1)$ и $q_i(t_2)$ заданы.

Система уравнений Лагранжа является системой f дифференциальных уравнений второго порядка. Как известно из математики, систему f дифференциальных уравнений второго порядка можно свести к системе $2f$ дифференциальных уравнений первого порядка. В механике это делается с помощью введения функции Гамильтона, которая является функцией обобщенных координат и импульсов. Обобщенные импульсы определяются формулами:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (11)$$

Так как функция Лагранжа является квадратичной функцией обобщенных скоростей, то формулы (11) дают однозначную линейную связь между обобщенными скоростями и обобщенными импульсами.

Функция Гамильтона связана с функцией Лагранжа следующим образом:

$$H(p_i, q_i, t) = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (12)$$

причем в правой части формулы (12) следует заменить все обобщенные скорости через обобщенные импульсы по формуле (11).

Канонические уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad (13)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (14)$$

Система уравнений (12) является системой $2f$ дифференциальных уравнений первого порядка.

В некоторых случаях взаимодействие тел носит своеобразный характер — характер связей. В этом случае связи накладывают определенные ограничения на изменение координат или скоростей. Существует довольно широкий класс так называемых голономных связей, т. е. таких ограничений на координаты, которые можно выразить алгебраическими уравнениями:

$$f_\alpha(x_1, \dots, x_n, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (15)$$

Это уравнения связи.

В этом случае для решения задач механики можно пользоваться или уравнениями Лагранжа II рода, если ввести такие обобщенные координаты, при которых уравнения связей удовлетворились бы автоматически, или уравнениями Лагранжа I рода, представленными в виде

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha, \quad (16)$$

которые необходимо решать совместно с уравнениями связи (15).

Если произведение $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ назвать силой инерции, то можно сформулировать следующий принцип Даламбера: движение системы происходит так, что в каждый момент времени сумма работ всех сил, включая и силы инерции, на виртуальных перемещениях равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (17)$$

При отсутствии связей из этого принципа следуют уравнения Ньютона (1); в случае идеальных связей из этого принципа следуют уравнения Лагранжа I рода.

Если система точек покоится при наложенных на нее связях, то принцип (17) принимает следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Это выражение называют статическим принципом виртуальных перемещений. Этот принцип является основой статики: добавив к нему уравнения связей, можно найти условие равновесия системы точек.

Решение системы уравнений (1) дает полную информацию о механическом состоянии системы, состоящей из любого числа частиц с произвольным законом взаимодействия. Однако практически решение даже задачи трех тел (например, задачи о движении трех частиц, взаимодействующих по закону Кулона) представляет собой чрезвычайно трудную математическую проблему. Поэтому для решения задач прибегают к различным приближенным методам или моделям, которые в той или иной степени отражают свойства реальной системы. Одной из таких моделей является модель абсолютно твердого тела. Под абсолютно твердым телом в механике понимают систему из многих частиц, взаимное расположение которых остается неизменным в течение всего времени движения. Такое тело выступает при движении как единое целое.

Абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы, которые можно выбрать следующим образом. Зададим положение произвольной точки O твердого тела в какой-нибудь инерциальной системе координат XYZ (рис. 2). Точку O называем полюсом. В частности, полюс может совпадать с центром масс твердого тела, который определяется следующим образом:

$$\mathbf{R}_c = \frac{\iiint \mathbf{r} \rho dV}{M}. \quad (18)$$

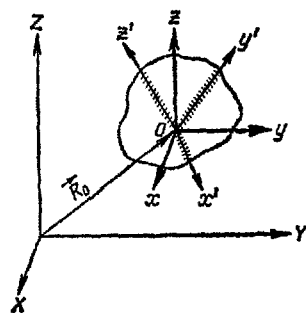


Рис. 2

Координаты полюса (X_0, Y_0, Z_0) составляют три координаты, описывающие поступательное движение твердого тела. Если закрепить полюс O , то твердое тело может вращаться вокруг этого полюса, что выразится в изменении ориентации координатной системы $x'y'z'$, жестко связанной с твердым телом. Ориентацию одной системы координат по отношению к другой можно задать матрицей поворота α_{ij} , с помощью которой выражается связь между осями двух декартовых систем координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \alpha_{11}\mathbf{i}' + \alpha_{12}\mathbf{j}' + \alpha_{13}\mathbf{k}', \\ \mathbf{j} &= \alpha_{21}\mathbf{i}' + \alpha_{22}\mathbf{j}' + \alpha_{23}\mathbf{k}', \\ \mathbf{k} &= \alpha_{31}\mathbf{i}' + \alpha_{32}\mathbf{j}' + \alpha_{33}\mathbf{k}'. \end{aligned} \quad (19)$$

Матрица поворота обладает свойством

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_{ik}\alpha_{is} = \delta_{ks}. \quad (20)$$

С помощью матрицы поворота связываются компоненты любого вектора \mathbf{F} в разных системах координат:

$$\begin{aligned} F_x &= \alpha_{11}F'_x + \alpha_{12}F'_y + \alpha_{13}F'_z, \\ F_y &= \alpha_{21}F'_x + \alpha_{22}F'_y + \alpha_{23}F'_z, \\ F_z &= \alpha_{31}F'_x + \alpha_{32}F'_y + \alpha_{33}F'_z. \end{aligned} \quad (21)$$

Так как между девятью компонентами матрицы поворота α_{ij} существует шесть соотношений (20), то ее можно выразить через три независимых параметра. В качестве независимых параметров пользуются углами Эйлера θ , ψ , φ (рис. 3). Их области изменения будут

$$0 < \theta < \pi; \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Матрица поворота выражается через углы поворота следующим образом:

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi, & & \\ -\sin \psi \cos \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi, & \sin \psi \sin \theta & \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi, & & \\ \cos \psi \cos \theta \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi, & -\cos \psi \sin \theta & \\ \sin \theta \sin \varphi, & \cos \varphi \sin \theta, & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Таким образом, совокупность трех независимых координат полюса X_0 , Y_0 , Z_0 , характеризующих поступательное движение твердого тела, и совокупность трех углов Эйлера θ , φ , ψ , характеризующих вращательное движение вокруг полюса O , образуют шесть координат абсолютно твердого тела, полностью и однозначно определяющих его положение в пространстве.

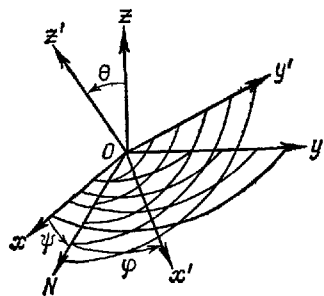


Рис. 3

Соответственно, производные по времени от этих координат характеризуют скорость движения твердого тела. Однако для характеристики скорости вращения в механике твердого тела пользуются не производными $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, а вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, который вводится с по-

мощью формул Пуансо:

$$\frac{di'}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \times i']; \quad \frac{dj'}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \times j']; \quad \frac{dk'}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \times k'], \quad (23)$$

где i' , j' , k' — орты системы координат, жестко связанной с твердым телом. Можно получить выражения компонент вектора угловой скорости через углы Эйлера и их производные по времени

$$\begin{aligned} \omega'_x &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \\ \omega'_y &= -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, \\ \omega'_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (24)$$

Это кинематические уравнения Эйлера.

Используя определение количества движения для системы частиц (2), можно получить следующую формулу для количества движения твердого тела:

$$\mathbf{P} = M (\dot{\mathbf{R}}_0 + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_c]), \quad (25)$$

где M — масса твердого тела, \mathbf{R}_c находится по формуле (18).

Исходя из определения момента количества движения для системы частиц (5), можно получить следующее выражение для момента количества движения твердого тела по отношению к началу инерциальной системы координат XYZ :

$$\mathbf{L} = M [\mathbf{R}_0 \times \dot{\mathbf{R}}_0] + M [\mathbf{R}_c \times \dot{\mathbf{R}}_0] + M \mathbf{R}_0 \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_c] + \mathbf{L}_{\text{вр}}, \quad (26)$$

где \mathbf{R}_c — координата центра масс по отношению к полюсу ($\mathbf{R}_c = 0$, если за полюс выбран центр масс). Последний член в формуле (26) представляет собой момент количества движения по отношению к полюсу O .

Если ввести понятие тензора момента инерции, определяемого следующими интегралами:

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \iiint (y^2 + z^2) \rho \, dV; & J_{yy} &= \iiint (x^2 + z^2) \rho \, dV; \\ J_{zz} &= \iiint (x^2 + y^2) \rho \, dV; & & \\ J_{xy} = J_{yx} &= - \iiint xy \rho \, dV; & J_{xz} = J_{zx} &= - \iiint xz \rho \, dV; \\ J_{zy} = J_{yz} &= - \iiint zy \rho \, dV, & & \end{aligned} \quad (27)$$

то компоненты $\mathbf{L}_{\text{вр}}$ выразятся через компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ с помощью тензора момента инерции формулой:

$$(\mathbf{L}_{\text{вр}})_i = \sum_{j=1}^3 J_{ij} \omega_j. \quad (28)$$

Исходя из определения кинетической энергии для системы частиц (7), можно получить следующее выражение для кинетической энергии абсолютно твердого тела:

$$T = \frac{M \dot{\mathbf{R}}_0^2}{2} + M \dot{\mathbf{R}}_0 [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_c] + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \mathbf{L}_{\text{вр}}). \quad (29)$$

Всегда можно выбрать такую систему координат (связанную с твердым телом и произвольным началом), в которой симметричный тензор момента инерции будет иметь только диагональные компоненты. Такая система называется главной системой координат. В этой системе координат формулы (28) значительно упрощаются и записываются в виде:

$$L_1 = J_1 \omega_1; \quad L_2 = J_2 \omega_2; \quad L_3 = J_3 \omega_3. \quad (30)$$

Формула для кинетической энергии вращения также принимает упрощенный вид

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \mathbf{L}_{\text{вр}}) = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2). \quad (31)$$

Уравнения движения для абсолютно твердого тела можно получить, используя следствия из закона Ньютона (2) и (5). В случае, когда центр масс выбран за полюс, эти уравнения приобретают вид:

$$\begin{aligned}
 M \left(\frac{d^2 X_0}{dt^2} + \omega_2 \dot{Z}_0 - \omega_3 \dot{Y}_0 \right) &= F_1, \\
 M \left(\frac{d^2 Y_0}{dt^2} + \omega_3 \dot{X}_0 - \omega_1 \dot{Z}_0 \right) &= F_2, \\
 M \left(\frac{d^2 Z_0}{dt^2} + \omega_1 \dot{Y}_0 - \omega_2 \dot{X}_0 \right) &= F_3, \\
 J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 &= N_1, \\
 J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 &= N_2, \\
 J_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 &= N_3,
 \end{aligned} \tag{32}$$

где индексы 1, 2, 3 означают компоненты векторов по осям главной системы координат; X_0, Y_0, Z_0 — координаты центра масс в этой же системе координат. Моменты сил, входящие в равнодействующий момент сил N , берутся относительно центра масс (полюса).

Система (32) шести уравнений представляет собой полную систему дифференциальных уравнений для нахождения шести функций $X(t), Y(t), Z(t), \varphi(t), \theta(t), \psi(t)$. Как видно из этой системы, характер движения твердого тела зависит не только от массы, но и от ее распределения, так как моменты инерции J_1, J_2, J_3 зависят от формы тела и распределения плотности его вещества.

Другой способ составления уравнений движения абсолютно твердого тела заключается в составлении функции Лагранжа; выражение для кинетической энергии дается формулой (29). По заданным силам можно найти соответствующие им потенциалы и составить функцию Лагранжа, а затем уравнения Лагранжа II рода.

Механика сплошных сред. При изучении движения абсолютно твердого тела предполагалось, что расстояния между частицами, из которых состоит твердое тело, остаются неизменными. Однако, как хорошо известно из опыта, существует довольно обширный класс механических состояний твердого тела (деформация, распространение звука), которые не могут быть описаны моделью абсолютно твердого тела, и мы вынуждены учесть внутреннее движение частиц твердого тела относительно друг друга.

Аналогичная ситуация возникает и при рассмотрении механического движения жидких и газообразных тел. Основное отличие механического движения жидких и газообразных тел от механического движения упругого твердого тела заключается в том, что частицы жидкости и газа при своем движении могут смещаться на большие расстояния от своего первоначального положения. Другими словами, жидкостям и газам, в отличие от упругих тел, присуще свойство текучести. Часто жидкости, газы и упругие тела обозначают одним термином — сплошные среды.

При изучении движения жидкостей, газов и твердых тел можно поступать двояким образом: либо описывать их как систему, состоящую из большого числа частиц, приписав каждой частице координату, либо рассматривать их как сплошные среды, т. е. перейти от дискретного распределения частиц к непрерывному, как это делается при введении таких понятий как плотность.

Одним из основных понятий механики сплошных сред является понятие векторного поля скоростей. Под векторным полем скоростей понимают такую векторную функцию координат и времени $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, которая дает значение скорости тех частиц сплошной среды, которые в момент времени t проходят точку пространства, характеризуемую координатами x, y, z . Таким образом, скорость $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ не относится ни к какой частице в отдельности, а характеризует движение всей сплошной среды в целом.

Уравнения движения сплошной среды можно получить, применяя закон изменения количества движения со временем (2) к произвольному объему сплошной среды. На произвольный объем сплошной среды действуют силы двух видов: 1) поверхностные силы со стороны остальных частей сплошной среды, определяемые по формуле

$$(F_{\text{пов}})_i = \int p_{ij} n_j dS = \int \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} dV, \quad (33)$$

где p_{ij} — тензор натяжений, n_j — компонента внешней нормали к поверхности выбранного объема; 2) объемные силы (примером которых может быть сила тяжести), которые можно записать в виде объемного интеграла

$$(F_{\text{об}})_i = \int f_i \rho dV, \quad (34)$$

где ρ — плотность сплошной среды, f_i — объемная сила, действующая на единицу массы.

Уравнение движения сплошной среды имеет вид

$$\rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) v_i \right] = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i. \quad (35)$$

Для того чтобы выполнялся закон изменения момента количества движения со временем, необходимо и достаточно, чтобы тензор натяжений был симметричным, т. е.

$$p_{ij} = p_{ji}.$$

Исходя из закона сохранения массы можно получить соотношение, связывающее поле скоростей с плотностью:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0. \quad (36)$$

Это уравнение непрерывности.

Если сплошная среда несжимаемая, то из уравнения непрерывности следует условие несжимаемости

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (37)$$

которым часто пользуются при решении задач о течении жидкости и даже газа.

Для того чтобы система уравнений была полной, к ним необходимо добавить термодинамическое уравнение энергии

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{j} + p_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad (38)$$

где ε — внутренняя термодинамическая энергия единицы объема жидкости; $\mathbf{j} = -\kappa \nabla T$ — вектор плотности потока тепла.

Для того чтобы иметь возможность решить уравнение (35), необходимо знать тензор натяжений p_{ij} . Для вязких жидкостей и газов его можно записать в виде

$$p_{ij} = -p \delta_{ij} + (\eta - \zeta) \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (39)$$

Подставляя это выражение в (35), получаем уравнение Навье — Стокса:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \zeta \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (40)$$

где η — коэффициент сдвиговой вязкости, ζ — коэффициент объемной вязкости. Для несжимаемой жидкости система уравнений гидродинамики имеет вид

$$\begin{cases} \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (41)$$

Уравнения (41) — уравнения в частных производных. Поэтому для решения системы (41) необходимо задать начальные и граничные условия. В качестве граничных условий принимают условие «прилипания» ($\mathbf{v}_{\text{гр}} = 0$) на неподвижных стенках.

Для несжимаемой жидкости уравнение (38) не связано с системой (41). Оно служит для нахождения температуры как функции координат и времени (см. задачи 106, 108).

Из общего уравнения движения для сплошной среды (35) можно получить также уравнение движения для упруго деформируемого твердого тела. Упруго деформируемое тело характеризуется тем, что даже при довольно сильных внешних воздействиях его частицы мало смещаются из положений равновесия и при снятии внешнего воздействия опять возвращаются в исходное положение. Поэтому можно положить

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \approx \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (42)$$

где $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ — вектор смещений, характеризующий смещение частей упруго деформируемого тела из положения равновесия.

Малые деформации упруго деформируемого тела можно характеризовать симметричным тензором деформаций:

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (43)$$

Связь тензора напряжений с тензором деформаций выражается законом Гука:

$$p_{ij} = \sum_{k, l=1}^3 \lambda_{ijkl} u_{kl}, \quad (44)$$

где λ_{ijkl} — тензор четвертого ранга упругих постоянных, обладающий следующими свойствами симметрии:

$$\begin{aligned} \lambda_{ijkl} &= \lambda_{jikl}, \\ \lambda_{ijkl} &= \lambda_{ijlk}, \\ \lambda_{ijkl} &= \lambda_{klij}. \end{aligned} \quad (45)$$

В общем случае благодаря свойствам симметрии (45) имеется лишь 21 независимая упругая постоянная. Благодаря свойствам симметрии соотношение (44) можно переписать в виде

$$p_i = c_{ij} s_j, \quad s_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (46)$$

где индекс i принимает шесть значений:

$$\begin{aligned} i=1 & \text{ соответствует } (xx), \quad i=2 \text{ — } (yy), \\ i=3 & \text{ — } (zz), \quad i=4 \text{ — } (yz), \quad i=5 \text{ — } (xz), \quad i=6 \text{ — } (xy). \end{aligned}$$

Таким образом, $\lambda_{xxxx} = c_{11}$, $\lambda_{xxyy} = c_{12}$, $\lambda_{xyxy} = c_{66}$ и т. д.

Благодаря свойствам пространственной симметрии количество независимых упругих постоянных может уменьшаться. Для кубического кристалла, например, число независимых упругих постоянных равно трем и матрица c_{ij} имеет вид

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}$$

Изотропное твердое тело характеризуется всего двумя упругими постоянными и закон Гука для него можно записать в виде

$$p_{ij} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu u_{ij}. \quad (47)$$

Общее уравнение движения и равновесия упруго деформируемого тела имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i, \quad (48)$$

где p_{ij} даются формулой (44).

Поток звуковой энергии за единицу времени через единицу площади (интенсивность) определяется формулой

$$S_i = - p_{ij} u_j.$$

Среднее по времени значение вектора \mathbf{S} для бегущих монохроматических волн в изотропной среде равно

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \rho v_{\text{зв}} \omega^2 u_0^2, \quad (49)$$

где $v_{\text{зв}}$ — соответствующая скорость звука (продольная или поперечная), ρ — плотность вещества, ω — частота, u_0 — амплитуда звуковой волны.

Для изотропного тела формула (48) с учетом (47) принимает вид

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho \mathbf{f} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u}. \quad (50)$$

Граничные условия для задач теории упругости имеют вид

$$(\mathbf{u})_I = (\mathbf{u})_{II}; \quad (p_{ij} n_j)_I = (p_{ij} n_j)_{II}, \quad (51)$$

n_j — компонента внешней нормали к поверхности двух сред I и II. Первое условие означает неразрывность сплошной среды, а второе выражает свойства сил взаимодействия.

§ 2. ЗАДАЧИ

1. Частица, имеющая массу m и заряд e , влетает в однородное стационарное электрическое поле \mathbf{E} со скоростью v_0 , перпендикулярной к направлению поля. Определить траекторию движения частицы.

2. Частица с массой m и зарядом e попадает в однородное тормозящее электрическое поле \mathbf{E} со скоростью v_0 , параллельной направлению поля. Определить время, через которое частица вернется в начальную точку.

3. Частица с массой m и зарядом e попадает в однородное стационарное магнитное поле \mathbf{H} со скоростью v_0 , перпендикулярной к направлению магнитного поля. Определить траекторию движения частицы.

4. Частица с массой m и зарядом e попадает в однородное электрическое поле, меняющееся по закону $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$ со скоростью v_0 , перпендикулярной к направлению электрического поля. Определить траекторию движения частицы.

5. В некоторой области пространства одновременно имеются однородные и стационарные электрическое и магнитное поля с векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} , угол между которыми равен α . Частица с массой m и зарядом e , имеющая начальную скорость v_0 , попадает в это пространство. Определить траекторию движения частицы.

6. В пространстве $0 < y < l$; $-\infty < x < +\infty$; $-\infty < z < +\infty$ создано однородное стационарное магнитное поле, направленное вдоль оси OZ («магнитная стенка»). Частица со скоростью v_0 , имеющая массу m

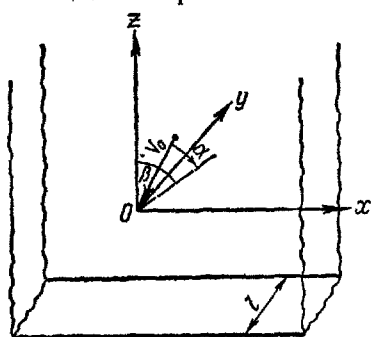


Рис. 4

и заряд e , влетает в магнитное поле под углом α к плоскости xOz . Угол между осью OZ и проекцией скорости v_0 на плоскость xOz равен β (рис. 4).

1. Найти критерий прохождения (или отражения) частицы через магнитную стенку.

2. Найти направление, в котором полетит частица, пройдя через магнитную стенку.

3. Найти направление отражения частицы от стенки и определить условия, при которых законы отражения будут совпадать с оптическими законами отражения.

7. Пучок электронов влетает в пространство между двумя парами отклоняющих пластин, на которые поданы напряжения: $U_x = U_1 \sin \omega t$ на вертикальные пластины и $U_y = U_2 \cos \omega t$ на горизонтальные. Определить траекторию электронного луча на экране (рис. 5), если все электроны перед влетом имели начальную скорость v_0 , параллельную всем пластинам; длина отклоняющих пластин равна l , расстояние от отклоняющих пластин до экрана равно l .

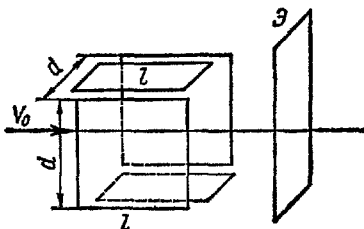


Рис. 5

8. Составить и проинтегрировать уравнения движения гармонического осциллятора, находящегося в однородном стационарном магнитном поле \mathbf{H} и обладающего электрическим зарядом e (классический эффект Зеемана).

9. Составить и проинтегрировать уравнения движения частицы при условии задачи 1, считая что на частицу действует еще и сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости: $\mathbf{R} = -\gamma \mathbf{v}$.

$\square M$

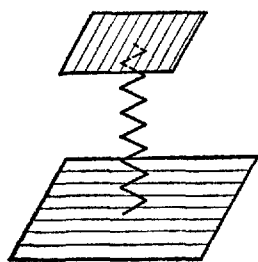


Рис. 6

10. Составить и проинтегрировать уравнения движения частицы при условии задачи 3, считая, что на частицу действует еще и сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости: $\mathbf{R} = -\gamma \mathbf{v}$.

11. Груз массы M падает без начальной скорости с высоты H на спиральную пружину (рис. 6). Под действием упавшего груза пружина сжимается на величину h . Вычислить время сжатия пружины, пренебрегая массой пружины и силами трений.

12. Тело массы m падает в воздухе без начальной скорости. Считая сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости: $R = \gamma v^2$, определить скорость тела и его координату как функции времени. К какому пределу стремится скорость с течением времени?

13. Цилиндр массы M , радиуса r и высоты h , подвешенный на пружине, верхний конец которой закреплен, погружен в воду (рис. 7). В положении равновесия цилиндр погружается в воду на половину

своей высоты. В некоторый момент времени цилиндр был погружен в воду на $2/3$ своей высоты и затем без начальной скорости пришел в движение по вертикальной прямой. Считая жесткость пружины равной c , а плотность воды ρ , найти уравнение движения цилиндра относительно положения равновесия.

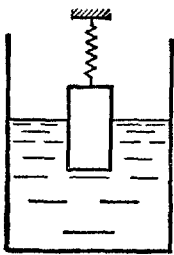


Рис. 7

14. Тело падает на Землю с большой высоты h . Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти время T , по истечению которого тело достигнет поверхности Земли, и скорость v , которую оно приобретет за это время. Радиус Земли равен R .

15. Тело массы m , брошенное с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, движется под влиянием силы тяжести и сопротивления воздуха R . Считая сопротивление пропорциональным первой степени скорости: $R = -\gamma v$, проинтегрировать уравнение движения тела, определить наибольшую высоту h , а также расстояние по горизонтали до наивысшего положения.

16. Частица массы m движется по закону $x = a \cos \omega t$, $y = b \sin \omega t$. Определить силу, действующую на частицу в каждой точке траектории.

17. Частица массы m движется по траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

с ускорением, параллельным оси OY . В момент времени $t = 0$ частица находилась в точке $x = 0$, $y = b$ и имела скорость v_0 . Определить силу, действующую на частицу в каждой точке траектории.

18. Найти уравнение вынужденных колебаний гармонического осциллятора при наличии силы трения, пропорциональной первой степени скорости, под действием вынуждающей силы $f = f_0 e^{-at} \cos \omega t$.

19. При каких условиях график движения частицы массы m под действием упругой силы $m\omega_0^2 x$ и силы трения $-m\gamma \dot{x}$ имеет вид, изображенный на рис. 8 (т. е. частица стремится к положению равновесия, пройдя сначала через него)?

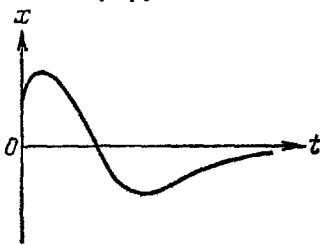


Рис. 8

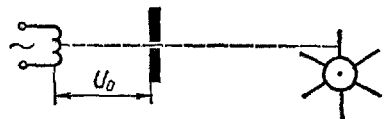


Рис. 9

Доказать, что в этом случае существует одно максимальное (не равное начальному) отклонение от положения равновесия.

20. Определить закон, по которому будет вращаться мельница Крукса, если на середину ее лопасти падает пучок электронов с силой тока I_0 ускоренных потенциалом U_0 (рис. 9). Колесо мельницы состоит из 6 лопастей радиуса R , шириной l , толщиной d . Плотность

вещества ρ . Трением в подшипниках, а также отражением электронов и вторичной эмиссией пренебрегаем.

21. Вдоль оси цилиндрического конденсатора (перпендикулярно к плоскости чертежа) приложено однородное стационарное поле \mathbf{H} (рис. 10). Какую разность потенциалов следует приложить к конденсатору, чтобы частицы с зарядом e и массой M , влетевшие во входную щель, прошли по средней линии конденсатора? Начальная кинетическая энергия частиц T . Каким образом рассматриваемая система может применяться в качестве масс-анализатора для разделения ионов?

У к а з а н и е. Поле в цилиндрическом конденсаторе равно

$$E_r = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}},$$

где r_1 — радиус внутреннего цилиндра, r_2 — радиус внешнего цилиндра; U — разность потенциалов.

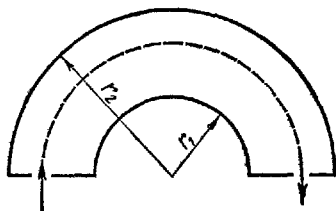


Рис. 10

22. Какой диапазон масс однозарядных ионов может пройти через систему, описанную в задаче 21, в двух случаях: 1) $U = 300$ в, $r_1 = 6$ см, $r_2 = 5,4$ см, $T = 1000$ эв, а магнитное поле меняется от 0 до 10000 э; 2) $H = 5000$ э, $r_1 = 6$ см, $r_2 = 5,4$ см, $T = 1000$ эв, а потенциал U меняется от 0 до 20 000 в.

23. Относительное движение двух частиц, взаимодействующих по закону Кулона ($U = \frac{\alpha}{r}$), описывается коническим сечением с параметрами

$$p = \frac{L^2}{\mu |\alpha|}; \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}},$$

где L — момент количества движения, μ — приведенная масса, E — энергия относительного движения. Доказать, что энергия E , хотя и может быть отрицательной, имеет такую нижнюю границу, что всегда $e^2 > 0$.

24. Выразить период обращения спутника вокруг Земли через различные параметры.

25. Найти траекторию частицы массы m , движущейся во внешнем поле, потенциал которого равен $U = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$.

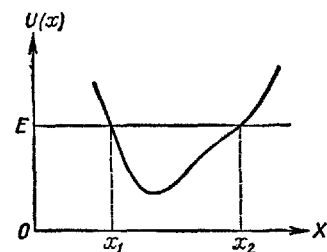


Рис. 11

Определить условия, при которых частица может: 1) попасть в начало координат, 2) уйти в бесконечность (рассеяться) и 3) совершать периодическое движение.

26. При условиях задачи 25 определить зависимость прицельного расстояния s от угла рассеяния Φ .

27. Частица массы m с энергией E совершает одномерное движение в потенциальном поле $U(x)$. Определить период движения частицы (рис. 11).

28. Определить период одномерного движения частицы массы m с энергией E в потенциальном поле вида

$$U = -\frac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x} \quad (-U_0 < E < 0).$$

29. Определить период одномерного движения частицы массы m с энергией E в потенциальном поле вида $U = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$.

30. Найти траекторию движения частицы массы m с энергией E в поле $U = \frac{\alpha}{r^2}$ ($\alpha > 0$).

31. Найти угол рассеяния и эффективное сечение рассеяния частицы с энергией E в поле $U = \frac{\alpha}{r^2}$ ($\alpha > 0$).

32. Показать, что в задаче о взаимодействии двух частиц по закону Кулона векторная величина

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{L}] + \frac{\alpha \mathbf{r}}{r}$$

есть интеграл движения; здесь \mathbf{v} — относительная скорость, \mathbf{r} — относительная координата, $\mathbf{L} = \mu [\mathbf{r} \times \mathbf{v}]$ — момент количества движения, связанный с относительным движением, α — постоянная в законе Кулона.

33. Определить зависимость скорости движения ракеты под действием одной лишь реактивной силы, если известен закон изменения массы ракеты со временем, а относительная скорость выброса массы равна u_1 (формула Циолковского).

34. Первая космическая скорость определяется как минимальная скорость, которую необходимо придать телу, чтобы оно стало искусственным спутником планеты. Вторая космическая скорость определяется как минимальная скорость, которую должно иметь тело, чтобы выйти из сферы влияния планеты. Найти первую и вторую космические скорости для Земли и Луны.

35. Определить конечную (при $t \rightarrow \infty$) амплитуду колебаний гармонического осциллятора массы m после действия сил вида (без учета трения):

$$1) F = F_0 \frac{t}{T} \quad \text{при } 0 < t < T \text{ и } F = F_0 \quad \text{при } T < t < \infty,$$

$$2) F = F_0 \frac{t}{T} \quad \text{при } 0 < t < T \text{ и } F = 0 \quad \text{при } T < t < \infty;$$

$$3) F = F_0 \quad \text{при } 0 < t < T \text{ и } F = 0 \quad \text{при } T < t < \infty,$$

$$4) F = F_0 \sin \omega t \quad \text{при } 0 < t < T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ и } F = 0 \quad \text{при } T < t < \infty$$

До момента действия силы осциллятор покоится в положении равновесия.

36. Частица массы m_1 с начальной скоростью \mathbf{v}_1 налетает на частицу массы m_2 и рассеивается на угол θ . Найти угол рассеяния Φ в системе центра масс, переданную часть кинетической энергии и отношение масс, при котором передаваемая энергия будет максимальной.

37. Частица массы m движется под действием внешней силы $\mathbf{F} = km\mathbf{r}$, где \mathbf{r} — радиус вектор частицы. Начальное положение частицы \mathbf{r}_0 , а ее начальная скорость \mathbf{v}_0 направлена перпендикулярно вектору \mathbf{r}_0 . Определить траекторию частицы.

38. В задаче 13 проинтегрировать уравнение движения цилиндра, если сопротивление воды пропорционально первой степени скорости. $\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\alpha\mathbf{v}$.

39. Доказать, что момент количества движения системы n частиц не зависит от выбора точки, относительно которой он вычисляется, если полный вектор количества движения равен нулю.

40. Доказать, что момент сил, приложенных к системе n частиц, не зависит от выбора точки, относительно которой он вычисляется, если равнодействующая всех сил, приложенных к системе, равна нулю.

41. Атом состоит из ядра массы M и n электронов одинаковых масс m . Исключить движение центра масс и свести задачу к задаче движения n частиц. Найти функцию Лагранжа рассматриваемой системы

42. В задаче 41 кинетическая энергия, входящая в функцию Лагранжа, не имеет вида суммы квадратов. Доказать, что кинетическая энергия, выраженная через координаты Якоби, имеет вид суммы квадратов. Координаты Якоби определяются следующими формулами

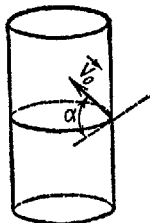


Рис 12

$$\rho_1 = \frac{m_1}{m_1} \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2;$$

$$\rho_2 = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} - \mathbf{r}_3;$$

.....

$$\rho_j = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + \dots + m_j\mathbf{r}_j}{m_1 + \dots + m_j} - \mathbf{r}_{j+1};$$

.....

$$\rho_n = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + \dots + m_n\mathbf{r}_n}{m_1 + \dots + m_n} = \mathbf{R}$$

43. Составить функцию Лагранжа диполя, образованного двумя противоположно заряженными массами m_1 и m_2 , находящегося в однородном электрическом поле \mathbf{E}

44. Частица массы m движется по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиуса r (рис 12). Считая поверхность цилиндра абсолютно гладкой, определить силу давления частицы на цилиндр. Ее начальная скорость \mathbf{v}_0 составляет угол α с горизонтом.

45. В предыдущей задаче найти закон изменения координат частицы со временем, если в начальный момент времени частица находилась на оси Ox .

46. Труба AB вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси CD , составляя с ней неизменный угол α (рис 13). В трубе находится шарик массы m . Определить характер движения этого шарика, если его начальная скорость равна нулю и начальное расстояние от точки O равно a . Трением пренебречь.

47. Тонкий прямолинейный однородный стержень длиной l и массой M вращается с постоянной угловой скоростью ω около неподвижной точки O , описывая при этом коническую поверхность (рис. 14). Вычислить угол отклонения стержня от вертикали, а также силу реакции в точке O .

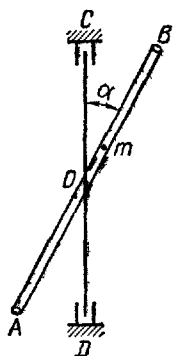


Рис. 13

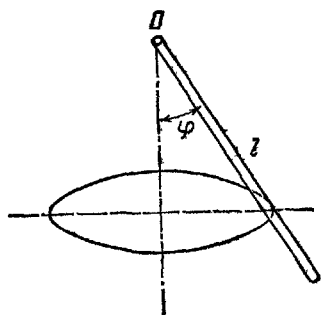


Рис. 14

48. На однородную призму A , лежащую на горизонтальной плоскости, положена однородная призма B (рис. 15). Поперечные сечения призм — прямоугольные треугольники, масса призмы A в n раз больше массы призмы B . Предполагая, что призмы и горизонтальная плоскость идеально гладкие, определить длину l , на которую передвинется призма A , когда призма B , опускаясь по A , дойдет до горизонтальной плоскости.

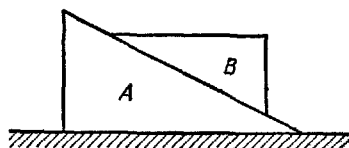


Рис. 15

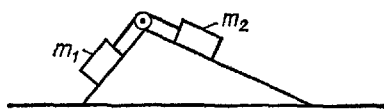


Рис. 16

49. Грузы массы m_1 и m_2 каждый, соединенные нерастяжимой нитью, переброшенной через блок A , скользят по гладким боковым сторонам прямоугольного клина, опирающегося на гладкую горизонтальную плоскость (рис. 16). Масса клина равна m . Найти перемещение клина по горизонтальной плоскости при опускании массы m_1 на высоту h . Массами нити и блока пренебречь.

50. Электромотор массы M установлен без креплений на гладком горизонтальном фундаменте. На валу электромотора под прямым углом закреплен одним концом однородный стержень длиной $2l$, на другой конец стержня насажен точечный груз массы m (рис. 17). Угловая скорость вала равна ω . Масса стержня M_1 .

Определить: 1) уравнение горизонтального движения мотора; 2) максимальное горизонтальное усилие R , которое действовало бы

на болты, если ими закрепить электромотор на фундаменте; 3) найти условия, налагаемые на угловую скорость ω вала электромотора, при которой электромотор будет подпрыгивать над фундаментом, не будучи к нему прикреплен болтами.

51. Ионный реактивный двигатель испускает ионы, ускоренные разностью потенциалов U . Определить реактивную силу тяги такого двигателя, если ионный ток равен I . Масса иона M .

52. Может ли сложная система частиц, энергия которой по отношению к системе ее центра масс равна E , разделиться на две подсистемы с соответствующими энергиями E_1 и E_2 ?

53. Найти отклонение от вертикали свободно падающего без начальной скорости тела, обусловленное вращением Земли. Сопротивлением воздуха пренебречь.

54. Записать функцию Лагранжа математического маятника массы m и длины l , точка подвеса которого движется в вертикальной плоскости по закону $y = y(t)$ и $x = x(t)$.

55. Записать уравнение для малых колебаний математического маятника массы m и длины l , точка подвеса которого колеблется по вертикали по закону $x = a \cos \omega t$.

56. Механическая система, изображенная на рис. 18, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси AB . Тело массы m_2 может двигаться вдоль вертикальной оси AB . Найти функцию Лагранжа этой системы и определить положение равновесия.

57. В задаче 56 определить, какое из двух положений равновесия устойчивое, а какое неустойчивое.

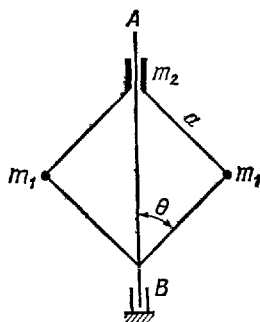


Рис. 18

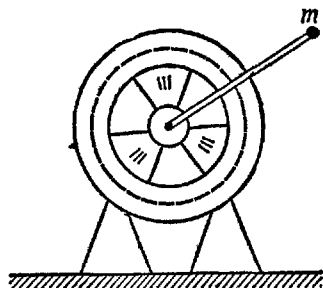


Рис. 17

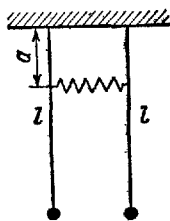


Рис. 19

58. Два математических маятника одинаковой длины (рис. 19) связаны между собой пружиной с жесткостью c , укрепленной на расстоянии a от точки подвеса. Определить частоты малых колебаний, а также проинтегрировать уравнение движения при условии, что в начальный момент времени первый маятник был отклонен на угол φ_0 от вертикали.

59. Конденсаторный микрофон состоит из последовательно соединенных катушки самоиндукции L , омического сопротивления R и конденсатора, пластины которого связаны двумя пружинами с общей жесткостью s (рис. 20). Цепь подключена к элементу с постоянной электродвижущей силой \mathcal{E} , а на пластину конденсатора действует переменная сила $p(t)$. Емкость конденсатора в положении равновесия системы C_0 , расстояние между пластинами в положении равновесия a , масса подвижной пластины конденсатора m . Составить функцию Лагранжа для этой системы и записать уравнение Лагранжа.

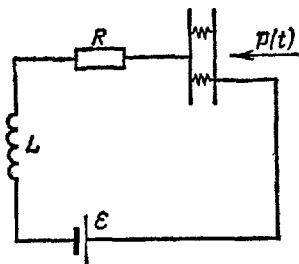


Рис. 20

60. Определить положения равновесия системы, заданной в задаче 59, и частоты малых колебаний.

61. Маятник состоит из жесткого стержня длины l и массы m на конце (рис. 21). К стержню прикреплены две пружины с жесткостью s на расстоянии a от точки подвеса. Найти частоту малых колебаний маятника. Массой стержня пренебречь.

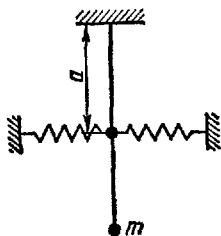


Рис. 21

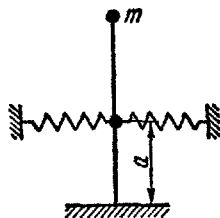


Рис. 22

62. Предполагая, что маятник, описанный в задаче 61, установлен так, что масса m расположена выше точки подвеса (рис. 22), найти частоту малых колебаний и определить условие равновесия в верхнем положении.

63. Тело массы M , соединенное с пружиной жесткости s , другой конец которой закреплен неподвижно, может двигаться без трения по горизонтальной плоскости. К телу прикреплен математический маятник массы m и длины l (рис. 23). Найти функцию Лагранжа системы и определить частоты малых колебаний.

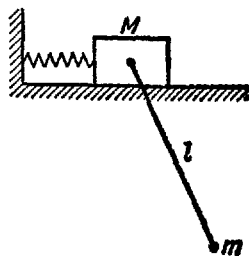


Рис. 23

64. Записать функцию Лагранжа математического маятника массы m и длины l , точка подвеса которого движется в горизонтальной плоскости по закону $x = x(t)$.

65. Записать уравнения движения для малых колебаний математического маятника длины l , точка подвеса которого колеблется по горизонтали по закону $x = a \cos \gamma t$.

66. Однородный стержень BD длины l опирается на стену, как показано на рис. 24. Его нижний конец B удерживается нитью AB . Определить реакцию опор и силу натяжения нити. Сила тяжести стержня P .

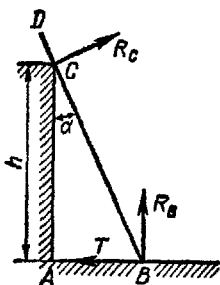


Рис 24

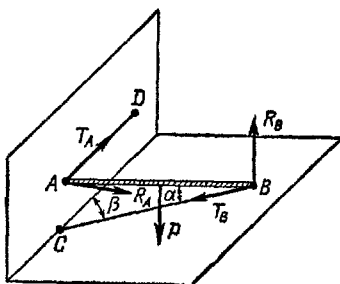


Рис 25

67. Однородный стержень AB опирается своими концами на горизонтальную и вертикальную плоскости (рис. 25) и удерживается в этом положении двумя горизонтальными нитями AD и BC ; нить BC находится в одной плоскости (вертикальной) со стержнем AB . Определить реакцию опор и силы натяжения нитей, если сила тяжести стержня P .

68. Шарик B массы m подвешен на нити AB и лежит на поверхности гладкой сферы радиуса r (рис. 26). Расстояние неподвижной точки A от поверхности сферы равно d , длина нити l . Определить силу натяжения нити T и реакцию сферы N . Радиусом шарика пренебречь.

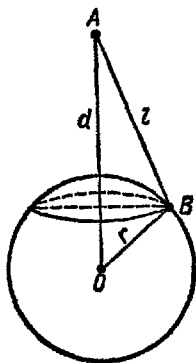


Рис. 26

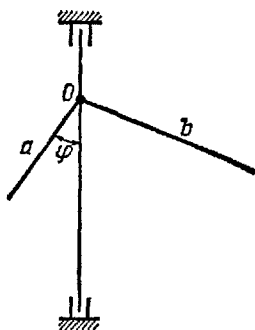


Рис 27

69. Два однородных прямолинейных стержня длины a и b каждый жестко соединены под прямым углом, вершина которого O шарнирно соединена с вертикальным валом (рис. 27). Вал вращается с постоянной угловой скоростью ω . Найти зависимость между ω и углом φ , образованным направлением стержня длины a и вертикалью.

70. На платформе весов в точке F находится груз P . Длина $AR = a$, $BC = b$, $CD = c$, $IK = d$ длина платформы $EG = l$ (рис. 28). Определить соотношение между длинами b , c , d и l , при котором сила тяжести гири P_r , уравновешивающей груз P , не зависит от положения его на платформе; найти также силу тяжести гири в этом случае.

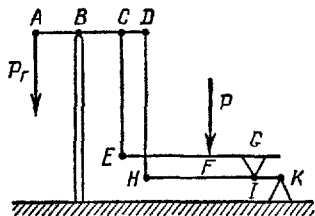


Рис. 28

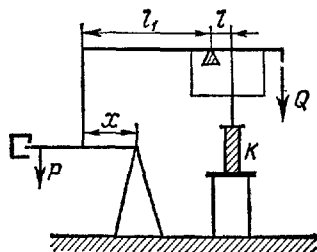


Рис. 29

71. На рис. 29 изображена схема прибора для измерения упругих постоянных твердого тела. Определить зависимость между силой F , приложенной к образцу K , и расстоянием груза P от его нулевого положения O , если при помощи груза Q прибор уравновешен так, что при нулевом положении груза P и отсутствии усилия в образце все рычаги горизонтальны.

72. Два стержня AB и OC , вес единицы длины которых равен 2ρ , скреплены под прямым углом в точке C (рис. 30).

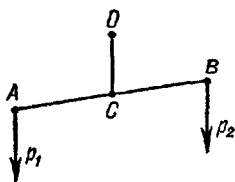


Рис. 30

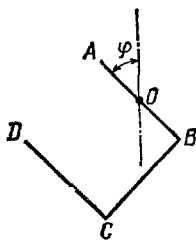


Рис. 31

Стержень OC может вращаться вокруг горизонтальной оси O ; $AC = CB = a$; $OC = b$. В точках A и B подвешены гири P_1 и P_2 . Определить угол наклона стержня AB к горизонту в положении равновесия.

73. Три стержня, вес единицы длины которых равен ρ , скреплены под прямым углом в точках B и C (рис. 31). Стержень AB может вращаться вокруг горизонтальной оси O , расположенной на его середине $AB = BC = DC = a$. Определить положения устойчивого и неустойчивого равновесия.

74. Определить скобки Пуассона, составленные из декартовых компонент импульса и момента количества движения $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$.

75. Определить скобки Пуассона, составленные из компонент полного вектора момента количества движения системы n частиц

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i].$$

76. Показать, что $\{\varphi, L_z\} = 0$, где φ — любая скалярная функция координат и импульса частицы.

77. Показать, что $\{\mathbf{f}, L_z\} = [\mathbf{n} \times \mathbf{f}]$, где \mathbf{f} — любая векторная функция координат и импульса, а \mathbf{n} — единичный вектор в направлении z .

78. Составить функцию Лагранжа и функцию Гамильтона для заряженного гармонического осциллятора в однородном стационарном магнитном поле \mathbf{B} .

79. Составить функцию Лагранжа и функцию Гамильтона для двух заряженных частиц, взаимодействующих по закону Кулона. Выразить их через координаты центра масс и относительные координаты.

80. Составить функцию Лагранжа и функцию Гамильтона для системы заряженных частиц, взаимодействующих по закону Кулона и находящихся во внешнем электромагнитном поле.

81. Составить функцию Гамильтона для случая симметричного волчка с одной неподвижной точкой в поле сил тяжести (случай Лагранжа).

82. Тонкий диск массы M может скользить без трения по горизонтальной плоскости. По диску движется частица массы m . Закон движения частицы в системе координат, жестко связанной с диском и с началом в центре диска, задан в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$. Определить закон изменения угловой скорости диска, если в начальный момент времени он был неподвижен.

83. По диску, описанному в задаче 82, движется материальная точка с относительной скоростью αt вдоль окружности радиуса R . Найти уравнения движения диска.

84. Вычислить тензор момента инерции относительно центра масс следующих молекул: 1) CH_4 , структуру которой можно представить с помощью тетраэдра (четырёхгранная призма с гранями в виде равносторонних треугольников), в центре которого находится атом С, а в вершинах — атомы Н; расстояние СН равно $a = 1,07 \text{ \AA}$; 2) H_2O ; структура которой изображена на рис. 32, а; 3) NH_3 (см. рис. 32, б).

85. Доказать, что для двухатомных молекул тензор момента инерции относительно системы координат, начало которой находится в центре масс, определяется одной величиной $J = \mu a^2$, где μ — приведенная масса двухатомной молекулы, a — равновесное расстояние между атомами.

86. Момент инерции фтористого водорода HF относительно его центра масс равен $1,37 \cdot 10^{-40} \text{ г} \cdot \text{см}^2$. Определить расстояние между

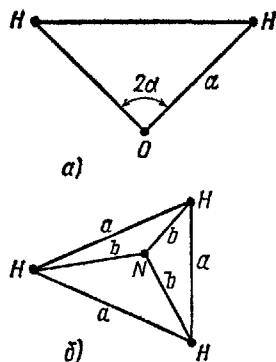


Рис. 32

атомами водорода и фтора, если масса атома водорода $M_H = 1,67 \cdot 10^{-24}$ г, масса атома фтора $M_F = 3,17 \cdot 10^{-22}$ г.

87. Определить отношение моментов инерции молекул H_2 , HD , D_2 , а также отношение их колебательных частот, считая, что потенциал взаимодействия атомов не зависит от изотопного состава молекулы.

88. Найти главные системы координат, связанные с центром масс, и главные моменты инерции следующих сплошных однородных тел:

- 1) стержня в форме прямого параллелепипеда $a \times b \times c$;
- 2) шара радиуса R ;
- 3) кругового конуса высоты h с радиусом основания R ;
- 4) трехосного эллипсоида с полуосями a , b , c ;
- 5) полого шара, внешний диаметр которого D , внутренний d ;
- 6) тора, средний радиус которого R , а радиус поперечного сечения r ;
- 7) полого цилиндра длины l , внешний радиус которого D , внутренний d ;
- 8) правильной трехгранной призмы, высота которой l , сторона основания a ,
- 9) правильной шестигранной призмы, длина которой l , сторона основания a .

89. Составить и проинтегрировать уравнение движения симметричного волчка, вдоль оси симметрии которого приложен постоянный момент внешних сил N (равнодействующая всех внешних сил равна нулю).

90. Определить компоненты угловой скорости как функции угла собственного вращения. Найти их максимальное и минимальное значения (в собственной системе координат) для случая однородного трехосного эллипсоида, вращающегося вокруг одной из своих осей (ось AB на рис. 33), причем ось AB в свою очередь вращается вокруг направления CD , перпендикулярного к ней и проходящего через центр эллипсоида.

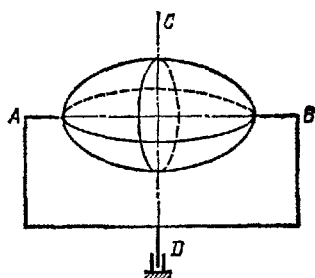


Рис. 33

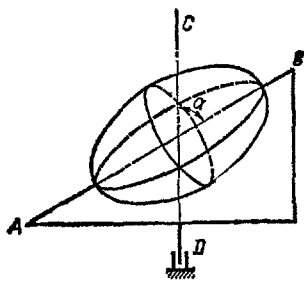


Рис. 34

91. Решить задачу 90 при условиях, если ось AB составляет угол α с осью CD , а эллипсоид симметричен относительно оси AB (рис. 34).

92. Определить закон движения однородного цилиндра радиуса a , катящегося по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиуса R (рис. 35).

93. Прямой однородный цилиндр массы M , длины l и радиуса r вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OZ , проходящей через центр тяжести цилиндра (рис. 36). Угол между осью симметрии цилиндра и осью OZ сохраняет при этом постоянную величину α , расстояние между подпятником и подшипником равно h . Определить боковое давление на подшипник и подпятник.

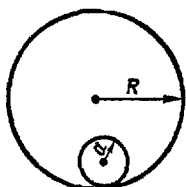


Рис. 35

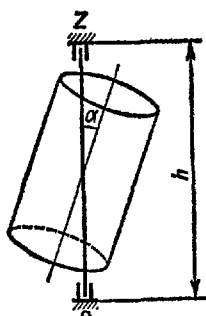


Рис. 36

94. Записать уравнение движения тяжелого симметричного волчка (случай Лагранжа) в форме уравнений Эйлера.

95. Найти углы Эйлера как функции времени в задаче об инерционном вращении симметричного волчка.

96. Найти элементы матрицы поворота, получающегося из трех последовательных поворотов в положительном направлении (по часовой стрелке). На угол θ вокруг оси OX , на угол ψ вокруг новой оси OY' и на угол φ вокруг новой оси OZ'' .

97. Выразить компоненты угловой скорости через углы, определенные в задаче 96, и их производные по времени.

98. На рис. 37 изображена схема однорельсовой железной дороги: K —сечение кузова вагона массы M_1 , который движется равномерно и прямолинейно по одному рельсу; R —рама, свободно поворачивающаяся вокруг горизонтальной оси A_1A_2 . С рамой жестко скреплен противовес M_3 . Маховик M_2 на оси B_1B_2 свободно вращается в подшипниках. Центр массы маховика лежит на пересечении осей A_1A_2 и B_1B_2 .

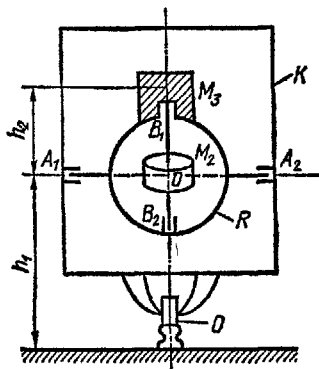


Рис. 37

Доказать, что решения $\varphi = \omega_0 t$, $\theta - \psi = 0$ являются устойчивыми решениями уравнения движения однорельсовой дороги (θ —угол вращения маховика M_2 , ψ —угол поворота рамы с противовесом M_3 относительно кузова, φ —угол наклона оси кузова по отношению к вертикали). Центр тяжести маховика находится на расстоянии h_1 , а центр тяжести кузова на расстоянии l от точки O ; центр тяжести противовеса M_3 находится на расстоянии h_2 от центра тяжести маховика.

99. Эллиптический неоднородный цилиндр длиной h , состоящий из двух материалов с плотностями ρ_1 и ρ_2 , находится на плоской поверхности (рис. 38). Определить устойчивое и неустойчивое положения равновесия. Большая и малая полуоси эллипса основания цилиндра a и b соответственно.

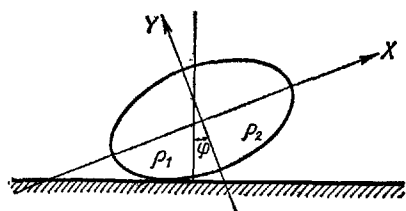


Рис. 38

100. Найти компоненты тензора деформаций в сферических и цилиндрических координатах.

101. Определить деформацию цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью ω .

Указание. За плотность силы \mathbf{f} необходимо принять плотность центробежных сил.

102. Найти дисперсионное уравнение для распространения упругих волн в монокристалле кубической симметрии. Найти фазовые скорости для упругих волн в двух случаях: распространяющихся параллельно и перпендикулярно боковым поверхностям куба.

103. Плоская продольная монохроматическая волна падает под углом θ_0 на границу изотропного твердого тела и вакуума (рис. 39). Найти законы отражения и определить отношение перпендикулярной к поверхности среды компоненты плотности потока энергии в отраженной продольной волне к такому же потоку в падающей волне.

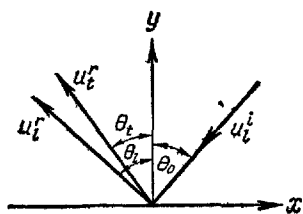


Рис. 39

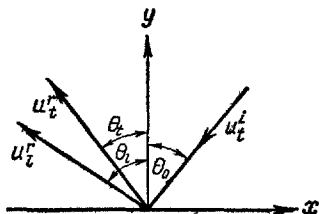


Рис. 40

На рис. 39 введены обозначения: u_i^i — смещение продольной падающей волны; u_i^r — продольной отраженной волны; u_t^t — поперечной отраженной волны.

104. Решить задачу 103 при условии, что падающая волна — поперечная и направление колебаний в ней лежит в плоскости падения (рис. 40).

105. Вязкая несжимаемая жидкость под действием перепада давления $\Delta p = p_2 - p_1$ течет между двумя бесконечными параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии d друг от друга. Определить поле скоростей и давлений в пространстве между плоскостями.

106. Исходя из условий предыдущей задачи, определить распределение температуры и поток тепла на стенки при условии: 1) нижняя и верхняя плоскости поддерживаются термостатом при постоян-

ной температуре T_0 ; 2) нижняя стенка адиабатически изолирована, а температура верхней поддерживается постоянной.

107. Вязкая несжимаемая жидкость находится между двумя коаксиальными цилиндрами, радиусы которых r_1 и r_2 каждый. Определить поле скоростей, в трех случаях: 1) внешний цилиндр вращается с угловой скоростью ω_1 ; 2) внутренний цилиндр вращается с угловой скоростью ω_2 ; 3) оба цилиндра вращаются соответственно с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 .

108. При условиях задачи 107 определить поле температур, если внутренний вращающийся цилиндр теплоизолирован, а внешний неподвижный цилиндр поддерживается при температуре T_0 .

109. Записать правую часть уравнений Навье—Стокса в цилиндрических и сферических координатах.

110. Безграничная пластинка толщиной d с одной стороны ограничена жидкостью, с другой—вакуумом (рис. 41). Найти собственные значения частоты ω для продольных звуковых колебаний, считая, что все величины зависят только от поперечной координаты x .

111. Найти дисперсионное уравнение для распространяющейся в изотропном твердом теле упругой волны вида $\mathbf{u} = \mathbf{f}(z) e^{i(\omega t - kx)}$, где $\mathbf{f}(z)$ —заглухающая функция (волна Рэлея). Исследовать структуру этой волны.

112. Определить частоты радиальных собственных колебаний упругого шара радиуса R , помещенного в вакуум.

113. Определить частоту радиальных колебаний сферической полости в неограниченной упругой среде.

114. Определить собственные частоты звуковых колебаний газа, заполняющего закрытый участок прямолинейной трубы с линейными размерами a , b , d . Считать трубу абсолютно жесткой.

115. Составить волновое уравнение и найти дисперсионное уравнение для звуковых волн, излучаемых источником звука, движущимся с постоянной скоростью v_0 относительно жидкости (газа). Найти частоту, воспринимаемую неподвижным относительно жидкости (газа) приемником звука.

116. Какую частоту будет воспринимать приемник звука, движущийся в жидкости (газе) относительно неподвижного источника звука (эффект Доплера)?

117. Определить течение жидкости по трубе с кольцевым сечением (внутренний и внешний радиусы равны r_1 и r_2 соответственно).

118. Вязкая несжимаемая жидкость под действием перепада давлений $\Delta p = p_2 - p_1$ течет в трубе эллиптического сечения длиной l . Определить поле скоростей и количество жидкости, протекающей за единицу времени через поперечное сечение трубы.

119. Вязкая несжимаемая жидкость течет под действием перепада давления $\Delta p = p_2 - p_1$ в трубе круглого сечения. Определить распределение температуры в жидкости, если стенки трубы поддерживаются при постоянной температуре T_0 .

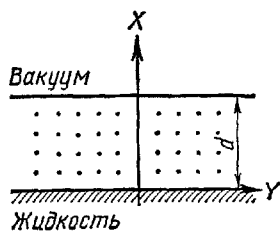


Рис. 41

РАЗДЕЛ II

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

§ 1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ, ФОРМУЛЫ И ПОНЯТИЯ

Основными величинами, характеризующими электромагнитное поле, являются векторы напряженности электрического поля \mathbf{E} и магнитной индукции \mathbf{B} . Напряженность электрического поля определяется по силе, действующей на некоторый пробный заряд e , из соотношения

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}; \quad (1)$$

магнитная индукция — по силе, действующей на элемент проводника $d\mathbf{l}$, по которому течет ток I :

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (2)$$

При рассмотрении электромагнитных полей в диэлектриках или магнетиках, когда поле создается как внешними источниками, так и электрической поляризацией и намагничиванием среды, удобно ввести еще две характеристики электромагнитного поля — вектор электрической индукции

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3)$$

и вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad (4)$$

где \mathbf{P} — дипольный электрический момент единицы объема, \mathbf{M} — магнитный момент единицы объема, ϵ_0 и μ_0 — соответственно диэлектрическая и магнитная постоянные. Их численные значения равны

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\kappa^2}{\text{в} \cdot \text{м}^2}, \quad (5)$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{2\text{H}}{\text{м}}, \quad (6)$$

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}, \text{ где } c \text{ — скорость света.}$$

Связь между векторами \mathbf{P} и \mathbf{E} , \mathbf{M} и \mathbf{H} определяется свойствами среды. В линейном по полю приближении в общем случае анизотропной среды имеют место соотношения:

$$P_i = \epsilon_{ik} E_k, \quad (7)$$

$$M_i = \kappa_{ik} H_k. \quad (8)$$

Индексы i и k принимают значения 1, 2, 3 и обозначают проекции вектора на оси x , y и z . В тех соотношениях, где некоторый индекс встречается дважды, имеет место суммирование по этому индексу. Здесь α_{ik} называется тензором поляризуемости вещества, κ_{ik} — тензором магнитной восприимчивости.

В силу соотношений (3), (4), (7), (8) можно написать выражения, связывающие векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{H} :

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k, \quad (9)$$

$$B_i = \mu_{ik} H_k, \quad (10)$$

где

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 (\delta_{ik} + \alpha_{ik})$$

— тензор диэлектрической проницаемости,

$$\mu_{ik} = \mu_0 (\delta_{ik} + \kappa_{ik})$$

— тензор магнитной проницаемости.

В изотропной среде соотношения (7) — (10) упрощаются к виду

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \alpha \mathbf{E}, \quad (11)$$

$$\mathbf{M} = \kappa \mathbf{H}, \quad (12)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (13)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (14)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \alpha)$ — диэлектрическая проницаемость среды, $\mu = \mu_0 (1 + \kappa)$ — магнитная проницаемость среды; часто пользуются относительными проницаемостями $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$, $\mu_r = \mu/\mu_0$.

Исходной системой уравнений электродинамики являются уравнения Максвелла, которые в интегральной форме имеют вид:

$$\oint H_t dl = \int j_n dS + \int \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)_n dS, \quad (15)$$

$$\oint E_t dl = - \int \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS, \quad (16)$$

$$\oint D_n dS = \int \rho dV, \quad (17)$$

$$\oint B_n dS = 0, \quad (18)$$

где \mathbf{j} — плотность тока проводимости, ρ — объемная плотность зарядов.

В дифференциальной форме уравнения Максвелла записываются так

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (19)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (20)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad (21)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (22)$$

На границе раздела двух сред выполняются граничные условия:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad (23)$$

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad (24)$$

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad (25)$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = \mathbf{i}, \quad (26)$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности, проведенная из среды 1 в среду 2, σ — плотность поверхностных зарядов, \mathbf{i} — плотность поверхностного тока, E_t — тангенциальная составляющая электрического поля на границе раздела, D_n и B_n — нормальные составляющие электрической и магнитной индукции на границе раздела.

В электростатике изучается область электрических явлений, в которых все величины не зависят от времени и, кроме того, отсутствует движение зарядов. В этом случае из уравнений (19)–(22) следует система уравнений электростатики:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (27)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (28)$$

Уравнению (27) можно удовлетворить, если ввести потенциал электростатического поля по соотношению

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (29)$$

В однородной среде потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (30)$$

в случае отсутствия зарядов — уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

На границе раздела двух сред с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 справедливы следующие граничные условия:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad (31)$$

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_1 - \varepsilon_2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_2 = \sigma. \quad (32)$$

В случае электростатики электрическое поле не проникает внутрь проводников. Отсюда из соотношения (29) следует, что внутри проводника потенциал постоянен.

Поскольку $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ внутри проводника, из граничного условия (32) найдем связь между плотностью поверхностных зарядов на поверхности проводника и потенциалом у проводника:

$$\sigma = -\varepsilon \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_S. \quad (33)$$

Полный заряд проводника равен

$$e = - \oint \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad (34)$$

где интегрирование проходит по поверхности S проводника.

Для системы проводников наиболее распространены следующие постановки задач. Найти потенциал в любой точке системы, если

1) заданы потенциалы проводников φ_i :

$$\varphi(\mathbf{r})|_S = \varphi_i; \quad (35)$$

2) заданы заряды проводников q_i . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r})|_S &= \text{const}, \\ - \oint_{S_i} \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS_i &= q_i. \end{aligned} \quad (36)$$

Большое количество задач электростатики, обладающих цилиндрической симметрией, решаются с помощью функций комплексного переменного. Действительная и мнимая части аналитической функции $W(z) = \varphi + i\Psi$ комплексной переменной $z = x + iy$ являются решениями уравнения Лапласа: $\Delta\varphi = 0$ и $\Delta\Psi = 0$. Кроме того, выполняется соотношение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0,$$

т. е. линии $\varphi = \text{const}$ и $\Psi = \text{const}$ ортогональны друг к другу. Таким образом, φ и Ψ могут быть решениями электростатической задачи. Если $\varphi(x, y)$ — потенциал, то линии $\Psi = \text{const}$ — силовые линии, ортогональные к эквипотенциальным поверхностям. Положим $\varphi = 0$ на плавном контуре L . Для того чтобы найти эквипотенциальные поверхности $\varphi = \text{const}$, нужно представить уравнение контура L в параметрическом виде

$$x = f(P), \quad y = F(P), \quad (37)$$

где f и F — однозначные функции, и вся область изменения действительного параметра P отвечает движению точки вдоль заземленного проводника. Потенциал φ следует искать в виде

$$\varphi = \text{Im } W, \quad (38)$$

а W находится из уравнения $z = f(W) + iF(W)$.

Если задано распределение объемных и поверхностных зарядов, потенциал в точке \mathbf{r} равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (39)$$

На расстояниях, намного превышающих размеры системы, потенциал зарядов можно представить так

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi^{(0)}(\mathbf{r}) + \varphi^{(1)}(\mathbf{r}) + \varphi^{(2)}(\mathbf{r}) + \dots, \quad (40)$$

где $\varphi^{(0)}(\mathbf{r})$ — потенциал точечного заряда, равного заряду системы:

$$\varphi^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon r}, \quad (41)$$

$\varphi^{(1)}$ — потенциал диполя с дипольным моментом $\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV$, равный

$$\varphi^{(1)} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon r^3}, \quad (42)$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i, k} \frac{1}{2!} Q_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (43)$$

— потенциал квадрупольного момента.

Компоненты тензора квадрупольного момента определяются так:

$$Q_{ik} = \int \rho(\mathbf{r}) (3x_i x_k - r^2 \delta_{ik}) dV. \quad (44)$$

Энергия электростатического поля равна

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (45)$$

Энергия взаимодействия двух систем зарядов с плотностями зарядов ρ_1 и ρ_2 каждая определяется соотношением

$$W = \int \rho_1 \varphi_2 dV = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho_1(\mathbf{r}_1) \rho_2(\mathbf{r}_2) dV_1 dV_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (46)$$

Явления магнитостатики описываются следующей системой уравнений:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (47)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (48)$$

с граничными условиями (25), (26). Уравнению (48) можно удовлетворить, если ввести векторный потенциал

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (49)$$

В однородной изотропной среде векторный потенциал \mathbf{A} удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}. \quad (50)$$

При заданной плотности тока \mathbf{j} решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (51)$$

На расстояниях, намного превышающих размеры системы,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu \mathbf{m}}{4\pi r^3}, \quad (52)$$

где \mathbf{m} — магнитный момент системы, равный

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r}, \mathbf{j}(\mathbf{r})] dV. \quad (53)$$

Энергия статического магнитного поля равна

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV = \\ &= \frac{\mu}{8\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned} \quad (54)$$

Для системы проводников энергию магнитного поля можно переписать в следующем виде:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i, k} L_{ik} I_i I_k, \quad (55)$$

где

$$L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi I_k I_i} \int \frac{\mathbf{j}_k(\mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{j}_i(\mathbf{r}_i) dV_k dV_i}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|}. \quad (56)$$

Коэффициенты L_{ik} при $i \neq k$ называются коэффициентами взаимной индукции, при $i = k$ — коэффициентами самоиндукции.

В случае медленно меняющихся во времени полей, когда выполняются условия

$$\omega \ll \frac{\sigma^*}{\varepsilon}, \quad l \ll \lambda, \quad (57)$$

где σ^* — проводимость среды, ω и λ — соответственно частота и длина волны электромагнитных колебаний, l — линейные размеры системы, система уравнений Максвелла принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \end{aligned} \quad (58)$$

В общем случае переменных полей следует решать систему уравнений (19) — (22). При отсутствии токов проводимости и зарядов эта система описывает свободное электромагнитное поле. Частным решением уравнений Максвелла для свободного поля являются плоские монохроматические волны, у которых

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}, \quad (59)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}; \quad (60)$$

здесь ω — частота электромагнитных колебаний, \mathbf{k} — волновой вектор. В изотропной среде его направление совпадает с направлением распространения энергии, а по модулю он равен $k = \frac{\omega}{v}$, где $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ — фазовая скорость распространения электромагнитных волн.

Поток энергии электромагнитного поля определяется вектором Умова — Пойтинга:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]. \quad (61)$$

В случае переменных электромагнитных полей связь между потенциалами и напряженностями электрического и магнитного полей

имеет следующий вид:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad (62)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (63)$$

В случае калибровки Лоренца

$$\text{div } \mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad (64)$$

потенциалы φ и \mathbf{A} удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta\varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (65)$$

$$\Delta\mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{j}. \quad (66)$$

Решения уравнений (65), (66) в виде запаздывающих потенциалов записываются так:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV', \quad (67)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'. \quad (68)$$

На больших расстояниях от системы зарядов, значительно превышающих длину излучающей электромагнитной волны ($r \gg \lambda$), в вакууме имеют место соотношения:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{A}}, \mathbf{n}], \quad (69)$$

$$\mathbf{E} = c[\mathbf{B}, \mathbf{n}] = [[\dot{\mathbf{A}}, \mathbf{n}], \mathbf{n}], \quad (70)$$

где

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}}{c}) dV', \quad (71)$$

$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ — единичный вектор в направлении излучения.

Если, кроме того, длина волны намного больше размеров излучающей системы зарядов, то электромагнитное поле на больших расстояниях можно представить как сумму полей, излучаемых диполем, квадруполем и прочими мультиполями. Максимальным по интенсивности является дипольное излучение. Соответствующее ему поле определяется соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi cr} [\ddot{\mathbf{p}}, \mathbf{n}], \\ \mathbf{E} &= \frac{\mu_0}{4\pi r} [[\ddot{\mathbf{p}}, \mathbf{n}], \mathbf{n}], \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

где \mathbf{p} — дипольный момент системы.

Интенсивность излучения диполя определяется формулой

$$J = \frac{\ddot{p}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (73)$$

Магнитная гидродинамика изучает поведение проводящей жидкости (или газа) в электромагнитных полях. В гидродинамическом приближении движение системы описывается переменными: плотностью, скоростью, давлением. При низких частотах электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям (58). Уравнения магнитной гидродинамики записываются так:

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_v \mathbf{v} = 0, \quad (74)$$

$$\rho_v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_v (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + [\mathbf{j}, \mathbf{B}] + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho_v \mathbf{g}, \quad (75)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (76)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (77)$$

$$\mathbf{j} = \sigma^* (\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]), \quad (78)$$

где ρ_v — плотность вещества, p — давление, η — вязкость, \mathbf{g} — ускорение силы тяжести, σ^* — проводимость, \mathbf{v} — скорость.

Уравнения (74—78) следует дополнить уравнениями состояния жидкости.

Переходим к краткому изложению специальной теории относительности.

Основные положения специальной теории относительности:

1) скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах координат и равна $c = 2,99793 \cdot 10^8$ м/сек;

2) физические законы одинаковы во всех инерциальных системах.

Применение этих постулатов приводит к следующим следствиям.

Пусть событие в системе K имеет координаты: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$, в системе K' : $x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$, $x'_3 = z'$, $x'_4 = ict'$. Если система K' движется относительно системы K в направлении оси x со скоростью v , то связь между координатами события в разных системах дается преобразованиями Лоренца:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 + \beta x_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ x'_2 &= x_2, \\ x'_3 &= x_3, \\ x'_4 &= \frac{x_4 - \beta x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

где $\beta = v/c$.

Пусть тело движется относительно системы K со скоростью \mathbf{u} . Тогда его скорость относительно системы K' равна

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}},$$

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}. \quad (80)$$

Дифференциальный закон движения частицы под действием силы \mathbf{F} имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (81)$$

где

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (82)$$

— импульс релятивистской частицы, m_0 —масса покоящейся частицы.

Совокупность четырех величин, которые преобразуются как координаты, называется компонентами четырехмерного вектора. Примерами 4-мерного вектора могут служить 4-мерный вектор импульса с компонентами $(\mathbf{p}, i \frac{E}{c})$, где \mathbf{p} —импульс, E —энергия частицы; волновой вектор и частота в плоской электромагнитной волне, распространяющейся в вакууме $(\mathbf{k}, i \frac{\omega}{c})$; 4-мерный вектор плотности тока $(\mathbf{j}, ic\rho)$; 4-мерный вектор потенциала $(\mathbf{A}, i \frac{\Phi}{c})$.

Компонентами четырехмерного тензора второго ранга называется совокупность шестнадцати величин, которые преобразуются к другой инерциальной системе отсчета путем двукратного применения преобразования координат (79). Примерами четырехмерного тензора является тензор электромагнитного поля, который можно представить в виде

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \quad (83)$$

и тензор энергии-импульса

$$T_{\alpha\beta} = \varepsilon_0 \left(F_{\alpha\mu} F_{\beta\mu} - \frac{1}{4} \delta_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}^2 \right) \quad (84)$$

$(\alpha, \beta, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4).$

§ 2. ЗАДАЧИ

Векторный анализ

1. Показать, что

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0, \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0;$$

где \mathbf{A} и φ произвольные.

2. Доказать векторные соотношения:

а) $\operatorname{grad} \varphi f = \varphi \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} \varphi$;

б) $\operatorname{div} \varphi \mathbf{A} = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \operatorname{grad} \varphi$;

в) $\operatorname{rot} \varphi \mathbf{A} = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} + [\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{A}]$;

г) $\operatorname{div} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}$;

д) $\operatorname{grad} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [\mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{B}] + [\mathbf{B}, \operatorname{rot} \mathbf{A}] + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$;

е) $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}$.

3. Вычислить градиент функции $f(r)$, зависящей только от модуля радиуса-вектора \mathbf{r} .

4. Вычислить $\operatorname{div} \mathbf{r}$, $\operatorname{rot} \mathbf{r}$, $\operatorname{rot} \varphi(r) \mathbf{r}$.

5. Вычислить $\operatorname{grad} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$, $\operatorname{grad} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$, $(\mathbf{p} \nabla) \mathbf{r}$, $\operatorname{div} [\mathbf{p}, \mathbf{r}]$, $\operatorname{rot} [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$, где \mathbf{p} — постоянный вектор.

6. Вычислить $\operatorname{grad} \mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{B}(r)$, $\operatorname{div} \varphi(r) \mathbf{A}(r)$, $\operatorname{rot} \varphi(r) \mathbf{A}(r)$. Функция $\varphi(r)$ и векторы $\mathbf{A}(r)$ и $\mathbf{B}(r)$ зависят только от модуля радиуса-вектора \mathbf{r} .

7. Записать проекции вектора $\Delta \mathbf{A}$ на оси:

а) сферической системы координат; б) цилиндрической системы координат.

8. Пользуясь теоремой Остроградского—Гаусса, вычислить интегралы:

$$\mathbf{I} = \oint \mathbf{r} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad \mathbf{I} = \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n} dS,$$

если объем, который охватывает замкнутая поверхность, равен V ; \mathbf{A} — постоянный вектор.

9. Показать, что $\int_V \mathbf{A} dV = 0$, если $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ внутри объема V ,

а $A_n = 0$ на границе объема.

10. Показать, что дивергенция вектора

$$\mathbf{A} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

равна нулю.

11. Найти решение уравнения Лапласа в сферической системе координат, зависящее лишь от одной координаты r .

Электростатика

12. Определить напряженность электрического поля внутри и снаружи равномерно заряженного шара. Объемная плотность заряда равна ρ , радиус шара R .

13. В равномерно заряженном шаре с объемной плотностью заряда ρ имеется шарообразная полость, центр которой расположен на расстоянии a от центра шара. Найти напряженность электрического поля внутри полости, внутри шара и снаружи шара. Радиусы шара и полости равны соответственно R и R' .

14. Определить напряженность электрического поля внутри и снаружи шара, объемная плотность заряда которого меняется по закону

$$\rho = \alpha r^n,$$

где $n > -2$. Радиус шара R .

15. Найти напряженность электрического поля внутри и снаружи равномерно заряженного цилиндра радиуса R . Заряд единицы длины цилиндра равен λ .

16. Слой непроводящего вещества, ограниченный двумя параллельными плоскостями, заряжен до объемной плотности ρ . Толщина слоя равна d . Найти напряженность электрического поля внутри и снаружи слоя.

17. Определить емкость конденсаторов: а) сферического, б) плоского, в) цилиндрического. Между обкладками конденсаторов находится диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ .

18. Два длинных цилиндрических проводника с радиусами R_1 и R_2 каждый расположены параллельно друг другу на расстоянии d . Рассчитать емкость единицы длины такой системы при условии, что $d \gg R_1$ и $d \gg R_2$.

19. Найти уравнение силовых линий двух точечных зарядов e и $-e$, расположенных на расстоянии d друг от друга.

20*. Записать комплексный потенциал W однородного электрического поля с напряженностью E . Рассмотреть частный случай поля плоскости с поверхностной плотностью заряда σ .

21. Определить потенциал вблизи заземленного угла, образованного плоскостями $x=0$, $y=0$.

22. Определить какой вид имеют эквипотенциальная поверхность и силовые линии, если потенциал равен

$$\varphi = \operatorname{Re}(\sqrt{z}).$$

Потенциал какого заземленного контура дается этой формулой?

23. Определить потенциал и вид эквипотенциальных поверхностей, если комплексный потенциал $W = \ln z$.

* В задачах (20)—(27) речь идет о двумерном распределении потенциала.

24. Определить, какой физической задаче соответствует потенциал

$$\varphi = \operatorname{Re} \left[\ln \frac{z-a}{z+a} \right].$$

Найти эквипотенциальную поверхность и силовые линии при $a \rightarrow 0$.

25. Найти потенциал вблизи заземленной параболы, уравнение которой

$$y^2 = 4a(x+a).$$

26. Найти потенциал вблизи заземленного эллипса, уравнение которого

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Рассмотреть предельный случай поля вблизи окружности (в пространственной задаче цилиндра), положив $b = a$.

27. Найти эквипотенциальные поверхности и силовые линии вблизи заземленной гиперболы, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

28. Найти потенциал и напряженность электрического поля на оси плоского кольца равномерно заряженного с поверхностной плотностью σ (внутренний радиус кольца R_1 , внешний R_2). Рассмотреть предельные случаи: а) поле плоского диска ($R_1 \rightarrow 0$) и б) поле заряженной плоскости ($R_1 \rightarrow 0, R_2 \rightarrow \infty$).

29. Определить потенциал, создаваемый электроном атома водорода, считая, что заряд электрона в основном состоянии распределен с объемной плотностью $\rho = \frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a}$, где a — постоянная.

30. Определить коэффициенты разложения потенциала точечного заряда в интеграл Фурье.

31. Найти дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет потенциал

$$\varphi = q \frac{e^{-r/a}}{r}.$$

32. Найти потенциал, создаваемый зарядом, распределенным в бесконечной среде по закону

$$\rho = \rho_0 \sin ax \sin by \sin cz.$$

33. Точечный заряд e расположен на расстоянии d от проводящей заземленной плоскости. Определить потенциал и напряженность поля такой системы. Найти плотность поверхностных зарядов, индуцированных на плоскости. Показать, что полный индуцированный заряд равен $-e$.

34. Методом изображений найти потенциал электрического поля заряда q , находящегося внутри прямого угла, образованного двумя проводящими плоскостями.

35. Точечный заряд e находится на расстоянии d от центра заземленной проводящей сферы радиуса R . Определить потенциал системы методом изображений.
36. Найти потенциал точечного заряда e , находящегося вблизи изолированного проводящего шара радиуса R .
37. Точечный заряд e находится на расстоянии d от центра сферического выступа радиуса R проводящей плоскости напротив той точки, где выступ наибольший. Центр сферического выступа лежит на проводящей плоскости. Определить потенциал этой системы.
38. На расстоянии d от центра проводящей заземленной сферы радиуса R находится диполь p , направленный положительным зарядом к центру сферы. Найти потенциал системы.
39. Заряд e расположен на расстоянии d от плоской поверхности бесконечного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Среда, в которой находится заряд, имеет диэлектрическую проницаемость ϵ_1 . Определить потенциал ϕ и вектор электрической индукции в обеих средах.
40. Центр проводящей сферы радиуса R находится на плоской границе раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 каждая. Заряд сферы e . Найти потенциал системы, вектор электрической индукции и распределение поверхностного заряда на сфере.
41. Решить задачу 35 при помощи разложения потенциала по решениям уравнения Лапласа в сферических координатах. Определить плотность поверхностного заряда и полный заряд, наведенный на сфере.
42. Точечный заряд e находится на расстоянии d от проводящей сферы, имеющей потенциал V . Найти потенциал вне сферы и поверхностную плотность заряда на сфере.
43. Определить потенциал заряженной сферы радиуса R . Поверхностная плотность заряда меняется по закону $\sigma = \sigma_0 \cos \vartheta$.
44. Определить потенциал и напряженность электрического поля равномерно поляризованного шара радиуса R . Удельный дипольный момент шара равен P .
45. В заданном неоднородном электростатическом поле помещена проводящая сфера радиуса R . Определить потенциал в окрестности сферы.
46. Диэлектрическая сфера радиуса R находится в однородном электрическом поле напряженностью E_0 . Определить потенциал электрического поля внутри и снаружи сферы.
47. Проводящая заземленная сфера помещена в однородное электрическое поле напряженностью E_0 . Найти потенциал системы и плотность поверхностных зарядов на сфере.
48. Сфера равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ , за исключением сегмента у полюса, ограниченного окружностью $\vartheta = \alpha$. Найти потенциал внутри и снаружи сферической поверхности.
49. Одна грань прямоугольного параллелепипеда находится под потенциалом V . Все прочие грани имеют нулевой потенциал. Найти распределение потенциала внутри параллелепипеда.

50. У прямоугольного параллелепипеда со сторонами a , b и c две противоположные грани $z = 0$ и $z = c$ имеют потенциалы V_1 и V_2 . Остальные грани заземлены. Определить потенциал внутри заданного параллелепипеда.

51. В полой цилиндрической трубке радиуса r_0 с проводящими стенками находится диск радиуса R , заряженный с поверхностной плотностью σ . Ось диска совпадает с осью цилиндра. Определить потенциал внутри проводника. Рассмотреть предельный случай точечного заряда внутри проводника, когда $R \rightarrow 0$, но величина $\pi R^2 \sigma = e$ (заряд диска) остается конечной.

52. Определить потенциал поля, созданного точечным зарядом e и расположенной на расстоянии d от него однородной плоскопараллельной пластинки толщиной a с диэлектрической проницаемостью ϵ . Рассмотреть частный случай, когда точечный заряд расположен на поверхности полубесконечного кристалла, и сравнить с решением задачи 40.

53. Найти квадрупольный момент эллипсоида, равномерно заряженного по объему с объемной плотностью заряда ρ .

54. Определить потенциал точечного заряда e , находящегося в однородной анизотропной среде с заданным тензором диэлектрической проницаемости.

55. Найти напряженность электрического поля внутри анизотропной диэлектрической пластинки, помещенной в однородное поле E_0 .

56. Вычислить энергию взаимодействия электронного облака атома водорода с протоном. Плотность заряда электронного облака равна

$$\rho = \frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a}.$$

57. Вычислить энергию взаимодействия двух шаров, заряды которых e_1 и e_2 распределены сферически симметричным образом. Расстояние между центрами шаров равно a .

58. Если сфера не заряжена, то она погружается в жидкость меньше, чем наполовину. Какой должен быть нанесен на сферу заряд, чтобы она погрузилась в жидкость наполовину? Масса сферы M , радиус R , плотность вещества μ , диэлектрическая проницаемость ϵ .

59. Для получения напряженности E' микроскопического поля, действующего на молекулу в кубическом кристалле, обычно все заряды разделяют на две части: заряды внутри некоторой сферы микроскопических размеров с центром, совпадающим с координатой молекулы, и заряды вне сферы. Найти микроскопическое поле, действующее на молекулу, если заряды разделить не сферой, а кубом.

60. Найти потенциал заряда e в полностью ионизированной плазме. Положительные ионы создают однородный фон, а электроны находятся в тепловом равновесии с электростатическим потенциалом. Функция распределения электронов пропорциональна множителю

Больцмана $e^{-e\varphi/kT}$; число электронов в единице объема равно

$$n = n_0 e^{-e\varphi/kT},$$

где φ — потенциал электростатического поля. Решить задачу для высоких температур.

Постоянный электрический ток. Магнитостатика. Квазистационарные явления

61. Обкладки шарового конденсатора, между которыми расположена проводящая среда с удельной электропроводностью σ^* , находятся под потенциалами φ_1 и φ_2 каждая. Вычислить ток через конденсатор. Найти сопротивление R шарового слоя между обкладками. Радиусы обкладок r_1 и r_2 .

62. Найти закон преломления линий тока на плоской границе раздела двух проводящих сред с проводимостями σ_1^* и σ_2^* .

63. Разность потенциалов между плоскими электродами равна V . Расстояние между электродами d . Из одного электрода вырываются электроны до тех пор, пока образовавшийся объемный заряд не компенсирует действие внешнего поля. Найти зависимость плотности тока от приложенной к электродам разности потенциалов.

64. Найти напряженность магнитного поля внутри и снаружи цилиндрического проводника, по которому течет ток, равномерно распределенный по его сечению с плотностью j . Радиус проводника R .

65. Найти напряженность магнитного поля внутри цилиндрической полости цилиндрического проводника, по которому течет ток, равномерно распределенный по его сечению с плотностью j . Оси цилиндра, образующего полость, и цилиндрического проводника параллельны и находятся друг от друга на расстоянии a .

66. В бесконечном прямом проводнике радиуса R течет ток, плотность которого равна $\frac{a}{\rho}$ при $\rho \leq R$, где ρ — расстояние от оси проводника. Найти векторный потенциал и напряженность магнитного поля внутри и снаружи проводника.

67. Найти магнитное поле плоскости, по которой течет ток с поверхностной плотностью i , одинаковой в любой точке плоскости.

68. По двум параллельным плоскостям текут поверхностные токи с плотностью i . Найти напряженность магнитного поля в двух случаях: а) токи параллельны, б) токи текут в противоположных направлениях.

69. Вдоль бесконечной прямолинейной полосы, имеющей ширину a , течет ток, равномерно распределенный по ее ширине с плотностью поверхностного тока i . Найти магнитное поле. Рассмотреть предельный случай, когда ширина полосы стремится к бесконечности. Сравнить с решением задачи 67.

70. По двум бесконечным линейным проводникам, расстояние между которыми d , текут в противоположных направлениях токи силой I . Вычислить векторный потенциал системы.

71. Найти векторный потенциал и напряженность магнитного поля, создаваемого током I , текущим по кольцу радиуса R . Исследовать частный случай, когда точка наблюдения находится на оси кольца.

72. Найти векторы напряженности и магнитной индукции магнитного поля, создаваемого однородно намагниченным шаром с магнитным моментом единицы объема \mathbf{M} . Радиус шара R .

73. Сферическая оболочка, имеющая внутренний радиус R_1 , внешний R_2 и состоящая из вещества с магнитной проницаемостью μ , помещена в однородное магнитное поле \mathbf{H}_0 . Найти результирующее магнитное поле.

74. Найти магнитный момент шара, равномерно вращающегося с угловой частотой Ω . Заряд e равномерно распределен по объему шара. Показать, что гиромангнитное отношение равно $\frac{e}{2m}$, где m — масса шара.

75. Сфера радиуса R вращается с угловой скоростью Ω вокруг оси OZ . Ее поверхность заряжена с постоянной поверхностной плотностью заряда σ . Найти векторный потенциал и напряженность магнитного поля внутри и снаружи сферы.

76. Вычислить силу, с которой взаимодействуют два бесконечных параллельных провода, находящихся на расстоянии d друг от друга, по которым текут токи I_1 и I_2 . Магнитная проницаемость среды μ .

77. Вычислить силу взаимодействия двух коаксиальных кольцевых проводников с радиусами R_1 и R_2 , центры которых находятся на расстоянии d друг от друга и по которым текут токи I_1 и I_2 в одинаковых направлениях. Проводники находятся в среде с магнитной проницаемостью μ .

78. Найти самоиндукцию L единицы длины линии, состоящей из двух коаксиальных цилиндров с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), пространство между которыми заполнено веществом с магнитной проницаемостью μ .

79. Внутри цилиндра радиуса R_2 находится провод радиуса R_1 , магнитная проницаемость которого равна μ_1 . Между проводом и цилиндром — среда с магнитной проницаемостью μ_2 . Определить самоиндукцию единицы длины контура.

80. Диамагнитная восприимчивость единицы объема определяется формулой

$$\chi = -\frac{Ze^2N}{6m} \mu_0 \bar{r}^2,$$

где Ze — заряд ядра атома, e и m — заряд и масса электрона, N — число атомов в единице объема, \bar{r}^2 — средний квадрат радиуса, определяемый по формуле

$$\bar{r}^2 = \frac{1}{Ze} \int r^2 \rho(r) dr,$$

$\rho(r)$ — плотность заряда в атоме. Определить χ для атома водорода,

в котором

$$\rho(r) = \frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a},$$

где $a = 0,528 \cdot 10^{-10}$ м.

81. Показать, что постоянное однородное магнитное поле \mathbf{B} можно описывать векторным потенциалом $\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{B}\mathbf{r}]$.

82. Найти распределение электрического и магнитного полей внутри цилиндрического проводника, по которому течет периодический ток с частотой ω . Проводимость проводника σ^* .

83. Под действием постоянного магнитного поля \mathbf{H}_0 в магнетике устанавливается магнитный момент единицы объема \mathbf{M}_0 параллельный \mathbf{H}_0 . К системе кроме постоянного поля приложено переменное магнитное поле перпендикулярное \mathbf{H}_0 и вращающееся с частотой ω . Амплитуда h вектора напряженности переменного поля удовлетворяет условию $h \ll H_0$. Определить магнитный момент, созданный переменным полем в единице объема магнетика.

84. Шар из магнетика находится в постоянном магнитном поле, напряженность которого внутри шара равна \mathbf{H}_0 . Предполагая, что размеры шара намного меньше длины волны собственных колебаний магнитного момента, найти частоту этих колебаний.

85. Найти собственные частоты двух индуктивно связанных контуров с коэффициентами самоиндукции L_1 и L_2 , коэффициентом взаимной индукции L_{12} , емкостями C_1 и C_2 и с равными нулю активными сопротивлениями.

Распространение электромагнитных волн. Волноводы. Резонаторы. Магнитная гидродинамика

86. Две плоские монохроматические линейно поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях волны, имеющие одинаковую частоту, распространяются в одном направлении. Амплитуды первой и второй волн равны E_{01} и E_{02} соответственно. Разность фаз у волн χ . Определить поляризацию результирующей волны

87. Определить затухание электромагнитных волн в среде при полном внутреннем отражении.

88. Плоскополяризованная волна падает нормально на поверхность немагнитной среды, имеющей диэлектрическую проницаемость ϵ и проводимость σ^* . Найти коэффициент отражения R . Рассмотреть предельный случай хорошего проводника.

89. Определить амплитуды волн, отраженной от плоскопараллельной пластины и прошедшей через нее. Толщина пластины d , диэлектрическая проницаемость ϵ . Найти условия, при которых отражение электромагнитных волн от пластины минимально.

90. Вдоль плоской границы раздела двух диэлектриков, имеющих противоположные по знаку диэлектрические проницаемости ϵ_1 и $-\epsilon_2$, распространяется поверхностная волна, у которой напря-

женность магнитного поля перпендикулярна направлению распространения (H -волна). Определить закон дисперсии такой волны.

91. Электромагнитная волна падает под углом ϑ_1 на плоскую поверхность полубесконечного кристалла, оптическая ось которого перпендикулярна поверхности кристалла. Определить направление распространения обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле.

92. Среда состоит из упруго связанных заряженных частиц, коэффициенты упругости которых различны в трех направлениях. Концентрация частиц N . Найти тензор диэлектрической проницаемости среды.

93. Показать, что если $\epsilon(\omega)$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексного переменного ω и стремится к ϵ_0 при больших значениях $|\omega|$, то действительная $\epsilon'(\omega)$ и мнимая $\epsilon''(\omega)$ части удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon_0 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega',$$

$$\epsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon'(\omega') - \epsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega',$$

где P — главное значение интеграла.

94. Диэлектрическая проницаемость среды, состоящей из совокупности упруго связанных электронов, равна

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k\omega},$$

где N — число электронов в единице объема, e , m — заряд и масса электрона, f_k и ω_k — постоянные. Показать, что эта формула удовлетворяет дисперсионным соотношениям, приведенным в предыдущей задаче.

95. Вещество состоит из квазиупруго связанных электронов (концентрация N), находящихся в однородном магнитном поле с магнитной индукцией B_0 . На вещество падает линейно поляризованная монохроматическая световая волна, волновой вектор которой направлен вдоль магнитного поля. Найти поворот плоскости поляризации электромагнитной волны, если волна прошла в веществе расстояние l .

96. Система заряженных ангармонических осцилляторов находится в переменном электромагнитном поле с частотой ω . Потенциальная энергия осцилляторов как функция смещения частицы имеет вид

$$U = \frac{1}{2} kr^2 + \frac{1}{3} \sum_{i, j, l=1}^3 \beta_{ijl} x_i x_j x_l.$$

Считая коэффициенты β_{ijl} малыми, найти дипольный момент единицы объема с точностью до членов, линейных по β_{ijl} и квадратичных по напряженности электрического поля. Показать, что в дипольном

момента имеются колебания с частотой, удвоенной по отношению к частоте падающей волны.

Масса осциллятора m , заряд e , собственная частота ω_0 , концентрация осцилляторов N .

97 Найти нелинейную поляризацию системы, рассмотренной в предыдущей задаче, если электромагнитное излучение состоит из двух монохроматических волн с частотами ω_1 и ω_2 .

98. Среда представляет собой систему параллельных цепочек, состоящих из периодически расположенных осцилляторов с собственной частотой ω_0 . Ближайшие соседи в цепочке связаны законом Гука. Рассмотреть распространение электромагнитных волн вдоль цепочек, предполагая, что длина электромагнитных волн намного больше расстояния между осцилляторами. Найти показатели преломления электромагнитных волн.

99. Найти напряженность, закон дисперсии и граничную частоту для ТЕ- и ТН-волн в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками, имеющими размеры a и b .

100. Определить затухание ТН-волн в прямоугольном волноводе с размерами стенок a и b . Проводимость стенок волновода σ^* , магнитная проницаемость μ .

101. Найти закон дисперсии электромагнитных волн для волновода круглого сечения с идеально проводящими стенками. Радиус сечения R .

102. Показать, что число колебаний в интервале $\Delta\omega$ в прямоугольном резонаторе с идеально проводящими стенками равно $\frac{L_1 L_2 L_3 \omega^2 \Delta\omega}{\pi^2 c^3}$.

103. Рассмотреть распространение электромагнитных волн вдоль круглого цилиндрического диэлектрического волновода с диэлектрической проницаемостью ϵ . Радиус волновода R .

104. Определить напряженность электрического поля и собственные частоты ТН-волн в прямоугольном резонаторе. Считать, что стенки резонатора идеально проводящие. Размеры стенок a , b и c .

105. Определить электромагнитное поле и собственные частоты электромагнитных волн в круглом цилиндрическом резонаторе. Радиус цилиндра R , расстояние между торцами d .

106. Несжимаемая вязкая проводящая жидкость движется в пространстве между двумя параллельными бесконечными плоскостями, расстояние между которыми d . Постоянное магнитное поле \mathbf{H}_0 перпендикулярно плоскостям. Определить распределение скоростей в жидкости, если течение жидкости стационарно.

107. Проводящая вязкая несжимаемая жидкость находится между двумя проводящими плоскостями $z=0$ и $z=d$. Плоскость с координатой $z=d$ движется со скоростью v_0 в направлении оси OX . Однородное магнитное поле \mathbf{H}_0 направлено вдоль оси OZ , электрическое поле E_0 направлено вдоль оси OY . Определить распределение скоростей в жидкости.

108. Ионизированная плазма состоит из ионов и электронов. Считая, что отклонение средних значений плотности заряда мало,

рассмотреть колебания плотности заряда и найти частоту плазменных колебаний, если частота колебаний настолько велика, что ионы не успевают двигаться за полем и остаются неподвижными. Магнитными взаимодействиями и градиентом давления пренебречь.

109. Записать уравнения магнитной гидродинамики в приближении, когда малыми величинами являются отклонение плотности вещества от средней ρ_0 и скорость движения жидкости v . Показать, что в этом случае существует решение в виде связанных магнитогидродинамических волн. Найти скорость распространения волн для случая, когда скорость движения волны перпендикулярна и параллельна внешнему магнитному полю H_0 .

Специальная теория относительности. Релятивистская электродинамика

110. Показать, что два последовательных преобразования Лоренца в одном и том же направлении перестановочны и эквивалентны одному преобразованию Лоренца для относительной скорости.

111. В среде, движущейся со скоростью v относительно некоторой системы K , распространяется плоская электромагнитная волна. Найти скорость распространения волны в системе K , если показатель преломления среды равен n . Рассмотреть случай $v \ll c$.

112. Считая, что при малых скоростях частицы выполняется условие $p^2 \ll m^2 c^2$, где p — импульс частицы, найти приближенную зависимость энергии частицы от импульса с точностью до члена порядка $\left(\frac{p^2}{m^2 c^2}\right)^2$.

113. Найти траекторию движения заряженной частицы в однородном электрическом поле с напряженностью E_0 . Рассмотреть предельный случай малых скоростей.

114. Рассмотреть траекторию движения заряженной частицы в однородном магнитном поле с напряженностью H_0 .

115. Найти траекторию движения релятивистской частицы с зарядом e_1 и массой m в поле неподвижного точечного заряда e_2 .

116. Частица массы M распадается на две с массами m_1 и m_2 . Найти энергию распавшихся частиц в системе центра инерции.

117. Воспользовавшись результатами предыдущей задачи, найти кинетическую энергию μ -мезона с энергией покоя $105,7 \text{ Мэв}$ и кинетическую энергию нейтрино, образовавшихся после распада покоящегося π -мезона с массой покоя $139,6 \text{ Мэв}$.

118. Найти закон преобразования энергии и компонентов импульса частицы при переходе к системе, движущейся со скоростью v относительно первоначальной.

119. Частица, движущаяся со скоростью v , распадается на две частицы, энергии которых в системе центра инерции равны E_1 и E_2 . Найти связь между углом вылета и энергиями частиц в лабораторной системе.

120. Найти связь между направлениями скорости частицы в системах, движущихся с относительной скоростью v .

121. Две частицы с массами покоя m_1 и m_2 и энергиями E_{01} и E_{02} упруго рассеиваются друг на друге. Считая, что вторая частица покоится, найти связь между углами рассеяния частиц в лабораторной системе и их энергиями после столкновения E_1 и E_2 .

122. Определить зависимость частоты фотона, рассеянного на покоящемся электроны, от угла рассеяния (эффект Комптона).

123. Найти частоту γ -кванта, излучаемого покоящимся возбужденным ядром с массой m , если энергия возбуждения ядра равна ΔE .

124. Показать, что аннигиляция электронно-позитронной пары с излучением одного γ -кванта запрещена законом сохранения энергии-импульса.

125. Зеркало движется со скоростью v в направлении, противоположном собственной нормали. На зеркало падает луч света под углом ϑ . Определить направление отраженной волны и изменение частоты света при отражении.

126. Доказать, что если \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны в одной системе отсчета, то они перпендикулярны и во всех других инерциальных системах отсчета.

127. Найти систему отсчета, в которой электрическое и магнитное поля параллельны.

128. Получить потенциалы равномерно движущегося заряда посредством релятивистского преобразования статического кулоновского поля.

129. Найти формулы преобразования для компонент тензора энергии-импульса.

130. Найти закон преобразования компонент электрического и магнитного полей в вакууме при переходе к системе, движущейся со скоростью v .

131. Показать, что волновое уравнение не является инвариантным относительно преобразований Галилея и инвариантно относительно преобразований Лоренца.

132. Показать, что величина $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ инвариантна относительно преобразований Лоренца.

133. Показать, что если магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$ движется со скоростью v ($v \ll c$), то появляется электрический дипольный момент

$$\mathbf{p} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}].$$

Излучение и рассеяние электромагнитных волн

134. Получить уравнение для потенциалов, создаваемых зарядами и токами в вакууме при условии $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (кулоновская калибровка).

135. В тонкой линейной антенне длины d возбуждается ток, плотность которого равна

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = I \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \delta(x) \delta(y) \mathbf{e}_z e^{-i\omega t}.$$

Вектор \mathbf{e}_z направлен вдоль антенны. Определить среднюю за период интенсивность электромагнитного излучения антенны. Исследовать частный случай, когда в антенне укладывается несколько полуволн.

136. Найти интенсивность излучения линейной антенны, вдоль которой бежит волна тока $I_0 \cos(\omega t - kz)$ от точки $z = -l/2$ до точки $z = l/2$, где она полностью (без отражения) поглощается.

137. Рассмотреть распространение плоских волн в однородном изотропном диэлектрике, считая, что каждый элемент объема излучает сферическую волну, которая распространяется со скоростью c . Определить скорость распространения волн в среде.

138. Плоская электромагнитная волна падает на проводящий цилиндр радиуса R . Ось цилиндра перпендикулярна волновому вектору электромагнитной волны и параллельна вектору напряженности магнитного поля. Найти напряженности электрического и магнитного полей рассеянной волны. Вычислить поток энергии, рассеянной единицей длины цилиндра.

139. Показать, что дипольное излучение при столкновении двух одинаковых частиц отсутствует.

140. Найти интенсивность излучения частицы массы m , движущейся по круговой орбите радиуса a под действием кулоновских сил. Выразить ответ через энергию частицы.

141. Определить время, в течение которого частица, движущаяся по круговой орбите, упадет на заряженный центр вследствие потери энергии на электромагнитное излучение.

142. Определить интенсивность дипольного излучения двух заряженных взаимодействующих частиц с зарядами e_1 и e_2 , движущихся по эллиптической орбите. Рассмотреть предельный случай круговой орбиты и сравнить с результатами задачи 140.

143. Атом излучает электромагнитные волны и находится в возбужденном состоянии в течение времени τ . Зависимость напряженности электрического поля атома от времени дается формулой

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{\tau} - i\omega_0 t}.$$

Определить ширину линии, излучаемой атомом.

144. Найти эффективное сечение рассеяния эллиптически поляризованной волны с частотой ω связанным осциллятором, масса которого m , заряд $-e$, собственная частота ω_0 .

145. Исследовать электромагнитное поле, создаваемое плоскостью $z=0$, по которой проходит ток с поверхностной плотностью

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_0 e^{i(q_x x + i q_y y - \omega t)}.$$

146. Диполь с моментом \mathbf{p} , расположенный в начале координат, колеблется с частотой ω . В точке с радиусом-вектором \mathbf{d} ($\mathbf{d} \perp \mathbf{p}$) находится частица с поляризуемостью β . Найти интенсивность излучения электромагнитных волн такой системой, предполагая, что $d \ll \lambda$, где λ — длина волны излучения.

147. Диполь с моментом \mathbf{p} , колеблющийся с частотой ω , находится в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 на расстоянии d от плоской границы двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Найти напряженности электрического и магнитного полей, излученных диполем. При вычислении положить $d \gg \lambda$.

148. Частица с зарядом e движущаяся со скоростью \mathbf{v} , упруго отражается от некоторой плоскости. Определить длинноволновую часть спектра излучения в момент удара.

РАЗДЕЛ III

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Состояние микрочастицы, находящейся в потенциальном поле $V(\mathbf{r}, t)$, описывается комплексной волновой функцией $\Psi(\mathbf{r}, t)$, которая определяется из временного уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1)$$

(m — масса частицы). Если умножить это уравнение на комплексно сопряженную функцию $\Psi^*(\mathbf{r}, t)$, а такое же уравнение, написанное для $\Psi^*(\mathbf{r}, t)$ — на $\Psi(\mathbf{r}, t)$ и вычесть из первого второе, то в результате получим так называемое уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \operatorname{div} \left[\frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) \right] = 0. \quad (2)$$

Это уравнение является дифференциальной формой закона сохранения величины $\int |\Psi|^2 d\tau$ и позволяет заключить, что $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ имеет смысл плотности вероятности найти частицу в точке \mathbf{r} в момент времени t (вероятность обнаружить частицу в элементе объема $d\tau$ равна, следовательно, $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\tau$). Тогда вектор

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) \quad (3)$$

представляет плотность тока вероятности.

Из такой трактовки $|\Psi|^2$ вытекают требования, которым должна удовлетворять функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$: она должна быть однозначной, конечной во всех точках пространства и непрерывной вместе со своими первыми производными. Последнее требование (непрерывность производных) может нарушаться только в точках, где потенциальная энергия имеет разрыв II рода.

Если потенциальная энергия явно не зависит от времени, существует так называемое стационарное решение уравнения Шредингера, при котором $\rho = |\Psi|^2$ и \mathbf{j} не зависят от времени. Это решение имеет вид

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} Et}.$$

Подстановка его в уравнение (1) дает стационарное уравнение Шре-

дингера

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Решения этого уравнения, удовлетворяющие сформулированным выше условиям, существуют вообще говоря не всегда, а при определенных значениях параметра E , имеющего смысл энергии микро-частицы. Функция ψ удовлетворяет требованиям конечности, одно-значности и непрерывности в некоторых задачах в целом интервале значений E (случай непрерывного спектра), в других — только при определенных дискретных значениях этой величины (дискретный спектр)

Для состояний в дискретном спектре ψ -функция может быть нор- мирована на единицу, т. е.

$$\int |\psi|^2 d\tau = 1. \quad (5)$$

Собственные функции состояний с различными энергиями ортогональны друг к другу.

Для непрерывного спектра условия ортонормировки могут быть записаны с помощью δ -функции Дирака

$$\int \psi^*(\mathbf{r}, E) \cdot \psi(\mathbf{r}, E') d\tau = \delta(E - E'), \quad (6)$$

где δ -функция определяется, как всегда, тем, что для произвольной функции $f(x)$ должно быть верным условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a).$$

В ряде задач решение стационарного уравнения Шредингера можно искать в виде $\psi = e^{\frac{i}{\hbar} S(\mathbf{r})}$ (метод ВКБ), причем $S(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + \frac{i\hbar}{2m} \Delta S + V(\mathbf{r}) = E. \quad (7)$$

Разлагая функцию S в ряд по степеням параметра $i\hbar$:

$$S = S^0 + i\hbar S' + \dots,$$

получают в нулевом приближении для S^0 стационарное уравнение Гамильтона — Якоби, в первом и следующих приближениях — поправки разного порядка.

В случае разделения переменных решение уравнения Гамильтона — Якоби имеет вид

$$S^0 = \sum_i S_i^0(q_i) \text{ и } S_i^0(q_i) = \int p_i dq_i,$$

где p_i — канонический импульс, сопряженный обобщенной координате q_i . В частности, для одномерной задачи

$$S^0 = \int \sqrt{2m[E - V(x)]} dx. \quad (8)$$

Если $V(x)$ изображает потенциальный барьер (т. е. $V(x) > E$ в области $a \leq x \leq b$), то внутри барьера функция S оказывается мнимой и ψ -функция приобретает множитель

$$\exp \left\{ -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_a^b \sqrt{V(x) - E} dx \right\}.$$

Определяя коэффициент прозрачности (или прохождения) барьера как отношение плотностей токов, соответствующих прошедшей через барьер и падающей на него волнам, можно получить для него, пользуясь методом ВКБ, выражение

$$D = \left| \frac{j_{\text{прош}}}{j_{\text{пад}}} \right| = D_0 \exp \left[-2 \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_a^b \sqrt{V(x) - E} dx \right], \quad (9)$$

где D_0 — константа

Если микрочастица может совершать циклическое движение в потенциальной яме, то условие однозначности ψ -функции в нулевом приближении метода ВКБ приводит к условиям

$$\oint p_i dq_i = n_i \hbar, \quad (10)$$

где $n_i = 0, 1, 2, \dots$

Это так называемые условия квантования Бора—Зоммерфельда. Исторически в этой форме постулаты теории Бора были сформулированы Зоммерфельдом (1916 г) и служили для отбора «разрешенных» орбит среди решений классической задачи. Интеграл в этой формуле берется вдоль орбиты.

Согласно Бору, движение по орбите, удовлетворяющей условию (10), не сопровождается излучением, частота же, излучаемая или поглощаемая системой при переходе с одной разрешенной орбиты на другую (с энергиями E_m и E_n), определяется равенством:

$$\omega_{mn} = \frac{1}{\hbar} (E_m - E_n). \quad (11)$$

Если средний импульс частицы определить через плотность тока, как $\langle p \rangle = \int mj dt$, и, подставив сюда (3), второе слагаемое проинтегрировать по частям, то, учитывая, что $|\Psi|^2 = 0$ на границах области интегрирования, получим

$$\langle p \rangle = \int \Psi^* (-i\hbar \nabla) \Psi dt. \quad (12)$$

Аналогично можно записать $\langle x \rangle = \int \Psi^* x \Psi dt$.

В этом смысле говорят, что классическому импульсу частицы в квантовой механике соответствует оператор $\hat{p} = -i\hbar \nabla$, а координате x — оператор $\hat{x} = x$, имея в виду, что

$$\langle p \rangle = \int \Psi^* \hat{p} \Psi dt \quad \text{и} \quad \langle x \rangle = \int \Psi^* \hat{x} \Psi dt.$$

Согласно этому правилу, в квантовой механике любой физической величине λ сопоставляется линейный самосопряженный оператор \hat{L} , выбираемый так, чтобы среднее из многих измерений этой величины $\langle \lambda \rangle$ в состоянии, описываемом функцией $\Psi(\mathbf{r}, t)$, было равно

$$\langle \lambda \rangle = \int \Psi^*(\mathbf{r}, t) \hat{L} \Psi(\mathbf{r}, t) d\tau. \quad (13)$$

Функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ является вектором пространства Гильберта и удовлетворяет условию нормировки

$$\int \Psi^* \cdot \Psi d\tau = 1. \quad (14)$$

Условие самосопряженности оператора \hat{L} записывается таким образом:

$$\int \Psi_1^* \hat{L} \Psi_2 d\tau = \int \Psi_2 (\hat{L} \Psi_1)^* d\tau \quad (15)$$

для любых Ψ_1, Ψ_2 , принадлежащих пространству Гильберта.

Согласно этому определению, могут быть введены операторы энергии: кинетической $\hat{T} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}$, потенциальной \hat{V} и полной \hat{H} (гамильтониан). Они имеют вид:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta; \quad \hat{V} = V(\mathbf{r}); \quad \hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}). \quad (16)$$

Составляющим момента количества движения и его квадрату приводят в соответствие операторы:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y; \quad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z; \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x; \\ \hat{L}^2 &= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2. \end{aligned} \quad (17)$$

В сферических координатах эти операторы запишутся в виде

$$\begin{aligned} \hat{L}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}; \\ \hat{L}^2 &= -\hbar^2 \Delta_{\theta\varphi} = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Определяя средний квадратичный разброс величины λ около $\langle \lambda \rangle$ как

$$\langle \Delta \lambda^2 \rangle = \langle (\lambda - \langle \lambda \rangle)^2 \rangle = \int \Psi^* (\hat{L} - \langle \lambda \rangle)^2 \Psi d\tau$$

и пользуясь выражением (15) для оператора $\hat{L} - \langle \lambda \rangle$, можно показать, что

$$\langle \Delta \lambda^2 \rangle = \int |(\hat{L} - \langle \lambda \rangle) \Psi|^2 d\tau.$$

Следовательно, чтобы величина λ не имела разброса в состоянии Ψ , т. е. чтобы $\langle \Delta \lambda^2 \rangle = 0$, необходимо выполнение условия

$$\hat{L} \Psi = \langle \lambda \rangle \Psi. \quad (19)$$

Таким образом, это состояние должно описываться собственной функцией оператора \hat{L} , удовлетворяющей условию (19) и требованиям однозначности, конечности и непрерывности.

Числа λ_n , при которых функция ψ_n будет удовлетворять этим условиям, называются собственными значениями оператора \hat{L} . Собственное значение λ_n называется простым или α -кратно вырожденным в зависимости от того, соответствует ли ему одна или несколько (α) линейно независимых собственных функций.

Важный физический смысл имеет факт коммутативности операторов. Если $\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L} = 0$, т. е. действие оператора $\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L}$ на любую функцию ψ дает нуль, то операторы \hat{L} и \hat{M} имеют общие собственные функции и, следовательно, соответствующие им физические величины λ и μ могут одновременно принимать точные значения. В противном случае, если $\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L} \neq 0$, для величин λ и μ получаются соотношения неточностей.

В частности, если частица находится в сферически симметричном поле $V(r)$, то оператор \hat{H} коммутирует с \hat{L}^2 и \hat{L}_z и его собственные функции можно искать в виде

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi),$$

причем

$$-\hbar^2 \Delta_{\vartheta\varphi} Y = \lambda Y \quad \text{и} \quad -i\hbar \frac{\partial Y}{\partial \varphi} = a Y. \quad (20)$$

(Легко убедиться, что \hat{L}_z и \hat{L}^2 коммутируют всегда.) Решениями этих уравнений, удовлетворяющими всем условиям для собственных функций, являются сферические функции

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (21)$$

При этом $\lambda = \hbar^2 l(l+1)$, $a = \hbar m$; числа $l = 0, 1, 2, \dots$, а $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$; $P_{lm}(x)$ — присоединенные полиномы Лежандра lm -порядка.

Для жесткого плоского ротатора, т. е. частицы свободно движущейся в плоскости $\theta = \pi/2$ на расстоянии r_0 от центра, оператор

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2};$$

его собственными функциями являются $\psi_m = C e^{im\varphi}$ и собственными значениями $E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2\mu r_0^2}$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Дифференцируя по времени выражение (13) и используя временное уравнение Шредингера $\hat{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$, можно показать, что производной по времени физической величины λ соответствует оператор

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} (\hat{H}\hat{L} - \hat{L}\hat{H}). \quad (22)$$

В случае, если $\frac{d\hat{L}}{dt} = 0$, величина λ является интегралом движения.

Если \hat{L} явно не содержит времени, то признаком этого является условие коммутативности \hat{H} и \hat{L} .

Используя выражение (22) для $\frac{d\hat{L}}{dt}$, можно составить квантовые уравнения движений, т. е. получить операторы $\frac{\hat{d}\mathbf{p}_t}{dt}$ и $\frac{\hat{d}\mathbf{x}_t}{dt}$.

Система собственных функций самосопряженного оператора является ортонормированной и полной, т. е.

$$\int \psi_m^*(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}) d\tau = \delta_{mn}$$

для дискретного спектра и

$$\int \psi^*(\mathbf{r}, \lambda) \psi(\mathbf{r}, \lambda') d\tau = \delta(\lambda - \lambda')$$

для непрерывного спектра, и любая функция $\psi(\mathbf{r})$ может быть разложена по собственным функциям \hat{L} :

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_n c_n \psi_n(\mathbf{r}) + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} c(\lambda) \psi(\mathbf{r}, \lambda) d\lambda. \quad (23)$$

Пользуясь написанными выше условиями ортонормировки, можно определить

$$c_n = \int \psi_n^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\tau \quad \text{и} \quad c(\lambda) = \int \psi^*(\mathbf{r}, \lambda) \psi(\mathbf{r}) d\tau, \quad (24)$$

причем

$$\sum_n |c_n|^2 + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} |c(\lambda)|^2 d\lambda = 1.$$

Из равенства

$$\langle \lambda \rangle = \sum_n |c_n|^2 \lambda_n + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda |c(\lambda)|^2 d\lambda \quad (25)$$

следует, что $|c_n|^2$ и $|c(\lambda)|^2 d\lambda$ равны соответственно вероятностям найти в состоянии $\psi(\mathbf{r})$ значение величины $\lambda = \lambda_n$ (в дискретном спектре) или значение величины λ в пределах от λ до $\lambda + d\lambda$ (в случае непрерывного спектра).

Следовательно, такое разложение заменяет ψ -функцию ее коэффициентами c_n или $c(\lambda)$, а величину x — величиной λ , т. е. совершается переход к новому λ -представлению. Если в координатном представлении оператор \hat{M} связывал функции φ и ψ таким образом:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \hat{M}\psi(\mathbf{r}),$$

то, если $\varphi(\mathbf{r}) = \sum_n b_n \psi_n$ и $\psi(\mathbf{r}) = \sum_n c_n \psi_n$, в λ -представлении оказы-

вається, что

$$b_k = \sum_n \langle k | M | n \rangle c_n,$$

где $\langle k | M | n \rangle = \int \psi_k^* \hat{M} \psi_n d\tau$ — матричный элемент оператора \hat{M} . При переходе к λ -представлению оператор заменился матрицей.

Оператор \hat{L} в собственном представлении сводится к диагональной матрице, так как

$$\langle k | L | n \rangle = \int \psi_k^* \hat{L} \psi_n d\tau = \lambda_n \delta_{kn},$$

и диагональными элементами являются его собственные значения. Это относится к оператору с дискретным спектром. Оператор с непрерывным спектром собственных значений в собственном представлении сводится к умножению на независимую переменную (в импульсном представлении оператор \hat{p} равен p)

Из условия самосопряженности оператора \hat{M} следует, что его матричные элементы удовлетворяют условию

$$\langle k | M | n \rangle = \langle n | M | k \rangle^*.$$

Чтобы обобщить уравнение Шредингера для частицы в произвольном электромагнитном поле, в котором напряженность электрического поля \mathbf{E} и индукция магнитного поля \mathbf{B} , выражаются через потенциалы $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$ как

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

следует оператор импульса в гамильтониане \hat{H} заменить оператором $\hat{p} - e\mathbf{A}$ и потенциальную энергию записать как $e\varphi$, т. е. при наличии полей

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{p} - e\mathbf{A})^2 + e\varphi.$$

(Это совпадает с обобщением функции Гамильтона для частицы в магнитном поле в классической механике.) Выбрав вектор-потенциал \mathbf{A} так, чтобы $\text{div } \mathbf{A} = 0$, можно написать волновое уравнение квантовой механики, пренебрегая членом $e^2 \mathbf{A}^2$, в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + \frac{i\hbar e}{m} (\mathbf{A} \nabla \Psi) + e\varphi \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (26)$$

Опыты Штерна и Герлаха и дублетность уровней E_{nl} для электрона в атоме показали, что электрон кроме орбитального момента количества движения $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, упомянутого выше, обладает еще спиновым моментом, составляющие которого S_x , S_y и S_z способны принимать всего два значения $+\hbar/2$ и $-\hbar/2$.

Вводя безразмерные операторы спина $\hat{\sigma}_{x, y, z}$ таким образом, что $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_x$, $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_y$, $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_z$ и удовлетворяя соотношениям антикоммутиации $\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = -\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x = i\hat{\sigma}_z$, можно представить эти операторы

в виде матриц Паули, выбрав σ_z -представление:

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Волновая функция должна тогда зависеть от спиновой переменной $\sigma = \pm 1$, и эту зависимость изображают в виде матрицы

$$\Psi(\mathbf{r}, \sigma) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}) \\ \psi_2(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

(спиновая переменная принимает всего два значения). Физический смысл $|\psi_1(\mathbf{r})|^2$, $|\psi_2(\mathbf{r})|^2$ — соответственно плотности вероятностей найти электрон в данном месте пространства с $\sigma = \pm 1$, т. е. с $S_z = +\hbar/2$ и $S_z = -\hbar/2$.

Если пренебречь малым взаимодействием спина с орбитальным движением, то $\Psi(\mathbf{r}, \sigma) = \psi_0(\mathbf{r}) \cdot \chi(\sigma)$.

Благодаря наличию спинового магнитного момента с оператором $\boldsymbol{\mu} = \frac{e\hbar}{2m} \boldsymbol{\sigma}$ электрон взаимодействует с магнитным полем, и энергия этого взаимодействия равна $-(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})$, где \mathbf{B} — индукция поля. Таким образом, для электрона с учетом спина верно уравнение Паули:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2 \Psi(\mathbf{r}, \sigma, t) - (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \Psi(\mathbf{r}, \sigma, t) + e\phi \Psi(\mathbf{r}, \sigma, t) = \\ = i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, \sigma, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (28)$$

которое можно упростить подобно уравнению (26), если раскрыть выражение $(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2$.

Аналогично может быть написано стационарное уравнение.

В тех случаях, когда уравнение для собственных функций и собственных значений оператора (в частности, оператора энергии) не удастся решить точно, можно применять приближенные методы. Одним из них является метод стационарной теории возмущений.

Если известны собственные функции и собственные значения оператора \hat{H}_0 , определяемые уравнением

$$\hat{H}_0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0,$$

то собственную функцию оператора $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$, являющуюся решением уравнения

$$\hat{H} \psi_k = E_k \psi_k,$$

ищут в виде разложения по собственным функциям ψ_n^0 :

$$\psi_k = \sum_n c_{kn} \psi_n^0.$$

В полученном для коэффициентов c_{kn} уравнении

$$c_{kl} (E_l^0 - E_k) + \sum_n \langle l | W | n \rangle c_{kn} = 0$$

разлагают c_{kl} и E_k по степеням малой величины, входящей в энергию возмущения $\hat{W} = \varepsilon \hat{V}_1$. Пользуясь методом последовательных приближений, для простых уровней невозмущенной задачи получают волновую функцию и энергию уровня в виде:

$$\begin{aligned} \psi_k &= \psi_k^0 + \sum_{n \neq k} \frac{\langle n | W | k \rangle}{E_k^0 - E_n^0} \psi_n^0 + \dots, \\ E_k &= E_k^0 + \langle k | W | k \rangle + \sum_{n \neq k} \frac{|\langle n | W | k \rangle|^2}{E_k^0 - E_n^0} + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

Если уровень E_k^0 α -кратно вырожден, то в нулевом приближении ψ -функция возмущенной задачи представляется в виде суперпозиции вырожденных функций невозмущенной задачи, отвечающих одному значению энергии E_k^0 :

$$\psi_k = \sum_{\beta=1}^{\alpha} c_{\beta} \psi_{k\beta}^0,$$

причем

$$\hat{H}^0 \psi_{k\beta}^0 = E_k^0 \psi_{k\beta}^0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, \alpha).$$

Для коэффициентов c_{β} получается система α однородных линейных уравнений вида

$$(E_k^0 - E + \langle k_{\beta} | W | k_{\beta} \rangle) c_{\beta} + \sum_{\gamma \neq \beta} \langle k_{\beta} | W | k_{\gamma} \rangle c_{\gamma} = 0$$

при $\beta, \gamma = 1, 2, \dots, \alpha$. Условием существования решений этой системы отличных от нуля, является равенство детерминанта системы нулю:

$$|(E_k^0 - E) \delta_{\beta\gamma} + \langle k_{\beta} | W | k_{\gamma} \rangle| = 0 \quad (\beta, \gamma = 1, 2, \dots, \alpha). \quad (30)$$

Это уравнение определяет, вообще говоря, α значений E , а выше написанные уравнения дают возможность вычислить соответствующие коэффициенты c_{β} и, следовательно, ψ_k .

Другим приближенным методом решения операторного уравнения является прямой вариационный метод (метод Ритца), основанный на вариационном принципе квантовой механики. Можно показать, что экстремумом функционала $\langle H \rangle [\psi] = \int \psi^* \hat{H} \psi dt$ при условии, что $\int |\psi|^2 dt = 1$, является функция, удовлетворяющая уравнению $\hat{H} \psi = \lambda \psi$, т. е. собственная функция \hat{H} , отвечающая самому нижнему уровню энергии. Поэтому, если вычислить $\langle H \rangle [\varphi] = \int \varphi^* \hat{H} \varphi dt$ на произвольной функции $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, A, \alpha, \dots)$, удовлетворяющей условию нормировки $\int |\varphi|^2 dt = 1$, то максимально приблизиться к точному значению E_0 можно выбирая параметры A, α, \dots так, чтобы $\langle H \rangle$ было минимально.

Задача системы частиц в квантовой механике сводится к решению уравнения Шредингера с гамильтонианом

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k}{m_k} + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_k),$$

равным сумме операторов кинетической энергии всех частиц и их потенциальной энергии. В случае системы тождественных частиц, исходя из тех соображений, что перестановка двух частиц не должна сказаться на величинах вида $|\psi|^2$, $\int \psi^* \hat{L} \psi dt$, можно утверждать, что $\psi(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \mathbf{r}_2, \sigma_2)$ и $\psi(\mathbf{r}_2, \sigma_2, \mathbf{r}_1, \sigma_1)$ могут отличаться только множителем вида $e^{i\alpha}$. Совершая дважды такую перестановку, находим

$$\psi(\mathbf{r}_2, \sigma_2, \mathbf{r}_1, \sigma_1) = e^{i\alpha} \cdot \psi(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \mathbf{r}_2, \sigma_2) = e^{2i\alpha} \cdot \psi(\mathbf{r}_2, \sigma_2, \mathbf{r}_1, \sigma_1),$$

т. е. $e^{i\alpha} = \pm 1$. Таким образом, системы тождественных частиц могут описываться либо симметричными функциями ($e^{i\alpha} = +1$ в случае целого спина частицы), либо антисимметричными ($e^{i\alpha} = -1$ для частиц с полуцелым спином). Это свойство относится к функциям пространственных и спиновых координат.

Если для одного электрона ввести спиновые функции $\alpha(\sigma)$ и $\beta(\sigma)$, определяемые равенствами

$$\alpha(+1) = 1, \alpha(-1) = 0 \text{ и } \beta(+1) = 0, \beta(-1) = 1, \text{ т. е.}$$

$$\alpha(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то для системы двух электронов, спины которых не взаимодействуют, спиновые функции можно строить, как произведения вида $\alpha_1 \alpha_2$, $\alpha_1 \beta_2$ и т. д., при этом α_1 относится к первому электрону, α_2 — ко второму.

Если внешнее возмущение $\hat{W}(\mathbf{r}, t)$ служит причиной перехода невозмущенной системы (с оператором энергии \hat{H}_0) из одного ее стационарного состояния ψ_n^0 в другое ψ_l^0 , то эта задача решается при помощи теории возмущения, зависящего от времени (теории квантовых переходов).

Обозначая собственные функции оператора невозмущенной задачи ψ_n^0 (они удовлетворяют уравнению $\hat{H}_0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$), ищем решение уравнения

$$(\hat{H}_0 + \hat{W}) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

в виде

$$\Psi = \sum_n c_n(t) \psi_n^0 e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^0 t}.$$

При этом $c_n(0) = \delta_{nk}$ (в начальный момент $\Psi = \psi_k^0$), а для $c_n(t)$ получается уравнение вида

$$i\hbar \frac{dc_l}{dt} = \sum_n W_{ln}(t) c_n(t) e^{i\omega_{ln}t},$$

где $W_{ln}(t) = \int \psi_l^{0*} \hat{W}(\mathbf{r}, t) \psi_n^0 d\tau$ — матричный элемент энергии возмущения, а $\omega_{ln} = \frac{E_l^0 - E_n^0}{\hbar}$.

Это уравнение решают в первом приближении, подставляя в правую часть вместо коэффициентов $c_n(t)$ их начальные значения и считая, что $\hat{W}(\mathbf{r}, t) = 0$ при $t < 0$ и $t > T$. Тогда

$$c_l(T) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^T W_{lk}(t) \cdot e^{i\omega_{lk}t} dt.$$

Так как вначале система находилась в состоянии ψ_k^0 , то вероятность ее перехода в ψ_l^0 определяется как $|c_l(T)|^2$, т. е.

$$P_{k \rightarrow l} = |c_l(T)|^2 = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} |W_{lk}(\omega_{lk})|^2, \quad (31)$$

где $W_{lk}(\omega_{lk}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{lk}(t) e^{i\omega_{lk}t} dt$ — коэффициент Фурье матричного элемента энергии возмущения, отвечающий боровской частоте.

Если возмущение вызвано действием излучения (поглощение или излучение света) и длина волны этого излучения гораздо больше размеров атома ($\lambda \gg a_B$), то можно энергию возмущения записать в виде

$$\hat{W} = -(\mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{D}),$$

где $\mathbf{E}(t)$ — напряженность электрического поля излучения, $\mathbf{D} = e\mathbf{r}$ — дипольный момент системы (дипольное приближение), и тогда

$$P_{k \rightarrow l} = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} |(D_F)_{lk}|^2 |\mathbf{E}(\omega_{lk})|^2. \quad (32)$$

Это выражение показывает, что система может под действием излучения перейти из k -го в l -е состояние только, если $\mathbf{E}(\omega_{lk}) \neq 0$ (т. е. в излучении имеется боровская частота, соответствующая этому переходу) и если

$$(D_F)_{lk} \neq 0. \quad (33)$$

Это условие определяет правила отбора.

§ 2. ЗАДАЧИ

Теория Бора

1. Свободная частица находится в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, расположенными при $x=0$ и $x=a$ (одномерная задача). Определить уровни энергии частицы, пользуясь постулатом Бора — Зоммерфельда.

2. Пользуясь постулатом Бора—Зоммерфельда, проквантовать движение одномерного гармонического осциллятора.

3. Пользуясь постулатом Бора—Зоммерфельда, найти уровни энергии частицы, совершающей малые колебания в трехмерной потенциальной яме вблизи положения равновесия, находящегося в начале координат. Потенциальная энергия равна $V(x, y, z)$ и $V(0) = 0$.

4. Под действием центральной силы частица массы m свободно вращается на расстоянии r от центра (плоский жесткий ротатор). Найти уровни энергии при помощи постулата Бора—Зоммерфельда.

5. Найти уровни энергии электрона, движущегося по круговой орбите в атоме водорода, пользуясь постулатом Бора—Зоммерфельда.

6. Найти уровни энергии электрона, движущегося по эллиптической орбите вблизи ядра с зарядом Ze , пользуясь постулатом Бора—Зоммерфельда.

7. Используя постулат Бора—Зоммерфельда, определить уровни энергии атома водорода, свободно движущегося в объеме. $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$.

8. Частица массы m вертикально падает на горизонтальную пластину и упруго от нее отражается. Проквантовать движение частицы, используя постулат Бора—Зоммерфельда, определить допустимые высоты H_n и вычислить уровни энергии.

Операторы

9. Возвести в квадрат оператор $\frac{d}{dx} + x$.

10. Возвести в третью степень оператор $\frac{d}{dx} + \frac{1}{x}$.

11. Сравнить операторы $\left(x \frac{d}{dx}\right)^2$ и $\left(\frac{d}{dx} x\right)^2$.

12. Возвести в квадрат оператор $i\hbar \nabla + \mathbf{A}(\mathbf{r})$.

13. Найти коммутатор $\frac{d}{dx} x - x \frac{d}{dx}$.

14. Найти коммутатор оператора x и оператора Лапласа.

15. Найти оператор, переводящий $\psi(x)$ в $\psi(x+a)$.

16. Найти оператор, переводящий $\psi(\mathbf{r})$ в $\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a})$.

17. Найти оператор, переводящий $\psi(\varphi)$ в $\psi(\varphi + \alpha)$, где φ — угловая переменная (оператор поворота пространства на угол α).

18. Найти оператор, эрмитово-сопряженный оператору $\frac{\partial}{\partial x}$.

19. Найти оператор, эрмитово-сопряженный оператору $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$.

20. Проверить самосопряженность оператора $i \frac{\partial}{\partial y}$.

21. Проверить самосопряженность оператора Лапласа.

22. Найти оператор, эрмитово-сопряженный оператору смещения пространства на вектор \mathbf{a} из задачи 16.

23. Найти оператор эрмитово-сопряженный оператору $e^{i\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi}}$.

24. Доказать, что оператор умножения на вещественную функцию является самосопряженным

25. Найти оператор, эрмитово-сопряженный произведению операторов \hat{A} и \hat{B} .

26. Показать, что среднее значение квадрата физической величины является положительным.

27. Для операторов \hat{L} и \hat{M} , удовлетворяющих соотношению $\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L} = 1$, найти $\hat{L}\hat{M}^2 - \hat{M}^2\hat{L}$.

28. Для операторов \hat{L} и \hat{M} , удовлетворяющих условию $\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L} = 1$ (см. задачу 27), найти

$$f(\hat{L})\hat{M} - \hat{M}f(\hat{L}).$$

29. Найти коммутатор оператора $\frac{\partial}{\partial x}$ и $f(x, y, z)$.

30. Перемножить операторы $\hat{L} - \hat{M}$ и $\hat{L} + \hat{M}$.

31. Найти собственные функции и собственные значения операторов $\frac{d}{dx}$ и $i \frac{d}{dx}$.

32. Найти собственные функции и собственные значения оператора $x + \frac{d}{dx}$.

33. Найти собственные функции и собственные значения оператора $\frac{d}{d\varphi}$.

34. Найти собственные функции и собственные значения оператора $\sin \frac{d}{d\varphi}$.

35. Найти собственные функции и собственные значения оператора $\cos \left(i \frac{d}{d\varphi} \right)$.

36. Найти собственные функции и собственные значения оператора $e^{ia \frac{d}{d\varphi}}$.

37. Найти собственные функции и собственные значения оператора $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx}$.

38. Перейти от классической скобки Пуассона к квантовой, считая, что ее свойства, в частности соотношение

$$(f, g\varphi) = g(f, \varphi) + (f, g)\varphi,$$

(где f, g и φ — функции, представляющие физические величины, (f, g) — скобка Пуассона), сохраняются и для операторов $\hat{f}, \hat{g}, \hat{\varphi}$.

39. Доказать самосопряженность оператора момента количества движения $\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p}$.

40. Уравнение $\int_a^b u_k^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial u_l}{\partial x} dx = \int_a^b u_l \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial u_k}{\partial x} \right)^* dx$ должно быть справедливым для эрмитового оператора. Каким условиям должны удовле-

творять функции u_k, u_l , чтобы границы интегрирования a, b были конечны?

41. Доказать справедливость перестановочного соотношения $[\hat{L} \times \hat{L}] = i\hbar \hat{L}$ для момента количества движения.

42. Доказать, что оператор квадрата момента количества движения $\hat{L}^2 - \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ коммутирует с любой его составляющей (использовать результаты задачи 41).

Решение уравнения Шредингера.

Вычисление средних величин и токов

43. Найти общее решение одномерного временного уравнения Шредингера для свободной частицы.

44. В момент времени $t=0$ свободная частица описывается функцией

$$\Psi(x, 0) = A e^{-\frac{x^2}{a^2} + ik_0 x}.$$

Определить коэффициент A и область, где локализована частица. Найти плотность тока j .

45. Найти коэффициенты Фурье для функции, приведенной в задаче 44, и определить ширину волнового пакета в k -пространстве.

46. Рассмотреть поведение пакета волны во времени, если в $t=0$ он представляется функцией

$$\Psi(x, 0) = A e^{-\frac{x^2}{a^2} + ik_0 x}.$$

Определить $\Psi(x, t)$, плотность вероятности $\rho(x, t)$ и плотность тока $j(x, t)$.

47. Для частицы, состояние которой описывается функцией $\psi(x) = A e^{-\frac{x^2}{a^2} + ik_0 x}$, найти средние координату и импульс.

48. Для условий задачи 47 вычислить $\langle \Delta x^2 \rangle$, $\langle \Delta p^2 \rangle$ и проверить соотношение неопределенностей.

49. Частица находится в одномерной потенциальной яме $0 \leq x \leq a$, внутри которой $V=0$, а вне $V=\infty$. Найти решение стационарного уравнения Шредингера для этого случая.

50. Найти волновую функцию и разрешенные значения энергии частицы, находящейся в потенциальном поле, определяемом следующим образом:

$$V = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c; \\ \infty & \text{при } x < 0, \quad x > a, \quad y < 0, \quad y > b, \quad z < 0, \quad z > c. \end{cases}$$

51. Найти уровни энергии и волновые функции для частицы в прямоугольной потенциальной яме конечной глубины (одномерный слу-

чай). Поле $V(x)$ задается следующим образом:

$$V = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -a \quad (\text{I область}); \\ V_0 & \text{при } -a < x < a \quad (\text{II область}); \\ 0 & \text{при } x > a \quad (\text{III область}). \end{cases}$$

52. Найти уровни энергии трехмерного гармонического осциллятора с потенциальной энергией

$$V = \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2 y^2}{2} + \frac{k_3 z^2}{2}.$$

53. Найти уровни энергии и волновые функции одномерного гармонического осциллятора, помещенного в постоянное электрическое поле E . Заряд частицы e .

54. Одномерный гармонический осциллятор находится на n -м уровне энергии. Найти для него $\langle x^2 \rangle$ и среднюю потенциальную энергию.

55. Для одномерного осциллятора, энергия которого равна $\frac{7}{2} \hbar \omega$, вычислить среднюю кинетическую энергию.

56. Решить уравнение Шредингера для частицы, находящейся в потенциальном поле $V = V_0 (e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$.

57. Найти уровни энергии и волновые функции частицы в одномерной кулоновской потенциальной яме, задаваемой потенциалом $V(x) = -\frac{e^2}{|x|}$.

58. Решить уравнение Шредингера для сферически симметричного трехмерного осциллятора с потенциальной энергией $V(r) = \frac{m\omega^2}{2} r^2$.

59. Решить задачу Кеплера в двухмерном случае, т. е. найти значения энергии и волновые функции частицы в потенциальном поле $V = -\frac{Ze^2}{\rho}$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. (От координаты z функция не зависит.)

60. Решить уравнение Шредингера для частицы в бесконечноглубокой сферически симметричной потенциальной яме, задаваемой потенциалом

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < a, \\ \infty & \text{при } r > a. \end{cases}$$

61. Решить уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода (в сферических координатах).

62. Найти составляющие плотности тока для электрона в атоме водорода.

63. Электрон находится в атоме водорода в основном состоянии. Определить для этого случая $\langle r \rangle$, $\langle r^2 \rangle$ и наиболее вероятное значение r_0 .

64. Частица находится в потенциальном поле

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} - \frac{C}{r^2}.$$

Найти уровни энергии частицы и соответствующие им волновые функции.

65. Решить уравнение Шредингера для частицы в потенциальном поле $V(r) = Ar^2 + \frac{B}{r^2}$.

66. Частица свободно движется в плоскости Oyz в пределах прямоугольника $0 \leq y \leq a$ и $0 \leq z \leq b$. Остальная часть этой плоскости недоступна для частицы. При движении же вдоль оси Ox на нее действует квазиупругая сила $F = -kx$. Найти уровни энергии частицы в таком поле и соответствующие им волновые функции. Вычислить нормировочный коэффициент.

67. Решить уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода в параболических координатах.

68. Решить уравнение Шредингера для частицы с моментом, равным нулю ($l=0$), в поле $V = -V_0 \cdot e^{-r/a}$.

69. Определить значения энергии, которые может принимать частица, помещенная в периодическое поле, задаваемое следующим образом:

$$V = \begin{cases} 0 & \text{при } nl \leq x \leq nl + a \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ V_0 & \text{при } nl - b \leq x \leq nl. \end{cases}$$

Периодом потенциала является $l = a + b$.

70. Рассмотреть задачу 69 в случае, если $V = 0$ всюду, кроме точек $x = nl$, в которых $V_0 = \infty$. При этом ширина барьера $b \rightarrow 0$ так, что

$$\lim \frac{mV_0b}{\hbar^2} = \text{const}$$

(модель Кронига—Пенни). Определить зависимость энергии E от волнового вектора k вблизи границы разрешенных полос энергии.

71. Рассмотреть полубесконечный кристалл с периодическим потенциалом в области $x > 0$, определяемым так же, как в задаче 70; в области $x < 0$ потенциальная энергия $V = W_0$. Ограничиться значениями $E < W_0$ (поверхностные уровни Тамма).

72. Операторы \hat{A} и \hat{B} удовлетворяют перестановочному соотношению $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{C}$ и являются самосопряженными. Рассмотрим

$$T(\eta) = \int |\hat{A}\psi + i\eta\hat{B}\psi|^2 d\tau,$$

где η — вещественный параметр, получить соотношение, связывающее $\langle \Delta A^2 \rangle$ и $\langle \Delta B^2 \rangle$.

73. Применив полученное в задаче 72 соотношение к операторам \hat{p} и \hat{x} , оценить нижний уровень энергии одномерного гармонического осциллятора.

74. Две частицы, связанные друг с другом упругой силой $F = k(x_1 - x_2)$ (одномерная задача), свободно передвигаются вдоль оси Ox . Найти волновую функцию и спектр энергии.

75. Найти волновую функцию и спектр энергии атома водорода, учитывая движение ядра.

76. Две частицы массы m , движущиеся только вдоль оси OX , связаны друг с другом упругой силой. Кроме того, каждая из них связана с точкой $x=0$ такого же рода силой, но с другим коэффициентом упругости. Определить уровни энергии и волновые функции системы.

Теория представлений.

Матрицы

77. Частица находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме (см. задачу 49) в состоянии, отвечающем энергии $E_2 = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$. Определить для нее распределение по импульсам.

78. Найти оператор \hat{x} в импульсном представлении и определить его собственные функции и спектр собственных значений.

79. Для частицы, находящейся в однородном потенциальном поле, определить собственные значения и собственные функции оператора энергии в импульсном представлении.

80. Определить матричные элементы дипольного момента, x^2 и p для частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме, расположенной в области $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$.

81. Найти собственные функции оператора энергии для одномерного гармонического осциллятора в импульсном представлении.

82. Найти собственные значения энергии одномерного гармонического осциллятора и матричные элементы координаты и импульса в энергетическом представлении, используя только перестановочные соотношения \hat{p} и \hat{q} .

83. Используя перестановочные соотношения составляющих момента количества движения, найти собственные значения квадрата момента количества движения (\hat{L}^2), его составляющей по оси OZ (\hat{L}_z) и матричные элементы \hat{L}_x и \hat{L}_y в (L^2, L_z)-представлении.

84. Состояние частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме, стенки которой расположены при $x=0$ и $x=a$, описывается функцией $\psi = A x(a-x)$. Найти для нее распределение по энергиям, среднюю энергию $\langle E \rangle$ и $\langle \Delta E^2 \rangle$.

85. Плоский ротатор находится в состоянии, описываемом функцией $\psi = A \sin^2 \varphi$. Определить для него вероятность найти различные значения составляющей момента количества движения L_z и средние $\langle L_z \rangle$ и $\langle L_z^2 \rangle$.

86. Найти волновые функции в x - и p -представлениях для частицы, локализованной в точке x_0 , и для частицы, движущейся с определенным импульсом p_0 .

87. Найти оператор $\frac{1}{r}$ в p -представлении.

88. Вычислить угловую часть матричных элементов дипольного момента для частицы в центрально-симметричном поле.

Изменение операторов во времени.

Потенциальные барьеры. Интегралы движения

89. Составить операторы $\frac{d\hat{r}}{dt}$ и $\frac{d\hat{p}}{dt}$.

90. Определить, при каких условиях квадрат момента количества движения \hat{L}^2 и его проекция \hat{L}_z могут быть интегралами движения.

91. Найти уравнения движения, если гамильтониан задается выражением

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p} - e\mathbf{A})^2}{2M} + e\varphi(\mathbf{r}, t), \text{ где } \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

92. Найти $\frac{d\hat{x}_i}{dt}$ и $\frac{d}{dt}(\hat{p}_i - eA_i)$, если гамильтониан частицы имеет вид

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k (\hat{p}_k - A_k) + m_0 c^2 \alpha_4 + e\varphi(x_1, x_2, x_3),$$

где α_k, α_4 — матрицы, подчиняющиеся условиям:

$$\alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 2\delta_{ik}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3, t).$$

93. Показать, что для системы частиц при отсутствии внешних сил импульс системы будет интегралом движения.

94. Частица, двигаясь в положительном направлении оси Ox , встречает потенциальный порог (потенциальная энергия задается следующим образом: $V=0$ при $x < 0$ и $V=V_0$ при $x > 0$.) Определить волновую функцию при $E > V_0$ и $E < V_0$, вычислить плотности тока падающей, отраженной и прошедшей волн и найти коэффициенты прохождения и отражения частиц в обоих случаях.

95. Вычислить коэффициенты отражения и прохождения частиц сквозь прямоугольный потенциальный барьер ширины a ($V=V_0$ при $0 \leq x \leq a$, $V=0$ при $x \leq 0$, $x \geq a$), вычислив их как отношения соответствующих плотностей токов.

96. Рассмотреть поведение частицы в следующем потенциальном поле:

$$V = \begin{cases} \infty & \text{при } x \leq 0, \\ 0 & \text{при } 0 \leq x \leq a \text{ и } x \geq b, \\ V_0 & \text{при } a \leq x \leq b. \end{cases}$$

Ограничиться случаем $E < V_0$. Исследовать ψ -функцию, когда амплитуда во внутренней области ($0 \leq x \leq a$) гораздо меньше, чем во внешней ($x \geq b$).

97. Вычислить коэффициент прохождения и плотность тока, обусловленного выходом электронов из металла, к которому приложено

постоянное электрическое поле E . Граница металла расположена при $x=0$.

98. Считая, что постоянная α -распада λ и коэффициент прозрачности барьера D связаны соотношением $\lambda = nD$, вычислить λ , если модель потенциала задается следующим образом:

$$V = -V_0 \text{ при } r < r_0,$$

а при $r \geq r_0$ α -частицы взаимодействуют с ядром, заряд которого Ze , по закону Кулона. Принять, что $r_0 \ll \frac{2Ze^2}{E}$.

Частица в магнитном поле. Спин

99. Определить уровни энергии свободного электрона в однородном магнитном поле с индукцией B , направленной по оси OZ .

100. Показать, что замена в волновом уравнении квантовой механики вектора-потенциала A и скалярного потенциала φ на $A' = A + \nabla f$ и $\varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}$, приводит к несущественному изменению Ψ -функции.

101. Составить вектор плотности тока для частицы в магнитном поле.

102. Доказать, что операторы $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$, определяемые равенствами:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x \alpha &= \beta, & \hat{\sigma}_y \alpha &= i\beta, & \hat{\sigma}_z \alpha &= \alpha, \\ \hat{\sigma}_x \beta &= \alpha, & \hat{\sigma}_y \beta &= -i\alpha, & \hat{\sigma}_z \beta &= -\beta, \end{aligned}$$

удовлетворяют тем же соотношениям, что и матрицы Паули.

103. Составить оператор $\frac{d\hat{\sigma}_x}{dt}$, используя \hat{H} для частицы со спином, помещенной в магнитное поле с индукцией B .

104. Для системы двух слабо взаимодействующих различных частиц n и p со спином $\hbar/2$ найти собственные функции составляющей \hat{S}_z и квадрата вектора суммарного спина \hat{S}^2 , если $\hat{S} = \hat{\sigma}_n + \hat{\sigma}_p$. Определить соответствующие собственные значения операторов \hat{S}_z и \hat{S}^2 .

105. Вычислить скалярное произведение спинов двух частиц в триплетном и синглетном состояниях. Спин частицы $\hbar/2$.

106. Показать, что оператор $(\hat{\sigma}_n \hat{\sigma}_p)^k$ можно линейно выразить через $(\hat{\sigma}_n \hat{\sigma}_p)$.

107. Найти собственные функции и собственные значения операторов

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

108. Вычислить квадрат проекции спина $\hbar/2$ на произвольное направление.

Приближенные методы решения квантово-механических задач

109. Применяя стационарную теорию возмущений, найти в первом и втором приближениях уровни энергии и волновые функции частицы в поле

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2} x^2 + \varepsilon_1 x^3 + \varepsilon_2 x^4$$

(ангармонический осциллятор).

110. Частица без спина находится в сферически симметричном поле (невозмущенная задача) и уровни ее энергии равны E_{nl} . Применяя теорию возмущений, найти в первом приближении ее энергию и волновую функцию при наличии магнитного поля, направленного по оси OZ .

111. Жесткий плоский ротор помещен в слабое электрическое поле \mathbf{E} , направленное по оси OX . Заряд частицы равен e , расстояние от начала координат a . Вычислить поправки к энергии ротора в первом и втором приближениях.

112. Атом водорода помещен в электрическое однородное поле \mathbf{E} , направленное по оси OZ . Найти расщепление уровня энергии, отвечающего главному квантовому числу $n = 2$.

113. Показать, что для атомов первой группы, у которых уровни энергии E_{nl} определяются числами n и l , линейный эффект Штарка отсутствует. (Эффект Штарка — расщепление линий во внешнем однородном электрическом поле)

114. Рассмотреть эффект Штарка в водороде (вычислить расщепление n -го уровня в электрическом поле \mathbf{E} , направленном по оси OZ), используя решение невозмущенной задачи в параболических координатах.

115. Система, стационарные состояния которой описываются функциями Ψ_0 и Ψ_1 , находится в состоянии Ψ_0 . В момент времени $t = 0$ включается возмущение, не зависящее от времени. Определить зависимость от времени функции $\Psi(t)$, описывающей возмущенную систему.

116. Вычислить вероятность ионизации атома плоской монохроматической волной, вектор-потенциал которой имеет составляющие:

$$A_x = A \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}), \quad A_y = 0, \quad A_z = 0.$$

До включения возмущения электрон находится в $1s$ -состоянии вблизи ядра Ze ; в конечном состоянии его можно считать свободным.

117. Две тождественные частицы находятся во внешнем поле $V(r)$. Кроме того, между ними существует взаимодействие \hat{H}_{12} . Считая, что решение уравнения Шредингера для одной частицы найдено, построить решение для системы двух частиц.

118. Используя решение задачи 117, рассмотреть изменение во времени вероятности того, что обе частицы останутся в первоначальном состоянии, если в начальный момент ($t = 0$) они находились в r -ом (первая) и s -ом (вторая) состояниях одночастичного гамильто-

ниана. Определить время, которое понадобится для того, чтобы они обменялись состояниями.

119. Применяя прямой вариационный метод, найти нижайший уровень трехмерного осциллятора, выбрав в качестве приближенной функции

$$\varphi = A(1 + \alpha r)e^{-\alpha r}.$$

120. Рассмотреть прямым вариационным методом задачу дейтерона. Взаимодействие между протоном и нейтроном задается как $V(r) = -Ae^{-r/a}$. В качестве приближенной функции взять

$$\varphi = Be^{-\alpha r/2a}.$$

121. Сравнить энергию основного состояния электрона в атоме водорода E_0 , вычисленную вариационным методом с использованием двух приближенных функций: 1) $\varphi_1 = A(1 + \alpha r)e^{-\alpha r}$; 2) $\varphi_2 = Be^{-\alpha r^2/2}$.

122. Вычислить ионизационный потенциал основного состояния атома гелия, используя метод теории возмущений и варьируя постоянную s , характеризующую экранировку. В невозмущенной задаче следует положить энергию взаимодействия каждого электрона с ядром равной $-\frac{(2-s)e^2}{r}$, включив компенсирующий член $\frac{se^2}{r_1} + \frac{se^2}{r_2}$ в энергию возмущения.

123. Рассмотреть упругое рассеяние частиц некоторым центром, считая их взаимодействие с этим центром $V(r)$ малым возмущением. Составить дифференциальный поперечник рассеяния, определив его как отношение тока частиц через элемент площади dS , находящийся на большом расстоянии от центра, к плотности тока падающих частиц:

$$qd\Omega = \frac{|j_{\text{рас}} \cdot dS|}{|j_{\text{пад}}|}.$$

124. Используя результат задачи 123, вычислить дифференциальный поперечник рассеяния частиц кулоновским полем (формула Резерфорда).

125. Определить дифференциальный поперечник упругого рассеяния положительно заряженных (заряд e_1) частиц атомом. Атом рассматривать как неподвижный центр с зарядом Ze , окруженный отрицательно заряженным непрерывным облаком, плотность которого равна $-\rho(r)$. Вычислить $qd\Omega$ для

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-r/a}.$$

126. Вычислить дифференциальный и полный поперечник упругого рассеяния частиц полем $V = \frac{A}{r} e^{-\alpha r}$.

РАЗДЕЛ IV

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ЗАКОНЫ

Для описания состояния систем, состоящих из большого числа частиц, применяются два метода: статистический и термодинамический. Первый метод позволяет не только получать общие соотношения второго метода, но и вычислять конкретные значения термодинамических величин для данной системы.

Постулаты классической статистической механики. Пусть система состоит из N частиц, находящихся в объеме V . Движение частиц подчиняется уравнениям классической механики. Состояние такой системы полностью определяется заданием обобщенных координат и импульсов $q_1, q_2, \dots, q_N; p_1, p_2, \dots, p_N$ (фазовая точка в $2N$ -мерном фазовом пространстве), а динамика — гамильтонианом $H = H(p_i, q_i)$, который позволяет найти p_i, q_i в любой момент времени с помощью уравнений:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Для системы с большим числом частиц N невозможно определить ее состояние в любой момент времени, да в этом и нет надобности. При изучении таких систем обычно интересуются некоторым небольшим числом макроскопических величин. Например, потребуем, чтобы число частиц в системе было N , объем V , а значения энергии лежали в интервале $[E; E + \Delta E]$. Этим условиям, очевидно, удовлетворяет большое число состояний системы. Поэтому при вычислении для данной системы любых средних макроскопических величин

$$\bar{F}^t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F[p_i(t), q_i(t)] dt \quad (2)$$

встаем на следующий путь.

Введем бесконечно большое число копий данной системы (один гамильтониан $H(p_i, q_i)$, но разные начальные условия p_i^0, q_i^0) в какой-либо момент времени t . Такой «ансамбль» систем будет распределен в фазовом пространстве с некоторой плотностью $\rho(q_i, p_i, t)$. В случае системы, изолированной от внешней среды, энергия ее

будет постоянной величиной, т. е.

$$H(p_i, q_i) = E, \quad (3)$$

а фазовые точки «ансамбля» будут распределены по гиперповерхности постоянной энергии (3).

Плотность вероятности определяется в этом случае следующим соотношением, называемым микроканоническим распределением:

$$\rho(H) = \frac{\delta[H(p_i, q_i) - E]}{\Omega(E)}, \quad (4)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака [см. формулу (49)];

$$\Omega(E) = \frac{\partial \Gamma(E)}{\partial E}; \quad \Gamma(E) = \int \dots \int d^N p d^N q. \quad (5)$$

$$H(p_i, q_i) \leq E$$

Среднее по такому ансамблю для любой физической величины теперь будет равно

$$\overline{F^s} = \int_{-\infty}^{\infty} \int \rho(H) \cdot F(p_i, q_i) d^N p d^N q. \quad (6)$$

Реальные физические системы находятся в контакте с окружающей средой. Например:

а) механическое взаимодействие с источником работы, оказывающим силовое воздействие на систему. Такое состояние системы может быть описано $H(p_i, q_i, a_s)$, где a_s — обобщенные координаты внешних тел, рассматриваемые как переменные системы. Тогда величина $A_s = -\frac{\partial H}{\partial a_s}$ будет представлять силу, с которой система действует на внешнюю среду;

б) тепловой контакт между системой, описываемой гамильтонианом $H(p_i, q_i, a_s)$, и термостатом (другая система) с $H_0(p'_i, q'_i)$. Общий гамильтониан будет

$$H(p_i, q_i, p'_i, q'_i, a_s) = H(p_i, q_i, a_s) + H_0(p'_i, q'_i) + H'(p_i, q_i, p'_i, q'_i).$$

Эти системы находятся в равновесии, если энергия H' мала и она позволяет системе обмениваться с термостатом энергией достаточно быстро, чтобы любое состояние составной системы по истечении большого промежутка времени реализовалось с равной вероятностью;

в) материальный контакт между системой и термостатом, состоящий в обмене частицами. При равновесии энергия H' должна удовлетворять прежним требованиям.

В случае б) плотность вероятности для «ансамбля» имеет вид (каноническое распределение Гиббса)

$$\rho(H) = C e^{-H(p_i, q_i, a_s)/\Theta}, \quad (7)$$

где C — постоянная нормировки, а

$$\frac{1}{\Theta} \equiv \frac{\partial \ln \Omega(E)}{\partial E}, \quad (8)$$

Θ — модуль распределения (при равновесии двух систем их модули совпадают).

Обозначив $C \equiv e^{F(\Theta, a_s)/\Theta}$, получим

$$F(\Theta, a_s) = -\Theta \ln \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-H(p_i, q_i, a_s)/\Theta} d^N p d^N q. \quad (9)$$

Величина

$$Z \equiv \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-H(p_i, q_i, a_s)/\Theta} d^N p d^N q \quad (10)$$

получила название статистического интеграла системы. Она является основной величиной при расчете физических свойств системы.

Исходя из формулы (7), можно показать, что

$$E \equiv \bar{H} = F - \Theta \left(\frac{\partial F}{\partial \Theta} \right)_{a_s}, \quad \bar{A}_s = - \left(\frac{\partial F}{\partial a_s} \right)_{\Theta}, \quad (11)$$

а энтропия определится как

$$\eta \equiv - \left(\frac{\partial F}{\partial \Theta} \right)_{a_s}.$$

Физический смысл Θ можно выяснить, например, рассматривая идеальный газ. Оказывается, что $\Theta = kT$, где k — постоянная Больцмана, а T — абсолютная температура системы. Величину F можно отождествить со свободной энергией системы.

Итак, зная гамильтониан системы H , по формуле (10) можно найти Z , а затем

$$F(\Theta, a_s) = -kT \ln Z. \quad (12)$$

Все другие величины находим из F простым дифференцированием:

$$\begin{aligned} E &= F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{a_s}, \\ \bar{A}_s &= - \left(\frac{\partial F}{\partial a_s} \right)_{T}, \text{ например } p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T}, \\ S &= - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{a_s} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (13)$$

Термодинамическое описание состояния системы. Исходя из соотношении, приведенных выше, можно получить основные положения термодинамики.

1 Первое начало термодинамики: количество теплоты, полученное системой, (убыль средней энергии термостата) идет на изменение внутренней энергии системы и работу, совершаемую системой над внешними телами:

$$\begin{aligned} dQ &= dE + \sum_s \bar{A}_s da_s, \\ dQ &= -d\bar{H}_0(p'_i, q'_i). \end{aligned} \quad (14)$$

2. Второе начало термодинамики:

$$dS \geq \frac{dQ}{T}; TdS = dE + \sum_s \bar{A}_s da_s. \quad (15)$$

Знак равенства соответствует равновесному состоянию системы.

3. Третье начало (постулат Нернста): энтропия системы $S(T, a_s)$ при $T \rightarrow 0$ перестает зависеть от a_s , т. е. является постоянной величиной для всех веществ.

Метод термодинамики базируется на этих трех началах, используя факт, что S и E являются функциями состояния системы, для которых

$$\oint dE = 0; \oint dS = 0, \quad (16)$$

т. е. dE и dS — полные дифференциалы.

Условие полноты дифференциала $dZ = Xdx + Ydy$ состоит в равенстве смешанных производных второго порядка:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_y.$$

Приведем соотношения для других термодинамических потенциалов.

1. Свободная энергия $F = E - TS$:

$$dF = -SdT - \sum_s A_s da_s, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial a_s}\right)_T = \left(\frac{\partial A_s}{\partial T}\right)_{a_s}. \quad (17)$$

2. Энтальпия $H = E + \sum_s A_s a_s$:

$$dH = TdS + \sum_s a_s dA_s, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial A_s}\right)_{a_s} = \left(\frac{\partial a_s}{\partial S}\right)_{A_s}. \quad (18)$$

3. Потенциал Гиббса $\Phi = F + \sum_s A_s a_s$:

$$d\Phi = -SdT + \sum_s a_s dA_s, \\ -\left(\frac{\partial S}{\partial A_s}\right)_T = \left(\frac{\partial a_s}{\partial T}\right)_{A_s}. \quad (19)$$

Используя еще дополнительно уравнение состояния $A_s = A_s(T, a_s)$ получаем ряд соотношений, которые проверяются на опыте. Численные же значения величин, входящих в эти соотношения, в термодинамике не находятся. (В формулах (17)–(19) черта над A_s опущена.)

Большое каноническое распределение Гиббса. В случае контакта в) при наличии в системе m сортов частиц имеем

$$\rho \leftarrow C e^{\left[-H(p_i, q_i, a_s) + \sum_{j=1}^m \mu_j N_j \right] / \theta}, \quad (20)$$

где C — постоянная нормировки,

$$\frac{1}{\Theta} \equiv \frac{\partial \ln \Omega(E, \bar{N}_1, \dots, \bar{N}_m)}{\partial E}, \quad (21)$$

Θ — модуль распределения, а

$$\frac{\mu_j}{\Theta} \equiv \frac{\partial \ln \Omega(E, \bar{N}_1, \dots, \bar{N}_m)}{\partial \bar{N}_j}$$

(μ_j — химический потенциал j -го сорта частиц).

С учетом правильного подсчета числа состояний (парадокс Гиббса) находим

$$Z = \sum_{N_1=0}^{\infty} \dots \sum_{N_m=0}^{\infty} \frac{e^{\sum_{j=1}^m \mu_j N_j / \Theta}}{N_1! N_2! \dots N_m!} \cdot Z_0,$$

$$Z_0 = \int \dots \int e^{-\frac{H(p_i, q_i, a_s)}{\Theta}} d\Gamma(N_j).$$

$$-\frac{\Xi(\Theta, a_s, \mu_j)}{\Theta}$$

Определяя $C = e^{-\frac{\Xi(\Theta, a_s, \mu_j)}{\Theta}}$, получаем для термодинамического потенциала Ξ выражение

$$\Xi = -kT \ln Z, \quad (23)$$

а

$$S = -\left(\frac{\partial \Xi}{\partial T}\right)_{\mu_j, a_s}; \quad \bar{A}_s = -\left(\frac{\partial \Xi}{\partial a_s}\right)_{T, \mu_j},$$

$$\bar{N}_j = -\left(\frac{\partial \Xi}{\partial \mu_j}\right)_{T, a_s}.$$

Отсюда

$$d\Xi = -S dT - \sum_s \bar{A}_s da_s - \sum_{j=1}^m \bar{N}_j d\mu_j; \quad (25)$$

$$dS = \frac{1}{T} \left(dE + \sum_s \bar{A}_s da_s - \sum_{j=1}^m \mu_j d\bar{N}_j \right); \quad (26)$$

$$dF = -S dT - \sum_s \bar{A}_s da_s + \sum_{j=1}^m \mu_j d\bar{N}_j; \quad (27)$$

$$d\Phi = -S dT + \sum_s a_s d\bar{A}_s + \sum_{j=1}^m \mu_j d\bar{N}_j; \quad (28)$$

$$0 = -S dT + \sum_s a_s d\bar{A}_s - \sum_{j=1}^m \bar{N}_j d\mu_j. \quad (29)$$

Как видно из последнего соотношения, μ_j , \bar{A}_s и T являются зависимыми величинами.

Условие равновесия двух систем имеет вид:

$$p_1 = p_2 \quad (\text{механическое равновесие}); \quad (30a)$$

$$T_1 = T_2 \quad (\text{тепловое равновесие}); \quad (30b)$$

$$\frac{\mu_1}{T_1} = \frac{\mu_2}{T_2} \quad (\text{равновесие по отношению к обмену частицами}). \quad (30в)$$

Квантовая статистика. Стационарное состояние квантовомеханической системы из N частиц описывается волновой функцией $\Psi_k(q) = \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$, которая определяется из стационарного уравнения Шредингера

$$\hat{H}\Psi_k(q) = E_k\Psi_k(q), \quad (31)$$

где

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2} \sum_k \frac{1}{m_k} \Delta_k + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N).$$

Значение физической величины f в состоянии k (в квантовой механике ей соответствует оператор \hat{f}) находится по правилу

$$\langle \hat{f} \rangle = \int \Psi_k^* \hat{f} \Psi_k dq. \quad (32)$$

Но в статистической физике каждому состоянию E_k приписывается определенная вероятность его реализации, обусловленная макроскопическими состояниями системы.

Отсюда для среднего статистического в квантовой статистике имеем

$$\begin{aligned} \langle \bar{f} \rangle &\equiv \bar{f} = \sum_k \omega_k \langle f \rangle_k = \sum_k \omega_k \int \Psi_k^* \hat{f} \Psi_k dq = \\ &= \int_q \int_{q'} \delta(q - q') \hat{f}(q) \rho(q, q') dq dq', \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\rho(q, q') = \sum_k \omega_k \Psi_k^*(q') \Psi_k(q) \quad (34)$$

— матрица плотности в координатном представлении.

По аналогии с классической статистической физикой, ω_k выбирают в виде

$$\omega_k = e^{\frac{F(a_s, T) - E_k}{\Theta}}. \quad (35)$$

Отсюда

$$F = -kT \ln Z, \quad (36)$$

где статистическая сумма Z равна

$$Z = \sum_k e^{-\frac{E_k}{kT}} = \sum_j e^{-\frac{E_j}{kT}} \Omega(E_j), \quad (37)$$

$\Omega(E_j)$ — кратность вырождения j -го энергетического уровня системы.

Под суммированием по j следует понимать суммирование по дискретным уровням системы и интегрирование по непрерывному спектру системы.

Все последующие соотношения полностью эквивалентны соотношениям классической статистической механики.

При наличии материального контакта

$$Z = \sum_{N_1=0}^{\infty} \dots \sum_{N_m=0} \sum_n \exp \left[-\frac{1}{kT} \left(E_{N, n} - \sum_{j=1}^m N_j \mu_j \right) \right], \quad (38)$$

где $E_{N, n}$ — энергия n -го квантового состояния.

Термодинамический потенциал определяется аналогично (23) по формуле

$$\Xi = -kT \ln Z. \quad (39)$$

В случае невзаимодействующих частиц выражение (38) значительно упрощается, ибо из-за неразличимости частиц состояние такой системы задается числами заполнений n_i . Тогда

$$E_n = \sum_i \varepsilon_i n_i; \quad N = \sum_i n_i; \quad (40)$$

ε_i — энергия i -го одночастичного состояния;

$$Z = \sum_{\{n_i\}} \left(e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} \right)^{n_i}, \quad (41)$$

где суммирование ведется по числу частиц в одночастичных состояниях ε_i .

Общие принципы квантовой механики налагают строгие правила на числа заполнений n_i . Возможны лишь два случая:

- 1) $n_i = 0$ или 1 (частицы с полуцелым спином);
- 2) $n_i = 0, 1, 2 \dots$ (частицы с целочисленным спином).

Используя теперь выражение (41), получим для средних чисел частиц в состоянии с энергией ε следующие соотношения:

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} + 1} \quad (\text{статистика Ферми}); \quad (42)$$

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} - 1} \quad (\text{статистика Бозе}). \quad (43)$$

Энергия и число частиц определяются стандартными формулами:

$$E = \sum_i \varepsilon_i \bar{n}_i; \quad (44)$$

$N = \sum_i \bar{n}_i$ (условие для нахождения μ).

Предел применимости квантовых распределений для идеального газа определяется неравенством:

$$\frac{N}{V} \gg \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2}. \quad (45)$$

Флуктуации и кинетическая теория. Статистическая механика позволяет вычислить флуктуации физических величин, ибо вероятность флуктуации макроскопических величин может быть выражена через T , a_s .

Вероятность флуктуации физической величины x (равновесное значение которой x_0) дается соотношением

$$\rho(x) = Ce^{-\frac{W_{\min}(x_0, x)}{kT_0}}, \quad (46)$$

где $W_{\min}(x_0, x)$ —минимальная работа, необходимая для перевода системы из x_0 в x ; T_0 —равновесная температура.

В случаях малых отклонений от положения равновесия для вероятности флуктуации термодинамических величин, получим

$$\rho = Ce^{\frac{\Delta p \cdot \Delta V - \Delta T \Delta s}{2kT_0}}. \quad (47)$$

Эта формула позволяет находить флуктуации любых термодинамических величин, если при этом выбрать соответствующим образом независимые переменные.

При изучении различных кинетических явлений необходимо знать число частиц, имеющих в момент времени t радиус-вектор, лежащий в интервале $[\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r}]$, и скорость—в интервале $[\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}]$, т. е.

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot d\mathbf{r} d\mathbf{v}.$$

Для функции распределения f можно получить интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \right] f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t) = \\ & = \int d\Omega \int d\mathbf{v}_2 \sigma(\Omega) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| [f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_2, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_1, t) - \\ & \quad - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t)]. \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ —скорости первой и второй частиц до столкновения, $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ —то же после столкновения; $\sigma(\Omega)$ —дифференциальное эффективное сечение рассеяния, $d\Omega$ —элемент телесного угла.

Уравнение (48) получено в приближении при следующих условиях: 1) учитываем только бинарные столкновения; 2) пренебрегаем действием стенок сосуда; 3) пренебрегаем действием внешних сил на $\sigma(\Omega)$; 4) учитываем независимость скорости частицы от ее положения в пространстве.

Определенная из уравнения (48) функция f позволяет подсчитать различные кинетические коэффициенты: тензор электропроводности, коэффициенты теплопроводности, вязкости, диффузии и т. д.

Математическое дополнение

Дельта-функция Дирака. Пусть $f(x)$ —непрерывная вместе со всеми своими производными функция на интервале $(-\infty, \infty)$, то δ -функцию определяют при помощи следующего операторного соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a), \quad (49)$$

причем $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$.

Из данного определения следует:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1;$$

$$2) \delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x);$$

$$3) \delta^n(x) = (-1)^n \delta(x);$$

$$4) \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \text{ (разложение Фурье);}$$

$$5) \delta[\varphi(x)] = \frac{\sum_{s=1}^k \delta(x-x_s)}{|\varphi'(x_s)|},$$

где x_s — простые корни уравнения $\varphi(x) = 0$.

Гамма- и бета-функции Эйлера Гамма- и бета-функции Эйлера определяются посредством следующих интегральных равенств

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad (\alpha > 0); \quad (50)$$

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1-x)^{\beta-1} x^{\alpha-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (51)$$

Интегрируя равенство (50) по частям, получаем

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha). \quad (52)$$

При $\alpha = 1$ и $\alpha = 1/2$ равенство (52) дает

$$\Gamma(1) = 1; \quad (53)$$

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}. \quad (54)$$

Используя эти соотношения, можно определить $\Gamma(\alpha)$ для значений $\alpha = \frac{n+1}{2}$, где $n = 0, 1, 2 \dots$. Для других значений следует пользоваться специальными таблицами.

Объем сферы радиуса R в пространстве n -измерений. Объем, ограниченный поверхностью $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = R^2$ (уравнение сферы в пространстве n измерений), будет

$$V_n(R) = \int \dots \int dx_1 \dots dx_n. \quad (55)$$

Сделав замену переменных $x_i = y_i R$, получим

$$V_n(R) = R^n V_n(1), \quad (56)$$

где

$$V_n(1) = \int \dots \int dy_1 \dots dy_n, \quad (57)$$

причем интегрирование проводится по области, ограниченной поверхностью $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 \leq 1$.

Учитывая соотношения (57), (51), (52), можно легко вычислить $V_n(1)$ Действительно,

$$\begin{aligned}
 V_n(1) &= \int_{-1}^1 dy_1 \int_{y_2^2 + \dots + y_n^2 \leq 1 - y_1^2} \dots \int dy_2 \dots dy_n = \int_{-1}^1 (1 - y_1^2)^{\frac{n-1}{2}} dy_1 V_{n-1}(1) = \\
 &= V_{n-1}(1) B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right), \\
 V_n(1) &= \frac{\Gamma(1/2) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} V_{n-1}(1). \tag{58}
 \end{aligned}$$

Используя теперь это рекуррентное соотношение, получаем окончательно

$$V_n(1) = \frac{\Gamma(1/2) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot \frac{\Gamma(1/2) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \dots V_1(1) = \frac{1^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

так как $V_1(1) = 1$. Отсюда

$$V_n(R) = R^n \cdot \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}. \tag{59}$$

Вычисление интегралов вида:

$$\begin{aligned}
 I(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-\alpha x^n} dx \tag{60} \\
 m &= 0, 1, 2 \dots ; \\
 n &= 2, 4, 6 \dots
 \end{aligned}$$

В случае нечетных m $I(\alpha) = 0$, в случае четных

$$I(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} x^m e^{-\alpha x^n} dx.$$

Полученный интеграл сводится к гамма-функции заменой $y = \alpha x^n$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-\alpha x^n} dx = \frac{2}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{\alpha^{\frac{m+1}{n}}}. \tag{61}$$

Заметим, что равенство

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-\alpha x^n} dx = \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{\alpha^{\frac{m+1}{n}}} \tag{62}$$

справедливо при значениях $m \geq 0$ и $n \geq 0$, не обязательно целочисленных.

Воспользовавшись соотношением (62), можно получить

$$1) \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha};$$

$$2) \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\pi^{1/2}}{4\alpha^{3/2}};$$

$$3) \int_0^{\infty} x^3 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \alpha^{-2};$$

$$4) \int_0^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(5/2)}{\alpha^{5/2}}.$$

Интеграл ошибок. Интеграл ошибок определяется по формуле

$$\Phi(x) = \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (63)$$

В случае $x \ll 1$ в формуле (63) можно разложить подынтегральную функцию в ряд. Тогда

$$\Phi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \dots \right). \quad (64)$$

Используя определение, легко доказать следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\pm x}^{\infty} e^{-t^2} dt &= 1 \mp \Phi(x); \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\pm x}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt &= \frac{1}{2} \pm \left\{ \frac{x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - \frac{1}{2} \Phi(x) \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

$$\Phi(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-t^2} dt \approx 0,84. \quad (66)$$

Некоторые интегралы квантовых статистик. При расчете физических свойств квантовых ферми-систем часто встречается интеграл следующего вида:

$$I_1(\mu) = \int_0^{\infty} \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) + 1},$$

где функция $f(\varepsilon)$ такова, что интеграл сходится.

Делая замену $\frac{\varepsilon - \mu}{kT} = y$ и ограничиваясь случаем низких температур, сведем вычисление данного интеграла к вычислению следующего асимптотического ряда:

$$\begin{aligned} I_1(\mu) &= kT \int_0^{\mu/kT} \frac{f(\mu - kT \cdot y)}{e^{-y} + 1} dy + kT \int_0^{\infty} \frac{f(\mu + kT \cdot y)}{e^y + 1} dy = kT \int_0^{\infty} \frac{f(\mu + kT \cdot y) - f(\mu - kT \cdot y)}{e^y + 1} dy + \\ &\quad + \int_0^{\mu} f(\varepsilon) d\varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда

$$I_1(\mu) = \int_0^{\mu} f(\varepsilon) d\varepsilon + 2kT \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kT)^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{(2n-1)}(\mu) \int_0^{\infty} \frac{y^{2n-1}}{e^y + 1} dy. \quad (67)$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{y^{2n-1}}{e^y + 1} dy &= \int_0^{\infty} y^{2n-1} e^{-y} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{-my} dy = \Gamma(2n) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)^{2n}} = \\ &= \Gamma(2n) (1 - 2^{1-2n}) \zeta(2n), \end{aligned}$$

где $\zeta(2n) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}}$ — дзета-функция Римана.

Приведем значение ζ -функции при некоторых значениях n :

$$\begin{aligned} \zeta(3/2) &= 2,612; \quad \zeta(5/2) = 1,341; \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}; \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}; \\ \zeta(3) &= 1,202; \quad \zeta(5) = 1,037 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Итак, окончательно:

$$I_1(\mu) = \int_0^{\mu} f(\varepsilon) d\varepsilon + 2kT \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kT)^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{(2n-1)}(\mu) \Gamma(2n) [1 - 2^{1-2n}] \zeta(2n). \quad (68)$$

При изучении физических свойств бозе-систем приходится часто встречаться с интегралом другого вида:

$$I_2(\mu) = \int_0^{\infty} \frac{y^{n-1}}{e^y - 1} dy.$$

Вычисления, аналогичные предыдущим, дают для него следующее значение:

$$I_2(\mu) = \int_0^{\infty} \frac{y^{n-1}}{e^y - 1} dy = \Gamma(n) \zeta(n). \quad (69)$$

Если в интеграле $I_1(\mu)$ функция $f(\varepsilon) = \frac{e^{\varepsilon j}}{\Gamma(j+1)}$, то он носит название интеграла Ферми:

$$F_j(\eta) = \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_0^{\infty} \frac{e^{\varepsilon j} d\varepsilon}{\exp(\varepsilon - \eta) + 1}. \quad (70)$$

Ввиду широкого использования этого интеграла в теории твердого тела функция $F_j(\eta)$ численно протабулирована для большого числа значений j . В простейшем случае ($j = 1/2$) можно указать некоторые экстраполяционные оценки для этого интеграла:

$$F_{1/2}(\eta) \approx e^{\eta} \text{ при } \eta \rightarrow -\infty \quad (71)$$

$$F_{1/2}(\eta) \approx \frac{e^{\eta}}{1 + 0,27e^{\eta}} \text{ при } \eta \leq 1,3;$$

$$F_{1/2}(\eta) = \frac{4\eta^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{1,15}{\eta^2} \right) \text{ при } \eta \geq 1. \quad (72)$$

Условие полноты дифференциала функции двух переменных. Полным дифференциалом функции $f = f(x, y)$ называется линейная часть ее приращения, т. е.

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy = f_x dx + f_y dy.$$

Условием (необходимым и достаточным) полноты дифференциального выражения

$$dF(x, y) = Q(x, y) dx + P(x, y) dy$$

в случае существования и непрерывности функций $Q(x, y)$, $P(x, y)$ и их производных $\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_x$, $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_y$ есть равенство:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_y. \quad (73)$$

В случае выполнения условия (73)

$$\oint dF = 0.$$

Функциональные определители двух переменных и их свойства. Функциональным определителем двух функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ называется определитель вида:

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x & \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x \end{vmatrix}. \quad (74)$$

Используя это определение и свойства определителей, легко доказать следующие свойства якобианов:

$$\frac{D(u, v)}{D(x, v)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_v; \quad (75)$$

$$\frac{D(u, v)}{D(v, x)} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_v; \quad (76)$$

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{D(u, v)}{D(p, q)} \cdot \frac{D(p, q)}{D(x, y)}. \quad (77)$$

Если $u = u(p, q, l)$, $v = v(p, q, l)$; а $p = p(x, y)$, $q = q(x, y)$, $l = l(x, y)$, то

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{D(u, v)}{D(p, q)} \cdot \frac{D(p, q)}{D(x, y)} + \frac{D(u, v)}{D(q, l)} \cdot \frac{D(q, l)}{D(x, y)} + \frac{D(u, v)}{D(l, p)} \cdot \frac{D(l, p)}{D(x, y)}. \quad (78)$$

Подсчет числа состояний в модели Дебая. В случае малости амплитуд колебаний атомов в приближении упругого континуума смещения точек твердого тела удовлетворяют следующим волновым уравнениям:

$$\Delta \Psi_l - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \Psi_l}{\partial t^2} = 0; \quad (79)$$

$$\Delta \Psi_t - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial t^2} = 0.$$

Здесь c_l и c_t — скорости продольной и поперечной звуковых волн в твердом теле. Существует две поперечные волны, отличающиеся друг от друга лишь поляризацией. Частоты этих волн связаны с волновым вектором соотношениями:

$$\begin{aligned} \omega_l &= c_l k, \\ \omega_t &= c_t k; \end{aligned} \quad (80)$$

k — модуль волнового вектора. Если твердое тело имеет форму параллелепипеда со сторонами L_1 , L_2 , L_3 , то из частного решения уравнений (79)

$$\psi = \psi_0 \cos(\omega t - \varphi) \sin(k_x \cdot x) \sin(k_y \cdot y) \sin(k_z \cdot z)$$

и граничных условий

$$\psi(0, y, z) = \psi(L, y, z); \quad \psi(x, 0, z) = \psi(x, L, z); \quad \psi(x, y, 0) = \psi(x, y, L)$$

следует, что

$$k_x L_1 = n_1 \pi; \quad k_y L_2 = n_2 \pi; \quad k_z L_3 = n_3 \pi,$$

здесь n_1, n_2, n_3 — целые положительные числа. Отсюда для сферы радиуса $k = \omega/c$, число возможных значений волнового вектора

$$\Omega(\omega) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \frac{\pi \omega^3}{c^3} = \frac{\omega^3 V}{6\pi^2 c^3}, \quad (81)$$

где $V = L_1 L_2 L_3$ — объем кристалла.

Учитывая теперь наличие двух типов волн, получаем окончательно

$$\Omega(\nu) \cdot d\nu = \frac{V \omega^2}{2\pi^2 c^3} + \frac{2V \omega^2}{c^3 2\pi^2} = \frac{4\pi \nu^2 \cdot V \cdot d\nu}{c^3}, \quad (82)$$

где

$$\frac{3}{c^3} = \frac{1}{c_e^3} + \frac{2}{c_l^3}.$$

§ 2. ЗАДАЧИ

1. Некоторая система может с равной вероятностью находиться в N состояниях. Какова вероятность нахождения системы в одном из этих состояний?

2. Математический маятник совершает гармонические колебания по закону

$$\varphi = \varphi_0 \cos \frac{2\pi}{T} t; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Найти вероятность того, что при случайном измерении отклонения φ маятника это значение будет лежать в интервале $[\varphi, \varphi + d\varphi]$.

3. Вероятность того, что для некоторой системы значения величин x и y лежат в интервалах $[x; x + dx]$ и $[y; y + dy]$, дается выражением

$$dW(x, y) = C e^{-\alpha(x^2 + y^2)} dx dy \quad (\alpha > 0).$$

Считая, что областями изменения переменных x и y являются $[-\infty; \infty]$ и $[-\infty; \infty]$, найти нормировочную постоянную C .

4. Определить для предыдущего случая вероятность того, что значение величины x будет лежать в интервале $[x; x + dx]$.

5. При термоэлектронной эмиссии происходит вылет электронов с поверхности металла или полупроводника. Предполагая, что а) вылеты электронов статистически независимые события, б) вероятность вылета одного электрона за бесконечно малый промежуток времени dt равна λdt (λ — постоянная величина), определить вероятность вылета n электронов за время t .

6. Определить для предыдущего случая

$$\overline{\Delta n^2} = \overline{(n - \bar{n})^2},$$

если в единицу времени в среднем вылетает n_0 электронов.

7. Идеальный газ, состоящий из N молекул, находится в сосуде объемом V . Определить вероятность того, что в заданном объеме V_0 ($V_0 \ll V$) будет содержаться в данный момент n молекул. Рассмотреть предельные случаи:

а) $n \ll N$;

б) $n \gg 1$; $\Delta n = n - \bar{n} \ll \bar{n}$.

8. Доказать, что для случайной величины x вероятность события, при котором x окажется больше некоторой величины a , удовлетворяет неравенству Чебышева:

$$\omega(x > a) \leq \frac{\overline{x^2}}{a^2}.$$

9. Частица, находящаяся в исходный момент в начале координат, делает в следующий момент скачок на единицу либо вправо, либо

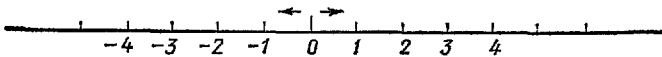


Рис 42

влево с вероятностью $1/2$. Определить вероятность $P_t(l)$ того, что после t шагов частица окажется в точке l данной одномерной решетки (рис. 42).

10. Определить вероятность $P_t(l)$ подобного случайного блуждания частицы по двумерной (квадратной) и трехмерной (кубической) решеткам, если данная частица может переходить в любую из своих смежных точек (4 — для квадратной и 6 — для кубической) с вероятностями $1/4$ и $1/6$ соответственно (рис. 43).

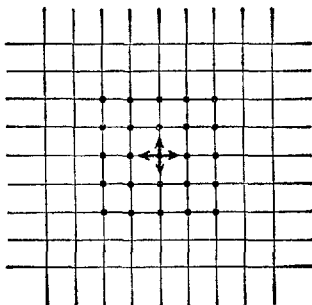


Рис 43

11. При рассмотрении задачи 9 возникает следующий вопрос (впервые поставленный Д. Пойа): всегда ли частица может вернуться в начальную точку, случайно перемещаясь в смежные точки решетки. Если нет, то определить для рассмотренных выше случаев вероятность невозвращения частицы в начальную точку.

12. Начертить в пространстве p, q фазовую траекторию частицы, движущейся с постоянной скоростью в направлении, перпендикулярном зеркально отражающим стенкам ящика. Размеры ящика вдоль направления движения $2a$

13. Определить фазовую траекторию тела массы m , которое движется в постоянном гравитационном поле из точки z_0 с начальной

скоростью v_0 , направленной вертикально вверх. Начертить эту траекторию.

14. Определить и начертить фазовую траекторию для частицы массы m с электрическим зарядом $-e$, движущейся под действием кулоновской силы притяжения к неподвижному заряду $+e$. Начальное расстояние r_0 , начальная скорость $v_0 = 0$.

15. Определить и начертить фазовую траекторию для линейного гармонического осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

при условии $\gamma \ll \omega_0$. Найти изменение фазового объема с течением времени.

16. Определить и начертить фазовую траекторию для физического маятника массы m , момент инерции которого равен J и приведенная длина L . Рассмотреть три случая:

1) $H_0 > 2mgL$;

2) $H_0 = 2mgL$;

3) $H_0 < 2mgL$ (H_0 — начальная энергия маятника).

17. Проверить выполнимость теоремы Лиувилля для следующих случаев

1) упругое столкновение двух шаров (удар центральный);

2) движение трех частиц в постоянном поле тяжести, начальные состояния которых определялись фазовыми точками:

$$A(p_0, z_0); \quad B(p_0, z_0 + a); \quad C(p_0 + b, z_0).$$

18. Определить нормировочный делитель $\Omega(E)$ микроканонического распределения Гиббса для следующих систем: а) совокупность N частиц идеального одноатомного газа; б) x независимых линейных осцилляторов.

19. Вывести распределение Гиббса (каноническое), взяв в качестве модели термостата примеры предыдущей задачи.

20. Гамильтониан идеального газа можно представить в виде:

$$H = \sum_i \mathcal{H}_i,$$

где \mathcal{H}_i — функция Гамильтона отдельной молекулы. Выразить статистический интеграл всего газа через статистический интеграл отдельной частицы. Определить среднюю энергию E , энтропию S и давление p .

21. Определить E , S , p и C_V (молярную теплоемкость при постоянном объеме) для следующих систем, состоящих из N взаимодействующих частиц, находящихся в объеме V :

1) одноатомный газ;

2) двухатомный газ при заторможенных колебаниях атомов (жесткий ротатор);

3) двухатомный идеальный газ с учетом колебаний атомов в молекуле (рассмотреть случай низких температур).

22. Определить энергию и давление для идеального газа, состоящего из N частиц и находящегося в сосуде объемом V , при следующих зависимостях энергии отдельной частицы от импульса p :

а) $H = ap^l$, $a > 0$ (l — положительное число);

б) $H = c \sqrt{m^2 c^2 + p^2}$ (c — скорость света).

23. Для некоторой системы известно, что ее статистический интеграл равен

$$Z(\beta) = \frac{A}{\beta^N} \left(\beta \equiv \frac{1}{kT} \right).$$

Определить $\Omega(E)$.

24. Система, как целое, вращается с угловой скоростью Ω . Записать распределение Гиббса во вращающейся системе координат.

25. Цилиндр высотой h с основанием радиуса R заполнен идеальным газом. Цилиндр вращается с угловой скоростью Ω , относительно оси вращения, перпендикулярной основанию и проходящей через его центр. Определить давление газа на боковую поверхность цилиндра, если общее число частиц газа N , а масса отдельной частицы m .

26. Вывести теорему вириала для макроскопического тела, у которого потенциальная энергия взаимодействия частиц есть однородная функция координат n -го порядка.

27. Определить среднее значение $\overline{H^n}$ ($n > 0$) для одноатомного идеального газа, состоящего из N частиц. Пользуясь полученным результатом, найти среднюю квадратичную $\alpha = \sqrt{\overline{(H - \overline{H})^2}}$ и среднюю относительную $\delta = \frac{\alpha}{\overline{H}}$ флуктуации энергии.

28. Используя распределение Гиббса, получить следующие распределения (различные формы распределения Максвелла):

1) вероятность того, что скорость любой частицы заданной системы лежит в интервалах

$$[v_x, v_x + dv_x], [v_y, v_y + dv_y]; [v_z, v_z + dv_z];$$

2) вероятность того, что абсолютная величина скорости любой частицы заданной системы лежит в интервале $[v, v + dv]$;

3) вероятность того, что кинетическая энергия любой частицы заданной системы лежит в интервале $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$.

29. Используя результат предыдущей задачи, найти следующие величины:

а) $\overline{v^n}$ при $n > -2$;

б) \overline{v} , $\overline{v^2}$;

в) v_0 (наиболее вероятное значение величины скорости частиц).

30. Найти $\overline{\epsilon}$ и наиболее вероятное значение кинетической энергии частиц ϵ_0 . Объяснить причину их несовпадения.

31. Энергия частицы релятивистского газа связана с импульсом соотношением $\epsilon = c \sqrt{m^2 c^2 + p^2}$. Записать распределение Максвелла в данном случае.

32. Как изменится распределение Максвелла, если система будет совершать движение как целое со скоростью u ?

33. Найти вероятность того, что две частицы имеют абсолютную величину скорости относительного движения $v' = v_1 - v_2$ в интервале от v' до $v' + dv'$. Определить v' .

34. Найти полное число соударений, испытываемых отдельной молекулой в единицу времени со всеми остальными. Молекулы считать абсолютно упругими шариками радиуса R_0 . Определить среднюю длину свободного пробега λ .

35. Определить отношение чисел частиц, имеющих энергию меньше и больше заданной энергии $\epsilon_1 = kT$.

36. Определить зависимость полного эффективного сечения рассеяния частиц от температуры, если потенциал взаимодействия между частицами имеет следующий вид:

$$U = \begin{cases} \infty; & r \leq R_0; \\ -\frac{\alpha}{r^n}; & r > R_0 \quad (n > 2; \alpha > 0). \end{cases}$$

37. Определить среднее число столкновений, испытываемых отдельной молекулой с другими молекулами в 1 сек в двухмерном случае (случай поверхности).

38. Каждый атом газа излучает монохроматический свет длиной волны λ_0 и интенсивностью J_0 . Найти интенсивность излучения газа, состоящего из N атомов, как функцию λ .

39. Допуская, что потенциальная энергия электрона внутри металла меньше его энергии вне металла на величину $W = e\phi$, определить плотность тока термоэлектронной эмиссии. Концентрация электронов n_0 , масса электрона m .

40. Показать, что для идеального газа с известным законом $\epsilon = \epsilon(p)$ давление дается следующим соотношением:

$$p = \frac{4\pi}{3} \frac{N}{V} \int_0^{\infty} \frac{\partial \epsilon}{\partial |p|} |p|^3 f(p) d|p|,$$

где $f(p)$ — функция распределения частиц по импульсам (т. е. вероятность того, что частица имеет импульс p).

41. Используя распределение Гиббса, найти для идеального газа, помещенного во внешнее потенциальное силовое поле $u(x, y, z)$, вероятность того, что координаты любой частицы газа будут лежать в интервалах $[x, x + dx]$; $[y, y + dy]$; $[z, z + dz]$.

42. Найти центр тяжести столба идеального газа в однородном поле тяжести, если ускорение поля тяжести g , масса молекулы m , температура T .

43. Смесь l идеальных газов, состоящих из одинакового количества частиц, но с различными массами атомов $m_1, \dots, m_k, \dots, m_l$, заключена в цилиндр радиуса R и высоты h и помещена в поле тяжести Земли. Определить центр тяжести данной системы.

44. Определить количество атомов, теряемых атмосферой планеты радиуса R и массы M . Масса атома m , а температуру атмосферы считать постоянной по высоте и равной T .

45. Два сосуда, в которых поддерживаются температуры и давления p_1, T_1 и p_2, T_2 соответственно, соединены между собой короткой трубкой сечением S . Определить массу газа, протекающую из одного сосуда в другой, если масса молекул газа m , $p_1 = 2p_2$ и $T_1 = 2T_2$.

46. Сфера радиуса R_0 движется со скоростью u в сильно разреженном идеальном газе (температура газа T , плотность n_0). Предполагая, что столкновения частиц газа со сферой абсолютно упругие, определить силу сопротивления, испытываемую сферой при ее движении.

47. В сосуде, содержащем идеальный газ, проделано небольшое круглое отверстие сечением S . Найти число частиц, попадающих на круглый диск радиуса R , расположенный на расстоянии h от щели.

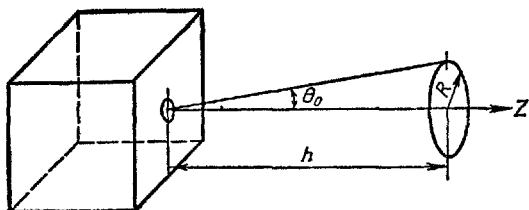


Рис. 44

Плоскость диска параллельна плоскости отверстия (рис. 44). Центры сечения S и диска лежат на прямой, перпендикулярной плоскости сечения. Молекулы газа подчиняются максвелловскому распределению по скоростям.

48. Разреженный газ находится в сосуде при давлении p . Определить скорость истечения v_n газа в вакууме через небольшое отверстие S_0 при максвелловском распределении молекул газа по скоростям.

49. Определить диэлектрическую постоянную для идеального газа, состоящего из N дипольных молекул с постоянным моментом p_0 , находящихся во внешнем однородном поле напряженностью E .

50. Провести расчет, аналогичный предыдущему, учитывая поляризуемость α молекул, не зависящую от величины внешнего поля.

51. Доказать, что произвольная классическая система взаимодействующих электрических зарядов не может находиться в равновесии во внешнем магнитном поле.

52. Некоторое тело, заряженное до потенциала ϕ_0 , помещено в плазму, состоящую из электронов (заряд $-e$) и ионов (заряд $+e$). Определить дебаевский радиус экранировки, считая температуру электронов T_e и ионов T_i различной, а плазму квазинейтральной. Число частиц в единице объема равно n_0 .

53. Идеальный газ заключен в сосуд, который закрыт подвижным поршнем, нагруженным массой M . Определить уравнение состояния газа в данном случае.

54. Вывести закон Дальтона для смеси n идеальных газов:

$$p = \sum_{i=1}^n p_i,$$

где p_i — парциальное давление.

55. Доказать, что для любой системы с гамильтонианом H

$$C_V = \frac{1}{kT^2} \overline{(H - \bar{H})^2}.$$

56. Доказать, что для любой физической величины $F(q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N)$ справедливы равенства:

$$F \frac{\partial H}{\partial q_i} = kT \frac{\partial F}{\partial q_i}; \quad F \frac{\partial H}{\partial p_i} = kT \frac{\partial F}{\partial p_i}.$$

57. Частицы разреженного газа взаимодействуют по закону (рис. 45):

$$U = \begin{cases} \infty, & \text{если } r \leq r_0; \\ -U_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^6, & \text{если } r > r_0. \end{cases}$$

Определить теплоемкость C_V такого газа.

58. Доказать, что для всех газов и жидкостей уравнение типа Ван-дер-Ваальса может быть представлено в виде:

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau$$

(приведенное уравнение Ван-дер-Ваальса), где

$$\pi = \frac{p}{p_{кр}}; \quad \tau = \frac{T}{T_{кр}}; \quad \omega = \frac{V}{V_{кр}}$$

($p_{кр}$, $T_{кр}$, $V_{кр}$ — критические давления, температура и объем соответственно).

59. Определить среднюю энергию и теплоемкость C_V идеального газа, состоящего из N двухатомных молекул, с учетом ангармонизма колебаний атомов в молекуле. Рассмотреть случай низких температур.

60. Атомы в двухатомной молекуле взаимодействуют по закону:

$$U(r) = \frac{B}{r^{12}} - \frac{A}{r^6} \quad (B, A > 0).$$

Определить «коэффициент линейного расширения» такой молекулы.

61. Для некоторой системы, состоящей из большого числа частиц, теплоемкость

$$C_V = \alpha T^n \quad (\alpha > 0, n > 1).$$

Определить $\Omega(E)$ для такой системы.

62. Иногда энтропию определяют как $S = k \ln \Gamma(E)$ или как $S = k \ln \Omega(E)$. Показать эквивалентность этих определений для систем с большим числом частиц.

63. Используя общие свойства энтропии и вероятности и предполагая, что между энтропией и вероятностью существует функциональная зависимость, доказать соотношение Больцмана:

$$S = k \ln \omega.$$

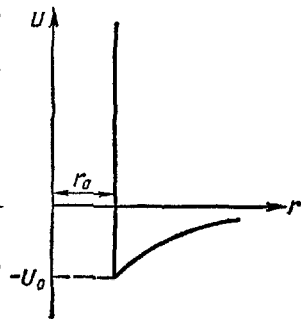


Рис. 45

64. Определить работу поляризации единицы объема изотропного диэлектрика.

65. Доказать, что для всякой средней обобщенной силы A , соответствующей сопряженному внешнему параметру a , имеет место тождество:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial A}\right)_a \left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_T \left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_A = -1.$$

66. Установить связь между термическими коэффициентами:

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p; \quad \beta = -\frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T; \quad \gamma = \frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V,$$

где V_0 , p_0 — соответственно средний объем и среднее давление в произвольной термодинамической системе.

67. Записать уравнение реального газа типа Дитеричи в приведенных переменных (см. задачу 58):

$$1) \quad p(V-b) = RT e^{-\frac{a}{RTV}};$$

$$2) \quad \left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT.$$

68. Определить температуру Бойля для реальных газов (т. е. температуру, при которой обращается в нуль первый вириальный коэффициент) при заданных a и b , исходя из уравнений Ван-дер-Ваальса и Дитеричи.

69. Определить скорость звуковой волны, распространяющейся в реальном газе, который подчиняется уравнению типа Ван-дер-Ваальса.

70. Найти уравнение адиабаты для идеального парамагнетика (см. задачу 49).

71. Определить уравнение адиабаты реального газа.

72. Вычислить разность между теплоемкостями диэлектрика при постоянном E и при постоянном D , т. е. $C_E - C_D$.

73. Показать, что

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V.$$

74. Определить к. п. д. тепловых двигателей, работающих по соответствующим циклам, изображенным на рис. 46 и рис. 47, если заданы параметры циклов $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$ и $\rho = \frac{V_3}{V_2}$, а горючую смесь считать идеальным газом.

75. Используя первое и второе начала термодинамики, доказать следующие соотношения:

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S} = \frac{\beta}{\delta};$$

$$C_V = \frac{TV_0\alpha^2 \cdot \delta}{(\beta - \delta)\beta}; \quad C_p = \frac{T \cdot V_0 \cdot \alpha^2}{\beta - \delta},$$

где $\alpha = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ — коэффициент теплового расширения, $\beta = -\frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ — изотермическая сжимаемость, $\delta = -\frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S$ — адиабатическая сжимаемость.

76. Определить в дифференциальном виде зависимость э. д. с. гальванического элемента от температуры.

77. Доказать соотношение [см. формулу (73)]:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_E = \frac{p - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \cdot T}{C_V}.$$

78. Найти среднюю энергию разреженной плазмы, которая занимает объем V . Плазма представляет собой систему, которая состоит

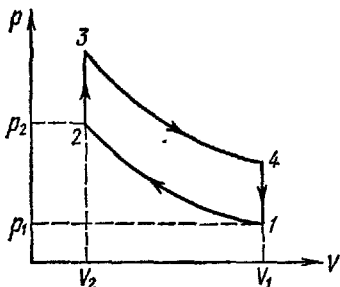


Рис. 46

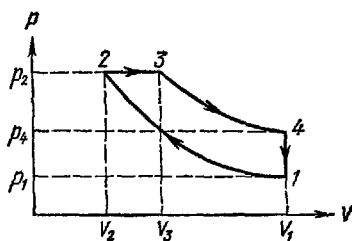


Рис. 47

из двух сортов противоположно заряженных частиц (N частиц каждого сорта с зарядами $+e$ и $-e$).

79. Используя результат предыдущей задачи, определить p , S и C_V для плазмы.

80. Найти $C_p - C_V$ в переменных: а) V , T ; б) p , T .

81. Показать, что

$$C_p - C_V = \left[V - \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T \right] \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V,$$

где $H = E + pV$ — энтальпия системы.

82. Показать, что для изотропного диэлектрика, помещенного во внешнее поле \mathbf{E} :

$$dF = -SdT - pdV - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{E},$$

где \mathbf{p} — вектор поляризации единицы объема диэлектрика.

83. Найти $C_p - C_V$ для газа, подчиняющегося уравнению состояния типа Ван-дер-Ваальса.

84. Какое количество теплоты надо подвести к одному молю реального газа, чтобы при постоянном давлении p он расширился от объема V_1 до объема V_2 . Уравнение состояния газа:

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT.$$

85. Процесс, происходящий в системе, называется политропическим, если в результате его теплоемкость системы $C = \frac{dQ}{dT}$ не изменяется. Используя это определение, найти уравнение политропы для одноатомного идеального газа.

86. Определить энтропию газа, который подчиняется следующим уравнениям:

$$V = V_0 [1 + \alpha(T - T_0)]; \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = 0; C_p = \text{const.}$$

87. Найти уравнение адиабаты для газа, уравнение состояния которого дается в виде

$$p = p_0 (1 + \alpha T - \beta V); C_v = \text{const.}$$

88. Определить, на сколько отличается тепловой эффект реакции образования одного грамм-моля водяного пара при постоянном давлении от теплового эффекта той же реакции, если она проходит без совершения внешней работы.

89. Определить к. п. д. тепловой машины, работающей по циклу Карно, если уравнения состояния рабочего тела имеют вид

$$V = V_0 [1 + \alpha(T - T_0)], \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = 0.$$

90. Показать возрастание энтропии при передаче тепла от более нагретого тела менее нагретому телу. Считать, что температуры тел выравниваются, а теплоемкости не зависят от температуры.

91. Найти изменение энтропии тела в случае его расширения при постоянном давлении.

92. Доказать, что изотерма не может дважды пересечь адиабату.

93. В интервале температур $0 < t < 4^\circ\text{C}$ коэффициент объемного расширения воды отрицательный. Доказать, что в этом интервале температур при адиабатическом сжатии вода охлаждается.

94. Может ли для воды выполняться соотношение $C_p = C_v$?

95. Основной причиной понижения температуры с высотой в атмосфере является адиабатическое расширение восходящих потоков воздуха. Используя уравнение адиабаты идеального газа, найти изменение температуры с высотой.

96. Используя первое начало термодинамики показать, что атмосфера с температурным градиентом, меньшим или большим градиента, найденного в предыдущей задаче, будет соответственно устойчивой или неустойчивой относительно конвекции.

97. Определить тепловой эффект поляризации единицы объема диэлектрика, пренебрегая изменением его удельного объема и предполагая, что

$$p = \frac{\varepsilon(T) - 1}{4\pi} \cdot E.$$

98. Показать, что для магнетика, помещенного во внешнее магнитное поле \mathbf{H} , при условии независимости E_0 от \mathbf{H} (E_0 — внутренняя энергия магнетика в вакууме без энергии поля там же) справедливо

следующее выражение для намагниченности:

$$M = f\left(\frac{H}{T}\right).$$

99. Стержень длины l , расположенный вдоль внешнего магнитного поля H , растягивается силой F . Из опыта известно, что намагниченность стержня в этом случае дается формулой

$$M = \text{const} \cdot \frac{lH}{F}.$$

Вычислить относительное изменение длины стержня при такой магнитоэстрикции.

100. Определить для равновесного излучения величины C_V , F , S , H , Φ , C_p .

101. Используя большое каноническое распределение Гиббса, получить для одноатомного идеального газа значения μ , ρ и S .

102. С помощью большого канонического распределения Гиббса показать, что вероятность того, что система содержит N частиц, не взаимодействующих между собой, дается распределением Пуассона.

103. Найти химический потенциал идеального газа, находящегося во внешнем потенциальном поле $U = U(x, y, z)$.

104. Частицы, обладающие спином, находятся во внешнем однородном магнитном поле \mathbf{H} . Определить отношение числа частиц с проекцией спина параллельно \mathbf{H} к числу частиц с проекцией спина антипараллельно \mathbf{H} .

105. Используя общие свойства большого канонического распределения Гиббса, показать, что

$$pV = k T \ln z,$$

где z — большая статистическая сумма.

106. Показать, что

$$\begin{aligned} \bar{N} &= V \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_{T, V}; \\ \mu &= \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S, V} = \left(\frac{\partial H}{\partial N}\right)_{S, p}. \end{aligned}$$

107. Найти C_V в переменных T , μ , V .

108. Считая теплоту перехода λ постоянной, определить зависимость давления насыщенного пара от температуры, если пар находится в равновесии с твердым телом.

109. В растворе находятся N молекул растворителя и n молекул растворимого вещества ($n \ll N$). Определить химические потенциалы раствора μ и растворенного вещества μ_1 , если химический потенциал растворителя μ_0 .

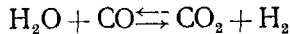
110. Раствор с концентрацией $c \ll 1$ растворенного вещества находится в однородном поле тяжести. Определить изменение концентрации c с высотой.

111. Показать, что химический потенциал равновесного излучения равен нулю.

112. Используя условия устойчивости равновесия, доказать, что всякий процесс, вызванный в равновесной системе внешними воздействиями, направлен так, чтобы ослабить эти воздействия (принцип Ле-Шателье—Брауна).

113. Определить условие механического равновесия между жидкостью и паром при наличии поверхности раздела (формула Лапласа).

114. В реакции



равновесие наступило при температуре T_0 и равновесных составах (в молях): $\text{CO}_2—m_1$, $\text{CO}—m_2$, $\text{H}_2\text{O}—m_3$, $\text{H}_2—m_4$. Определить константу химического равновесия $K(p, T)$.

115. Вычислить критический радиус капли жидкости при конденсации пара.

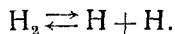
116. Доказать, что заряженная капля жидкости будет расти даже в ненасыщенном паре.

117. В системе происходит равновесная реакция $A \rightleftharpoons I^+ + e^-$ (термическая ионизация). Считая температуру ионов и электронов одинаковой, определить степень однократной ионизации как функцию p и T . Газы считать идеальными. Энергия ионизации равна ε_0 .

118. Выполнить аналогичный задаче 117 расчет, но температуру ионов—атомов и температуру электронов считать различными.

119. Вычислить количество теплоты, выделяющейся при химической реакции, идущей при постоянных p, T . Константа равновесия K_p известна.

120. Определить K_p и ΔQ_p на одну частицу (см. предыдущую задачу) для реакции диссоциации двухатомного водорода



Энергия диссоциации молекулы водорода $\Delta\varepsilon = 2\varepsilon_0^{\text{H}} - \varepsilon_0^{\text{H}_2}$.

121. Найти осмотическое давление между растворами с различными концентрациями, которые разделены полупроницаемой мембраной.

122. Система может находиться в двух квантовых состояниях с энергиями ε_1 и ε_2 . Кратности вырождения состояний g_1 и g_2 . Получить зависимость S от E и проанализировать эту зависимость.

123. Определить теплоемкость системы, состоящей из N независимых двухмерных гармонических осцилляторов, каждый из которых обладает $(n+1)$ кратко вырожденными уровнями энергии

$$\varepsilon_n = (n+1)h\nu \quad (n=0, 1, \dots).$$

124. Система имеет невырожденный энергетический спектр $\varepsilon_l = l\varepsilon$ ($l=0, 1, 2, \dots, n-1$). Определить среднюю энергию такой системы.

125. Представляя упругие колебания твердого тела в модели Дебая как фононный газ, подчиняющийся статистике Бозе, найти его энергию. Объем тела V , скорость распространения продольных и поперечных колебаний c_l и c_t соответственно. Рассмотреть случай низких температур.

126. Определить теплоемкость вырожденного электронного ультрарелятивистского газа ($\varepsilon = c \cdot p$).

127. Определить ток термоэлектронной эмиссии, когда электроны подчиняются статистике Ферми, а работа выхода электрона из металла W . Считать, что

$$W - \mu \gg kT$$

(μ — уровень химического потенциала).

128. Определить давление в электронном газе при $T = 0$, пользуясь распределением Ферми.

129. Определить давление вырожденного электронного газа при условии $\frac{kT}{\mu} \ll 1$.

130. Пользуясь большим каноническим распределением Гиббса, найти зависимость энтропии S от \bar{n}_i для идеальных газов, подчиняющихся статистикам Бозе—Эйнштейна и Ферми—Дирака.

131. Пусть $g(\epsilon)$ — одночастичная плотность состояний. Показать, что теплоемкость газа, подчиняющегося статистике Ферми—Дирака, при $kT \ll \mu_0$ дается формулой

$$C_V = \frac{\pi^2}{3} k^2 T g(\mu_0).$$

132. Возможно ли существование Бозе-конденсации идеального одноатомного газа в двух измерениях?

133. Известно, что в простейшем случае для спиновых волн в ферромагнетиках имеет место следующий закон дисперсии: $\omega = A \cdot k^2$, где \mathbf{k} — волновой вектор спиновой волны, A — постоянная величина.

Определить, какой вклад вносят эти возбуждения в теплоемкость кристаллов при низких температурах.

134. Показать, что для кристаллов справедливо соотношение Ми-Грюнейзена:

$$3V\alpha = \gamma k C_V,$$

где $\alpha = \frac{1}{3V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ — коэффициент линейного расширения, $\beta = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ — изотермическая сжимаемость, а величина $\gamma = -\frac{\partial \ln v_j}{\partial \ln V}$ предполагается постоянной для всех нормальных частот v_j .

135. Определить $\Omega(E)$ для твердого тела при $T \ll \frac{\hbar \omega_{\max}}{k}$.

136. Найти положение уровня Ферми в собственном невырожденном полупроводнике, если ширина запрещенной зоны с изменением температуры изменяется по закону

$$E_g = E_g^0 - \zeta T; \quad \zeta > 0$$

137. Определить концентрацию электронов в германии, если зависимость их энергии от волнового вектора (закон дисперсии) имеет вид

$$E_\alpha(\mathbf{k}) = E_c + \frac{\hbar^2 (k_x - k_x^\alpha)^2}{2m_t} + \frac{\hbar^2 (k_y - k_y^\alpha)^2}{2m_t} + \frac{\hbar^2 (k_z - k_z^\alpha)^2}{2m_l},$$

где $\alpha = 1, 2, 3, 4$ — число эквивалентных минимумов в зоне прово-

димости, m_t и m_l — поперечная и продольная эффективные массы электрона.

138. В зоне проводимости арсенида галлия закон дисперсии имеет вид, показанный на рис. 48. Определить положение уровня Ферми в этом полупроводнике в двух предельных случаях:

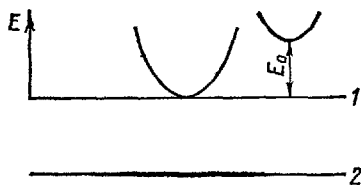


Рис. 48

а) невырожденного электронного газа;

б) сильно вырожденного электронного газа.

Влиянием остальных зон пренебречь.

139. Найти концентрацию электронов в полупроводнике, если известно, что при малых значениях волнового вектора k закон дисперсии имеет вид

$$E(\mathbf{k}) = E_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n} (1 - \gamma k^2),$$

γ — постоянная.

140. Определить концентрацию электронов в полупроводнике n -типа с узкой запрещенной зоной (антимонид индия). Закон дисперсии имеет вид

$$E(\mathbf{k}) = E_0 + \frac{1}{2} \left(\pm \sqrt{E_g^2 + \frac{2\hbar^2 k^2 E_g}{m(0)}} - E_g \right),$$

где E_g — ширина запрещенной зоны, $m(0)$ — эффективная масса электрона вблизи края зоны [$m(0) \ll m_0$].

141. Ширина запрещенной зоны в полупроводнике E_g , донорный и акцепторный уровни отстоят от нижнего края зоны проводимости на величины E_1 и E_2 соответственно. Считая, что электроны в зоне проводимости и дырки в валентной зоне подчиняются классической статистике, определить химический потенциал для этого полупроводника. Концентрация акцепторов n_a , доноров n_d . Эффективная масса электрона m_n , дырки m_p . Рассмотреть случай донорного полупроводника ($n_a = 0$; $E_g \gg E_1$).

142. Показать, что для примесного полупроводника произведение концентрации дырок на концентрацию электронов равно квадрату концентрации электронов (дырок) в собственном полупроводнике.

143. Определить теплоемкость электронов и дырок в собственном полупроводнике с шириной запрещенной зоны E_0 .

144. Найти уравнение состояния релятивистского полностью вырожденного электронного газа с энергией $\varepsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$.

145. Каково равновесное отношение концентрации орто- и параводорода при температуре $T \ll T_c = \frac{\hbar^2}{8J\pi^2 k}$, где J — момент инерции молекулы водорода?

146. Вывести распределение Ферми — Дирака из рассмотрения столкновения частиц с учетом принципа запрета Паули.

147. Определить для кристалла в дебаевской модели среднее от квадрата смещения атома решетки. В элементарной ячейке кристалла содержится 1 атом.

148. Как преобразуются термодинамические параметры — плотность и температура при переходе от одной инерциальной системы отсчета K к другой K' ?

149. Получить формулу Планка для теплового излучения в среде с дисперсией, где $n = n(\nu)$ (n — показатель преломления).

150. Найти спиновую парамагнитную восприимчивость системы свободных электронов, если одноэлектронная плотность состояний на единицу объема равна $g(E)$. Рассмотреть случай слабого поля.

151. Определить магнитную восприимчивость невырожденного электронного газа. Энергетические уровни электрона, движущегося в магнитном поле $H - H_2$, описываются формулой

$$\varepsilon = \frac{1}{2m_n} p^2 + 2\mu_0^* H (l + 1/2) \pm \mu_0 H; \quad l = 0, 1, \dots,$$

где m_n — эффективная масса электрона, $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m}$ — магнетон Бора.

152. Определить орбитальную магнитную восприимчивость вырожденного электронного газа в слабом магнитном поле ($\mu_0 H \ll kT$).

153. Определить предел чувствительности зеркального гальванометра с модулем упругости кручения нити α .

154. Найти флуктуации давления в однородной системе, находящейся в термостате, и показать, что для устойчивости состояния системы необходимо, чтобы

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S < 0.$$

155. Определить убыль энтропии, возникающую при самопроизвольных колебаниях математического маятника.

156. Найти корреляции $\overline{\Delta T \Delta p}$ и $\overline{\Delta S \Delta V}$.

157. Показать, что $\overline{\Delta S^2} = kC_p$; $\overline{\Delta S \Delta p} = 0$.

158. Вычислить флуктуацию энергии в двухуровневой системе.

159. Определить флуктуацию числа частиц для идеальных газов: а) Больцмана; б) Ферми — Дирака; в) Бозе — Эйнштейна. Проанализировать полученные результаты.

160. Показать, что в большом каноническом ансамбле справедливо соотношение:

$$\overline{\Delta H^2} = k \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_N + \overline{\Delta N^2} \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_T^2.$$

161. Вычислить флуктуацию положения центра масс для идеального однородного газа, заключенного в сферический сосуд радиуса R_0 .

162. Пусть q_i, q_k — обобщенные координаты частиц, а α_i, α_k — дополнительные обобщенные силы, включаемые в начальный момент и действующие вдоль направлений q_i и q_k . Доказать, что

$$\overline{(q^i - q^0)^2} = 2kT \left[\frac{\partial q^i}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0}.$$

163. Определить среднее квадратичное смещение броуновской частицы массы m , движущейся в вязкой среде с коэффициентом вязкости η . Радиус частицы a .

164. Определить число Авогадро, если среднее квадратичное смещение броуновских частиц массы m и радиуса a за время t равно $\overline{\Delta x^2}$.

165. Определить $\overline{(z-z_0)^2}$ для броуновской частицы, находящейся в поле тяжести.

166. Частицы диффундируют в стационарном режиме через одномерный потенциальный барьер $U(x)$. Найти плотность потоков частиц, если известна плотность числа частиц в сечениях x_1 и x_2 (соотношение Крамерса).

167. Считая, что уравнение Больцмана для сильно вырожденного газа имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - e\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{f-f_0}{\tau},$$

где τ —время релаксации, определить электропроводность металла при низких температурах.

168. Определить для невырожденного электронного газа коэффициенты электропроводности и теплопроводности металла, если вдоль оси Ox существует стационарный градиент температуры $k \frac{\partial T}{\partial x} = \text{const}$ и приложено поле \mathbf{E} , а $\tau = Av^l$ ($A > 0$, $l > -7$).

169. Определить тензор электропроводности для электронов в металле в однородных электрическом и магнитном полях. Электроны считать вырожденными.

170. Определить коэффициент вязкости для потока газа, имеющего градиент скорости β вдоль оси Ox . Газ подчиняется классической статистике.

171. Внутри шара радиуса R с постоянной плотностью распределены частицы массы m при температуре T . В момент времени $t=0$ оболочка шара исчезает и начинается свободный разлет частиц. Пренебрегая столкновениями частиц, определить плотность частиц как функцию времени и координаты.

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

1. Парабола с параметром $\frac{mv_0^2}{eE}$.

$$2. T = \frac{2mv_0}{eE}.$$

3. Окружность с радиусом v_0/ω_H , где $\omega_H = \frac{e\mu_0 H}{m}$ — электронная (циклотронная) частота.

4. $z = \frac{eE}{m\omega^2} \left(1 - \cos \frac{\omega x}{v_0}\right)$ Ось OZ направлена вдоль поля.

5. $x = -\frac{v_0 z}{\omega} (1 - \cos \omega t) + \left(\frac{v_0 x}{\omega} + \frac{eE}{m\omega^2} \sin \alpha\right) \sin \omega t - \frac{eEt}{m\omega} \sin \alpha;$

$$y = \frac{eEt^2}{2m} \cos \alpha + v_0 y t;$$

$$z = \frac{v_0 z}{\omega} \sin \omega t + \left(\frac{v_0 x}{\omega} + \frac{eE}{m\omega^2} \sin \alpha\right) (1 - \cos \omega t)$$

(в момент времени $t=0$ частица находилась в начале координат).

6. 1) $l \geq \frac{v_0}{|\omega_H|} \sqrt{\cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha} + \frac{v_0}{\omega_H} \cos \alpha \sin \beta.$

Указания к вопросам 2 и 3: уравнение проекции траектории на плоскость xOy имеет вид

$$\left(y + \frac{v_0}{\omega_H} \sin \alpha\right)^2 + \left(x - \frac{v_0}{\omega_H} \cos \alpha \sin \beta\right)^2 = \frac{v_0^2}{\omega_H^2} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta).$$

С помощью этого уравнения находим точки выхода частицы из «магнитной стенки» и строим касательные к найденной траектории в этих точках.

7. Указания. Следует найти координаты электрона как функции времени t и времени влета электрона в конденсатор t_0 . Затем необходимо найти время попадания электрона на экран \mathcal{E} и значение координат электрона в этот момент времени как функции параметра t_0 , что дает уравнение траектории луча на экране в параметрическом виде:

$$x = -\frac{la_1}{\omega v_0} \left[\cos \omega \left(t_0 + \frac{l}{v_0}\right) - 2 \cos \omega t_0 \right] - \frac{a_1}{\omega^2} \left[\sin \omega \left(t_0 + \frac{l}{v_0}\right) - \sin \omega t_0 \right] =$$

$$= A \cos \omega t_0 + B \sin \omega t_0;$$

$$y = \frac{la_2}{\omega v_0} \left[\sin \omega \left(t_0 + \frac{l}{v_0}\right) - 2 \sin \omega t_0 \right] - \frac{a_2}{\omega^2} \left[\cos \omega \left(t_0 + \frac{l}{v_0}\right) - \cos \omega t_0 \right] =$$

$$= C \sin \omega t_0 + D \cos \omega t_0;$$

здесь $a_1 = \frac{eV_1}{md}$; $a_2 = \frac{eV_2}{md}$; d — расстояние между пластинами.

Траекторией электронного луча будет эллипс, уравнение которого

$$(Ay - Dx)^2 + (By - Cx)^2 = (AC - BD)^2.$$

$$8. x = Ae^{i\omega_1 t} + Be^{i\omega_2 t} + Ce^{-i\omega_1 t} + De^{-i\omega_2 t};$$

$$y = Ae^{i\omega_1(t - \frac{\pi}{2})} - Be^{i\omega_2(t + \frac{\pi}{2})} + Ce^{-i\omega_1(t - \frac{\pi}{2})} - De^{-i\omega_2(t - \frac{\pi}{2})};$$

$$z = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где ω_0 — собственная частота осциллятора,

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_H}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\omega_H^2}{4}}$$

(ось OZ выбрана вдоль направления магнитного поля),

$$\omega_H = \frac{e\mu_0 H}{m} = \frac{eB}{m},$$

где μ_0 — магнитная постоянная.

$$9. x = C_1 + C_2 e^{-\frac{\gamma}{m} t} + \frac{eE}{\gamma} t;$$

$$y = C_3 + C_4 e^{-\frac{\gamma}{m} t};$$

$$z = C_5 + C_6 e^{-\frac{\gamma}{m} t}.$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2, \dots, C_6 определяются из начальных условий. Ось OX направлена вдоль электрического поля.

$$10. x = C_1 + Ae^{-\frac{\gamma}{m} t} \cos(\omega_H t + \alpha);$$

$$y = C_2 - Ae^{-\frac{\gamma}{m} t} \sin(\omega_H t + \alpha);$$

$$z = C_3 + C_4 e^{-\frac{\gamma}{m} t}.$$

Ось OZ направлена вдоль магнитного поля.

$$11. T = \frac{h}{\sqrt{2g(H+h)}} \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{h}{2\sqrt{H(H+h)}} \right].$$

$$12. v = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{\gamma g}{m}} t; \quad x = \frac{m}{\gamma} \ln \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\gamma g}{m}} t; \quad v \rightarrow \sqrt{\frac{mg}{\gamma}} (t \rightarrow \infty).$$

$$13. x = \frac{h}{6} \cos \omega t, \quad \text{где } \omega = \sqrt{\frac{c + \pi r \cdot r^2 g}{M}}.$$

$$14. v = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}; \quad T = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{R+h}{2g}} \left(\sqrt{Rh} + \frac{R+h}{2} \arccos \frac{R-h}{R+h} \right).$$

$$15. h = \frac{mv_0 \sin \alpha}{\gamma} - \frac{m^2 g}{\gamma^2} \ln \left(1 + \frac{\gamma v_0}{mg} \sin \alpha \right);$$

$$x = \frac{mv \cos \alpha}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t/m});$$

$$y = \frac{m}{\gamma} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{\gamma} \right) (1 - e^{-\gamma t/m}) - \frac{mgt}{\gamma};$$

$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g \left(1 + \frac{mv_0}{g\gamma} \sin \alpha \right)}.$$

16. $\mathbf{F} = -m\omega^2 \mathbf{r}$.

17. $F_x = 0; F_y = -\frac{m\omega_0^2 b^4}{a^2 y^3}$.

18. $x = be^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$, где

$$b = \frac{\dot{f}_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 + \alpha^2 - \omega^2 - 2\alpha\omega)^2 + 4\omega^2(\omega - \alpha)^2}};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\omega(\omega - \alpha)}{\omega_0^2 - \omega^2 + \alpha^2 - 2\alpha\omega}.$$

19. При условии $x_0 \cdot \dot{x}_0 < 0$, т. е. если начальная скорость \dot{x}_0 направлена противоположно начальному смещению x_0 ; кроме того, должны выполняться условия:

$$\left| \frac{\dot{x}_0}{x_0} \right| > \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}; \quad \gamma \geq \omega_0.$$

20. $\varphi = \frac{R \cdot T_0}{4J} \sqrt{\frac{mU_0}{2e}} t^2$, где $J = 2\rho dlR^3$ — момент инерции лопасти.

21. На средней линии конденсатора будет выполняться условие

$$\frac{4T}{r_1 + r_2} = \frac{2eU}{(r_1 + r_2) \ln \frac{r_2}{r_1}} + e \sqrt{\frac{2T}{m}} \mu_0 H.$$

24. $T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{1}{\gamma M_3}} = \pi \gamma m M_3 \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} = 2\pi \frac{a^{3/2}}{R_3 \sqrt{g}}$,

M_3, R_3 — масса и радиус Земли, m — масса спутника.

25. В полярных координатах уравнение траектории частицы будет

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \sigma \theta}; \quad p = \frac{l^2 - 2\beta}{\alpha}; \quad e = \sqrt{1 + \frac{2E}{\alpha^2} (l^2 - 2\beta)},$$

где $\sigma = \sqrt{1 - \frac{2\beta}{l^2}}$ (l — отношение момента количества движения к массе).

1. Частица будет «падать» на центр, если $2\beta > l^2$, т. е. σ мнимое. Тогда уравнение траектории будет

$$\rho = \frac{|p|}{1 + e \operatorname{ch} \alpha \theta}.$$

2. Частица будет рассеиваться, если $e \geq 1$.

3. Движение будет периодическим, если $\alpha = \frac{m}{n}$, где m и n — целые числа.

26. $\Phi = \pi - \frac{2}{\sigma} \arccos(-\frac{1}{e}); \quad l = sv_\infty$.

Эти формулы вместе с формулой $e = \sqrt{1 + \frac{2E}{\alpha^2} (l^2 - 2\beta)}$ дают связь между прицельным расстоянием s и углом рассеяния Φ .

$$27. T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}, \text{ где } x_1 \text{ и } x_2 \text{ — точки, между которыми}$$

происходит движение («точки возврата»), являющиеся корнями уравнения $U(x) = E$.

$$28. T = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{|E|}}.$$

$$29. T = \frac{\pi \sqrt{2m}}{\alpha \sqrt{E+U_0}}.$$

30. $\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{L^2 + 2m\alpha}} \cos \sigma\phi$, где $\sigma = \sqrt{1 + \frac{\alpha}{s^2 E}}$ (L — момент количества движения, $s = \frac{L}{\sqrt{2mE}}$ — прицельное расстояние).

$$31. \theta = \pi \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{s^2 E_\infty}}} \right];$$

$$\sigma(\theta) = \frac{\alpha l^2}{E} \cdot \frac{\pi - \theta}{\theta^2 (2\pi - \theta) \sin \theta}.$$

33. $v = v_0 + u_1 \ln \frac{m_0}{m(t)}$, где m_0 и v_0 — начальные массы и скорость соответственно.

$$34. \text{ Для Земли } v_1 = \sqrt{gR_3} \approx 8 \text{ км/сек,}$$

$$v_2 = \sqrt{2}v_1 = \sqrt{2gR_3} \approx 11 \text{ км/сек;}$$

$$\text{для Луны } v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}}} = 1,7 \text{ км/сек,}$$

$$v_2 = \sqrt{2}v_1 = 2,4 \text{ км/сек,}$$

где $M_{\text{Л}} = 7,33 \cdot 10^{26}$ г — масса Луны, $R_{\text{Л}} = 1738$ км — ее радиус; $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8}$ см³/г · сек² — гравитационная постоянная.

$$35. 1) A = \frac{2F_0}{mT\omega^3} \sin \frac{\omega T}{2};$$

$$2) A = \frac{2F_0}{m\omega^2} \sin \frac{\omega T}{2};$$

$$3) A = \frac{F_0}{mT\omega^3} \sqrt{\omega^2 T^2 - 2\omega T \sin \omega T + 2(1 - \cos \omega T)};$$

$$4) A = \frac{\pi F_0}{m\omega^2}.$$

$$36. \operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \Phi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \Phi};$$

$$\Delta E = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1 \sin^2 \frac{\Phi}{2}; \quad \frac{m_1}{m_2} = 1.$$

37. $\left(\frac{x}{r_0}\right)^2 - k \left(\frac{y}{v_0}\right) = 1$ — гипербола, если внешняя сила есть сила отталкивания ($k > 0$); эллипс, если — сила притяжения ($k < 0$).

$$38. x = \frac{h}{6} \sqrt{\frac{k^2}{k^2 - \sigma^2}} e^{-\sigma t} \sin(\sqrt{k^2 - \sigma^2} t + \varphi), \text{ если } k > \sigma,$$

$$k^2 = \frac{c}{M} + \frac{\pi r^2 \rho g}{M}; \quad \sigma = \frac{\alpha}{2M};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{k^2 - \sigma^2}{\sigma}}.$$

$$41. \mathcal{L} = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \dot{r}_i^2 - \frac{m^2}{2M} \left(\sum_{i=1}^n \dot{r}_i^2 \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{e_i e_j}{r_{ij}}.$$

$$42. T = \frac{M}{2} R^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\mu_j}{2} \dot{\rho}_j^2, \text{ где}$$

$$M = \sum_{j=1}^n m_j; \quad \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\sum_{l=1}^j m_l} + \frac{1}{m_{j+1}}.$$

$$43. \mathcal{L} = \frac{MR^2}{2} + \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2) - Ed \cos \theta, \text{ где } \theta \text{ — угол между}$$

направлениями диполя и внешнего электрического поля.

$$44. \mathbf{R} = \frac{m v_0^2 \cos^2 \alpha}{r} \mathbf{n}, \text{ где } \mathbf{n} \text{ — нормаль к поверхности цилиндра.}$$

$$45. x = r \cos \left(\frac{v_0 \cos \alpha}{r} t \right);$$

$$y = r \sin \left(\frac{v_0 \cos \alpha}{r} t \right);$$

$$z = \frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha.$$

$$46. x = \left(a - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \right) \operatorname{ch}(\omega t \sin \alpha) + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}.$$

$$47. \varphi = \arccos \frac{3g}{2\omega^2 l}; \quad \frac{3g}{2\omega^2 l} \ll 1; \quad R = \frac{M\omega^2 l}{2} \sqrt{1 + \frac{7g^2}{4l^2 \omega^4}}.$$

$$48. l = \frac{a-b}{n+1}.$$

$$49. \Delta x = - \frac{h(m_1 \cos \alpha + m_2 \sin \alpha)}{m + m_1 + m_2}.$$

$$50. 1) x = \frac{l(M+2m)}{M+M_1+m} \cos \omega t;$$

$$2) R = (M+2m) l \omega^2;$$

$$3) \omega \geq \sqrt{\frac{g}{l} \cdot \frac{M+M_1+m}{M+2m}}.$$

$$51. F = l \sqrt{\frac{2MU}{e}}.$$

$$52. \text{Распад возможен при условии } E \geq E_1 + E_2.$$

53. $x=0$; $y = \frac{g\omega \cos \psi}{3} t^3$; $z = -\frac{gt^2}{2}$, если время удовлетворяет неравенству

$$t \cdot 2\omega \sin \psi \ll 1$$

(ψ —географическая широта места).

$$54. \mathcal{L} = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi - m\ddot{x}(t)l \cos \varphi - m\ddot{y}(t)l \sin \varphi.$$

55. $\ddot{\varphi} + \omega_0^2(1 + \alpha \cos \omega t) \sin \varphi = 0$, где $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, $\alpha = \frac{a\omega^2}{g}$; при $\varphi \ll 1$
 $\ddot{\varphi} + \omega_0^2(1 + \alpha \cos \omega t) \varphi = 0$.

56. $\mathcal{L} = m_1 a^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) + 2m_2 a^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + 2(m_1 + m_2)ga \cos \theta$,
 где $0 < \theta < \pi/2$; если $\theta = 0$, то

$$\cos \theta_0 = \frac{g}{a\omega^2} \frac{m_1 + m_2}{m_1} \leq 1.$$

57. Если $\cos \theta_0 = \frac{g}{a\omega^2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1} > 1$, то устойчивое положение будет при $\theta = 0$; если $\cos \theta_0 < 1$, то устойчивое положение будет определяться из условия $\cos \theta_0 = \frac{g}{a\omega^2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1}$.

$$58. \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{ca^2}{ml^2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{ca^2}{ml^2}}, \quad \text{где}$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} + \frac{ca^2}{ml^2};$$

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t); \quad \varphi_2 = \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t).$$

59. Указание. Согласно закону Кирхгофа для электрической цепи с э.д.с. можно записать

$$L \frac{d\dot{q}}{dt} + R\dot{q} + \frac{q}{C} + \mathcal{E} = 0, \quad \dot{q} = I, \quad (1)$$

где q —заряд конденсатора.

Так как уравнение (1) совпадает по форме с уравнением для механического осциллятора в поле постоянной силы с учетом сил трения, то можно записать функцию Лагранжа в виде

$$\mathcal{L} = \frac{L\dot{q}^2}{2} - \frac{q^2}{2C(x)} - \mathcal{E}q + \frac{mx^2}{2} - \frac{c(x-l)^2}{2}, \quad (2)$$

где l —длина пружины в нерастянутом состоянии. Тогда уравнение (1) можно получить с помощью функции Лагранжа (2), используя уравнение Лагранжа II рода при наличии диссипативных сил:

$$Q' = -R\dot{q}.$$

$$60. \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{(C_0 L)^{-1} + \frac{c}{m}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[(C_0 L)^{-1} + \frac{c}{m} \right]^2 + 4 \frac{q_0^2}{m C_0^2 l^2 L}}.$$

Положение равновесия находится из уравнения (2) решения задачи 59:

$$\frac{\partial V}{\partial q} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

где

$$V = \frac{q^2}{2C(x)} + \mathcal{E}q + \frac{c(x-l)^2}{2}$$

$$61. \quad \omega = \sqrt{\frac{2ca^2}{ml^2} + \frac{g}{l}}.$$

$$62. \quad \omega = \sqrt{\frac{2ca^2}{ml^2} - \frac{g}{l}}.$$

Масса m в верхнем положении будет в устойчивом равновесии, если

$$\frac{2ca^2}{ml^2} > \frac{g}{l}.$$

63. Собственные частоты определяются из уравнения

$$\omega^4 - \left[\frac{c}{M} + \frac{g}{l} \frac{M+m}{M} \right] \omega^2 + \frac{c}{M} \frac{g}{l} = 0.$$

64. Координаты тела массы m в инерциальной системе записываются в виде

$$x = x(t) + l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi;$$

функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi - \dot{x}l \sin \varphi.$$

$$65. \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \alpha \cos \gamma t, \quad \text{где } \omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad \alpha = \frac{a \gamma^2}{l}.$$

$$66. \quad R_C = \frac{Pl}{4h} \sin 2\alpha; \quad R_B = P \left(1 - \frac{l}{4h} \sin \alpha \sin 2\alpha \right);$$

$$T = \frac{Pl}{2h} \cos^2 \alpha \sin \alpha.$$

$$67. \quad R_B = P; \quad T_B = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$R_A = \frac{P}{2} \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha; \quad T_A = \frac{P}{2} \cos \beta \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$68. \quad T = mg \frac{l}{d+r}; \quad N = mg \frac{r}{d+r}.$$

$$69. \quad \omega^2 = \frac{3g}{2(b^3 - a^3)} \left(\frac{b^2}{\sin \varphi} - \frac{a^2}{\cos \varphi} \right).$$

$$70. \quad \frac{b+d}{b} = \frac{l}{c}; \quad P_r = \frac{b}{a} P.$$

$$71. \quad F = \frac{xl_1}{el} P.$$

$$72. \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b} \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1 + p(4a+b)}.$$

73. Положение равновесия определяется из условия $\operatorname{tg} \varphi = 3$; устойчивое положение равновесия — условием $\cos \varphi > 0$.

$$74. \{L_x, p_y\} = -p_z, \{L_y, p_z\} = -p_x; \{L_z, p_x\} = -p_y; \\ \{L_x, p_x\} = 0; \{L_y, p_y\} = 0; \{L_z, p_z\} = 0; \\ \{L_x, p_z\} = p_y; \{L_y, p_x\} = p_z; \{L_z, p_y\} = p_x; \\ \{L_x, \mathbf{p}\} = [\mathbf{i} \times \mathbf{p}]; \{L_y, \mathbf{p}\} = [\mathbf{j} \times \mathbf{p}]; \{L_z, \mathbf{p}\} = [\mathbf{k} \times \mathbf{p}].$$

$$75. \{L_x, L_y\} = -L_z; \{L_y, L_z\} = -L_x; \{L_z, L_x\} = -L_y.$$

76. Указание. Так как φ есть скалярная функция, то она может зависеть только от скалярных комбинаций \mathbf{r} и \mathbf{p} : $r^2, p^2, \mathbf{p}\mathbf{r}$. Следовательно,

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r^2} 2\mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial (\mathbf{p}\mathbf{r})} \mathbf{p};$$

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial p^2} 2\mathbf{p} + \frac{\partial \varphi}{\partial (\mathbf{p}\mathbf{r})} \mathbf{r}.$$

Затем требуемое соотношение проверяется прямым вычислением.

77. Указание. Произвольный вектор $\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{f} = \mathbf{r} \varphi_1 + \mathbf{p} \varphi_2 + [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] \varphi_3,$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — скалярные функции. Затем искомое соотношение доказывается прямым вычислением.

78. Если \mathbf{B} не зависит от координат, тогда вектор-потенциал можно записать $\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times \mathbf{B}]$; поэтому

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \frac{\omega^2 \mathbf{r}^2}{2} + \frac{e}{2m} \dot{\mathbf{r}} [\mathbf{r} \times \mathbf{B}];$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{2m} [\mathbf{r} \times \mathbf{B}] \right)^2 + \frac{\omega^2 \mathbf{r}^2}{2}.$$

$$79. \mathcal{L} = \frac{M\mathbf{R}^2}{2} + \frac{M\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \frac{\alpha}{r}; \quad \mathcal{H} = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + \frac{\alpha}{r}, \quad \text{где } M = m_1 + m_2, \\ \mu = \frac{m_1 m_2}{M} \text{ — приведенная масса.}$$

$$80. \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} - \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1}^n \frac{e_i e_j}{r_{ij}} - \sum_{i=1}^n e_i \varphi(\mathbf{r}_i, t) + \sum_{i=1}^n e_i \dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t);$$

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \frac{[p_i - e_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t)]^2}{2m_i} + \frac{1}{8\pi\epsilon} \sum_{i \neq j}^n \frac{e_i e_j}{r_{ij}} + \sum_{i=1}^n e_i \varphi(\mathbf{r}_i, t).$$

$$81. \mathcal{H} = \frac{1}{2J} \left[p_\theta^2 + \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \right] + \frac{p_\varphi^2}{2J_s} + Mgl \cos \theta.$$

$$82. [J + \mu(x^2 + y^2)]\dot{\varphi} + \mu(xy - yx) = \mu(x_0 y_0 - y_0 x_0), \quad \text{где } J \text{ — момент инерции диска, } \mu = \frac{Mm}{M+m}.$$

$$83. \varphi = \frac{R \alpha \mu}{2(J + \mu R^2)} t^2;$$

$$\xi = -\frac{MR}{M} \cos \left[\frac{\alpha}{2R} + \frac{R \alpha \mu}{2(J + \mu R^2)} \right] t^2;$$

$$\eta = -\frac{MR}{M} \sin \left[\frac{\alpha}{2R} + \frac{R \alpha \mu}{2(J + \mu R^2)} \right] t^2,$$

где φ — угол поворота диска, ξ и η — декартовы координаты центра тяжести диска относительно центра масс системы.

$$84. 1) J_1 = J_2 = J_3 = \frac{3}{8} m_H a^2;$$

$$2) J_1 = \frac{2m_H m_0}{M} a^2 \cos^2 \alpha, J_2 = 2m_H a^2 \sin^2 \alpha, J_3 = J_1 + J_2;$$

$$3) J_1 = J_2 = \frac{3m_N m_H}{M} \left(b^2 - \frac{a^2}{3} \right) + \frac{m_H a^2}{2}, J_3 = m_H a^2,$$

где M — полная масса молекулы.

85. В системе координат, с осью Oz , проходящей через оба атома, тензор момента инерции имеет вид

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \mu a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$86. a = 0,8 \text{ \AA}.$$

87. Моменты инерции относятся как $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : 1$; отношение колебательных частот $\sqrt{2} : \sqrt{\frac{3}{2}} : 1$.

$$88. 1) J_{zz} = \frac{M}{12} (b^2 + c^2), J_{xx} = \frac{M}{12} (a^2 + c^2), J_{yy} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2);$$

$$2) J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = \frac{2M}{5} R^2;$$

$$3) J_{xx} = J_{yy} = \frac{3M}{20} \left(R^2 + \frac{h^2}{4} \right), J_{zz} = \frac{3M}{10} R^2;$$

$$4) J_{xx} = \frac{M}{5} (b^2 + c^2), J_{yy} = \frac{M}{5} (a^2 + c^2), J_{zz} = \frac{M}{5} (a^2 + b^2);$$

$$5) J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = \frac{2M}{5} \cdot \frac{D^6 - d^6}{D^3 - d^3};$$

$$6) J_{xx} = J_{yy} = \frac{M}{2} \left(R^2 + \frac{5}{4} r^2 \right);$$

$$7) J_{zz} = \frac{M}{2} (R^2 + r^2), J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{12} l^2 + \frac{1}{4} (R^2 + r^2);$$

$$8) J_{zz} = \frac{M}{12} M a^2; J_{xx} = J_{yy} = \frac{M}{12} l^2 + \frac{M}{24} a^2;$$

$$9) J_{zz} = \frac{5}{12} M a^2; J_{xx} = J_{yy} = \frac{M}{12} l^2 + \frac{5M}{24} a^2.$$

$$89. J_3 \frac{d\omega_3}{dt} = N; \quad \omega_3 = \frac{N}{J_3} t + \omega_0;$$

$$\omega_2 = A \cos \omega \left[\left(t + \frac{J_3 \omega_0}{N} \right)^2 + \varphi \right];$$

$$\omega_1 = A \sin \omega \left[\left(t + \frac{J_3 \omega_0}{N} \right)^2 + \varphi \right],$$

где $\omega = \frac{(J_3 - J)N}{2J_3}$, ω_0 , φ , A — постоянные интегрирования.

90. При таком закреплении твердого тела угол $\theta = \frac{\pi}{2}$, тогда по формулам (24) находим

$$\omega_1 = \psi \sin \varphi; \quad \omega_2 = \psi \cos \varphi; \quad \omega_3 = \dot{\varphi}.$$

Запишем формулу кинетической энергии [см. формулу (31)]

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \sin^2 \varphi + J_2 \cos^2 \varphi) \psi^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\varphi}^2. \quad (1)$$

Координата ψ циклическая, поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = (J_1 \sin^2 \varphi + J_2 \cos^2 \varphi) \psi = c = \text{const}. \quad (2)$$

Так как $T = \text{const}$, то из соотношений (1) и (2) находим $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ как функции угла φ , параметров системы и двух интегралов движения T и c .

$$91. T = \frac{1}{2} J \psi^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} J_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \alpha)^2.$$

$$92. L = \frac{3}{4} M (R - a)^2 \dot{\varphi}^2 - Mg (R - a) \cos \varphi. \quad \text{Движение такое же,}$$

как и у математического маятника длиной $l = \frac{3}{2} (R - a)$.

93. Так как $\dot{\alpha} = 0$, $\varphi = 0$, то из кинематических уравнений Эйлера (24) находим

$$\begin{aligned} \omega_x &= 0, & \omega_1 &= 0, \\ \omega_y &= 0, & \omega_2 &= \dot{\psi} \sin \alpha, \\ \omega_z &= \dot{\psi} = \omega, & \omega_3 &= \dot{\psi} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Из динамических уравнений Эйлера находим

$$N'_x = J \frac{d\omega_1}{dt} + (J_3 - J) \omega_2 \omega_3 = (J_3 - J) \frac{\omega^2}{2} \sin 2\alpha.$$

Используя формулу (21), получаем

$$N_x = L'_x \cos \psi; \quad N_y = L'_y \sin \psi.$$

Так как момент сил является суммой моментов равных сил инерции, приложенных в точках O и B , то

$$N_x = -hF_y; \quad N_y = -hF_x.$$

Откуда, воспользовавшись ответом к задаче 88 для моментов инерции, находим

$$F_x = -\frac{M\omega^2}{2h} \sin 2\alpha \left(\frac{l^2}{12} - \frac{R^2}{4} \right) \cos \omega t,$$

$$F_y = \frac{M\omega^2}{2h} \sin \alpha \left(\frac{l^2}{12} - \frac{R^2}{4} \right) \sin \omega t.$$

94. $J \frac{d\omega_1}{dt} + (J_3 - J) \omega_2 \omega_3 = mgl \sin \theta \cos \varphi,$

$$J \frac{d\omega_2}{dt} + (J - J_3) \omega_1 \omega_3 = -mgl \sin \theta \sin \varphi,$$

$$J_3 \frac{d\omega_3}{dt} = 0.$$

95. Воспользовавшись ответом к задаче 94 (положив $l = 0$), запишем

$$J \frac{d\omega_1}{dt} + (J_3 - J) \omega_2 \omega_0 = 0, \quad \omega_3 = \omega_0 = \text{const},$$

$$J \frac{d\omega_2}{dt} + (J - J_3) \omega_1 \omega_0 = 0,$$

откуда находим

$$\omega_1 = A \cos(\omega t + \alpha),$$

$$\omega_2 = A \sin(\omega t + \alpha), \quad \text{где } \omega = \frac{J_3 - J}{J} \omega_0.$$

Так как внешние силы отсутствуют, то момент количества движения $\mathbf{L} = \text{const}$. Для нахождения углов Эйлера как функции времени удобно воспользоваться системой координат, ось Oz которой совпадает с направлением вектора \mathbf{L} . Пользуясь формулой (21), получаем

$$L \sin \theta \sin \varphi = L_1 = J \omega_1 = J A \cos(\omega t + \alpha),$$

$$L \sin \theta \cos \varphi = L_2 = J \omega_2 = J A \sin(\omega t + \alpha),$$

$$L \cos \theta = L_3 = J_3 \omega_0.$$

Из последнего равенства находим

$$\theta = \arccos \frac{J_3 \omega_0}{M}.$$

Из двух первых выражений определяем

$$L^2 \sin^2 \theta = J^2 A^2; \quad A = \frac{1}{J} \sqrt{L^2 - J_3^2 \omega_0^2},$$

$$\varphi = \omega t + \alpha; \quad \psi = (\omega_0 - \omega \cos \theta) t + \psi_0.$$

96. $x = \cos \psi \cos \varphi x' - \sin \varphi \cos \psi y' + \sin \psi z';$

$$y = (\cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \sin \psi \cos \varphi) x' +$$

$$+ (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \psi \sin \varphi) y' + \sin \theta \cos \psi z';$$

$$z = (-\sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \cos \psi \cos \varphi) x' +$$

$$+ (-\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \psi \sin \varphi) y' + \cos \theta \cos \psi z'.$$

97. В системе координат, связанной с твердым телом:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}'_x &= \dot{\psi} \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \psi \cos \varphi, \\ \dot{\omega}'_y &= \dot{\psi} \cos \varphi + \dot{\theta} \cos \psi \sin \varphi, \\ \dot{\omega}'_z &= \dot{\varphi} - \dot{\theta} \sin \psi.\end{aligned}$$

98. Кинетическая энергия кузова

$$T_1 = \frac{J' \dot{\varphi}^2}{2},$$

где J' — момент инерции кузова относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно чертежу;

кинетическая энергия маховика

$$T_2 = M_2 h_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \psi) + \frac{J_3}{2} (\dot{\varphi} - \dot{\theta} \sin \psi)^2;$$

кинетическая энергия противовеса, координаты центра масс которого в инерциальной системе координат с началом в точке O определяются по формулам

$$\begin{aligned}x_3 &= h_2 \sin \psi; \quad y_3 = (h_1 + h_2 \cos \psi) \sin \theta, \\ z_3 &= (h_1 + h_2 \cos \psi) \cos \theta,\end{aligned}$$

равна

$$T_3 = \frac{M_3}{2} (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2) = \frac{M_3}{2} [h_2^2 \dot{\psi}^2 + (h_1 + h_2 \cos \psi)^2 \dot{\theta}^2].$$

Потенциальная энергия кузова в поле силы тяжести

$$V_1 = M_1 g l \cos \theta;$$

потенциальная энергия маховика

$$V_2 = M_2 g h_1 \cos \theta;$$

потенциальная энергия противовеса

$$V_3 = M_3 g \cos (h_1 + h_2 \cos \psi) \dot{\theta}^2.$$

Составив функцию Лагранжа, а затем уравнение Лагранжа, убеждаемся, что $\varphi = \omega_0 t$, $\theta = \psi = 0$ являются решениями этих уравнений. Для решения вопроса об устойчивости составим функцию Лагранжа для малых отклонений этих решений:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} a_{11} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{\psi}^2 - b_{21} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{1}{2} c_{11} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} c_{22} \psi^2,$$

где

$$\begin{aligned}a_{11} &= J' + M_2 h_1^2 + J + M_3 (h_1 + h_2)^2, \\ a_{22} &= J + M_3 h_2^2, \quad b_{12} = J_3 \omega_0, \\ c_{11} &= g [M_1 l + M_2 h_1 + M_3 (h_1 + h_2)], \quad c_{22} = M_3 h_2 g.\end{aligned}$$

Движение $\varphi = \omega_0 t$, $\theta = \psi = 0$ будет устойчивым, если выполняется неравенство

$$J_3 \omega_0 > \sqrt{c_{11} a_{22}} + \sqrt{c_{22} a_{11}}.$$

99. Центр тяжести находится от точки O на расстоянии

$$l = \frac{4a}{3\pi} \cdot \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = \sigma a.$$

Положение равновесия находится из уравнения

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi = \frac{e^4 - \sigma^2}{\sigma^2(1 - e^2)},$$

где e — эксцентриситет эллипса. Это уравнение имеет решение, если $e^2 \geq \sigma$. Кроме того, всегда имеется одно устойчивое положение равновесия $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и неустойчивое $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

100. В сферических координатах r, θ, φ :

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; & u_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \\ u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r}; \\ 2u_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}; \\ 2u_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}; & 2u_{r\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}; \end{aligned}$$

в цилиндрических координатах r, φ, z :

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; & u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}; \\ u_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & 2u_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}; \\ 2u_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; & 2u_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

101. В уравнение (50) необходимо добавить центробежную силу инерции $\rho\omega^2 r$. Очевидно, что эта сила будет вызывать смещение частиц только в радиальном направлении, зависящее только от r . Спроектировав уравнение на орт e_r [см. формулы (4), (18), (25), (27) приложение 3], получаем уравнение

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} (ru_r) \right] = -\rho\omega^2 r,$$

которое имеет решение, удовлетворяющее условию $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R$:

$$u_r = \frac{\rho\omega^2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)} r [(3-2\sigma)R^2 - r^2],$$

где E — модуль Юнга и σ — коэффициент Пуассона, связанные с упругими постоянными λ и μ следующими соотношениями:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

102. Одна поперечная волна с фазовой скоростью $x = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$ и две поперечно-продольные волны, фазовые скорости которых удовлетворяют уравнению

$$x^4 - \frac{1}{\rho} (c_{11} + c_{44}) x^2 + \frac{1}{\rho^2} \left[c_{11} c_{44} - \frac{(c_{11} + c_{12})}{4} (c_{12} - c_{11} + 2c_{44}) \sin^2 2\theta \right] = 0,$$

где c_{11} , c_{12} , c_{44} — упругие постоянные кубического кристалла; θ — угол между волновым вектором и осью симметрии четвертого порядка.

При $\theta = 0$ или $\theta = \frac{\pi}{2}$ волны распространяются перпендикулярно боковым поверхностям куба.

103. $\theta_t = \theta_0$, $\sin \theta_t = \frac{c_t}{c_l} \sin \theta_0$;

$$R_t = \left| \frac{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 - c_l^2 \cos^2 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_t} \right|^2;$$

$$R_l = \frac{c_t \cos \theta_t |2c_t c_l \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_t|^2}{c_l \cos \theta_0 |c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_t|^2},$$

причем $R_t + R_l$, θ_t — угол отражения продольной волны, θ_l — угол отражения поперечной волны, c_l и c_t — скорости распространения поперечной и продольной волн соответственно.

Указание. Граничные условия имеют вид (51).

104. $\theta_0 = \theta_t$, $\sin \theta_t = \frac{c_t}{c_l} \sin \theta_0$;

$$R_t = \left| \frac{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 - c_l^2 \cos^2 2\theta_0}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_0} \right|^2;$$

$$R_l = \left| \frac{2c_t c_l \sin 4\theta_0}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_0} \right|^2 \cdot \frac{c_l \cos \theta_t}{c_t \cos \theta_0};$$

здесь, как и в задаче 103, $R_t + R_l = 1$.

105. $\frac{dp}{dy} = -\frac{\Delta p}{l} = \text{const}$;

$$v_y = -\frac{\Delta p}{2\eta l} \left(z^2 - \frac{d^2}{4} \right)$$

(здесь $\frac{\Delta p}{l}$ — перепад давлений на единицу длины).

106. 1) $j = \left(\frac{\Delta p}{l} \right)^2 \frac{d^3}{24\eta}$; $T = T_0 + \left(\frac{\Delta p}{l} \right)^2 \frac{1}{12\eta\kappa} \left(\frac{d^4}{16} - z^4 \right)$;

2) $j = \left(\frac{\Delta p}{l} \right)^2 \frac{d^3}{6\eta}$; $T = T_0 + \left(\frac{\Delta p}{l} \right)^2 \frac{5d^4}{96\eta\kappa} - \left(\frac{\Delta p}{l} \right)^2 \frac{d^3}{12\eta} z - \left(\frac{\Delta p}{l} \right)^2 \frac{1}{6\eta\kappa} z^4$.

Указание. Воспользоваться уравнением (38), показав, что в данном случае $de/dt = 0$,

$$107. 1) \frac{dp}{dr} = \rho \frac{v_\varphi^2}{r}; \quad v_\varphi = \frac{\omega_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} \left(r - \frac{r_2^2}{r} \right);$$

$$2) v_z = -\frac{\omega_\varphi r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \left(r - \frac{r_1^2}{r} \right);$$

$$3) v_\varphi = \frac{\omega_1 r_1^2 - \omega_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} r + \frac{(\omega_2 - \omega_1) r_1^2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \cdot \frac{1}{r}; \quad v_z = v_r = 0.$$

$$108. T = T_0 + \frac{\eta}{\kappa} \omega_2^2 \frac{r_1^2 r_2^4}{(r_1^2 - r_2^2)^2} \ln \frac{r_1}{r_2} \cdot \ln \frac{r^2}{r_1 r_2}.$$

109. В цилиндрических координатах:

$$\left(\frac{dv}{dt} \right)_{e_r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r^2} \right];$$

$$\left(\frac{dv}{dt} \right)_{e_\varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + v \left[\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right];$$

$$\left(\frac{dv}{dt} \right)_{e_z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right].$$

В сферических координатах:

$$\left(\frac{dv}{dt} \right)_{e_r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} v_\theta \right];$$

$$\left(\frac{dv}{dt} \right)_{e_\theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right];$$

$$\left(\frac{dv}{dt} \right)_{e_\varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right].$$

110. Частоты определяются из уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{\omega d}{c} = i \frac{c \rho_1}{c_l \rho}, \quad (1)$$

где $\rho_1 c$ — произведение плотности жидкости на скорость волны в ней, ρc_l — то же для твердого тела. Так как обычно $c \rho_1 \ll c_l \rho$, то решение уравнения (1) можно приближенно записать в виде

$$\omega_n = \frac{n \pi c_l}{d} + i \frac{c \rho_1}{\rho d}, \quad \text{где } n = 1, 2, \dots, \infty.$$

Комплексность частот означает, что звуковые колебания в твердом теле со временем затухают. Физически это объясняется тем, что звуковая энергия излучается в безграничную жидкость.

111. $\omega = xc_l k$, где x — действительный корень уравнения

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8\xi^2 \left(3 - 2 \frac{c_l^2}{c_l^2}\right) - 16 \left(1 - \frac{c_l^2}{c_l^2}\right) = 0.$$

Волна Рэлея содержит как поперечную, так и продольную компоненты, причем их отношение равно

$$\frac{u_y}{u_x} = - \frac{2 - \xi}{2 \sqrt{1 - \xi^2}}.$$

112. Так как радиальные колебания продольные, то $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$. Следовательно, \mathbf{u} можно представить в виде $\mathbf{u} = \nabla \varphi$. Тогда φ будет удовлетворять уравнению $\varphi = c_l^2 \Delta \varphi$. Для радиальных монохроматических колебаний уравнение примет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = - \frac{\omega^2}{c_l^2} \varphi.$$

Решением этого уравнения будет

$$\varphi = A \frac{\sin kr}{r} e^{i\omega t}.$$

Граничное условие $\sigma_{rr}(R) = 0$ дает

$$\operatorname{tg} \frac{\omega R}{c_l} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega R}{2c_l}\right)^2}.$$

Корни этого уравнения определяют собственные частоты колебаний упругого шара.

113. Решение ищем в виде расходящейся сферической волны

$$\varphi = A \frac{e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c_l} r\right)}}{r}.$$

С помощью граничного условия получаем

$$\omega = \frac{2ic_l^2}{c_l R} \pm \frac{2c_l}{R} \left(1 - \frac{c_l^2}{c_l^2}\right)^{1/2}.$$

Колебания будут затухающими, так как энергия расходуется на излучение звука.

114. $\omega^2 = c^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{l^2}{d^2} \right)$, где n, m, l — целые числа, меняющиеся от 1 до ∞ , c — скорость звука в газе.

115. У к а з а н и е. Следует перейти в систему координат, связанную с источником звука. В этой системе координат поле скоростей имеет вид $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$. Тогда волновое уравнение получаем из уравнения движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}' = - \frac{\nabla p'}{\rho_0},$$

уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \nabla \rho' + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0$$

и термодинамического уравнения $p = p(\rho)$, связывающего давление с плотностью.

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_0)^2 = c^2 k^2,$$

где $c^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0$ — квадрат скорости звука.

Частота, воспринимаемая приемником звука, равна

$$\omega' = \omega \left(1 + \frac{v_0}{c} \cos \theta\right)^{-1},$$

где θ — угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{v}_0 , ω — частота, излучаемая движущимся источником.

$$116. \omega' = \omega \left(1 - \frac{v_0}{c} \cos \theta\right).$$

Смысл обозначений тот же, что и в задаче 115.

$$117. v_z = \frac{\Delta p}{4\eta l} \left[r_2^2 - r^2 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_2} \right].$$

$$118. v_z = \frac{\Delta p}{2\eta l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right);$$

$$Q = \rho \frac{\pi \Delta p}{4\eta l} \cdot \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2},$$

где a и b — полуоси эллипса.

$$119. T = T_0 + \left(\frac{\Delta p}{l}\right)^2 \frac{R^4}{64\kappa\eta} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right].$$

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

$$3. \operatorname{grad} f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

$$4. \operatorname{div} \mathbf{r} = 3, \operatorname{rot} \mathbf{r} = 0, \operatorname{rot} \varphi(r) \mathbf{r} = 0.$$

$$5. \operatorname{grad} \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{P}; \operatorname{grad} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathbf{P}}{r^3} - \frac{3\mathbf{P}\mathbf{r}}{r^5}; \quad (\mathbf{P}\nabla) \mathbf{r} = \mathbf{P}; \quad \operatorname{div} [\mathbf{P}, \mathbf{r}] = 0;$$

$$\operatorname{rot} [\mathbf{r}, \mathbf{P}] = -2\mathbf{P}.$$

$$6. \operatorname{grad} \mathbf{A}(r) \mathbf{B}(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} (\dot{\mathbf{A}}\mathbf{B} + \dot{\mathbf{B}}\mathbf{A});$$

$$\operatorname{div} \varphi(r) \mathbf{A}(r) = \frac{\dot{\varphi}}{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) + \frac{\varphi}{r} (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{A}}),$$

$$\operatorname{rot} \varphi(r) \mathbf{A}(r) = \frac{\dot{\varphi}}{r} [\mathbf{r}, \mathbf{A}] + \frac{\varphi}{r} [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{A}}],$$

$$\text{где } \dot{\mathbf{A}} = \frac{d\mathbf{A}}{dr}, \dot{\mathbf{B}} = \frac{d\mathbf{B}}{dr}.$$

$$7. \text{ а) } (\Delta A)_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$(\Delta A)_\vartheta = \Delta A_\vartheta - \frac{A_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$(\Delta A)_\varphi = \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi};$$

$$\text{б) } (\Delta A) = \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi},$$

$$(\Delta A)_\vartheta = \Delta A_\vartheta - \frac{A_\vartheta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi},$$

$$(\Delta A)_z = \Delta A_z.$$

8. Умножим искомый интеграл на постоянный вектор \mathbf{p} :

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \mathbf{I} &= \mathbf{p} \oint \mathbf{r} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS = \oint (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) A_n dS = \int \operatorname{div} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{A} dV = \\ &= \int \mathbf{A} \operatorname{grad} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) dV = \int \mathbf{A} \mathbf{p} dV = \mathbf{A} \mathbf{p} V. \end{aligned}$$

Так как вектор \mathbf{p} произволен, то

$$\mathbf{I} = \mathbf{A} V.$$

Аналогично показывается, что

$$\oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n} dS = \mathbf{A} V.$$

$$11. \varphi = \frac{a}{r} + b.$$

$$12. \mathbf{E} = \begin{cases} \frac{1}{3\epsilon_0} \rho \mathbf{r} & \text{при } r < R, \\ \frac{1}{3\epsilon_0} \rho \frac{R^3}{r^2} \mathbf{r} & \text{при } r > R. \end{cases}$$

13. Из принципа суперпозиции полей следует, что искомая напряженность поля равна разности напряженности электрического поля, создаваемого шаром без полости, и напряженности поля зарядов, заполняющих при этом полость

Поле внутри полости

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho \mathbf{a},$$

поле внутри шара (но вне полости)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho \mathbf{r} - \frac{1}{3\epsilon_0} \rho \frac{R'^3}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} (\mathbf{r}-\mathbf{a}),$$

поле снаружи шара

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho \left[\frac{R^3}{r^2} \mathbf{r} - \frac{R'^3}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} (\mathbf{r}-\mathbf{a}) \right],$$

где \mathbf{a} — радиус-вектор, проведенный из центра шара к центру полости.

$$14. \mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \frac{r^n}{n+3} \mathbf{r} & \text{при } r < R. \\ \frac{\alpha}{\varepsilon_0 (n+3)} \frac{R^{n+3}}{r^3} \mathbf{r} & \text{при } r > R. \end{cases}$$

$$15. \mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\kappa}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \mathbf{r} & \text{при } r < R. \\ \frac{\kappa}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{r} & \text{при } r > R, \end{cases}$$

где r — расстояние от оси цилиндра

16. Ось OZ направим перпендикулярно поверхности слоя, начало координат расположим посередине слоя Тогда

$$E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \frac{z}{|z|} \text{ снаружи слоя,}$$

$$E = \frac{\rho z}{\varepsilon_0} \text{ внутри слоя.}$$

17. а) $C = \frac{4\pi\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$, где R_1 и R_2 — радиусы обкладок конденсатора $|R_2 > R_1|$,

б) $C = \frac{\varepsilon S}{d}$, где S — площадь обкладки конденсатора, d — расстояние между обкладками;

в) $C = \frac{4\pi\varepsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$, где l — длина цилиндрического конденсатора, R_1

и R_2 — радиусы обкладок

18. Предположим, что заряд единицы длины первого проводника равен κ , второго — равен $-\kappa$. Потенциал каждого проводника складывается из потенциала φ_1 , создаваемого собственными зарядами проводника, и потенциала φ_2 , создаваемого соседним проводником, который при большом расстоянии между проводниками можно считать одинаковым в любой точке рассматриваемого проводника. Тогда для первого проводника получим

$$\varphi_1 = -\frac{\kappa}{2\pi\varepsilon_0} \ln R_1 + \frac{\kappa}{2\pi\varepsilon_0} \ln d,$$

для второго

$$\varphi_2 = \frac{\kappa}{2\pi\varepsilon_0} \ln R_2 - \frac{\kappa}{2\pi\varepsilon_0} \ln d.$$

Емкость единицы длины системы равна

$$C = \frac{\kappa}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{d}{R_1 R_2}} = \pi\varepsilon_0 \left(\ln \frac{d}{R} \right)^{-1},$$

где $R = \sqrt{R_1 R_2}$ — среднее геометрическое обоих радиусов проводников

19. В цилиндрической системе координат с осью OZ , направленной вдоль прямой, соединяющей заряды, уравнение для силовой ли-

нии записывается так

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z}. \quad (1)$$

В данной задаче

$$E_r = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 \left[r^2 + \left(z - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{er}{4\pi\epsilon_0 \left[r^2 + \left(z + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2}},$$

$$E_\varphi = 0,$$

$$E_z = \frac{e \left(z - \frac{d}{2} \right)}{4\pi\epsilon_0 \left[r^2 + \left(z - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{e \left(z + \frac{d}{2} \right)}{4\pi\epsilon_0 \left[r^2 + \left(z + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (2)$$

Соотношения (2), определяющие электрическое поле, подставляем в уравнение (1). Затем вводим новые переменные u и v вместо z и r ;

$$z = \frac{d}{2} \frac{u+v}{u-v}, \quad r = \frac{d}{u-v}. \quad (3)$$

Тогда уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{dv}{(1+v^2)^{3/2}} = \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

Интегрируя уравнение (4), получаем

$$\frac{v}{(1+v^2)^{1/2}} - \frac{u}{(1+u^2)^{1/2}} = C,$$

или

$$\frac{z - \frac{d}{2}}{\left[r^2 + \left(z - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{1/2}} - \frac{z + \frac{d}{2}}{\left[r^2 + \left(z + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{1/2}} = C.$$

Картина силовых линий представлена на рис. 49.

Рис. 49

20. Пусть поле направлено вдоль оси OX . Тогда

$$\mathcal{W} = -|E|(x+iy) = \varphi + i\Psi,$$

$$\varphi = -|E|x, \quad \Psi = -|E|y.$$

Такое поле создается в частности равномерно заряженной плоскостью $y=0$. Тогда $|E| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

21. Конформным преобразованием $W = Az^2i$ преобразуем угол в полуплоскость, решение вблизи которой найдено в задаче 20.

Комплексный потенциал равен

$$\mathcal{W} = \varphi + i\Psi = Az^2i = A(x+iy)^2i.$$

Отсюда

$$\varphi = -2Axy,$$

$$\Psi = A(x^2 - y^2).$$

Эквипотенциальные поверхности и силовые линии приведены на рис. 50.

22. Комплексный потенциал равен $W = \varphi + i\Psi = V\bar{z}$. Отсюда

$$\begin{aligned} x + iy &= \varphi^2 - \Psi^2 + 2i\varphi\Psi, \\ \varphi^2 - \Psi^2 &= x, \quad 2\varphi\Psi = y. \end{aligned}$$

Исключая φ и Ψ , получаем

$$\frac{y^2}{4\varphi^2} = \varphi^2 - x, \quad \frac{y^2}{4\Psi^2} = x + \Psi^2.$$

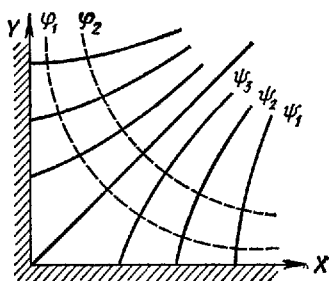


Рис 50

Найдем линии $\varphi = \text{const}$. Положив $\varphi = C$, получим уравнение параболы

$$y^2 = 4C^2(C^2 - x),$$

повернутой в сторону отрицательных значений оси OX и с вершиной в точке $x = C$. При $C = 0$ она вырождается в полуось

$$y = 0, \quad x < 0.$$

Таким образом, $\varphi = \text{Re} \sqrt{z}$ дает потенциал вблизи заземленной полубесконечной прямой $y = 0, x < 0$, эквипотенциальными поверхностями является система парабол.

23. Записав z в виде $z = re^{i\theta}$, получим $\varphi = \ln r$.

Эквипотенциальными поверхностями являются окружности радиуса $r = \text{const}$. В трехмерной задаче такой потенциал создается заряженной прямой, расположенной вдоль оси OZ .

24. Согласно задаче 23, такой потенциал создан двумя противоположными зарядами в точках a и $-a$ (в трехмерном пространстве двумя заряженными прямыми, параллельными оси OZ). При $a \rightarrow 0$

$$\varphi = \text{Re} \frac{1}{z}.$$

В полярных координатах

$$\varphi + i\Psi = \frac{1}{r} (\cos \theta - i \sin \theta).$$

Отсюда

$$x^2 + y^2 + \frac{y}{\Psi} = 0, \quad x^2 + y^2 - \frac{x}{\varphi} = 0.$$

Положив $\varphi = \text{const}$, получим эквипотенциальные поверхности

$$\left(x - \frac{1}{2\varphi}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4\varphi^2}.$$

Они имеют вид окружностей (в объемной задаче это цилиндры). Силовые линии — окружности, уравнения которых имеет вид

$$x^2 + y^2 + \frac{y}{\Psi} = 0.$$

Такой потенциал создает диполь, расположенный на оси OX .

25. Запишем уравнение параболы в параметрическом виде

$$x = ap^2 - a, \quad y = 2ap,$$

где p изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда согласно соотношению (38)

$$z = aW^2 - a + 2aiW = (W + i)^2 a.$$

Отсюда

$$W = \sqrt{\frac{z}{a}} - i.$$

Потенциал дается мнимой частью этой функции.

26. Записав уравнение эллипса в параметрическом виде $x = a \cos \vartheta$, $y = b \sin \vartheta$ и положив $a = C \operatorname{ch} \alpha$, $b = C \operatorname{sh} \alpha$ ($a^2 - b^2 = C^2$), получим

$$z = a \cos W + ib \sin W = C \cos [\Psi + i(\varphi - \alpha)].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x &= C \cos \Psi \operatorname{ch}(\varphi - \alpha), \\ y &= C \sin \Psi \operatorname{sh}(\varphi - \alpha). \end{aligned} \quad (1)$$

Исключив Ψ и положив $\varphi = \operatorname{const}$, получим эквипотенциальные поверхности, заданные уравнением

$$\frac{x^2}{C^2 \operatorname{ch}^2(\varphi - \alpha)} + \frac{y^2}{C^2 \operatorname{sh}^2(\varphi - \alpha)} = 1.$$

Это система эллипсов, фокусы которых совпадают с фокусами заземленного эллипса.

Исключив φ из соотношений (1) и положив $\Psi = \operatorname{const}$, получим уравнение для силовых линий:

$$\frac{x^2}{C^2 \cos^2 \Psi} - \frac{y^2}{C^2 \sin^2 \Psi} = 1.$$

Это система гипербол, фокусные расстояния у которых такие же, как и у эллипсов. При $a = b$

$$z = a(\cos W + i \sin W) = ae^{i(\Psi + i\varphi)},$$

$$x = ae^{-\varphi} \cos \Psi,$$

$$y = ae^{-\varphi} \sin \Psi,$$

откуда

$$e^{-\varphi} = \frac{x^2 + y^2}{a^2}, \quad \varphi = -2 \ln r/a.$$

28. Пользуясь соотношением (39) для потенциала зарядов, расположенных на поверхности в цилиндрической системе координат, получим

$$\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R_2^2 + z^2} - \sqrt{R_1^2 + z^2}),$$

где z — координата точки на оси, в которой определяется поле.

Компоненты напряженности электрического поля равны

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right).$$

Для частных случаев имеем

$$a) \quad E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right);$$

$$б) \quad E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|}.$$

29. Потенциал системы, обладающей сферической симметрией, равен

$$\varphi(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \frac{1}{\epsilon_0} \int_r^\infty r' \rho(r') dr'.$$

Подставив сюда плотность заряда, указанную в условии задачи, получим

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} (1 - e^{-2r/a}) - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} e^{-2r/a}.$$

30. Потенциал точечного заряда является решением уравнения

$$\Delta\varphi = -\frac{e}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Представим $\varphi(\mathbf{r})$ и $\delta(\mathbf{r})$ в виде разложений в интеграл Фурье:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \int \varphi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \\ \delta(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставив соотношения (2) в уравнение (1) и приравнявая в подынтегральных выражениях коэффициенты при $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, получим

$$\varphi(\mathbf{k}) = \frac{e}{\epsilon_0 (2\pi)^3 k^2}.$$

$$31. \quad \Delta\varphi - \frac{\varphi}{a^2} = -4\pi q \delta(\mathbf{r}).$$

$$32. \quad \varphi = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 (a^2 + b^2 + c^2)} \sin ax \sin by \sin cz.$$

33. Решение, удовлетворяющее уравнению Лапласа и граничному условию ($\varphi = 0$ на проводящей плоскости), имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r'}, \\ \mathbf{E} &= \frac{e\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} - \frac{e\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, \end{aligned}$$

где $r = \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}$, $r' = \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}$.

Предполагается, что заданная плоскость совпадает с плоскостью $x = 0$. Радиус-вектор \mathbf{r} проведен от заряда, $-\mathbf{r}'$ от его изображения, т. е. от точки с координатами $x = -d$, $y = z = 0$, в точку наблюдения.

Поверхностный заряд равен

$$\sigma = -\frac{ed}{2\pi \sqrt{(y^2 + z^2 + d^2)^3}}.$$

Полный индуцированный заряд равен

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ed \, dx \, dy}{2\pi \sqrt{(y^2 + z^2 + d^2)^3}} = -e.$$

34. $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} + \frac{q}{r_3} - \frac{q}{r_4} \right)$, где r_1 — расстояние от заряда к точке наблюдения P (рис. 51).

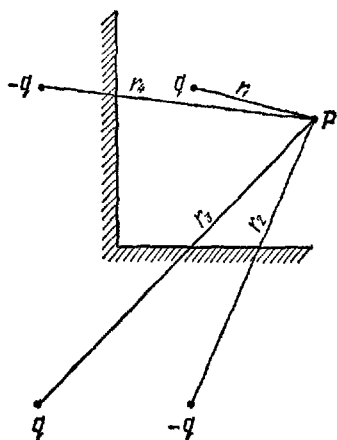


Рис. 51

35. Потенциал на сфере и внутри сферы равен нулю. Потенциал вне сферы должен удовлетворять уравнению

$$\Delta\varphi = -\frac{e}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r}).$$

Начало координат совпадает с положением заряда. Удовлетворяющее этому уравнению решение ищем в виде

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{e'}{4\pi\epsilon_0 r'} \quad (1)$$

Вектор \mathbf{r}' проведен от точки наблюдения к точке внутри сферы, положение которой определяется из граничного условия: $\varphi = 0$ на поверхности сферы. Последнее слагаемое в выражении (1) можно представить как потенциал заряда e' (изображения), находящегося внутри сферы. В действительности такого заряда нет, но заряд, индуцированный на поверхности сферы, действует так, как действовал бы некоторый заряд, а сфера отсут-

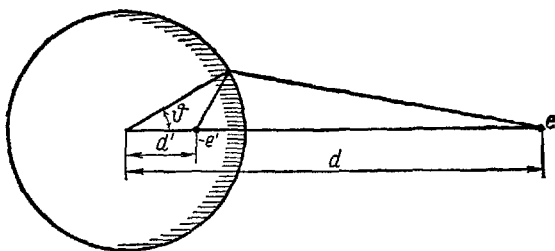


Рис. 52

ствовала. Из симметрии задачи следует, что заряд e' должен находиться на прямой, соединяющей центр сферы с зарядом e на расстоянии d_1 от центра сферы. Из граничных условий следует (рис. 52)

$$\frac{e^2}{e'^2} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{R^2 + d^2 - 2dR \cos \vartheta}{R^2 + d_1^2 - 2d_1R \cos \vartheta}.$$

Чтобы это условие выполнялось при любом угле ϑ , необходимо

$$R^2 = dd_1, \quad e' = e \sqrt{\frac{d_1}{d}},$$

d_1 определяет положение заряда изображения, e' — его величину.

36. $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e}{r} - \frac{e'}{r'} + \frac{e'}{r_0} \right)$, где r и r' — те же величины, что и в задаче 35, r_0 — расстояние от центра сферы к точке наблюдения. Два первых слагаемых дают нулевое значение потенциала на поверхности сферы, а последнее — постоянное значение. При этом сфера остается нейтральной. Потенциал можно интерпретировать как потенциал трех зарядов: заряда e , заряда $-e'$ в сопряженной точке и заряда e' , расположенного в центре сферы.

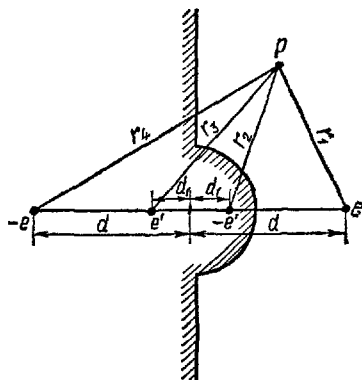


Рис. 53

37. $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e}{r_1} - \frac{e'}{r_2} + \frac{e'}{r_3} - \frac{e}{r_4} \right)$ (рис. 53); здесь

$$e' = e \sqrt{\frac{d_1}{d}}, \quad d_1 = \frac{R^2}{d}.$$

Положения отрезков d и d_1 указаны на рис. 53; точка P — точка наблюдения.

38. Каждый из зарядов, образующих диполь, индуцирует отображенный заряд. Поскольку расстояния зарядов от сферы разные, то будут разными и величины наведенных зарядов. Поэтому в сопряженной точке, расстояние до которой $d' = \frac{R^2}{d}$, следует поместить диполь p' , ориентированный так же, как и p , и заряд e' , и требовать, чтобы потенциал системы

$$\varphi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} + \frac{e'}{4\pi\epsilon_0 r'} \quad (1)$$

равнялся нулю на поверхности сферы. На поверхности сферы (см. задачу 35):

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{R^2 + d^2 - 2dR \cos \vartheta}, \\ r' &= \sqrt{R^2 + d'^2 - 2d'R \cos \vartheta}, \\ \mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}' &= p' (d' - R \cos \vartheta), \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} &= p (d - R \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Из условия $\varphi = 0$ при $r = R$ получим

$$p (d - R \cos \vartheta) - \frac{d^3}{R^3} p' \left(R \cos \vartheta - \frac{R^2}{d} \right) + \frac{e' d}{R} (R^2 + d^2 - 2R d \cos \vartheta) = 0.$$

Это условие должно выполняться при любом угле ϑ . Отсюда

следуют равенства:

$$pd + \frac{d^2}{R} p' + \frac{e'd}{R} (R^2 + d^2) = 0;$$

$$pR + \frac{d^3}{R^2} p' + 2e'd^2 = 0.$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$e' = -\frac{R}{d^2} p, \quad p' = \frac{R^3}{d^3} p.$$

Эти соотношения вместе с формулой (1) определяют потенциал системы.

39. Ищем потенциал в среде, где находится заряд, в виде

$$\Phi_1 = \frac{e}{4\pi\epsilon_1 r} - \frac{e'}{4\pi\epsilon_1 r'}. \quad (1)$$

Вектор \mathbf{r}' проведен из точки, которая является зеркальным отражением координаты заряда в плоскости границы раздела.

В другой среде

$$\Phi_2 = \frac{e''}{4\pi\epsilon_2 r}. \quad (2)$$

Векторы электрической индукции в обеих средах определяются соотношениями

$$4\pi\mathbf{D}_1 = \frac{e\mathbf{r}}{r^3} - \frac{e'\mathbf{r}'}{r'^3}, \quad 4\pi\mathbf{D}_2 = \frac{e''\mathbf{r}}{r^3}. \quad (3)$$

Из условий непрерывности потенциала ($\Phi_1 = \Phi_2$ при $r = r'$) и нормальной составляющей вектора электрической индукции ($D_{n1} = D_{n2}$ при $r = r'$) получим

$$\frac{e - e'}{\epsilon_1} = \frac{e''}{\epsilon_2}; \quad e' + e = e''.$$

Отсюда

$$e' = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} e, \quad e'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} e.$$

Подставив e' и e'' в формулы (1)–(3), найдем потенциал и электрическую индукцию в любой точке пространства.

40. Ищем потенциал в виде

$$\Phi = \frac{a}{r},$$

удовлетворяющем граничным условиям $\Phi_1 = \Phi_2$ и $\epsilon_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_1 = \epsilon_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_2$ на границе диэлектрик—диэлектрик. Постоянная a может быть связана с зарядом сферы

$$e = \oint \sigma dS = - \int \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS.$$

Здесь $\epsilon = \epsilon_1$ в среде 1 и $\epsilon = \epsilon_2$ в среде 2.

Интегрируя, получаем

$$a = \frac{e}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

Отсюда

$$4\pi \mathbf{D}_1 = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{e\mathbf{r}}{r^3}, \quad 4\pi \mathbf{D}_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{e\mathbf{r}}{r^3},$$

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_1 e}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) R^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\varepsilon_2 e}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) R^2}.$$

41. Выберем начало координат в центре сферы, а полярную ось направим вдоль прямой, соединяющей центр сферы и заряд. Решение уравнения

$$\Delta\varphi = -\frac{e}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{d})$$

(\mathbf{d} — координата заряда), нулевое на бесконечности, имеет вид

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{d}|} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \vartheta), \quad (1)$$

где $P_l(\cos \vartheta)$ — полиномы Лежандра, b_l — числа, значение которых нужно найти из граничных условий.

Воспользуемся разложением

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_l \frac{r^l}{(r')^{l+1}} P_l(\cos \vartheta) \quad \text{при } r < r', \quad (2)$$

где ϑ — угол между \mathbf{r} и \mathbf{r}' .

Из граничных условий ($\varphi = 0$ при $r = R$) следует

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 d^{l+1}} + \frac{b_l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos \vartheta) = 0.$$

Так как полиномы Лежандра— ортогональные функции, то это равенство может выполняться только в том случае, если коэффициенты при полиномах равны нулю. Отсюда

$$b_l = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^{2l+1}}{d^{l+1}},$$

а

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{eR}{4\pi\varepsilon_0 d} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R^2}{d} \right)^l \frac{P_l(\cos \vartheta)}{r^{l+1}}. \quad (3)$$

Пользуясь соотношением (2), последнее слагаемое в формуле (3) можно записать как потенциал точечного заряда $e' = -e \frac{R}{d}$, находящегося на расстоянии $d_1 = \frac{R^2}{d}$ от центра шара на линии, соединяющей центр шара и заряд. Таким образом,

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{|e'|}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{d}_1|},$$

что совпадает с решением задачи 35 методом изображений.

Плотность поверхностного заряда на сфере равна

$$\sigma(R, \vartheta) = -\frac{e}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{R^{l-1}}{d^{l+1}} P_l(\cos \vartheta).$$

Полный заряд, наводимый на сфере, равен

$$e' = -\frac{eR}{d}.$$

$$42. \quad \varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 |r-d|} + \frac{VR}{r} - \frac{eR}{4\pi\epsilon_0 d} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R^2}{d}\right)^l \frac{P_l(\cos \vartheta)}{r^{l+1}},$$

$$\sigma(R, \vartheta) = \frac{V}{4\pi R} - \frac{e}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{R^{l-1}}{d^{l+1}} P_l(\cos \vartheta).$$

43. Потенциал внутри сферы может быть представлен так:

$$\varphi_1 = \sum_l A_l r^l P_l(\cos \vartheta),$$

снаружи сферы

$$\varphi_2 = \sum_l B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \vartheta).$$

Граничные условия (31), (32) на сфере имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Подставив сюда φ_1 и φ_2 , получим

$$A_1 = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}, \quad B_1 = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} R^3,$$

$$A_l = B_l = 0 \quad \text{при } l > 1.$$

Таким образом,

$$\varphi_1 = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} r \cos \vartheta,$$

$$\varphi_2 = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos \vartheta.$$

44. Через удельный дипольный момент P можно выразить поверхностные σ' и объемные ρ' связанные заряды.

Для равномерно поляризованного шара $\rho' = 0$, а $\sigma' = P \cos \vartheta$.

Согласно решению задачи 43 имеем

$$\varphi_1 = \frac{1}{3\epsilon_0} P r \cos \vartheta \quad \text{при } r < R,$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{3\epsilon_0} P \frac{R^3}{r^2} \cos \vartheta \quad \text{при } r > R,$$

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad \text{при } r < R,$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{R^3 (\mathbf{Pr}) r}{\epsilon_0 r^5} - \frac{R^3}{3\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}}{r^3} \quad \text{при } r > R.$$

45. В отсутствие сферы потенциал внешнего поля в области вне зарядов удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\varphi_{\text{вн}} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} r^l P_{lm}(\cos \vartheta) e^{lm\alpha}, \quad (1)$$

где r , ϑ и α — координаты точки наблюдения в сферической системе координат. Для заданного поля коэффициенты A_{lm} считаются известными. Если в электрическое поле помещена проводящая сфера, то его потенциал равен

$$\varphi = \varphi_{\text{сф}} + \varphi_{\text{вн}}, \quad (2)$$

где $\varphi_{\text{сф}}$ — потенциал поля, созданного зарядами, индуцированными на сфере, равный $\varphi_{\text{сф}} = \sum_{l,m} B_{lm} r^{-l-1} P_{lm} e^{lm\alpha}$. Из условия $\varphi = 0$ при $r = R$ определим коэффициенты B_{lm} :

$$B_{lm} = -A_{lm} R^{2l+1}. \quad (3)$$

Формулы (1)–(3) полностью определяют потенциал в окрестности сферы.

46. Внутри сферы потенциал равен

$$\varphi_1 = \sum_l a_l r^l P_l(\cos \vartheta);$$

вне сферы —

$$\varphi_2 = a'_0 + a'_1 r P_1(\cos \vartheta) + \sum_{l=2}^{\infty} b_l r^{-l-1} P_l(\cos \vartheta).$$

Из условия задачи следует, что на больших расстояниях от сферы

$$\varphi_2 |_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -E_0 z = -E_0 r \cos \vartheta = -E_0 r P_1(\cos \vartheta).$$

Отсюда

$$a'_0 = 0, \quad a'_1 = -E_0.$$

Накладывая граничные условия на поверхности сферы при $r = R$, получаем

$$\sum_l a_l R^l P_l(\cos \vartheta) = \sum_l b_l R^{-l-1} P_l(\cos \vartheta) - E_0 R P_1(\cos \vartheta),$$

$$\epsilon_r \sum_l a_l l R^{l-1} P_l(\cos \vartheta) = - \sum_l b_l (l+1) R^{-l-2} P_l(\cos \vartheta) - E_0 P_1(\cos \vartheta),$$

где ϵ_r — относительная диэлектрическая проницаемость $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$. Из этих равенств следует, что

$$a_1 = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2}, \quad b_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 R^3, \\ a_l = b_l = 0 \quad \text{при } l \neq 1.$$

Окончательно

$$\varphi_1 = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} r \cos \vartheta, \\ \varphi_2 = -E_0 r \cos \vartheta + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{E_0 R^3}{r^2} \cos \vartheta.$$

Потенциал, создаваемый поляризованной сферой, можно представить как потенциал диполя (42) с дипольным моментом

$$\rho = 4\pi\epsilon_0 \frac{r-1}{\epsilon_r+2} E_0 R^3.$$

47. Внутри и на поверхности сферы $\varphi = 0$, снаружи сферы ищем потенциал в виде

$$\varphi = \sum b_l r^{-l-1} P_l(\cos \vartheta) - E_0 r P_1(\cos \vartheta).$$

Накладывая граничные условия, получаем

$$\begin{aligned} b_1 &= E_0 R^3, \\ b_l &= 0 \quad \text{при } l \neq 1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \varphi &= -E_0 r \cos \vartheta + \frac{E_0 R^3}{r^2} \cos \vartheta, \\ \sigma &= 3\epsilon_0 E_0 \cos \vartheta. \end{aligned}$$

48. Внутри сферы

$$\varphi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos \vartheta);$$

вне сферы

$$\varphi_2 = \sum b_l r^{-l-1} P_l(\cos \vartheta).$$

Из равенства $\varphi_1 = \varphi_2$ следует

$$b_l = a_l R^{2l+1}.$$

Из условия

$$\sigma = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) \quad \text{при } r = R$$

получим соотношение между плотностью зарядов σ и неизвестными коэффициентами a_l :

$$\sigma = \epsilon_0 \sum_l a_l (2l+1) R^{l-1} P_l(\cos \vartheta).$$

Умножим это соотношение на $P_m(\cos \vartheta) \sin \vartheta$ и проинтегрируем в пределах от 0 до π . Так как $\sigma = 0$ при $0 < \vartheta < \alpha$, то

$$a_l = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 R^{l-1}} \int_{\alpha}^{\pi} P_l(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta,$$

или

$$a_l = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 R^{l-1}} (2l+1)^{-1} [P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)],$$

где P_{l+1} — полиномы Лежандра, а $P_{l-1}(\cos \alpha) = -1$ при $l = 0$.

49. Задача допускает разделение переменных в декартовой системе координат:

$$\varphi(r) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (1)$$

Подставляя (1) в уравнение Лапласа, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -\alpha^2, \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -\beta^2, \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= \gamma^2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$.

Пусть a , b и c — длины ребер параллелепипеда.

Предположим, что грань параллелепипеда $z=c$ имеет отличный от нуля потенциал. Тогда частное решение уравнений (2), удовлетворяющее нулевым граничным условиям, на всех прочих гранях имеет вид

$$\varphi_{nm} = \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \operatorname{sh} \gamma_{mn} z,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\pi n}{a}, \quad \beta_m = \frac{\pi m}{b}, \\ \gamma_{mn} &= \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}, \end{aligned}$$

n и m — целые числа.

Общее решение можно представить в виде линейной комбинации частных решений:

$$\varphi(r) = \sum_{n, m=1}^{\infty} A_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \operatorname{sh} \gamma_{nm} z. \quad (3)$$

Коэффициенты A_{nm} находятся из условия $\varphi(r) = V$ при $z=c$:

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{4V}{ab \operatorname{sh} \gamma_{mn} c} \int_0^a dx \int_0^b dy \sin \alpha_n x \sin \beta_m y = \\ &= \begin{cases} \frac{16V}{\pi^2 nm \operatorname{sh} \gamma_{mn} c} & \text{при } n \text{ и } m \text{ нечетных,} \\ 0 & \text{при } n \text{ и } m \text{ четных.} \end{cases} \end{aligned}$$

Подставив A_{nm} в соотношение (3), получим значение потенциала в любой точке внутри параллелепипеда.

$$50. \quad \varphi(r) = \sum_{n, m=1}^{\infty} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y [A_{nm} \operatorname{sh} \gamma_{nm} z + B_{nm} \operatorname{ch} \gamma_{mn} z],$$

где

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \begin{cases} \frac{16V_2}{\pi^2 nm \operatorname{sh} \gamma_{mn} c} - B_{nm} \operatorname{cth} \gamma_{mn} c & \text{при нечетном } m \text{ либо } n, \\ 0 & \text{при четных } m \text{ и } n, \end{cases} \\ B_{nm} &= \begin{cases} \frac{16}{\pi^2 mn} V_1 & \text{при нечетных } m \text{ и } n, \\ 0 & \text{при четных } m \text{ и } n; \end{cases} \\ \alpha_n &= \frac{\pi n}{a}, \quad \beta_m = \frac{\pi m}{b}; \\ \gamma_{mn} &= \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}. \end{aligned}$$

51. В цилиндрической системе координат решение уравнения Лапласа можно представить следующим образом:

$$\Phi(\rho, z) = R(\rho) Z(z),$$

где $R(\rho)$ и $Z(z)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2 Z,$$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + k^2 R = 0.$$

Частное решение этих уравнений имеет вид

$$\Phi(\rho, z) = \begin{cases} e^{k_1 z} J_0(k_1 \rho) & \text{при } z < 0, \\ e^{-k_1 z} J_0(k_1 \rho) & \text{при } z > 0, \end{cases}$$

где J_0 — функция Бесселя, k_1 определяется из равенства нулю потенциала на поверхности цилиндра:

$$J_0(k_1 r_0) = 0.$$

Общее решение уравнения для потенциала представляет собой суперпозицию частных решений:

$$\Phi_1 = \sum_{l=1}^{\infty} A_l e^{k_l z} J_0(k_l \rho) \quad \text{при } z < 0,$$

$$\Phi_2 = \sum_{l=1}^{\infty} A_l e^{-k_l z} J_0(k_l \rho) \quad \text{при } z > 0.$$

Коэффициенты A_l находятся из граничного условия на поверхности заряженного диска. Используя условие (32) и условие ортогональности функций Бесселя, найдем

$$A_l = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 k_l} \frac{\int_0^R \rho J_0(k_l \rho) d\rho}{\int_0^{r_0} J_0^2(k_l \rho) \rho d\rho}.$$

Для вычисления потенциала точечного заряда в цилиндре используется условие предельного перехода: $R \rightarrow 0$, $\pi R^2 \sigma = e = \text{const}$. Тогда

$$A_l = \frac{e J_0(0)}{4\pi \epsilon_0 k_l \int_0^{r_0} J_0^2(k_l \rho) \rho d\rho}.$$

Далее, воспользовавшись формулой $J_0(0) = 1$, найдем

$$A_l = \frac{e}{2\pi \epsilon_0 k_l r_0^2 [J_1(k_l r_0)]^2}.$$

52. Выберем систему координат так, чтобы в ее начале находился заряд, а ось Oz была направлена вдоль нормали к пластинке. По-

тенциал системы состоит из потенциала точечного заряда и потенциала, создаваемого поляризованной пластинкой. Последний удовлетворяет уравнению Лапласа. Используя общие решения уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат, можно записать

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{1/2}} + \int_0^\infty B_1(k) e^{kz} J_0(k\rho) dk \quad (-\infty < z < d), \\ \Phi_2 &= \int_0^\infty A_2(k) e^{-kz} J_0(k\rho) dk + \int_0^\infty B_2(k) e^{kz} J_0(k\rho) dk \quad (d < z < d+a), \\ \Phi_3 &= \int_0^\infty A_3(k) e^{-kz} J_0(k\rho) dk \quad (d+a < z < \infty).\end{aligned}\quad (1)$$

Первое слагаемое в Φ_1 можно представить в виде интеграла от функции Бесселя:

$$\frac{1}{(\rho^2+z^2)^{1/2}} = \int_0^\infty e^{-k|z|} J_0(k\rho) dk. \quad (2)$$

Используя граничные условия для потенциала при $z = d$ и $z = d+a$, находим

$$\begin{aligned}B_1(k) &= \frac{e\beta(e^{-2k(d+a)} - e^{-2kd})}{4\pi\epsilon_0(1-\beta^2e^{-2ka})}, \\ A_2(k) &= \frac{e(1-\beta)}{4\pi\epsilon_0(1-\beta^2e^{-2ka})}, \\ B_2(k) &= \frac{e\beta(1-\beta)e^{-2k(d+a)}}{4\pi\epsilon_0(1-\beta^2e^{-2ka})}, \\ A_3(k) &= \frac{e(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0(1-\beta^2e^{-2ka})},\end{aligned}\quad (3)$$

где

$$\beta = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}.$$

Формулы (1) вместе с соотношениями (3) дают решение данной задачи.

Если заряд расположен на поверхности полубесконечной пластинки, то в общих соотношениях следует положить $d \rightarrow 0$, $a \rightarrow \infty$. В этом случае

$$B_1 = -\frac{e\beta}{4\pi\epsilon_0}, \quad B_2 = 0, \quad A_2 = \frac{e}{2\pi\epsilon_0(\epsilon_r + 1)}.$$

Подставив эти соотношения в (1) и используя разложение (2), получим

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{e}{2\pi\epsilon_0(\epsilon_r + 1)r}, \quad (4)$$

где $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$ — расстояние от заряда к точке наблюдения. Формула (4) совпадает с соответствующим выражением задачи 40.

53. Из симметрии задачи следует, что оси эллипсоида будут главными осями тензора квадрупольного момента. В системе главных осей

$$D_{xy} = D_{xz} = D_{yz} = 0.$$

Заменой $x = x'a$, $y = y'b$, $z = z'c$ интегрирование по объему эллипсоида в формуле (44) сводится к интегрированию по объему сферы, заданной уравнением

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Вычисление по формуле (44) дает

$$D_{xx} = \frac{e}{5} (2a^2 - b^2 - c^2),$$

$$D_{yy} = \frac{e}{5} (2b^2 - a^2 - c^2),$$

$$D_{zz} = \frac{e}{5} (2c^2 - a^2 - b^2),$$

где $e = \frac{4\pi}{3} abc\rho$ — заряд эллипсоида.

54. Предположив, что заряд расположен в начале координат, решим уравнения

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= e\delta(\mathbf{r}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Направим оси декартовой системы координат по главным осям тензора диэлектрической проницаемости. Тогда

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_x E_x = -\epsilon_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ D_y &= \epsilon_y E_y = -\epsilon_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ D_z &= \epsilon_z E_z = -\epsilon_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставим соотношения (2) в уравнение (1):

$$\epsilon_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \epsilon_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \epsilon_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -e\delta(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Заменой $x' = \frac{x}{\sqrt{\epsilon_x}}$, $y' = \frac{y}{\sqrt{\epsilon_y}}$, $z' = \frac{z}{\sqrt{\epsilon_z}}$ уравнение (3) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = -\frac{e}{(\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z)^{1/2}} \delta(\mathbf{r}'). \quad (4)$$

Здесь использовано свойство δ -функции:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

Решение уравнения (4) имеет вид

$$\varphi = \frac{e}{4\pi (\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z)^{1/2}} \frac{1}{r'}.$$

где

$$r' = \left(\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} \right)^{1/2}.$$

55. Направим ось OY по нормали к поверхности. Из граничных условий $E_{1t} = E_{2t}$, $D_{1n} = D_{2n}$ следует

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{\epsilon_0 E_{0y} - \epsilon_{yx} E_{0x} - \epsilon_{yy} E_{0y} - \epsilon_{yz} E_{0z}}{\epsilon_{yy}} \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности.

$$56. W = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

$$57. W = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

58. Воспользовавшись ответом задачи 40, запишем

$$e = R(1 + \epsilon_r) \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_r - 1} \left(\frac{2}{3} \pi R^3 \mu g - Mg \right)},$$

где g — ускорение силы тяжести, ϵ_r — относительная диэлектрическая постоянная.

59. Мысленно выделим в диэлектрике куб с центром, совпадающим с положением молекулы. Полное поле, действующее на молекулу, можно представить в виде суммы двух полей: поля зарядов, находящихся вне куба, и поля зарядов внутри куба. В последнем случае поляризованные молекулы расположены близко к центральной молекуле и поэтому их поле следует вычислять микроскопически. В кубическом кристалле микроскопическое поле отдельных молекул в центре куба равно нулю. Остается вычислить напряженность поля всех зарядов вне куба. Так как эти заряды расположены далеко, их поле можно вычислить макроскопически. Поле в центре куба можно представить как макроскопическое поле \mathbf{E} минус \mathbf{E}_1 — поле поляризованного куба, имеющего объемные связанные заряды $\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P} = 0$ (при однородной поляризации) и поверхностные $\sigma' = P_n$, которые отличны от нуля на двух противоположных гранях, где $P_n \neq 0$. Таким образом, поле \mathbf{E}_1 равно

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{Pa}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dx dy}{\left(\frac{a^2}{4} + x^2 + y^2 \right)^{3/2}} = -\frac{P}{3\epsilon_0},$$

где a — ребро куба.

Макроскопическое поле в центре куба равно

$$\mathbf{E} - \mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}.$$

60. Пусть заряд находится в начале координат. Потенциал определяется из условия

$$\Delta\Phi = -\frac{e}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r}) - \frac{en_0}{\epsilon_0} (e^{-e\Phi/kT} - 1).$$

При условии $e\varphi \ll kT$

$$\Delta\varphi - \kappa^2\varphi = -\frac{e}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $\kappa^2 = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 kT}$. Решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{ee^{-\kappa r}}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

61. $I = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$, $R = \frac{1}{4\pi\sigma^*} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$.

62. $\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\sigma_1^*}{\sigma_2^*}$, где α_1 и α_2 — углы между линиями тока и нормалью к поверхности в среде 1 и среде 2 соответственно.

63. Потенциал между электродами удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1)$$

где $\rho = \frac{j}{v}$, j — плотность тока, в стационарном случае не зависящая от x , если ось Ox — направление движения зарядов. Скорость v найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + e\varphi = 0.$$

Уравнение (1) можно переписать так

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{j\sqrt{m}}{\varepsilon_0 V 2|e|\varphi}.$$

Интегрируя его при условиях: $\varphi = 0$ при $x = 0$ и $\varphi = -V$ при $x = d$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$ при $x = 0$ (условие равенства нулю электрического поля у первого электрода), получаем

$$j = -\frac{4\varepsilon_0}{9d^2} \sqrt{\frac{2|e|}{m}} |V|^{3/2}.$$

64. $\mathbf{H} = \frac{1}{2} [\mathbf{j}, \mathbf{r}]$ при $r < R$,

$\mathbf{H} = \frac{R^2}{2r^2} [\mathbf{j}, \mathbf{r}]$ при $r > R$,

где r — расстояние от оси цилиндра.

65. $\mathbf{H} = \frac{1}{2} [\mathbf{j}, \mathbf{a}]$.

66. Пусть ось OZ направлена вдоль оси проводника. Из симметрии задачи имеем

$$\begin{aligned} A_x = A_y = 0, \\ \Delta A_{1z} = -\mu_0 j \quad \text{при } \rho < R, \\ \Delta A_{2z} = 0 \quad \text{при } \rho > R. \end{aligned}$$

Компонента A_z зависит лишь от расстояния от оси. В цилиндрической системе координат

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dA_{1z}}{d\rho} \right) = -\mu_0 \frac{a}{\rho} \text{ при } \rho < R,$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dA_{2z}}{d\rho} \right) = 0 \text{ при } \rho > R.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$A_{1z} = -\mu_0 a \rho + C_1 \ln \rho + C_2, \quad (1)$$

$$A_{2z} = C_3 \ln \rho + C_4. \quad (2)$$

Учитывая, что $\frac{dA_{1z}}{d\rho} \rightarrow \infty$ при $\rho \rightarrow 0$ и магнитное поле становится бесконечным, следует C_1 положить равным нулю. Из условия непрерывности величин A_z и $\frac{dA_z}{d\rho}$ (при отсутствии поверхностных токов) следует

$$C_3 = -\mu_0 a R, \quad C_4 = -\mu_0 a R (1 - \ln R) + C_2. \quad (3)$$

Соотношениями (1)–(3) векторный потенциал определится с точностью до постоянной.

Магнитное поле определится формулами:

$$H_{1x} = -a \sin \varphi, \quad H_{1y} = a \cos \varphi, \quad H_{1z} = 0,$$

или

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{\rho} [\mathbf{a}, \boldsymbol{\rho}].$$

Вектор \mathbf{a} направлен по оси цилиндра, а по величине равен a . По абсолютной величине $H_1 = a$ не зависит от точки внутри проводника.

Вне проводника имеем

$$H_{2x} = -\frac{aR}{\rho} \sin \varphi, \quad H_{2y} = \frac{aR}{\rho} \cos \varphi, \quad H_{2z} = 0,$$

или (по модулю)

$$|\mathbf{H}_2| = \frac{aR}{\rho}.$$

67. Выберем систему координат так, чтобы ось OZ была направлена вдоль тока, а нормаль к поверхности—вдоль оси OX . Тогда из граничного условия (26) следует

$$H_y = \begin{cases} -\frac{i}{2} & \text{при } x < 0, \\ \frac{i}{2} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

68. а) $H = 0$ между плоскостями,

$H = i$ вне плоскостей,

б) $H = -i$ между плоскостями,

$H = 0$ вне плоскостей.

69. Расположим начало координат в середине полосы, ось OZ направим вдоль полосы, а OX — перпендикулярно полосе. Магнитное поле не зависит от z . Разобьем полосу на полоски, параллельные оси OZ , настолько узкие, что ток в каждой можно считать линейным. Пусть координата какой-нибудь полоски равна y' , ширина dy' . Такая полоска согласно задаче 64 создает в точке с координатами x, y магнитное поле dH , определяемое соотношениями:

$$\begin{aligned} dH_x &= -\frac{i(y-y')dy'}{2\pi[x^2+(y-y')^2]}, \\ dH_y &= \frac{xi dy'}{2\pi[x^2+(y-y')^2]}, \\ dH_z &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя эти соотношения в пределах от $-a/2$ до $a/2$, получаем

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{i}{4\pi} \ln \frac{x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2}{x^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2}, \\ H_y &= \frac{i}{2\pi} \left(-\operatorname{arctg} \frac{y - \frac{a}{2}}{x} + \operatorname{arctg} \frac{y + \frac{a}{2}}{x} \right), \\ H_z &= 0. \end{aligned}$$

При $a \rightarrow \infty$ (для плоскости)

$$H_x = 0, H_y = \begin{cases} -\frac{i}{2}, & x < 0, \\ \frac{i}{2}, & x > 0, \end{cases}$$

что совпадает с ответом задачи 67.

70. Для проводников конечной длины l , параллельных оси OZ , запишем

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\int_{-l}^l \frac{dz}{\rho_1} - \int_{-l}^l \frac{dz}{\rho_2} \right), \\ A_x &= A_y = 0, \end{aligned}$$

где

$$\rho_1 = \sqrt{z^2 + r_1^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{z^2 + r_2^2},$$

r_1 и r_2 — расстояния от точки наблюдения к первому и второму проводнику соответственно.

После вычисления интегралов и перехода к пределу $l \rightarrow \infty$ получим

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

71. Направим ось OZ перпендикулярно плоскости рамки (рис. 54). Так как система имеет цилиндрическую симметрию, для нахождения магнитного поля достаточно предположить, что точка наблюдения P расположена в плоскости xz . Векторный потенциал направлен по оси OY , т. е. имеет одну, отличную от нуля составляющую A_φ , равную

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dl \varphi'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R \cos \varphi' d\varphi'}{(R^2 + \rho^2 + z^2 - 2R\rho \cos \varphi')^{1/2}},$$

где ρ — расстояние от точки наблюдения P до оси кольца. Положим $\varphi' = \pi + 2\theta$. Тогда

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 R I}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \theta - 1) d\theta}{[(R + \rho)^2 + z^2 - 4R\rho \sin^2 \theta]^{1/2}}.$$

Обозначим

$$k^2 = \frac{4R\rho}{[(R + \rho)^2 + z^2]}.$$

Далее путем несложных преобразований получим

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{\pi k} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} k^2 \right) K(k) - E(k) \right],$$

где

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \text{ — эллиптический интеграл I рода, } E(k) = \\ = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta \text{ — эллиптический интеграл II рода.}$$

Между эллиптическими интегралами I и II родов существуют следующие соотношения:

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E}{k(1 - k^2)} - \frac{K}{k}, \quad \frac{dE}{dk} = \frac{E}{k} - \frac{K}{k}.$$

Используя их, получаем

$$H_\rho = \frac{I}{2\pi} \frac{z}{\rho [(R + \rho)^2 + z^2]^{1/2}} \cdot \left[-K(k) + \frac{R^2 + \rho^2 + z^2}{(R - \rho)^2 + z^2} E(k) \right], \\ H_z = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{[(R + \rho)^2 + z^2]^{1/2}} \cdot \left[K(k) + \frac{R^2 - \rho^2 - z^2}{(R - \rho)^2 + z^2} E(k) \right], \\ H_\varphi = 0.$$

На оси симметрии $\rho \rightarrow 0$

$$H_\rho \rightarrow 0, \quad H_z = \frac{R^2 I}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

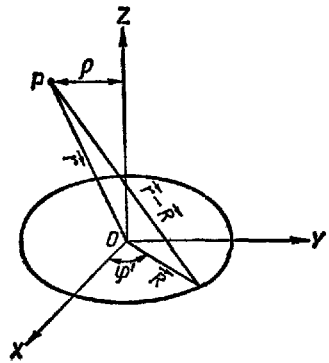


Рис. 54

72. Снаружи шара $B_2 = \mu_0 H_2$ и $\text{rot } \mathbf{H}_2 = 0$, $\text{div } \mathbf{H}_2 = 0$. Отсюда следует, что напряженность магнитного поля можно представить как градиент некоторой функции φ_m , удовлетворяющей уравнению Лапласа:

$$\mathbf{H}_2 = -\nabla \varphi_m, \quad \Delta \varphi_m = 0. \quad (1)$$

Общее решение для потенциала, дающее нулевое магнитное поле на бесконечности, имеет вид

$$\varphi_m = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \frac{P_l(\cos \vartheta)}{r^{l+1}}. \quad (2)$$

Внутри шара векторы \mathbf{H}_1 , \mathbf{B}_1 , и \mathbf{M} параллельны. Пусть они направлены вдоль оси OZ . Применяя граничные условия (непрерывность B_r и H_ϑ при $r=R$), получаем

$$B_1 \cos \vartheta = \mu_0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1) a_l P_l(\cos \vartheta)}{R^{l+2}},$$

$$H_1 \sin \vartheta = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l}{R^{l+2}} \frac{dP_l(\cos \vartheta)}{d\vartheta}.$$

Отсюда следует, что отличными от нуля являются коэффициенты a_l с $l=1$.

Подставим $\frac{B_1}{\mu_0} - \mathbf{M}$ вместо \mathbf{H}_1 . Тогда для a_1 и \mathbf{M} получим уравнения:

$$B_1 = \mu_0 \frac{2a_1}{R^3}, \quad M - \frac{B_1}{\mu_0} = \frac{a_1}{R^3}.$$

Решая их, находим

$$a_1 = \frac{1}{3} MR^3, \quad B_1 = \frac{2\mu_0}{3} M. \quad (3)$$

Из соотношений (1)–(3) для поля вне шара получаем

$$\mathbf{H}_2 = \frac{R^3}{3} \left[\frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3} \right], \quad \mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_2.$$

Таким образом, вне шара поле совпадает с полем диполя, имеющего магнитный момент

$$m = \frac{4\pi}{3} R^3 M,$$

а внутри шара

$$\mathbf{B}_1 = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M}, \quad \mathbf{H}_1 = -\frac{1}{3} \mathbf{M}.$$

74. $M_x = M_y = 0$; $M_z = \frac{e\Omega}{5} R^2.$

75. Вращательное движение создает поверхностный ток, который в сферической системе координат с полярной осью, направленной вдоль оси вращения, равен

$$i_\varphi = \sigma \Omega R \sin \vartheta. \quad (1)$$

Поскольку внутри и вне сферы токи отсутствуют, можно ввести потенциал магнитного поля

$$\mathbf{H} = \begin{cases} -\nabla\psi_1 & \text{при } r < R, \\ -\nabla\psi_2 & \text{при } r > R \end{cases}$$

где

$$\psi_1 = \sum_l A_l r^l P_l(\cos \vartheta), \quad (2)$$

$$\psi_2 = \sum_l B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \vartheta). \quad (3)$$

Граничные условия (25), (26) в применении к данной задаче имеют вид при $r = R$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \frac{\partial\psi_2}{\partial r}, \quad \frac{\partial\psi_1}{r \partial\vartheta} - \frac{\partial\psi_2}{r \partial\vartheta} = i_\varphi.$$

Подставляя разложения (2), (3) и формулу (1) в граничные условия, а также учитывая, что

$$\sin \vartheta = -\frac{d(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = -\frac{dP_l(\cos \vartheta)}{d\vartheta},$$

находим

$$A_1 = -\frac{2}{3} \sigma \Omega R; \quad B_1 = \frac{1}{3} \Omega \sigma R^4, \\ A_l = B_l = 0 \quad \text{при } l \neq 1.$$

Таким образом,

$$\mathbf{H} = \frac{2}{3} \sigma \Omega R \quad \text{при } r < R$$

(внутри сферы поле направлено вдоль оси OZ),

$$\mathbf{H} = \frac{3(mr)}{4\pi r^3} \mathbf{r} - \frac{m}{4\pi r^3} \quad \text{при } r > R, \\ m = \frac{4\pi}{3} R^4 \sigma \Omega;$$

вне сферы магнитное поле равно полю системы с магнитным моментом \mathbf{m} .

76. Сила взаимодействия токов на единицу длины провода равна

$$F = \pm \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d}.$$

Знак «+» берется, если направления токов совпадают, и «-», если противоположны.

77. Из симметрии задачи следует, что сила взаимодействия токов является силой притяжения. Вклад в эту силу даст радиальная компонента магнитного поля, которая одинакова во всех точках контура. Тогда

$$F = \mu I_1 H_\varphi(R_2, R_1, d) \int_0^{2\pi} R_1 d\vartheta = 2\pi \mu R_1 I_1 H_\varphi(R_1, R_2, d).$$

где H_p — радиальная компонента магнитного поля, созданного токами контура II в точках контура I.

Пользуясь данными задачи 71, получаем

$$F = \frac{\mu I_1 I_2 d}{[(R_1 + R_2)^2 + d^2]^{1/2}} \left[-K(k) + \frac{R_1^2 + R_2^2 + d^2}{(R_1 - R_2)^2 + d^2} E(k) \right],$$

где $k^2 = \frac{4R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2 + d^2}$.

78. Магнитное поле между цилиндрами при силе текущего по ним тока I равно

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Энергия магнитного поля равна

$$W = \frac{1}{2} \int B H dV = \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1};$$

с другой стороны,

$$W = \frac{1}{2} L I^2.$$

Сравнивая два последних равенства, находим

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

79. $L = \frac{\mu_1}{8\pi} + \frac{\mu_2}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$

80. $\kappa = -\frac{\mu_0 e^2 a^2}{2m} N.$

82. $E = a \mathcal{J}_0(kr) e^{-i\omega t},$

$$H = -ai \sqrt{\frac{\sigma^* i}{\omega \mu_0}} \mathcal{J}_1(kr) e^{-i\omega t},$$

где $k = \frac{1+i}{\sigma}$, $\sigma = \left(\frac{2}{\omega \sigma^* \mu_0} \right)^{1/2}$, \mathcal{J}_0 и \mathcal{J}_1 — функции Бесселя.

83. Зависимость магнитного момента от времени удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{dM}{dt} = \mu_0 \gamma [M, H], \quad (1)$$

где γ — гиромангнитное отношение.

Напряженность магнитного поля заданной системы можно записать так

$$H = H_0 + h e^{-i\omega t}.$$

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$M = M_0 + m e^{-i\omega t},$$

где m — магнитный момент, индуцированный полем.

Поскольку $h \ll H_0$, то $m \ll M_0$. Пренебрегая малыми величинами порядка ht , из уравнения (1) получаем

$$\begin{aligned} -i\omega m_x &= -\mu_0 \gamma M_0 h_y + \mu_0 \gamma m_y H_0, \\ -i\omega m_y &= \mu_0 \gamma M_0 h_x - \mu_0 \gamma m_x H_0, \\ -i\omega m_z &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим

$$\begin{aligned} m_x &= \kappa h_x - i\nu h_y, \\ m_y &= i\nu h_x + \kappa h_y, \\ m_z &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\kappa = \frac{\gamma \omega_0 M_0 \mu_0}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad \nu = \frac{\mu_0 \gamma \omega M_0}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad \omega_0 = -\mu_0 \gamma H_0.$$

При частотах $\omega \approx \omega_0$ наблюдается явление магнитного резонанса.

84. Если длины волн намного больше размеров образца, то при описании колебаний магнитного момента можно воспользоваться магнитостатическим приближением. В этом случае для переменного поля \mathbf{h} и магнитного момента \mathbf{m} , возникающих при колебаниях, можно записать

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{h} &= 0, \\ \text{div } (\mathbf{h} + \mathbf{m}) &= 0. \end{aligned}$$

Для шара эти уравнения решены в задаче 72.

В частности, из этого решения следует, что внутри шара

$$\mathbf{h} = -\frac{1}{3} \mathbf{m}.$$

С другой стороны, \mathbf{h} и \mathbf{m} связаны между собой соотношением (2) задачи 83. Поэтому

$$\begin{aligned} h_x &= -\frac{1}{3} (\kappa h_x - i\nu h_y); \\ h_y &= -\frac{1}{3} (\kappa h_y + i\nu h_x). \end{aligned}$$

Эта система имеет решение, если ее определитель равен нулю, что накладывает условие на частоту колебаний ω . Нетривиальные решения существуют, если

$$\omega = \pm \gamma (H_0 + \frac{1}{3} M_0),$$

где M_0 — статическая намагниченность, созданная в шаре полем \mathbf{H}_0 .

$$85. \omega_{12}^2 = \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 \mp [(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2 + 4C_1 C_2 L_{12}^2]^{1/2}}{2C_1 C_2 (L_1 L_2 - L_{12}^2)}.$$

86. Конец вектора напряженности результирующего электрического поля описывает эллипс с полуосями, равными

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{E_{01}^2 \cos^2 \alpha + E_{02}^2 \cos^2 (\alpha - \chi)}, \\ b &= \sqrt{E_{01}^2 \sin^2 \alpha + E_{02}^2 \sin^2 (\alpha - \chi)}, \end{aligned}$$

где

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{E_{02}^2 \sin 2\chi}{E_{01}^2 + E_{02}^2 \cos 2\chi}.$$

Главные оси эллипса повернуты относительно векторов E_1 и E_2 на угол α .

87. Связь между углом падения ϑ_1 и углом преломления ϑ_2 дается формулой

$$\sin \vartheta_2 = \frac{\sin \vartheta_1}{n_{12}}, \quad (1)$$

где $n_{12} = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$ — показатель преломления второй среды относительно первой. Если $\epsilon_2 < \epsilon_1$, то условию (1) можно удовлетворить, выбрав комплексное значение ϑ_2 . Электромагнитная волна внутри среды, от которой происходит полное внутреннее отражение (при $\epsilon_2 < \epsilon_1$), описывается формулой

$$E_2 = E_{02} e^{ikr - i\omega t};$$

здесь $k = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_0}$, ω — частота колебаний.

Если выбрать систему координат так, чтобы граница раздела лежала в плоскости xy , а волновой вектор k — в плоскости xz , то

$$E_2 = E_{20} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x \sin \vartheta_2 + z \cos \vartheta_2}{v_2} \right) \right], \quad (2)$$

где $v_2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_0}}$ — фазовая скорость волны.

Исключим отсюда ϑ_2 через угол падения ϑ_1 по условию (1):

$$\cos \vartheta_2 = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_2} = \pm i \sqrt{\frac{\sin^2 \vartheta_1}{n_{12}^2} - 1}. \quad (3)$$

Чтобы поле оставалось конечным при $z \rightarrow \infty$, следует взять данное выражение со знаком «—». После подстановки соотношения (3) в выражение (2) получим

$$E_2 = E_{20} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x \sin \vartheta_1}{v_1} \right) - \kappa z \right],$$

где

$$\kappa = \frac{\omega}{v_2} \sqrt{\frac{\sin^2 \vartheta_1}{n_{12}^2} - 1}.$$

Таким образом, при полном внутреннем отражении поле внутри среды, от которой происходит отражение, представляет собой волну, бегущую вдоль поверхности раздела и затухающую вглубь среды с показателем κ . Глубина проникновения волны во вторую среду равна

$$d = \frac{1}{\kappa} = \frac{v_2}{\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \vartheta_1}{n_{12}^2} - 1}}.$$

$$88. R = \frac{(1-n)^2 + \kappa^2}{(1+n)^2 + \kappa^2}; \quad \text{здесь}$$

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma^*}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1 \right]^{1/2},$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma^*}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \right]^{1/2},$$

где $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$.

В случае хорошего проводника $\left(\frac{\sigma^*}{\omega} \gg \varepsilon\right)$

$$R = 1 - 2 \left(\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma^*}\right)^{1/2}.$$

89. Напряженность электрического поля находится из уравнения

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k^2 E = 0, \quad (1)$$

где $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}$ — внутри пластины и $k = k_0 = \frac{\omega}{c}$ вне пластины. Ось OZ направлена перпендикулярно поверхности пластины.

Решение уравнения (1) вне пластины со стороны падающей волны имеет вид

$$E_1 = E_0 e^{ik_0 z} + A e^{-ik_0 z},$$

где E_0 — амплитуда падающей волны, A — отраженной.

Внутри пластины

$$E_2 = E_+ e^{ikz} + E_- e^{-ikz},$$

за пластиной — только прошедшая волна с амплитудой D

$$E_3 = D e^{ik_0 z}.$$

Граничные условия (непрерывность тангенциальных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей) дают следующую систему уравнений для определения напряженности поля:

$$E_0 + A = E_+ + E_-,$$

$$E_+ e^{ikd} + E_- e^{-ikd} = D e^{ik_0 d},$$

$$E_0 - A = n E_+ - n E_-,$$

$$n E_+ e^{ikd} - n E_- e^{-ikd} = D e^{ik_0 d},$$

где $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ — показатель преломления пластины.

Решая эту систему уравнений, находим

$$A = \frac{\sqrt{\rho_0} (1 - e^{2ikd})}{1 - \rho_0 e^{2ikd}} E_0,$$

$$E_+ = \frac{2}{(1+n)(1 - \rho_0 e^{2ikd})} E_0,$$

$$E_- = -\frac{2\rho_0}{(1-n)(e^{-2ikd} - \rho_0)} E_0,$$

$$D = \frac{\delta_0 e^{ikd}}{1 - \rho_0 e^{2ikd}} E_0,$$

где $\rho_0 = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2$, $\delta_0 = \frac{4n}{(1+n)^2}$ — соответственно коэффициенты отражения и прохождения для полубесконечной среды.

Используя полученные соотношения, находим коэффициент отражения электромагнитных волн от плоскопараллельной пластины

$$\rho = \frac{|A|^2}{|E_0|^2} = \frac{4\rho_0 \sin^2 kd}{\delta_0^2 + 4\rho_0 \sin^2 kd}.$$

Отражение равно нулю, если

$$d = \frac{\pi m}{k} = \frac{m\lambda}{2},$$

где m — целое число, λ — длина световой волны в пластине.

90. Пусть граница раздела совпадает с плоскостью xy и волна распространяется вдоль оси Ox , а магнитное поле в волне направлено по оси Oy . Предположим, при $z > 0$ находится среда с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , при $z < 0$ — с диэлектрической проницаемостью $-\epsilon_2$. Решение уравнения

$$\Delta H_y + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r H_y = 0,$$

описывающее волну, бегущую вдоль границы раздела и затухающую вдали от границы, имеет вид

$$\begin{aligned} H_{1y} + H_{01} e^{ikx - \kappa_1 z}, \quad \kappa_1 &= \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{1r}} \quad \text{при } z > 0, \\ H_{2y} = H_{02} e^{ikx + \kappa_2 z}, \quad \kappa_2 &= \sqrt{k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} |\epsilon_{2r}|} \quad \text{при } z < 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Из граничных условий $H_{1y} = H_{2y}$ и $E_{1x} = E_{2x}$ при $z = 0$ следует

$$H_{01} = H_{02}, \quad \frac{\kappa_1}{\epsilon_1} = \frac{\kappa_2}{|\epsilon_{2r}|}. \quad (2)$$

Последнее может выполняться только при условии $\epsilon_1 < \epsilon_2$. Исключая κ_1 и κ_2 из последнего равенства (2) по формулам (1), получаем

$$k^2 = \frac{\omega^2 \epsilon_{r1} |\epsilon_{r2}|}{c^2 (|\epsilon_{r2}| - \epsilon_{r1})}.$$

91. Из равенства проекций волновых векторов на границу раздела следует, что

$$\frac{\sin \vartheta_2'}{\sin \vartheta_1} = \sqrt{\epsilon_{r\perp}}$$

для обыкновенной волны и

$$k_1 \sin \vartheta_1 = k_2 \sin \vartheta_2'' = k_0 \sin \vartheta_2'' \left(\frac{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{\perp} \sin^2 \vartheta_2'' + \epsilon_{\parallel} \cos^2 \vartheta_2''} \right)^{1/2}$$

для необыкновенной волны; здесь $k_0 = \frac{\omega}{c}$, ϑ_2'' — угол между волновым вектором в кристалле k_2 и оптической осью. Отсюда

$$\operatorname{tg} \vartheta_2'' = \frac{\sqrt{\epsilon_{\parallel}} \sin \vartheta}{\sqrt{\epsilon_{\perp} (\epsilon_{\parallel} - \sin^2 \vartheta_1)}}.$$

Направление распространения луча θ_2^* связано с направлением θ_1^* вектора \mathbf{k}_2 соотношением

$$\operatorname{tg} \theta_2^* = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \operatorname{tg} \theta_1^*.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg} \theta_2^* = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\perp}} \sin \theta_1}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_{\parallel} - \sin^2 \theta_1)}}.$$

92. Уравнения движения электрона под действием электрического поля $E_0 e^{-i\omega t}$ имеют вид

$$m\dot{x} = -k_x x + eE_{0x} e^{-i\omega t},$$

$$m\dot{y} = -k_y y + eE_{0y} e^{-i\omega t},$$

$$m\dot{z} = -k_z z + eE_{0z} e^{-i\omega t}.$$

Ищем решения в виде

$$x = x_0 e^{-i\omega t}, \quad y = y_0 e^{-i\omega t}, \quad z = z_0 e^{-i\omega t},$$

где x_0 , y_0 и z_0 находятся из уравнений:

$$x_0 = \frac{eE_{0x}}{m \left(\frac{k_x}{m} - \omega^2 \right)}, \quad y_0 = \frac{eE_{0y}}{m \left(\frac{k_y}{m} - \omega^2 \right)}, \quad z_0 = \frac{eE_{0z}}{m \left(\frac{k_z}{m} - \omega^2 \right)}.$$

Проекции дипольного момента единицы объема, индуцированного электрическим полем, равны

$$P_x = \frac{Ne^2}{m \left(\frac{k_x}{m} - \omega^2 \right)} E_x,$$

$$P_y = \frac{Ne^2}{m \left(\frac{k_y}{m} - \omega^2 \right)} E_y,$$

$$P_z = \frac{Ne^2}{m \left(\frac{k_z}{m} - \omega^2 \right)} E_z.$$

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{k_x - m\omega^2},$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{k_y - m\omega^2}, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{k_z - m\omega^2},$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0.$$

95. Пусть магнитное поле направлено вдоль оси OZ . Движение электронов в переменном электрическом и постоянном магнитном

полях определяется уравнениями:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_x + \frac{e}{m} y B_0,$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{e}{m} E_y - \frac{e}{m} \dot{x} B_0,$$

где ω_0 — собственная частота колебаний электрона. Введем новые переменные:

$$r_+ = x + iy, \quad r_- = x - iy, \\ E_+ = E_x + iE_y, \quad E_- = E_x - iE_y.$$

Учитывая монохроматичность световой волны ($E_{\pm} \sim e^{i\omega t}$), получаем

$$r_+ = \frac{e}{m} \frac{E_+}{\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{e\omega}{m} B_0},$$

$$r_- = \frac{e}{m} \frac{E_-}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{e\omega}{m} B_0}.$$

Система уравнений Максвелла дает решение для E_+ и E_- в виде плоских волн

$$E_{\pm} = E_{0\pm} e^{-i\omega t + ik_{\pm} z},$$

где

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} n_{\pm}, \quad n_{\pm} = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 \mp \frac{e\omega B}{m}}.$$

Предположим, что при $z=0$ вектор напряженности электрического поля внутри среды направлен по оси OY и по абсолютной величине равен E_0 . Тогда

$$E_x = E_0 e^{-i\omega t + i \frac{k_+ + k_-}{2} z} \cos \frac{k_- - k_+}{2} z,$$

$$E_y = E_0 e^{-i\omega t + i \frac{k_+ + k_-}{2} z} \sin \frac{k_- - k_+}{2} z.$$

Из полученного решения видно, что вектор \mathbf{E} вращается. Угол вращения на пути l равен

$$\chi = \frac{k_- - k_+}{2} l.$$

96. Напряженность электрического поля монохроматической волны имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} + \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Уравнение движения ангармонического осциллятора в электрическом поле записывается так:

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + m\omega_0^2 x_i + \sum_{j, l} \beta_{ijl} x_j x_l = eE_i. \quad (2)$$

Считая коэффициенты β_{ijl} малыми, положим

$$x_i = x_i^{(0)}(t) + x_i^{(1)}(t) + \dots,$$

где $x_i^{(1)}$ — величина первого порядка малости разложения x_i по β_{ijl} .

В нулевом приближении в уравнении (2) слагаемое, содержащее малые коэффициенты, выбрасываем. Тогда

$$x_i^{(0)} = \frac{eE_i}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

В следующем приближении

$$x_i^{(1)} = -\frac{1}{2} \sum_{j,l} \frac{e^2 \beta_{ijl} E_{oj} E_{ol}}{m^3 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \left[\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{\cos 2\omega t}{\omega_0^2 - 4\omega^2} \right]$$

Дипольный момент единицы объема равен

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(0)} + \mathbf{P}^{(1)},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(0)} &= \frac{Ne^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \\ \mathbf{P}^{(1)} &= \mathbf{P}^{(1)}(0) + \mathbf{P}^{(1)}(2\omega), \\ P_i^{(1)}(0) &= -\frac{Ne^3}{2} \sum_{j,l} \frac{\beta_{ijl}}{m^3} \frac{E_{oj} E_{ol}}{\omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}, \\ P_i^{(1)}(2\omega) &= -\frac{Ne^3}{2} \sum_{j,l} \frac{\beta_{ijl}}{m^3} \frac{E_{oj} E_{ol} \cos 2\omega t}{(\omega_0^2 - 4\omega^2) (\omega_0^2 - \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

$(i=x, y, z)$

$$97. \quad \mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}^{(1)}(\omega_1 - \omega_1) + \mathbf{P}^{(1)}(2\omega_1) + \mathbf{P}^{(1)}(\omega_2 - \omega_2) + \mathbf{P}^{(1)}(2\omega_2) + 2\mathbf{P}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) + 2\mathbf{P}^{(1)}(\omega_1 - \omega_2).$$

Первые четыре члена совпадают с $\mathbf{P}^{(1)}(0)$ и $\mathbf{P}^{(1)}(2\omega)$, рассмотренными в предыдущей задаче, а проекции векторов $\mathbf{P}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2)$ определяются соотношением

$$P_i^{(1)}(\omega_1 \pm \omega_2) = -\frac{N}{2} \sum_{j,l} \frac{e^3 \beta_{ijl} E_{oj} E_{ol} \cos(\omega_1 \pm \omega_2)t}{m^3 [\omega_0^2 - (\omega_1 \pm \omega_2)^2] (\omega_0^2 - \omega_1^2) (\omega_0^2 - \omega_2^2)}.$$

$(i=x, y, z)$

98. Пусть ось OZ совпадает с направлением цепочки. В этом же направлении распространяется волна. Уравнение движения n -го осциллятора в цепочке имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}}_n + m\omega_0^2 \mathbf{r}_n - q[(\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n) + (\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n)] = e\mathbf{E}(n),$$

где q — упругая константа.

Умножим это соотношение на e/v_0 , где v_0 — объем, приходящийся на один осциллятор. Величина $e\mathbf{r}_n/v_0 = \mathbf{P}_n$ представляет собой дипольный момент единицы объема. Тогда уравнение движения принимает вид

$$m\ddot{\mathbf{P}}_n + m\omega_0^2 \mathbf{P}_n - q[(\mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{P}_n) + (\mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{P}_n)] = \frac{e^2 \mathbf{E}_n}{v_0}.$$

Если длина волны намного больше периода цепочки, то удельные дипольные моменты \mathbf{P}_n являются медленноменяющимися функциями. В этом случае уравнение можно переписать так

$$m\ddot{\mathbf{P}}(z) + m\omega_0^2\mathbf{P}(z) - qa^2 \frac{d^2\mathbf{P}(z)}{dz^2} = \frac{e^2}{v_0} \mathbf{E}(z), \quad (1)$$

где a — период цепочки.

Это уравнение следует решить совместно с уравнением для электрического поля

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\varepsilon_0 c^2 \partial t^2}. \quad (2)$$

Ищем решение уравнений (1), (2) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_0 e^{+ikz - i\omega t}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{+ikz - i\omega t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя формулы (3) в уравнения (1), (2), получаем

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = - \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{q}{m} k^2 a^2},$$

где $\alpha = \frac{\omega^2 e^2}{\varepsilon_0 m c^2 v_0}$. Отсюда

$$k = \pm \left(\frac{q \frac{\omega^2 a^2}{c^2 m} - \omega_0^2 + \omega^2 \pm \sqrt{\left(\frac{q \omega^2 a^2}{c^2 m} - \omega_0^2 + \omega^2 \right)^2 + 4\alpha \frac{q a^2}{m}} \right)^{1/2} \frac{1}{2q a^2 / m}.$$

Таким образом, при данной частоте существуют четыре волновых числа (a , следовательно, и четыре показателя преломления, связанные с k соотношением $n = \frac{c}{\omega} k$). Две волны движутся в одном направлении, две — с теми же показателями преломления, в противоположном. В одном и том же направлении при зафиксированной частоте в изотропной среде могут распространяться волны с разными показателями преломления. Это возможно в средах, характеризующихся так называемой пространственной дисперсией, когда диэлектрическая проницаемость зависит не только от частоты, но и от волнового вектора света.

99. Направим ось OZ вдоль волновода. Тогда для бегущей волны $E \sim e^{ikz}$, $H \sim e^{ikz}$. Компонента магнитного поля вдоль направления движения волны ТЕ-волн удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \gamma^2 H_z = 0,$$

где $\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$, с граничными условиями

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$$

при $x=0$ и $x=a$, $\bar{y}=0$ и $\bar{y}=b$.

Решение этого уравнения имеет вид

$$H_{z_{mn}}(x, y) = H_0 \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b},$$

где n и m — целые числа,

$$\gamma^2 \rightarrow \gamma_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right).$$

При $a > b$ граничная частота равна $\omega_{01} = \frac{\pi c}{a}$, при $a < b$ $\omega_{01} = \frac{\pi c}{b}$.

Для ТН-волны

$$E_z(x, y) = E_0 \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y.$$

100. Коэффициент затухания равен

$$\alpha = 2\varepsilon_0 \left(\frac{\omega \mu}{2\sigma^*} \right)^{1/2} \frac{\pi^2 \left(b \frac{m^2}{a^2} + a \frac{n^2}{b^2} \right)}{\gamma_{mn}^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma_{mn}^2 \right)^{1/2}}.$$

101. Для ТН-волн

$$E_{nz} = E_0 \mathcal{J}_n(\gamma r) \begin{cases} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi, \end{cases}$$

где \mathcal{J} — функция Бесселя, n — целое число; γ определяется из условия

$$\mathcal{J}_n(\gamma R) = 0.$$

Для ТЕ-волн

$$H_{nz} = H_0 \mathcal{J}_n(\gamma r) \begin{cases} \sin n\varphi, \\ \cos n\varphi, \end{cases}$$

где γ находится из условия

$$\mathcal{J}'_n(\gamma R) = 0.$$

Закон дисперсии для ТЕ- и ТН-волн определяется так

$$k = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2 \right)^{1/2}.$$

103. Решая уравнение Максвелла вне и внутри волновода и связывая эти два решения на границе, получаем условия

$$\frac{\mathcal{J}'_1(\gamma R)}{\gamma \mathcal{J}'_0(\gamma R)} + \frac{K_1(\beta R)}{\beta K_0(\beta R)} = 0, \quad (1)$$

$$\gamma^2 + \beta^2 = (\varepsilon_r - 1) \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (2)$$

где $\frac{\varepsilon_r \omega^2}{c^2} - k^2 = \gamma^2$, $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = -\beta^2$.

На рис. 55 приведено графическое решение уравнений (1) и (2). При частоте ω , меньшей некоторой величины, кривые (1) и (2) не пересекаются. Отсюда находится

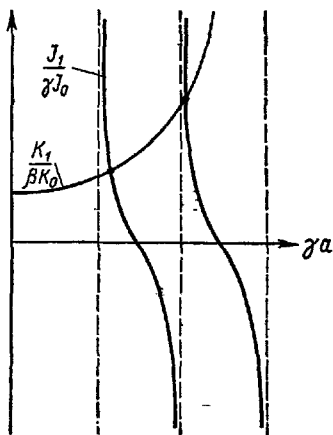


Рис. 55

граничная частота. При более низких частотах β становится мнимым и волны не распространяются вдоль волновода, а излучаются в окружающее пространство.

$$\begin{aligned} 104. \quad E_x &= E_{x0} \cos \alpha x \sin \beta y \sin \gamma z e^{-i\omega t}, \\ E_y &= E_{y0} \sin \alpha x \cos \beta y \sin \gamma z e^{-i\omega t}, \\ E_z &= E_{z0} \sin \alpha x \sin \beta y \cos \gamma z e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi m}{a}, \quad \beta = \frac{\pi n}{b}, \quad \gamma = \frac{\pi l}{C}, \\ \omega^2 &= c^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{l^2}{C^2} \right) \end{aligned}$$

(m, n и l — целые числа).

Минимальная частота

$$\omega_{\min} = c \frac{\pi}{L_i},$$

где L_i — максимальная сторона параллелепипеда.

105. Из условия, что $E_t = 0$ на торцах резонатора, следует, что решение имеет вид

$$E_z = A f(\rho, \varphi) \cos k z e^{-i\omega t},$$

где $f(\rho, \varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \gamma^2 f = 0, \quad \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2, \quad (1)$$

$k = \frac{\pi n}{d}$, n — целое число.

Разделение переменных в уравнении (1) приводит к уравнению Бесселя для радиальной координаты

$$E_z = E_0 \mathcal{J}_m(\gamma_l \rho) e^{im\varphi} \cos k z \cdot e^{-i\omega t}$$

(m — целое число, \mathcal{J}_m — функция Бесселя), γ_l находится из условия $\mathcal{J}'_m(\gamma_l R) = 0$.

Собственные частоты колебаний резонатора равны

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \gamma_l^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2}.$$

Для ТЕ-волн частоты определяются условием

$$\mathcal{J}'_m(\gamma_l R) = 0.$$

106. Пусть жидкость движется вдоль оси OX . Скорость жидкости зависит лишь от положения точки между плоскостями (координата z). Аналогично лишь от z зависит магнитное поле.

Следует решить систему уравнений (74), (75) с граничными условиями $v = 0$ и $H_x = 0$ при $z = \pm d/2$. Из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ следует

$$H_z = \text{const} = H_0.$$

Из уравнения (75) запишем z -компоненту

$$p + \frac{\mu_0 H_x^2}{2} = P(x),$$

$\frac{dp}{dx} = \frac{dP}{dx} = \text{const}$ из-за стационарности течения. Тогда из уравнений (75) — (77) получим

$$\begin{aligned} H_0 \frac{dv}{dz} + \frac{c^2 \epsilon_0}{\sigma^*} \frac{d^2 H_x}{dx^2} &= 0, \\ \eta \frac{d^2 v}{dz^2} + \mu_0 H_0 \frac{dH_x}{dz} &= \frac{dp}{dx}. \end{aligned}$$

Решения этих уравнений, удовлетворяющие граничным условиям, имеют вид

$$\begin{aligned} v &= v_0 \frac{\text{ch} \frac{d}{2d_0} - \text{ch} \frac{z}{d_0}}{\text{ch} \frac{d}{2d_0} - 1}, \\ H_x &= -v_0 4\pi \epsilon_0 \sqrt{\sigma^* \eta} \frac{\frac{2z}{d} \text{sh} \frac{d}{2d_0} - \text{sh} \frac{z}{d_0}}{\text{ch} \frac{d}{2d_0} - 1}, \end{aligned}$$

где $d_0 = \frac{1}{H_0} \sqrt{\frac{\eta}{\sigma^* \mu_0}}$, v_0 — скорость жидкости при $z = 0$.

При слабых полях ($d \ll d_0$)

$$v = v_0 \left(1 - \frac{4z^2}{d^2} \right).$$

Такой результат получается в обычной немагнитной гидродинамике.

В случае сильных полей ($d \gg d_0$)

$$v = v_0 \left(1 - e^{-\left(\frac{d}{2} - |z|\right) \frac{1}{d_0}} \right).$$

107. Уравнение (75) дает

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu_0 \sigma H_0 (E_0 - \mu_0 H_0 v) + \eta \frac{d^2 v}{dz^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\mu_0 \sigma H_x (E_0 - \mu_0 H_0 v). \quad (3)$$

Из условия отсутствия градиента давления вдоль оси Ox следует

$$\frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{1}{d_0^2} v = \frac{1}{d_0^2} \frac{E_0}{\mu_0 H_0}.$$

Решение этого уравнения с граничными условиями $v=0$ при $z=0$ и $v=v_0$ при $z=d$ имеет вид

$$v(z) = \frac{v_0}{\operatorname{sh} \frac{d}{d_0}} \operatorname{sh} \frac{z}{d_0} + \frac{E_0}{\mu_0 H_0} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{d-z}{d_0} + \operatorname{sh} \frac{z}{d_0}}{\operatorname{sh} \frac{d}{d_0}} \right].$$

Из уравнения (3) получим

$$H_x(z) = H_0 \frac{\sigma d v_0 d_0 \left[\operatorname{ch} \frac{z}{2d_0} - \operatorname{ch} \left(\frac{d}{2d_0} - \frac{z}{d_0} \right) \right]}{2 \operatorname{sh} \frac{d}{2d_0}}.$$

При $d_0 \gg d$ (слабые поля)

$$v = \frac{v_0 z}{d},$$

при $d_0 \ll d$

$$v = \frac{E_0}{\mu_0 H_0} - \frac{E_0}{\mu_0 H_0} e^{-z/d_0}.$$

108. Уравнение непрерывности можно записать через концентрацию электронов n так

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Уравнение движения электрона без учета градиента давления имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \frac{e}{m} \mathbf{E}. \quad (2)$$

Из уравнений Максвелла следует

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{e}{\varepsilon_0} (n - n_0), \quad (3)$$

где n_0 — концентрация ионов и средняя концентрация электронов.

Предположим, что движение зарядов таково, что изменение концентрации мало, т. е.

$$n - n_0 = \Delta n \ll n_0.$$

В этом приближении уравнения (1)–(3) перепишутся так

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{e}{\varepsilon_0} \Delta n,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{e}{m} \mathbf{E}.$$

Применим операцию дивергенции к левой и правой частям последнего уравнения. Исключив $\operatorname{div} \mathbf{v}$ и $\operatorname{div} \mathbf{E}$ из двух предыдущих уравнений, получим

$$\frac{\partial^2 \Delta n}{\partial t^2} + \frac{e^2}{m \varepsilon_0} n_0 \Delta n = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\Delta n = \Delta n_0 e^{-i\omega_p t},$$

где $\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m}}$ — плазменная частота колебаний.

111. Согласно закону сложения скоростей в специальной теории относительности

$$u = \frac{v + \frac{c}{n}}{1 + \frac{v}{cn}}.$$

При $v \ll c$

$$u = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

$$112. E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m^3 c^2}.$$

113. Предположим, что поле направлено вдоль оси OX , а ось OY выбираем так, чтобы движение частицы проходило в плоскости xy при $z=0$. Тогда уравнения движения частицы записываются так

$$\frac{dp_x}{dt} = e | \mathbf{E} |, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0.$$

Интегрируя уравнения движения, получаем

$$p_x = e | \mathbf{E} | t, \quad p_y = p_0.$$

Из соотношения $v_x = \frac{p_x c^2}{E}$, где E — энергия частицы, следует

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e | \mathbf{E} | t c^2}{[E_0^2 + c^2 p_0^2 + (ce | \mathbf{E} | t)^2]^{1/2}} = \frac{e | \mathbf{E} | t c^2}{(E_{01}^2 + (c | \mathbf{E} | et)^2)^{1/2}};$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_0 c^2}{[E_{01}^2 + (ce | \mathbf{E} | t)^2]^{1/2}};$$

здесь $E_0 = mc^2$, $E_{01} = c(m^2 c^2 + p_0^2)^{1/2}$. Отсюда

$$x = \frac{1}{e | \mathbf{E} |} [E_{01}^2 + (c | \mathbf{E} | et)^2]^{1/2} + x_0,$$

$$y = \frac{p_0 c}{e | \mathbf{E} |} \ln \left[t + \sqrt{t^2 + \left(\frac{E_{01}}{ce | \mathbf{E} |} \right)^2} \right] + y_0.$$

При условии $E_0 \gg ce | \mathbf{E} | t$

$$x = \frac{e | \mathbf{E} |}{2m} t^2 + x_0, \quad y = \frac{p_0}{m} t.$$

115. В цилиндрической системе координат уравнение движения частицы имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{mr\dot{\varphi}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{e_1 e_2 r}{(r^2+z^2)^{3/2}}, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mz}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = -\frac{ze_1 e_2}{r^3}, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = -\frac{e_1 e_2 \dot{r}}{r^2}. \quad (4)$$

Уравнению (3) можно удовлетворить, положив $z=0$. Это соответствует движению частицы в плоскости $z=0$. Оставшиеся уравнения можно переписать так:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mr}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{mr\dot{\varphi}^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{e_1 e_2}{r^2}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{e_1 e_2 \dot{r}}{r^2}.$$

Из уравнения (2) следует один интеграл движения—закон сохранения момента количества движения:

$$\frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = L = \text{const};$$

из уравнения (4)—закон сохранения энергии:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{e_1 e_2}{r} = E = \text{const}.$$

Исключая t из первого уравнения, получаем

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + (1-\rho^2) \frac{1}{r} = \frac{e_1 e_2 E}{L^2 c^2},$$

где $\rho = \frac{e_1 e_2}{Lc}$.

После интегрирования уравнения получим

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \sqrt{1-\rho^2} (\varphi - \varphi_0)},$$

где $p = \frac{L^2 c^2 - e_1^2 e_2^2}{e_1 e_2 E}$, ε и φ_0 —постоянные интегрирования. Выбрав соответствующим образом начало отсчета, φ_0 можно положить равным нулю.

Траектория движения частицы незамкнута. Ее можно получить медленным вращением эллиптической траектории в своей плоскости.

$$116. E_1 = c^2 \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad E_2 = c^2 \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}.$$

$$117. T_\mu = 4 M\varepsilon; \quad T_\nu = 29,8 M\varepsilon.$$

118. Пусть системы движутся в направлении OX . Учитывая, что P_x, P_y, P_z и $i \frac{E}{c}$ представляют собой компоненты 4-вектора, из закона преобразования векторов (79) получаем

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{v}{c^2} E}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \\ E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

119. Пусть распадающаяся частица движется вдоль оси OX , частица с энергией E_1 — под углом ϑ_1 к оси OX . Тогда из решения предыдущей задачи следует

$$\cos \vartheta_1 = \frac{p_{1x}}{p_1} = \frac{E_1 - E_{01} (1 - v^2/c^2)^{1/2}}{v \left(\frac{E_1^2}{c^2} - m_1^2 c^2 \right)^{1/2}},$$

где E_{01} — энергия частицы в лабораторной системе, m_1 — масса частицы. Аналогичная зависимость получается для ϑ_2 .

120. $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{u' (1 - v^2/c^2)^{1/2} \sin \vartheta}{v + u' \cos \vartheta}$, где ϑ — угол между направлением движения частицы и осью OX .

$$121. \cos \vartheta_1 = \frac{E_1 (E_{01} + m_1 c^2) - E_{01} m_2 c^2 - m_1^2 c^4}{c^2 p_0 p_1},$$

$$\cos \vartheta_2 = \frac{(E_{01} + m_2 c^2) (E_2 - m_2 c^2)}{c^2 p_0 p_2},$$

где $p_0 = \frac{1}{c} (E_{01}^2 - m_1^2 c^4)^{1/2}$.

$$122. \omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\hbar \omega_0}{mc^2} (1 - \cos \vartheta)},$$

где ω_0 — частота фотона до столкновения, \hbar — постоянная Планка.

$$123. \omega = \frac{\Delta E}{\hbar} \left(1 - \frac{\Delta E}{2mc^2} \right).$$

125. Рассмотрим систему координат, движущуюся вместе с зеркалом. Предположим, что ось OX направлена по скорости движения зеркала (противоположно нормали). В этой системе выполняются законы отражения для неподвижной среды, т. е. частота не меняется при отражении. Запишем законы отражения:

$$k'_x = -k_{1x}, \quad k'_y = k_{1y}, \quad k'_z = k_{1z}, \\ \omega' = \omega_1,$$

где k' и ω' — соответственно волновой вектор и частота падающей на зеркало волны, k_1 и ω_1 — то же для отраженной. Так как четыре числа k_x, k_y, k_z и $i \frac{\omega}{c}$ представляют собой компоненты 4-вектора, то воспользовавшись законом преобразования 4-векторов, получим

соотношения, справедливые в системе, в которой зеркало движется:

$$\begin{aligned}k_x + k_{1x} &= \frac{B}{c} (\omega + \omega_1), \\k_x - k_{1x} &= \frac{1}{v} (\omega - \omega_1), \\k_y &= k_{1y}, \\k_z &= k_{1z}.\end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega \frac{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \vartheta}{1 - \beta^2}, \\ \cos \vartheta_1 &= \frac{2\beta - (1 + \beta^2) \cos \vartheta}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \vartheta},\end{aligned}$$

где ϑ и ϑ_1 — углы между направлением движения зеркала и соответственно направлениями распространения падающей и отраженной волн.

127. Если одна такая система найдена, то любая другая, движущаяся по отношению к ней вдоль \mathbf{E} и \mathbf{H} , также будет обладать этим свойством. Поэтому достаточно найти одну из систем, скорость которой перпендикулярна к обоим полям и, предположим, направлена вдоль оси OX . В этой системе из параллельности полей следует $E'_x = H'_x = 0$, $E'_y H'_z - E'_z H'_y = 0$. Из закона преобразования полей найдем

$$\frac{v/c}{1 + v^2/c^2} = \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}.$$

$$\begin{aligned}129. \quad T_{xx} &= \frac{1}{1 - v^2/c^2} \left(T'_{xx} - \frac{2iv}{c} T'_{4x} - \frac{v^2}{c^2} T'_{44} \right), \\ T'_{yy} &= T_{yy}, \quad T'_{yz} = T_{yz}, \\ T_{xy} &= \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \left(T'_{xy} - \frac{iv}{c} T'_{4y} \right), \\ T_{4x} &= \frac{i}{c(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \left[-icT'_{4x} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) - vT'_{44} + vT'_{1x} \right], \\ T_{4y} &= \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \left(T'_{4y} + \frac{iv}{c} T'_{xy} \right), \\ T_{44} &= \frac{1}{1 - v^2/c^2} \left(T'_{44} + 2 \frac{iv}{c} T'_{4x} - \frac{v^2}{c^2} T'_{xx} \right).\end{aligned}$$

$$130. \quad \mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{H}'_{\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \\ \mathbf{H}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{H}_{\perp} - \varepsilon_0 [\mathbf{v}, \mathbf{E}]}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}.\end{aligned}$$

Здесь индексы « \parallel » и « \perp » означают параллельность и перпендикулярность к скорости \mathbf{v} .

$$134. \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}_\perp,$$

где \mathbf{j}_\perp — поперечная составляющая вектора плотности тока, равная

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int \frac{\mathbf{j}(r')}{|r-r'|} dV'.$$

135. Векторный потенциал равен

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(r') e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} dV'.$$

В случае больших расстояний от антенны получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_3 I \frac{e^{ikr} \mu_0}{4\pi r} \int_{-d/2}^{d/2} \sin\left(k \frac{d}{2} - k|z'|\right) e^{-ikz' \cos \vartheta} dz',$$

где ϑ — угол между направлением излучения и направлением антенны; после интегрирования получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_3 \frac{\mu_0 I e^{ikr}}{2\pi r} \frac{\cos \frac{kd}{2} \cos \vartheta - \cos \frac{kd}{2}}{\sin^2 \vartheta},$$

$$H = \frac{\omega}{c\mu_0} A_3 \sin \vartheta.$$

Средняя во времени мощность, излучаемая в единицу телесного угла $d\Omega$, равна

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (r^2 \mathbf{n} \cdot [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}^*]) = \frac{I^2}{8\pi^2 c \varepsilon_0} \left| \frac{\cos \left(\frac{kd}{2} \cos \vartheta \right) - \cos \frac{kd}{2}}{\sin \vartheta} \right|^2.$$

В частном случае, когда в антенне укладывается несколько полуволн,

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{I^2}{8\pi^2} \begin{cases} \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin^2 \vartheta} & (kd = \pi), \\ \frac{4 \cos^4 \left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin^2 \vartheta} & (kd = 2\pi). \end{cases}$$

$$136. J = \frac{I_0^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left[\int_0^{2kl} \frac{1 - \cos u}{u} du - \frac{1}{2kl} \int_0^{2kl} (1 - \cos u) du \right].$$

138. В цилиндрической системе координат напряженность магнитного поля падающей волны можно записать так:

$$H_z = H_{z0} e^{i(k\rho \cos \varphi - \omega t)}.$$

Плоскую волну можно представить в виде разложения по функциям Бесселя:

$$H_z = H_{z0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k\rho) i^m e^{i(m\varphi - \omega t)}.$$

Из симметрии задачи следует, что в рассеянной волне напряженность магнитного поля также направлена вдоль оси цилиндра. Будем искать ее в виде ряда по таким цилиндрическим функциям, которые обеспечивают асимптотическое поведение рассеянной волны при больших значениях ρ :

$$H \sim \rho^{-1/2} e^{ik\rho}.$$

Таковыми функциями являются функции Ханкеля $H_m(k\rho)$. Тогда для рассеянной волны

$$H_z' = H_{z0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m H_m(k\rho) e^{i(m\varphi - \omega t)}.$$

Граничным условием является равенство $H_z = 0$ на цилиндре, для данной задачи оно эквивалентно условию $E_\varphi = 0$.

Из уравнения $\text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ следует

$$E_\varphi = -\frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}.$$

Из граничных условий получаем

$$a_m = (-i)^m \frac{J_m'(kR)}{H_m'(kR)}.$$

При больших значениях ρ

$$H_m(k\rho) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} e^{i(k\rho - (2m+1)\frac{\pi}{4})}.$$

Тогда

$$H_z = H_{z0} \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} e^{i(k\rho - \omega t)} \sum_m a_m e^{i\left(m\varphi - \frac{2m+1}{4}\pi\right)},$$

$$E_\varphi = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_z.$$

Средний во времени поток энергии в рассеянной волне равен

$$|S| = \frac{1}{2} \text{Re } E_\varphi H_z^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} |H_z^*|^2.$$

Интенсивность излучения на единицу длины цилиндра

$$J = \int_0^{2\pi} |S| \rho d\varphi = 2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} |H_{z0}|^2 \cdot \frac{1}{k} \sum_m \left| \frac{J_m'(kR)}{H_m'(kR)} \right|^2.$$

139. В системе центра инерции дипольный момент системы равен

$$\mathbf{p} = e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2 = \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \mathbf{r},$$

где m_1 и m_2 — массы частиц, μ — приведенная масса, \mathbf{r} — относительная координата частиц.

Для одинаковых частиц $e_1 = e_2$, $m_1 = m_2$, тогда $\mathbf{p} = 0$, и следовательно, отсутствует дипольное излучение, пропорциональное $|\mathbf{p}|^2$.

140. Интенсивность дипольного излучения вычисляется по формуле (73), где $\mathbf{p} = e\mathbf{r}$. Исключаем r , пользуясь уравнением движения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{e^2 \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Отсюда

$$J = \frac{e^6}{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 a^4 m^2} = \frac{64\pi\epsilon_0}{3} \frac{|E|^4}{m^2 c^3 e^2},$$

где E — энергия частицы.

141. Если в течение периода энергия частицы меняется незначительно, то из задачи 140 следует

$$\frac{dE}{dt} = \frac{64\pi\epsilon_0}{3} \frac{|E|^4}{m^2 c^3 e^2},$$

отсюда

$$\tau = \frac{3m^2 c^3 e^2}{4\pi\epsilon_0 48 |E|^3}.$$

142. Интенсивность излучения равна

$$J = \frac{\mu^2}{6\pi c^3 \epsilon_0} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \ddot{r}^2 = \frac{2e_1^2 e_2^2}{(4\pi\epsilon_0)^3 3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{1}{r^4},$$

где μ — приведенная масса.

Усредним интенсивность по времени, используя уравнение траектории частицы $r(\varphi)$.

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + \epsilon \cos \varphi},$$

где $a = \frac{e_1 e_2}{8 |E| \pi \epsilon_0}$ — большая ось эллипса, ϵ — эксцентриситет эллипса, определяемый по формуле

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{2 |E| M^2}{\mu a^2}},$$

здесь $|E|$ — энергия частицы, M — момент количества движения.

После усреднения получается

$$J = \frac{2^{3/2}}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{\mu^{5/2} e_1^3 e_2^3}{(4\pi\epsilon_0)^4 M^5} |E|^{3/2} \left(3 - \frac{32\pi^2 e_0^2 |E| M^2}{\mu e_1^2 e_2^2} \right).$$

143. Зависимость электромагнитного поля от времени t можно записать так:

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ E_0 e^{-\frac{t}{\tau} - i\omega_0 t} & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Разложим электромагнитное поле в интеграл Фурье

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

где

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{+i\omega t} dt = \frac{E_0}{2\pi \left[\frac{1}{\tau} - i(\omega_0 - \omega) \right]}.$$

Интенсивность излучения пропорциональна модулю квадрата компоненты Фурье:

$$J(\omega) = \frac{J_0}{\pi \tau \left[\frac{1}{\tau^2} + (\omega_0 - \omega)^2 \right]},$$

где

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} J(\omega) d\omega.$$

Полуширина линии определяется из условия

$$J\left(\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2}\right) = \frac{1}{2} J(\omega_0).$$

Отсюда

$$\Delta\omega = \frac{2}{\tau}.$$

144. Эллиптически поляризованную волну запишем так

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \cos \omega t + \mathbf{B} \sin \omega t,$$

где $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$. Тогда дифференциальное эффективное сечение рассеяния равно

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \frac{[\mathbf{A}\mathbf{n}]^2 + [\mathbf{B}\mathbf{n}]^2}{A^2 + B^2} d\Omega,$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении рассеяния.

145. Напряженности электрического и магнитного полей данной системы ищем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{01} e^{iq_x x + iq_y y - ik_z z - i\omega t} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_{01} e^{iq_x x + iq_y y - ik_z z - i\omega t} \end{aligned} \right\} \text{при } z < 0,$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{02} e^{iq_x x + iq_y y + ik_z z - i\omega t} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_{02} e^{iq_x x + iq_y y + ik_z z - i\omega t} \end{aligned} \right\} \text{при } z > 0,$$

где

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - q_x^2 - q_y^2}.$$

Выберем систему координат так, чтобы ось OY была направлена вдоль i . В этом случае пользуясь граничными условиями (25), (26), а также связью между полями \mathbf{E} и \mathbf{H} в плоской волне, можно получить

$$\begin{aligned} H_{01x} &= \frac{i}{2}, \quad H_{01y} = H_{01z} = 0, \\ E_{01x} &= 0, \quad E_{01y} = \frac{k_z}{2\omega\epsilon_0} i, \quad E_{01z} = -\frac{q_y}{2\omega\epsilon_0} i, \\ H_{02x} &= -\frac{i}{2}, \quad H_{02y} = H_{02z} = 0, \\ E_{02x} &= 0, \quad E_{02y} = \frac{k_z}{2\omega\epsilon_0} i; \quad E_{02z} = \frac{q_y}{2\omega\epsilon_0} i. \end{aligned}$$

Излучение электромагнитных волн в окружающее пространство происходит, если $\frac{\omega^2}{c^2} > q_x^2 + q_y^2$. В противном случае электромагнитное поле существует лишь вблизи плоскости и сопровождает ток.

146. Электрическое поле колеблющегося диполя индуцирует в частице дипольный момент, который также излучает электромагнитные волны. При условии $d \ll \lambda$ напряженность электрического поля, созданного в точке с радиусом-вектором \mathbf{d} , равна

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{d}) = \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{d})\mathbf{d}}{4\pi\epsilon_0 d^3} - \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 d^3}.$$

При условии $\mathbf{p} \perp \mathbf{d}$

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{d}) = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 d^3}.$$

Это поле создает в частице диполь, равный

$$\mathbf{p}_1 = \epsilon_0 \beta \mathbf{E}_1.$$

Результирующее поле состоит из полей, созданных диполями \mathbf{p} и \mathbf{p}_1 . На больших расстояниях от системы ($r \gg \lambda$):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) &= -\frac{\omega^2 [(\mathbf{p}, \mathbf{n}), \mathbf{n}]}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}, & \mathbf{H}_1 &= -\frac{\omega^2}{4\pi c r} [\mathbf{p}\mathbf{n}]; \\ \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) &= \frac{\omega^2 \beta}{(4\pi)^2 c^2 \epsilon_0 r d^3} [(\mathbf{p}, \mathbf{n}), \mathbf{n}], & \mathbf{H}_2 &= \frac{\omega^2 \beta}{(4\pi)^2 c r d^3} [\mathbf{p}\mathbf{n}], \end{aligned}$$

здесь $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

Интенсивность излучения электромагнитных волн равна

$$J = \frac{p^2 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(1 - \frac{\beta}{4\pi d^3}\right)^2.$$

147. Пусть диполь расположен в начале координат. Ищем поле диполя в следующем виде:

в среде 1

$$\mathbf{H}_1 = \frac{[\dot{\mathbf{p}}, \mathbf{n}]}{4\pi cr} + \frac{[\ddot{\mathbf{p}}_1, \mathbf{n}_1]}{4\pi cr_1},$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{-[\dot{\mathbf{p}}, \mathbf{n}] \mathbf{n}}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\epsilon_1} c^2 r} + \frac{[[\mathbf{p}_1, \mathbf{n}_1] \mathbf{n}_1]}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\epsilon_1} c^2 r}$$

и в среде 2

$$\mathbf{H}_2 = \frac{[\ddot{\mathbf{p}}_2, \mathbf{n}]}{4\pi cr},$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{[[\mathbf{p}_2, \mathbf{n}] \mathbf{n}]}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\epsilon_2} c^2 r},$$

где r — расстояние от диполя до точки наблюдения, \mathbf{n} — единичный вектор к точке наблюдения, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - 2\mathbf{d}$, $\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{r}$, \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 находятся из граничных условий:

$$\frac{[\dot{\mathbf{p}}, \mathbf{n}] \mathbf{t} + [\mathbf{p}_1, \mathbf{n}_1] \mathbf{t}}{\sqrt{\epsilon_2}} = \frac{[\ddot{\mathbf{p}}_2, \mathbf{n}] \mathbf{t}}{\sqrt{\epsilon_1}} + \frac{[[\mathbf{p}_1, \mathbf{n}_1] \mathbf{n}_1] \mathbf{t}}{\sqrt{\epsilon_1}},$$

где \mathbf{t} — единичный вектор в плоскости границы раздела. Пусть последняя совпадает с плоскостью xy . Решая эти уравнения относительно \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 , находим

$$\rho_{1x} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \rho_x, \quad \rho_{1y} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \rho_y,$$

$$\rho_{1z} = \frac{\sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \rho_z, \quad \rho_2 = \frac{2\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \rho.$$

148. При вычислении длинноволновой части спектра можно считать, что отражение происходит мгновенно, и для определения поля достаточно воспользоваться формулами (72) и (73).

При мгновенном изменении скорости зависимость скорости от времени записывается так:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad \text{при } t < 0,$$

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} - v_z \mathbf{k} \quad \text{при } t > 0.$$

Поэтому

$$\ddot{\mathbf{p}} = e\dot{\mathbf{v}} = 2ev_z \delta(t) \mathbf{k},$$

где \mathbf{k} — орт в направлении, перпендикулярном плоскости. На больших расстояниях от заряда согласно (73)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\delta(t)}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} v_z [[\mathbf{k}, \mathbf{n}] \mathbf{n}].$$

Поскольку

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega,$$

находим

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt = \frac{ev_z}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} [[\mathbf{kn}] \mathbf{n}].$$

Энергия, излученная в единицу телесного угла в единичном интервале частот, равна

$$\frac{dJ(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 v^2}{4\pi^2 c^3 \epsilon_0} \sin^2 \vartheta,$$

где ϑ — угол между направлением излучения и нормалью к поверхности.

Максимум излучения лежит в плоскости, от которой происходит отражение. Излучение отсутствует в направлении, нормальном к этой плоскости.

Энергия, излученная в единичном интервале частот по всем направлениям, равна

$$J(\omega) = \frac{2e^2 v^2}{3\pi^2 c^3 \epsilon_0}.$$

Эта энергия в области малых частот не зависит от частоты.

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

1. При движении частицы ее импульс p остается постоянным и равен $-p$ при отражении частицы от стенки. Следовательно, условие Бора — Зоммерфельда дает

$$\oint p dx = 2p \int_0^a dx = nh,$$

т. е.

$$p_n = \frac{nh}{2a}; \quad E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8ma^2}.$$

2. Воспользовавшись интегралом энергии

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2},$$

где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — частота колебаний осциллятора, A — амплитуда его колебаний, находим

$$p = \sqrt{m^2 \omega^2 (A^2 - x^2)},$$

и из условия квантования Бора — Зоммерфельда, подставляя $x = A \cos \varphi$, получаем

$$\oint p dx = mA\omega \oint \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} dx = mA^2\omega \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = mA^2\omega\pi = nh.$$

Следовательно, разрешенные амплитуды и энергии будут

$$A_n^2 = \frac{n\hbar}{m\omega}, \quad L_n = \frac{mA_n^2\omega^2}{2} = n\hbar\omega.$$

3. Для малых колебаний разложим $V(x_1, x_2, x_3)$ в ряд, ограничиваясь членами второго порядка малости.

$$V(x_1, x_2, x_3) = V(0) + \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^3 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} \right)_0 \cdot x_i x_k.$$

Переходя к нормальным координатам, можно написать функцию Гамильтона $\mathcal{H}(p_i, q_i)$ в виде

$$\mathcal{H}(p_i, q_i) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{m_i\omega_i^2 q_i^2}{2} \right).$$

Задача сведена к трем независимым осцилляторам, движение которых может быть проквантовано так же, как в задаче 2, но будет три условия Бора—Зоммерфельда:

$$\oint p_i dq_i = n_i \hbar \quad (i = 1, 2, 3).$$

Выразив q_i и p_i как функции времени, т. е.

$$q_i = A_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \quad \text{и} \quad p_i = m_i \dot{q}_i, \quad dq_i = \dot{q}_i dt,$$

подставим эти выражения в интеграл и получим

$$\oint p_i dq_i = m_i A_i^2 \omega_i^2 \int_0^{T_i} \cos^2(\omega_i t + \alpha_i) dt = m_i \frac{\omega_i^2 T_i}{2} A_i^2; \quad T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}.$$

Отсюда

$$A_i^2 = \frac{n_i \hbar}{m_i \omega_i \pi}$$

и уровни энергии частицы

$$E = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i A_i^2 \omega_i^2}{2} = \sum_{i=1}^3 n_i \hbar \omega_i.$$

4. Частица характеризуется одной координатой φ . Ее обобщенный импульс в поле центральных сил

$$p_\varphi = \frac{1}{2} \frac{\partial (mr^2 \dot{\varphi}^2)}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$

и условие Бора—Зоммерфельда дает

$$\oint p_\varphi d\varphi = 2\pi p_\varphi = n\hbar, \quad E_n = \frac{p_\varphi^2}{2J} = \frac{n^2 \hbar^2}{2J},$$

где $J = mr^2$ —момент инерции частицы.

б. Аналогично задаче 4

$$mr^2\dot{\varphi} = n\hbar.$$

Подставляя $v = r\dot{\varphi}$ в уравнение $\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$, получаем

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{me^2}, \quad E_n = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{r} = -\frac{me^4}{2\hbar^2n^2}.$$

6. Движение электрона характеризуется двумя обобщенными координатами r , φ и импульсами $p_r = mr\dot{r}$, $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$. В поле центральных сил существуют интегралы площадей

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = L$$

и энергии

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{Ze^2}{r}.$$

Из последнего соотношения находим

$$p_r = \sqrt{2m \left[E + \frac{Ze^2}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right]}.$$

Так как в экстремальных для r точках $\dot{r} = 0$, то r_{\min} и r_{\max} определяются как корни подкоренного выражения. Условия Бора—Зоммерфельда дают

$$\oint p_\varphi d\varphi = L \cdot 2\pi = n\hbar, \quad 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} p_r dr = n\hbar.$$

Второй интеграл вида $I = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}} dr$, где $\sqrt{A} = +i\sqrt{-2mE}$ ($E < 0$) и $\sqrt{C} = -iL = -in\hbar$, вычислен в приложении 4 [см формулу (II)].

$$I = \pi i \left(\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C} \right).$$

Вводя $n = n_\varphi + n_r$, после подстановки получаем

$$2\pi i \left(\frac{me^2}{i\sqrt{2m|E|}} + in_r\hbar \right) = n_r\hbar$$

и

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2n^2}.$$

7. Обозначив координаты и массу ядра \mathbf{r}_1 , m_1 , а электрона \mathbf{r}_2 , m_2 , можно разделить переменные, вводя $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$.

Центр тяжести, радиус-вектор которого \mathbf{R} , движется как свободная частица с массой $M = m_1 + m_2$ в объеме $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$. Задача об относительном движении электрона сводится к задаче, в которой массу электрона m_2 следует заменить его при-

веденной массой $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Импульсы центра тяжести P_x, P_y, P_z квантуются так же, как в задаче 1. Следовательно,

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{P^2}{2M} + E_{\text{отн}} = \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right) - \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}.$$

8. Координата z и импульс p связаны интегралом энергии $E = \frac{p^2}{2m} + mgz = mgH$, из которого находим

$$p = \pm \sqrt{2m(E - mgz)}.$$

Условие квантования

$$\oint p dz = 2 \int_0^H \sqrt{2m(E - mgz)} dz = nh$$

позволяет получить

$$H_n = \left(\frac{3nh}{4\sqrt{2}m} \right)^{2/3} \quad \text{и} \quad E_n = \left(\frac{3m^2 g^3 nh}{4\sqrt{2}} \right)^{2/3}.$$

9. Применяя двукратно оператор к произвольной функции ψ , получим

$$\left(\frac{d}{dx} + x \right)^2 \psi = \left(\frac{d}{dx} + x \right) \left(\frac{d\psi}{dx} + x\psi \right) = \frac{d^2\psi}{dx^2} + 2x \frac{d\psi}{dx} + x^2\psi + \psi,$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{d}{dx} + x \right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} + x^2 + 1.$$

$$10. \left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{x} \right)^3 = \frac{d^3}{dx^3} + \frac{3}{x} \frac{d^2}{dx^2}.$$

$$11. \left(x \frac{d}{dx} \right)^2 = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx}; \quad \left(\frac{d}{dx} x \right)^2 = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + 3x \frac{d}{dx} + 1.$$

12. Очевидно, что

$$[i\hbar\nabla + \mathbf{A}]^2 \psi = (i\hbar\nabla + \mathbf{A})(i\hbar\nabla\psi + \mathbf{A}\psi) = -\hbar^2\Delta\psi + i\hbar(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla)\psi + \mathbf{A}^2\psi.$$

Учитывая, что $\nabla \cdot \mathbf{A}\psi = \mathbf{A} \cdot \nabla\psi + \text{div } \mathbf{A} \cdot \psi$, можем написать

$$(i\hbar\nabla + \mathbf{A})^2 = -\hbar^2\Delta + 2i\hbar(\mathbf{A} \cdot \nabla) + i\hbar \text{div } \mathbf{A} + \mathbf{A}^2.$$

13. Действуя оператором $\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}$ на произвольную функцию, имеем

$$\left(\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} \right) \psi = \frac{d}{dx}(x\psi) - x\frac{d\psi}{dx} = \psi,$$

т. е.

$$\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} = 1.$$

$$14. \Delta x - x\Delta = 2\frac{\partial}{\partial x}.$$

15. Определим оператор \hat{T}_a равенством

$$\hat{T}_a \psi(x) = \psi(x+a)$$

и представим $\psi(x+a)$ в виде ряда по степеням a :

$$\psi(x+a) = \psi(x) + a \frac{d\psi}{dx} + \frac{a^2}{2!} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \psi(x).$$

Замечая, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, можем записать

$$\hat{T}_a = e^{a \frac{d}{dx}}.$$

16. Подобно задаче 15, определяем \hat{T}_a равенством

$$\hat{T}_a \psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} + \mathbf{a})$$

и, разлагая $\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a})$ в ряд вблизи точки \mathbf{r} , получаем

$$\hat{T}_a = e^{\mathbf{a} \cdot \nabla}.$$

17. По определению, $\hat{T}_\alpha \psi(\varphi) = \psi(\varphi + \alpha)$, и, представляя

$$\psi(\varphi + \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha \frac{d}{d\varphi}\right)^n}{n!} \psi(\varphi),$$

замечаем, что

$$\hat{T}_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha \frac{d}{d\varphi}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} = e^{\alpha \frac{d}{d\varphi}}.$$

18. По определению эрмитово сопряженного оператора, запишем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \frac{d\psi_2}{dx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2 \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^+ \psi_1 \right]^* dx$$

при условии, что $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1|^2 dx$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_2|^2 dx$ существуют. Следовательно, ψ_1 и ψ_2 при $x \rightarrow \pm \infty$ равны нулю. Проводя в левой части написанного равенства интегрирование по частям, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \frac{d\psi_2}{dx} dx = \psi_1^* \psi_2 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2 \frac{d\psi_1^*}{dx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2 \left(-\frac{d\psi_1}{dx}\right)^* dx,$$

т. е. $\left(\frac{d}{dx}\right)^+ = -\frac{d}{dx}$.

19. Аналогично задаче 18

$$\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right)^+ = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}.$$

20. Указание: см. задачу 18.

21. Для доказательства следует рассмотреть $\int \psi_1^* \Delta \psi_2 d\tau$, в котором ψ_1 и ψ_2 — функции, интегрируемые с квадратом модуля (см. задачу 18) и равные, следовательно, нулю на границах области интегрирования. Используя равенство

$$\varphi \operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} (\varphi \mathbf{B}) - \mathbf{B} \nabla \varphi,$$

можем написать

$$\begin{aligned} \int \psi_1^* \Delta \psi_2 d\tau &= \int \psi_1^* \operatorname{div} (\nabla \psi_2) d\tau = \int \operatorname{div} [\psi_1^* \nabla \psi_2] d\tau - \\ &- \int \nabla \psi_1^* \cdot \nabla \psi_2 d\tau = - \int \{ \operatorname{div} [\psi_2 \nabla \psi_1^*] - \psi_2 \operatorname{div} \nabla \psi_1^* \} d\tau = \int \psi_2 (\Delta \psi_1)^* d\tau. \end{aligned}$$

При этом учтено, что интегралы от дивергенций могут быть преобразованы в поверхностные, которые обращаются в нуль в силу граничных условий, наложенных на функции ψ_1 и ψ_2 .

22. Оператор \hat{T}_b^+ определяется равенством

$$\int \psi_1^*(\mathbf{r}) \hat{T}_b \psi_2(\mathbf{r}) d\tau = \int \psi_2(\mathbf{r}) [\hat{T}_b^+ \psi_1(\mathbf{r})]^* d\tau.$$

Чтобы найти его, произведем в выражении

$$I = \int \psi_1^*(\mathbf{r}) \hat{T}_b \psi_2(\mathbf{r}) d\tau = \int \psi_1^*(\mathbf{r}) \psi_2(\mathbf{r} + \mathbf{b}) d\tau$$

замену переменной $\mathbf{r} + \mathbf{b} = \mathbf{r}'$. Так как интегрирование ведется по всему пространству, то замена не скажется на пределах; после замены получим

$$I = \int \psi_1^*(\mathbf{r}' - \mathbf{b}) \psi_2(\mathbf{r}') d\tau'$$

и, поскольку $\psi_1(\mathbf{r} - \mathbf{b}) = \hat{T}_{-b} \psi_1(\mathbf{r})$, то можно написать

$$I = \int \psi_2(\mathbf{r}) \cdot [\hat{T}_{-b} \psi_1(\mathbf{r})]^* d\tau,$$

т. е. $\hat{T}_b^+ = \hat{T}_{-b}$.

23. По определению, $e^{i\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(i\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^n}{n!}$. Как было показано в задаче 19, оператор, эрмитово-сопряженный $\frac{\partial^n}{\partial \varphi^n}$, есть $(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \varphi^n}$ и, следовательно, для оператора

$$\left[\left(i \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^n \right]^\dagger = (-i)^n \left(-\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^n = \left(i \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^n$$

удовлетворяется условию самосопряженности. Таким образом, и $\left(e^{i\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi}} \right)^\dagger = e^{i\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi}}$ (если $\alpha = \alpha^*$).

24. Так как условием вещественности $f(x, y, z)$ является равенство $\hat{f} = f^*$, то доказательство очевидно.

25. Согласно определению,

$$\int \psi_1^* \hat{A} \hat{B} \psi_2 d\tau = \int \psi_2 [(\hat{A} \hat{B})^+ \psi_1]^* d\tau.$$

Рассмотрим первый интеграл; обозначив $\hat{B} \psi_2 = \psi_3$ и вводя \hat{A}^+ , можем написать

$$\int \psi_1^* \hat{A} \psi_3 d\tau = \int \psi_3 \cdot (\hat{A}^+ \psi_1)^* d\tau.$$

Обозначая $\hat{A}^+ \psi_1 = \psi_4$ и возвращаясь к ψ_2 , перепишем последнее выражение в виде, удобном для преобразования с помощью \hat{B}^+ :

$$\int \psi_3 \cdot (\hat{A}^+ \psi_1)^* d\tau = \int \psi_4^* \cdot \hat{B} \psi_2 d\tau = \int \psi_2 (\hat{B}^+ \psi_4)^* d\tau = \int \psi_2 (\hat{B}^+ \hat{A}^+ \psi_1)^* d\tau.$$

Итак,

$$(\hat{A} \hat{B})^+ = \hat{B}^+ \hat{A}^+.$$

26. Оператор, при помощи которого вычисляется среднее значение физической величины λ , должен быть самосопряженным, т. е. $\hat{L} = \hat{L}^+$. Квадрату λ таким же образом сопоставляется квадрат \hat{L} , т. е. оператор \hat{L}^2 :

$$\langle \lambda^2 \rangle = \int \psi^* \hat{L}^2 \psi d\tau.$$

Обозначая $\hat{L} \psi = \psi_1$ и пользуясь условием самосопряженности, имеем

$$\langle \lambda^2 \rangle = \int \psi^* \hat{L} \psi_1 d\tau = \int \psi_1 (\hat{L} \psi)^* d\tau = \int \psi_1 \cdot \psi_1^* d\tau \geq 0,$$

так как $|\psi_1|^2 \geq 0$.

27. Дополнив выражение $\hat{L} \hat{M}^2 - \hat{M}^2 \hat{L}$ членами $\pm \hat{M} \hat{L} \hat{M}$ и вынося в разностях общий множитель \hat{M} слева и справа за скобку, получим

$$\begin{aligned} \hat{L} \hat{M}^2 - \hat{M}^2 \hat{L} + \hat{M} \hat{L} \hat{M} - \hat{M} \hat{L} \hat{M} &= (\hat{L} \hat{M} - \hat{M} \hat{L}) \hat{M} + \hat{M} (\hat{L} \hat{M} - \\ &- \hat{M} \hat{L}) = 2\hat{M}, \end{aligned}$$

так как $\hat{L} \hat{M} - \hat{M} \hat{L} = 1$.

28. Используя результаты задачи 27, докажем, что полученное при $n=2$ соотношение верно и для $n+1$. Пусть

$$\hat{M} \hat{L}^n - \hat{L}^n \hat{M} = -n \hat{L}^{n-1}.$$

Используя его, составим

$$\begin{aligned} \hat{M} \hat{L}^{n+1} - \hat{L}^{n+1} \hat{M} &= \hat{M} \hat{L}^{n+1} - \hat{L} (\hat{M} \hat{L}^n + n \hat{L}^{n-1}) = \\ &= (\hat{M} \hat{L} - \hat{L} \hat{M}) \hat{L}^n - n \hat{L}^n = - (n+1) \hat{L}^n. \end{aligned}$$

Следовательно, соотношение $\hat{M} \hat{L}^n - \hat{L}^n \hat{M} = -n \hat{L}^{n-1}$ доказано для любого n . По определению,

$$f(\hat{L}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \hat{L}^n.$$

Следовательно,

$$f(\hat{L}) \hat{M} - \hat{M} f(\hat{L}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (\hat{L}^n \hat{M} - \hat{M} \hat{L}^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} \hat{L}^{n-1}.$$

Но, если положить $n-1 = n_1$, то

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{f^{(n_1+1)}(0)}{n_1!} \hat{L}^{n_1} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{[f'(0)]^{(n_1)}}{n_1!} \hat{L}^{n_1} = f'(\hat{L}),$$

и, таким образом,

$$f(\hat{L}) \hat{M} - \hat{M} f(\hat{L}) = f'(\hat{L}).$$

29. По общему правилу

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) - f(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} \right] F = \frac{\partial}{\partial x} (fF) - f \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot F,$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) - f(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}.$$

30. $(\hat{L} - \hat{M})(\hat{L} + \hat{M}) - \hat{L}^2 - \hat{M}^2 + (\hat{L} \hat{M} - \hat{M} \hat{L}).$

31. Составляя уравнение для собственных функций, имеем

$$\frac{d\psi}{dx} = \lambda\psi \quad \text{и} \quad \psi = e^{\lambda x}.$$

Из условия конечности $\psi(x)$ при $x \rightarrow \pm \infty$ следует, что $\lambda = i\beta$, где β — любое вещественное число. Аналогично для $i \frac{d}{dx}$, очевидно, собственная функция

$$\psi = e^{-i\lambda x},$$

где λ — любое вещественное число (спектр непрерывный).

32. Разделяя переменные в стандартном уравнении $\left(x + \frac{d}{dx}\right)\psi = \lambda\psi$, приходим к равенству $\frac{d\psi}{\psi} = (\lambda - x) dx$, интегрируя которое, получаем

$$\psi = ce^{\lambda x - \frac{x^2}{2}}.$$

Это решение удовлетворяет требованиям конечности, непрерывности и однозначности при любых λ , как вещественных, так и комплексных (спектр непрерывный).

33. Решение уравнения $\frac{d\psi}{d\varphi} = \lambda\psi$ ищем в виде

$$\psi = ce^{\lambda\varphi}$$

и в силу однозначности собственной функции должны требовать справедливости равенства:

$$\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi).$$

Подставляя сюда полученную выше функцию, находим λ из условия $e^{\lambda \cdot 2\pi} = 1$. Следовательно, $\lambda = im$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

34. Чтобы найти решение уравнения

$$\sin \frac{d}{d\varphi} \psi = \lambda\psi, \quad (1)$$

представим оператор $\sin \frac{d}{d\varphi}$ в виде степенного ряда:

$$\sin \frac{d}{d\varphi} \psi = \left(\frac{d}{d\varphi} - \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\varphi^3} + \frac{1}{5!} \frac{d^5}{d\varphi^5} - \dots \right) \psi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{d^{2k+1}\psi}{d\varphi^{2k+1}}. \quad (2)$$

Решение уравнения (1) с учетом (2) следует искать в виде $\psi = e^{\alpha\varphi}$ и из требования однозначности функции запишем $\alpha = im$, где $m = 0, \pm 1, \dots$ (см. задачу 33). Подставляя это решение в уравнение (1), получаем собственные значения

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (im)^k = \sin(im).$$

35. Аналогично задаче 34

$$\psi = e^{im\varphi}; \quad \lambda = \cos m.$$

36. Аналогично задаче 34

$$\psi = e^{im\varphi}; \quad \lambda = a^{-am}.$$

37. Вводя новую функцию $U = x\psi$, получаем уравнение

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \lambda U,$$

решением которого являются

$$U_1 = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} \quad \text{и} \quad U_2 = C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Для $\lambda = -\beta^2 < 0$ эти функции будут конечными при $x \rightarrow \pm \infty$. Однако, чтобы обеспечить конечность $\psi(x)$ в точке $x = 0$, нужно очевидно, взяв линейную комбинацию обоих решений

$$\psi(x) = \frac{C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}}{x},$$

потребовать обращения числителя в нуль вместе со знаменателем (при $x = 0$). Следовательно,

$$C_1 + C_2 = 0 \quad \text{и} \quad \psi(x) = C \frac{\sin \beta x}{x},$$

где β — любое вещественное число.

38. Воспользуемся правилом, указанным в условии задачи, один раз считая произведением первый член скобки, другой раз — ставя произведение на второе место. Получим два равенства:

$$(\hat{f}_1 \hat{f}_2, \hat{g}) = (\hat{f}_1, \hat{g}) \hat{f}_2 + \hat{f}_1 (\hat{f}_2, \hat{g}); \quad (1)$$

$$(\hat{f}, \hat{g}_1 \hat{g}_2) = (\hat{f}, \hat{g}_1) \hat{g}_2 + \hat{g}_1 (\hat{f}, \hat{g}_2). \quad (2)$$

Положим в этих равенствах $\hat{f} = \hat{f}_1 \hat{f}_2$ и $\hat{g} = \hat{g}_1 \hat{g}_2$ и согласно тому же правилу, соблюдая порядок множителей, получим одинаковые левые части равенств, а их правые части будут выражены двумя способами: из равенства (1)

$$(\hat{f}_1 \hat{f}_2, \hat{g}_1 \hat{g}_2) = \hat{g}_1 (\hat{f}_1, \hat{g}_2) \hat{f}_2 + (\hat{f}_1, \hat{g}_1) \hat{g}_2 \hat{f}_2 + \hat{f}_1 \hat{g}_1 (\hat{f}_2, \hat{g}_2) + \hat{f}_1 (\hat{f}_2, \hat{g}_1) \hat{g}_2;$$

из равенства (2)

$$(\hat{f}_1 \hat{f}_2, \hat{g}_1 \hat{g}_2) = \hat{f}_1 (\hat{f}_2, \hat{g}_1) \hat{g}_2 + (\hat{f}_1, \hat{g}_1) \hat{f}_2 \hat{g}_2 + \hat{g}_1 \hat{f}_1 (\hat{f}_2, \hat{g}_2) + \hat{g}_1 (\hat{f}_1, \hat{g}_2) \hat{f}_2.$$

Сравнивая правые части, из которых вычеркнуты тождественные выражения, получаем равенство

$$(\hat{f}_1, \hat{g}_1) [\hat{f}_2 \hat{g}_2 - \hat{g}_2 \hat{f}_2] = [\hat{f}_1 \hat{g}_1 - \hat{g}_1 \hat{f}_1] (\hat{f}_2, \hat{g}_2),$$

справедливое для любых операторов \hat{f}_1, \hat{g}_1 и \hat{f}_2, \hat{g}_2 . Ввиду произвольности выбора этих операторов, можно утверждать, что для любых \hat{f} и \hat{g}

$$(\hat{f}, \hat{g}) = C [\hat{f} \hat{g} - \hat{g} \hat{f}].$$

Требую, чтобы $(\hat{f}, \hat{g})^+ = (\hat{f}, \hat{g})$ при $\hat{f}^+ = \hat{f}, \hat{g}^+ = \hat{g}$ (условие самосопряженности), получаем $C^* = -C$, т. е. $C = \frac{i}{\hbar}$. Размерность C долж-

на быть обратной размерности действия $\left[\text{по аналогии с размерностью классической скобки Пуассона } (f, g) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \right]$. Следовательно, \hbar — произвольная величина, имеющая размерность действия, и квантовая скобка Пуассона

$$(\hat{f}, \hat{g}) = \frac{i}{\hbar} [\hat{f} \hat{g} - \hat{g} \hat{f}].$$

39. Ограничимся доказательством эрмитовости оператора

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Требуется доказать, что

$$-i\hbar \int \psi_1^* \left(y \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - z \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) d\tau = \int \psi_2 \left[-i\hbar \left(y \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - z \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \right]^* d\tau.$$

После переноса влево всех членов равенство имеет вид

$$\int \psi_1^* y \frac{\partial \psi_2}{\partial z} d\tau - \int \psi_1^* z \frac{\partial \psi_2}{\partial y} d\tau + \int \psi_2 y \frac{\partial \psi_1^*}{\partial z} d\tau - \int \psi_2 z \frac{\partial \psi_1^*}{\partial y} d\tau = 0$$

или

$$\int y \frac{\partial}{\partial z} (\psi_1^* \psi_2) d\tau - \int z \frac{\partial}{\partial y} (\psi_1^* \psi_2) d\tau = 0.$$

Но

$$\int y \frac{\partial}{\partial z} (\psi_1^* \psi_2) d\tau = \int \int y dx dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} (\psi_1^* \psi_2) dz = \int \int y dx dy \psi_1^* \psi_2 \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

так как, в силу условия нормировки, функции ψ_1 , ψ_2 на бесконечности равны нулю. Аналогично доказывается равенство нулю второго слагаемого.

40. Из равенства $-\int_a^b u_k^* i\hbar \frac{\partial u_l}{\partial x} dx = \int_a^b u_l \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial u_k}{\partial x} \right)^* dx$ вытекает, что

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (u_k^* \cdot u_l) dx = (u_k^* \cdot u_l) \Big|_a^b = 0. \quad (1)$$

Для случая $u_k = u_l = u$ получаем

$$|u(b)|^2 = |u(a)|^2,$$

т. е. $u(b) = e^{i\delta} u(a)$, и в общем случае

$$u_k(b) = e^{i\delta_k} u_k(a); \quad u_l(b) = e^{i\delta_l} u_l(a).$$

Тогда, согласно равенству (1), $e^{i(\delta_l - \delta_k)} = 1$, т. е. фазовый множитель δ один и тот же для всех функций u_k :

$$\delta_k = \delta_l \quad \text{и} \quad u_k(b) = e^{i\delta} u_k(a).$$

41. Воспользовавшись тем, что

$$\begin{aligned} \hat{x}\hat{y} &= \hat{y}\hat{x}, & \hat{p}_x\hat{p}_y &= \hat{p}_y\hat{p}_x, \\ \hat{p}_x\hat{y} - \hat{y}\hat{p}_x &= -i\hbar\delta_{xy}, \end{aligned}$$

докажем справедливость x -составляющей указанного в условии соотношения, а именно

$$\begin{aligned} \hat{L}_y\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_y &= (\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z)(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x) - (\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x)(\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z) = \\ &= (\hat{z}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_z)(\hat{p}_x\hat{x} - \hat{x}\hat{p}_x) = i\hbar(\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y) = i\hbar\hat{L}_x. \end{aligned}$$

Применяя циклическую перестановку индексов, можно получить остальные составляющие равенства

$$[\hat{L} \cdot \hat{L}] = i\hbar\hat{L}.$$

42. Для доказательства коммутативности \hat{L}^2 и \hat{L}_x напишем

$$\hat{L}^2\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{L}^2 = \hat{L}_y^2\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{L}_z^2.$$

Прибавляя и вычитая из написанного выражения $\hat{L}_y \hat{L}_x \hat{L}_y$ и $\hat{L}_z \hat{L}_x \hat{L}_z$, вынося за скобки общие множители, расположенные с одной и той же стороны, и используя результаты задачи 41, получаем требуемое.

43. Ищем решение уравнения $i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$ в виде $\Psi(x, t) = U(x) \cdot \varphi(t)$ (частное решение, уравнение допускает разделение переменных). Тогда

$$\frac{i\hbar}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2mU} \frac{d^2 U}{dx^2} = a.$$

Чтобы $U(x)$ было конечным при $|x| \rightarrow \infty$ должно быть $a > 0$. Обозначая $\frac{2ma}{\hbar^2} = k^2$, получаем

$$\varphi(t) = e^{-\frac{i\hbar k^2}{2m} t}; \quad U(x) = e^{ikx},$$

где k — любое вещественное число. Общее решение имеет вид

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ikx - i\frac{\hbar k^2}{2m} t} dk.$$

44. Нормировочный коэффициент A определяется из условия $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, 0)|^2 dx = 1$. Подставляя заданную Ψ -функцию, имеем $|A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a^2} dx = |A|^2 a \sqrt{\pi} = 1$, откуда

$$|A|^2 = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}.$$

Чтобы определить область локализации частицы, следует найти

$$\rho = |\Psi(x, 0)|^2 = |A|^2 e^{-x^2/a^2}.$$

Эта функция имеет максимальное значение в точке $x=0$ и быстро убывает при $|x| > a$. Ширина пакета, задаваемого такой функцией, порядка a . Плотность тока вероятности

$$j_x = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = |A|^2 \frac{\hbar k_0}{m} e^{-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{\hbar k_0}{m} \rho.$$

Конечное выражение j_x совпадает с классическим. Множитель ρ определяется только вещественной частью показателя Ψ -функции, а $\frac{\hbar k_0}{m}$ (аналог классической скорости частицы) — мнимой частью.

45. Представим, согласно решению задачи 43, $\Psi(x, 0)$ в виде пакета волн: $\Psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ikx} dk$.

Отсюда

$$C(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, 0) e^{-ikx} dx = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_0 - k)x - \frac{x^2}{2a^2}} dx.$$

Дополняя выражение в показателе экспоненты под интегралом до полного квадрата, получаем

$$C(k) = \frac{A}{2\pi} e^{-\frac{a^2(k_0 - k)^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2a^2}[x - i(k_0 - k)a^2]^2} dx = \frac{Aa}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2(k_0 - k)^2}{2}}.$$

Значение $C(k)$ отлично от нуля вблизи $k = k_0$. Выражение

$$|C(k)|^2 dk = \frac{A^2 a^2}{2\pi} e^{-a^2(k_0 - k)^2} dk$$

пропорционально вероятности найти у частицы квазиимпульс в интервале $k - (k + dk)$; $\Delta k \sim \frac{1}{a}$ определяет ширину пакета в k -пространстве.

46. Взяв из задачи 43 решение $\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ikx - \frac{i\hbar k^2 t}{2m}} \cdot dk$ и подставив $C(k)$ из решения задачи 45, получим

$$\Psi(x, t) = \frac{Aa}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ikx - i\frac{\hbar k^2 t}{2m} - \frac{a^2 k^2}{2} + a^2 k k_0 - \frac{a^2 k_0^2}{2}\right) dk.$$

Выделив в показателе полный квадрат, приведем этот интеграл к интегралу Пуассона:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \frac{Aa}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2 k_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{a^2}{2} \left(k \sqrt{1 + \frac{i\hbar t}{ma^2}} - \frac{k_0 + \frac{ix}{a^2}}{\sqrt{1 + \frac{i\hbar t}{ma^2}}}\right)^2\right] dk \times \\ &\times \exp\left[\frac{\left(k_0 + \frac{ix}{a^2}\right)^2}{1 + \frac{i\hbar t}{ma^2}} \cdot \frac{a^2}{2}\right] = \frac{A}{\sqrt{1 + \frac{i\hbar t}{ma^2}}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2ia^2 x k_0 + \frac{i\hbar a^2 k_0^2}{m} t}{2\left(1 + \frac{i\hbar t}{ma^2}\right) a^2}\right]. \end{aligned}$$

По определению, плотность вероятности равна

$$\rho = |\Psi|^2 = \frac{|A|^2}{\sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 a^4}}} \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{k_0 \hbar t}{m}\right)^2}{\left(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 a^4}\right) \cdot a^2}\right].$$

Это выражение показывает, что максимум кривой вероятности перемещается со скоростью $\frac{\hbar k_0}{m}$, а ширина этой кривой растет со вре-

менем как

$$a' = a \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 a^4}}.$$

Плотность тока можно представить в виде:

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \Psi \frac{-ik_0 - \frac{x}{a^2}}{1 - \frac{i\hbar t}{ma^2}} - \Psi^* \Psi \frac{ik_0 - \frac{x}{a^2}}{1 + \frac{i\hbar t}{ma^2}} \right) = \\ &= \rho \frac{\hbar k_0}{m} \frac{1 + \frac{\hbar t x}{ma^4 k_0}}{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 a^4}}. \end{aligned}$$

$$47. \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/a^2} dx = 0;$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(\hbar k_0 + \frac{i\hbar x}{a^2} \right) \psi dx = \hbar k_0.$$

48. Так как $\langle x \rangle = 0$ (см. задачу 47), то

$$\Delta x = x - \langle x \rangle = x;$$

следовательно,

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/a^2} dx = \frac{|A|^2}{2} \sqrt{\pi} a^3.$$

Из условия нормировки $|A|^2 = 1/\sqrt{\pi} a$ и

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \frac{a^2}{2}.$$

Для определения $\langle \Delta p^2 \rangle = \hbar^2 \langle (k - k_0)^2 \rangle$ можно воспользоваться выражением $|C(k)|^2 dk$ из задачи 45, пронормировав его. Записав

$$dW(k) = B \exp[-(k - k_0)^2 a^2] dk,$$

из условия $1 = \int_{-\infty}^{\infty} B \exp[-a^2(k - k_0)^2] dk = B \sqrt{\frac{\pi}{a^2}}$ найдем $B = a/\sqrt{\pi}$. Теперь можно написать

$$\begin{aligned} \langle \Delta p^2 \rangle &= B \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} (k - k_0)^2 e^{-a^2(k - k_0)^2} dk = B \hbar^2 \left[-\frac{\partial}{\partial (a^2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(k - k_0)^2} dk \right] = \\ &= B \hbar^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2a^3} = \frac{\hbar^2}{2a^2} \end{aligned}$$

и непосредственно убедиться в справедливости соотношения неопределенностей:

$$\langle \Delta x^2 \rangle \cdot \langle \Delta p^2 \rangle = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\hbar^2}{2a^2} = \frac{\hbar^2}{4}.$$

49. Рассмотрим области I ($x < 0$) и III ($x > a$), где $V = \infty$. Записав уравнение Шредингера в этих областях как

$$\frac{1}{\psi_I} \frac{d^2 \psi_I}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} (V - E),$$

видим, что при $V = \infty$ функция ψ_I должна обращаться в нуль (более строго это можно показать, используя решение задачи 51).

В области II ($0 \leq x \leq a$) уравнение Шредингера сводится к виду

$$\frac{d^2 \psi_{II}}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_{II} = 0.$$

Вводя обозначение $\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$, можно написать его решение в виде $\psi_{II} = A \sin(kx + \alpha)$. В силу требования непрерывности функции во всех точках, и в частности, при переходе из области I в II ($x = 0$) и из II в III ($x = a$), мы должны положить: $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$; $\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a)$, т. е.

$$A \sin \alpha = 0 \quad \text{и} \quad A \sin(ka + \alpha) = 0.$$

Таким образом, $\alpha = 0$ и k может принимать только дискретные значения, равные $k_n = \frac{n\pi}{a}$, где $n = 1, 2, \dots$. Уровни энергии частицы определяются формулой:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m a^2}.$$

Из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = \int_0^a |\psi_{II}|^2 dx = |A|^2 \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = 1$$

находим $A = \sqrt{2/a}$. Окончательно волновая функция во всем пространстве задается в виде равенств:

$$\psi_I = 0; \quad \psi_{II} = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}; \quad \psi_{III} = 0.$$

50. В области, где $V = \infty$, функция $\psi = 0$ (см. задачу 49). Там же, где $V = 0$, имеем уравнение

$$\Delta \psi + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0,$$

допускающее разделение переменных: $\psi(x, y, z) = \psi_1(x) \cdot \psi_2(y) \cdot \psi_3(z)$. Для функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(y)$ и $\psi_3(z)$ получаем уравнения такие же,

как и в задаче 49 с аналогичными граничными условиями:

$$\begin{aligned}\psi_1(0) - \psi_1(a) &= 0; \\ \psi_2(0) = \psi_2(b) &= 0; \\ \psi_3(0) = \psi_3(c) &= 0.\end{aligned}$$

После удовлетворения этих граничных условий и условия нормировки в области, где $V=0$, волновая функция примет вид

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{n_1 \pi x}{a} \cdot \sin \frac{n_2 \pi y}{b} \cdot \sin \frac{n_3 \pi z}{c}.$$

В остальной части пространства $\psi=0$. Этой функции соответствует энергия

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right).$$

51. Ограничимся здесь решением задачи для $E < 0$ (случай $E > 0$ будет рассмотрен в задаче 95).

В областях I и III после введения обозначения $\kappa^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} > 0$ уравнение Шредингера приобретает вид

$$\frac{d^2 \psi_I}{dx^2} - \kappa^2 \psi_I = 0,$$

и следовательно,

$$\psi_I = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}; \quad \psi_{III} = Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x}.$$

Из требования конечности ψ_I , ψ_{III} при $x \rightarrow \pm \infty$ следует, что $B=D=0$;

$$\psi_I = Ae^{\kappa x}; \quad \psi_{III} = Ce^{-\kappa x}.$$

В области II уравнение записывается как

$$\frac{d^2 \psi_{II}}{dx^2} + k^2 \psi_{II} = 0,$$

где $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 + E)$ и $\psi_{II} = \alpha \sin kx + \beta \cos kx$. В точках $x = -a$ и $x = a$ требуем непрерывности функции и ее производной (это можно сделать, так как разрыв потенциальной энергии в этих точках конечный):

$$\begin{aligned}\psi_I(-a) = \psi_{II}(-a); \quad \psi_{II}(a) = \psi_{III}(a); \\ \frac{d\psi_I}{dx} \Big|_{x=-a} = \frac{d\psi_{II}}{dx} \Big|_{x=-a}; \quad \frac{d\psi_{II}}{dx} \Big|_{x=a} = \frac{d\psi_{III}}{dx} \Big|_{x=a}.\end{aligned}$$

Для коэффициентов A, C, α, β получаем четыре однородных линейных уравнения:

$$\begin{aligned}Ae^{-\kappa a} + \alpha \sin ka - \beta \cos ka &= 0; \\ A\kappa e^{-\kappa a} - \alpha k \cos ka - \beta k \sin ka &= 0; \\ Ce^{-\kappa a} - \alpha \sin ka - \beta \cos ka &= 0; \\ C\kappa e^{-\kappa a} + \alpha k \cos ka - \beta k \sin ka &= 0.\end{aligned} \tag{1}$$

Из равенства нулю детерминанта этой системы вытекает условие ее разрешимости:

$$\kappa^2 - k^2 + 2k\kappa \operatorname{ctg} 2ka = 0. \quad (2)$$

Решая уравнение (2) относительно κ , получаем два корня:

1) $\kappa = k \operatorname{tg} ka$. Подставляя в систему (1), получаем

$$\alpha = 0; C = A; \beta = \frac{A}{\cos ka} e^{-\kappa a}$$

и

$$\psi_I = Ae^{\kappa x}; \psi_{II} = Ae^{-\kappa a} \frac{\cos kx}{\cos ka}; \psi_{III} = Ae^{-\kappa x},$$

т. е. $\psi(x) = \psi(-x)$ — функция четная;

2) $\kappa = -k \operatorname{ctg} ka$. Тогда из системы (1) имеем

$$\alpha = -A \frac{e^{-\kappa a}}{\sin ka}; \beta = 0; C = -A$$

и решение представляется нечетной функцией

$$\psi_I = Ae^{\kappa x}; \psi_{II} = -Ae^{-\kappa a} \frac{\sin kx}{\sin ka}; \psi_{III} = -Ae^{-\kappa x}.$$

т. е. $\psi(-x) = -\psi(x)$.

Коэффициент A определяется из условий нормировки. Например, для первого случая получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx &= |A|^2 \left[\int_{-\infty}^{-a} e^{2\kappa x} dx + \frac{e^{-2\kappa a}}{\cos^2 ka} \int_{-a}^a \cos^2 kx dx + \int_a^{\infty} e^{-2\kappa x} dx \right] = \\ &= |A|^2 e^{-2\kappa a} \left[\frac{1}{\kappa} + \frac{a}{\cos^2 ka} + \frac{\sin 2ka}{2k \cos^2 ka} \right] = 1. \end{aligned}$$

Используя значение корня $\kappa = k \operatorname{tg} ka$, находим окончательное выражение для A , справедливое и во втором случае:

$$\frac{1}{|A|^2} = ae^{-2\kappa a} \left(\frac{1}{\kappa a} + 1 + \frac{\kappa^2}{k^2} + \frac{\kappa}{k^2 a} \right).$$

Для определения уровней энергии воспользуемся тем, что

$$\kappa^2 + k^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} = \frac{C_1^2}{a^2},$$

где C_1 — безразмерная константа, характеризующая глубину потенциальной ямы. Отсюда

$$\kappa a = \sqrt{C_1^2 - (ka)^2}$$

и выражения (1) и (2) приводятся к виду

$$\frac{\sqrt{C_1^2 - k^2 a^2}}{ka} = \operatorname{tg} ka \quad \text{и} \quad \frac{ka}{\sqrt{C_1^2 - k^2 a^2}} = -\operatorname{ctg} ka.$$

Задаваясь различными значениями константы C_1 , можно графически найти корень этих уравнений. Начертив графики функций

$$f_1 = \sqrt{\frac{C_1^2 - k^2 a^2}{ka}} \quad \text{и} \quad f_2 = \operatorname{tg} ka,$$

$$f_3 = \frac{ka}{\sqrt{C_1^2 - k^2 a^2}} \quad \text{и} \quad f_4 = -\operatorname{tg} ka,$$

легко убедиться, что для значений $C_1 < \frac{\pi}{2}$ существует всего один уровень (одна точка пересечения кривых $y=f_1$ и $y=f_2$; кривые $y=f_3$ и $y=f_4$ вообще тогда не пересекаются), отвечающий четной волновой функции.

С увеличением значения величины C_1 число уровней будет постепенно возрастать.

52. Уравнение Шредингера для трехмерного осциллятора

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \left(\frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2 y^2}{2} + \frac{k_3 z^2}{2} \right) \psi = E \psi \quad (1)$$

допускает разделение переменных

$$\psi(x, y, z) = \psi_1(x) \cdot \psi_2(y) \cdot \psi_3(z).$$

Подставляя эту функцию в уравнение (1) и деля все члены на нее, получим, вводя $\omega_i^2 = \frac{k_i}{m}$ ($i = 1, 2, 3$):

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} \cdot \frac{1}{\psi_1} + \frac{m\omega_1^2}{2} x^2 \right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_2}{dy^2} \cdot \frac{1}{\psi_2} + \frac{m\omega_2^2}{2} y^2 \right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_3}{dz^2} \cdot \frac{1}{\psi_3} + \frac{m\omega_3^2}{2} z^2 \right) = E. \quad (2)$$

В силу независимости x, y, z , каждая скобка должна быть равна соответственно постоянным E_1, E_2, E_3 , и задача сводится к трем уравнениям одномерного осциллятора, имеющим вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + \frac{m\omega_1^2}{2} x^2 \psi_1 = E_1 \psi_1 \quad \text{и т. д.}, \quad (3)$$

причем $E = E_1 + E_2 + E_3$.

Достаточно рассмотреть решение одного уравнения (3). Введя новую переменную $\xi = \frac{x}{a}$, выбрав a так, чтобы $\frac{m^2 \omega_1^2 a^4}{\hbar^2} = 1$, и обозначив $\frac{2E_1}{\hbar \omega_1} = \lambda_1$, получим уравнение в простом виде

$$\frac{d^2 \psi_1}{d\xi^2} + (\lambda_1 - \xi^2) \psi_1 = 0. \quad (4)$$

При $\xi \rightarrow \infty$ решения уравнения (4) можно написать в виде

$$\psi_{1\infty} = e^{-\xi^2/2} \quad \text{и} \quad \psi'_{1\infty} = e^{+\xi^2/2}.$$

(Можно убедиться, что эти решения удовлетворяют уравнению, если пренебречь единицей и λ_1 по сравнению с ξ^2 .) Требованию конечности функции удовлетворяет только первое решение.

Совершив подстановку: $\psi_1 = \psi_{1\infty} \cdot F(\xi) = e^{-\xi^2/2} \cdot F(\xi)$ будем искать решение полученного для $F(\xi)$ уравнения

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dF}{d\xi} + (\lambda_1 - 1) F = 0 \quad (5)$$

в виде степенного ряда:

$$F(\xi) = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \xi^k. \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение (5) и приравнявая нулю коэффициенты при каждой степени ξ , получаем ряд соотношений:

$$k_0(k_0 - 1)a_{k_0} = 0 \text{ при } \xi^{k_0-2}; \quad (7)$$

$$k_0(k_0 + 1)a_{k_0+1} = 0 \text{ при } \xi^{k_0-1}; \quad (8)$$

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + (\lambda_1 - 1 - 2k)a_k = 0 \text{ при } \xi^k, \text{ если } k \geq k_0. \quad (9)$$

Уравнения (7) и (8) удовлетворяются, если положить $k_0 = 0$; из (9) получаем рекуррентное соотношение

$$a_{k+2} = a_k \frac{2k+1-\lambda_1}{(k+2)(k+1)} \quad (10)$$

($k=0, 1, 2, \dots$). При помощи соотношения (10) все четные a_{2k} определяются через a_0 , а нечетные a_{2k+1} — через a_1 .

Исследуем частное решение при $a_1 = 0$. Для a_k с номерами $k \geq 1$, которые определяют поведение $F(\xi)$ при растущем ξ , соотношение (10) дает

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} \approx \frac{2}{k}.$$

Это отношение коэффициентов у двух последовательных членов степенного ряда (6) такое же, как у ряда

$$e^{\xi^2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\xi^2)^l}{l!}.$$

Таким образом, $F(\xi)$ при больших ξ ведет себя так же, как e^{ξ^2} , и следовательно, выражение $\psi_1 = e^{-\xi^2/2} F(\xi)$ превращается в $e^{+\xi^2/2}$ и не удовлетворяет требованию конечности при $\xi \rightarrow \infty$. Поэтому следует требовать обрыва ряда для $F(\xi)$ на некотором номере n_1 , а для этого необходимо, чтобы $a_{n_1+2} = 0$. Согласно соотношению (10), это возможно при $\lambda_1 = 2n_1 + 1$. При этом уравнение (5) переходит в уравнение

$$\frac{d^2 F_{n_1}}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dF_{n_1}}{d\xi} + 2n_1 F_{n_1} = 0, \quad (11)$$

определяющие полиномы Чебышева—Эрмита. (Взяв $a_0 = 0$, можно рассмотреть решение с нечетными степенями и прийти к тем же

результатам.) Следовательно, $E_1 = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_1$ и $\psi_1 = C_{n_1} e^{-\xi^2/2} H_{n_1}(\xi)$, а общее решение для трехмерного осциллятора дается формулами:

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_1 + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_2 + \left(n_3 + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_3;$$

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(\xi, \eta, \zeta) = C e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2}} H_{n_1}(\xi) H_{n_2}(\eta) H_{n_3}(\zeta).$$

При этом H_n — полином Эрмита, $\eta = \sqrt{\frac{m\omega_2}{\hbar}} y$ и $\zeta = \sqrt{\frac{m\omega_3}{\hbar}} z$. Константа C определяется из условия нормировки.

Пронормируем $\psi_n = C_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)$. Продифференцировав $(n+1)$ раз тождество $\frac{d}{d\xi} e^{-\xi^2} + 2\xi e^{-\xi^2} = 0$ и введя

$$H_n = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}, \quad (12)$$

можно убедиться, что выражение (12) действительно обращает в тождество уравнение (11) при $n_1 = n$. Кроме того, ясно, что H_n может быть записан в виде: $H_n(\xi) = 2^n \xi^n + a_{n-2} \xi^{n-2} + \dots$. Заменяя в нормировочном интеграле

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(\xi)|^2 dx = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_1}} C_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi) d\xi = 1$$

один из полиномов H_n выражением (12) и проводя n -кратное интегрирование по частям, получаем

$$1 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_1}} C_n^2 (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n} \cdot H_n(\xi) d\xi = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_1}} C_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \frac{d^n H_n}{d\xi^n} d\xi;$$

так как

$$\frac{d^n H_n}{d\xi^n} = 2^n \cdot n!, \text{ то } C_n^2 = \sqrt{\frac{m\omega_1}{\pi \hbar}} \frac{1}{2^n \cdot n!}.$$

Очевидно, для трехмерного осциллятора нормированное решение можно представить в виде

$$\psi(x, y, z) = \frac{4}{\sqrt{m^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3}} e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2}} \cdot \frac{H_{n_1}(\xi) H_{n_2}(\eta) H_{n_3}(\zeta)}{(\hbar \pi)^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{2^{n_1 + n_2 + n_3} \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!}}.$$

53. Для этого случая уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left(\frac{m\omega^2}{2} x^2 - e |E| x\right) \psi = E \psi$$

может быть сведено к задаче гармонического осциллятора выделением полного квадрата в выражении потенциальной энергии. Вводя

$$x_1 = x - \frac{e|E|}{m\omega^2}, \quad \xi = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} x_1, \quad E_1 = E + \frac{e^2|E|^2}{2m\omega^2},$$

приходим к уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx_1^2} + \frac{m\omega^2}{2} x_1^2 \psi = E_1 \psi$$

и можем (см. задачу 52) написать собственные функции

$$\psi_n = C_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)$$

и собственные значения оператора энергии

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega - \frac{e^2|E|^2}{2m\omega^2}.$$

54. Согласно задаче 52, осциллятор в n -м квантовом состоянии характеризуется волновой функцией

$$\psi_n = C_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi).$$

По общему определению

$$\langle x^2 \rangle_n = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 x^2 dx = C_n^2 \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \cdot H_n^2 \cdot \xi^2 d\xi.$$

Заменяя один из полиномов H_n выражением (12) из решения задачи 52 и интегрируя n раз по частям, имеем

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle_n &= C_n^2 \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{3/2} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n} \cdot (H_n \cdot \xi^2) \cdot d\xi = \\ &= C_n^2 \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \frac{d^n (H_n \cdot \xi^2)}{d\xi^n} d\xi. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\frac{d^n (H_n \xi^2)}{d\xi^n} = \frac{d^n}{d\xi^n} (a_n \xi^{n+2} + a_{n-2} \xi^n + \dots) = a_n \frac{(n+2)!}{2!} \xi^2 + n! a_{n-2}.$$

При этом $a_n = 2^n$, а $a_{n-2} = -\frac{a_n \cdot n(n-1)}{4}$ [см. формулу (10) в задаче 52].

Подставляя в $\langle x^2 \rangle_n$ входящие туда интегралы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

получаем

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle_n &= C_n^2 \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{3/2} \left[\frac{(n+2)!}{2} \cdot 2^n \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} - 2^n \cdot \frac{n(n-1)}{4} n! \sqrt{\pi} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} \frac{1}{2^n \cdot n!} \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot 2^n \cdot n! [(n+1)(n+2) - n(n-1)] = \\ &= \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\langle V \rangle_n = \frac{m\omega^2}{2} \langle x^2 \rangle_n = \frac{\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)}{2} = \frac{E_n}{2}.$$

55. Так как для одномерного случая оператор кинетической энергии $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$, то

$$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{d^2\psi}{dx^2} dx = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 dx.$$

В заданном случае $n=3$ и $\psi = \psi_3 = C_3 e^{-\xi^2/2} H_3(\xi)$, где $H_3 = 8\xi^3 - 12\xi$. Производя замену переменной $x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \xi$ и подставляя из задачи 52

$C_3^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} \frac{1}{2^3 \cdot 3!}$, получаем

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_3 &= \frac{\hbar\omega}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^3 \cdot 3!} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d}{d\xi} [e^{-\xi^2/2} (8\xi^3 - 12\xi)] \right\}^2 d\xi = \\ &= \frac{\hbar\omega}{\sqrt{\pi} \cdot 3!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} (4\xi^8 - 36\xi^6 + 93\xi^4 - 54\xi^2 + 9) d\xi. \end{aligned}$$

Встречающиеся здесь интегралы берутся просто, если применить дифференцирование по параметру. Так как $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2n} e^{-\alpha\xi^2} d\xi = \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\xi^2} d\xi = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}}$$

и

$$\langle T \rangle_3 = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{\pi} \cdot 3!} \cdot \frac{21}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1}{2} \hbar\omega \left(3 + \frac{1}{2} \right).$$

56. Для решения уравнения

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0 (e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}) \psi = E\psi$$

удобно ввести новую переменную $y = e^{-\alpha x}$. Обозначая

$$\frac{2mV_0}{\hbar^2\alpha^2} = \beta^2 \quad (1)$$

и

$$\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2} = \varepsilon, \quad (2)$$

получаем уравнение вида

$$y^2 \frac{d^2\psi}{dy^2} + y \frac{d\psi}{dy} - \beta^2 (y^2 - 2y) \psi + \varepsilon\psi = 0.$$

Исследуем его предварительно в точках

$$y \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow -\infty) \quad \text{и} \quad y \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty).$$

В первом случае уравнение примет вид

$$\frac{d^2\psi_\infty}{dy^2} - \beta^2\psi_\infty = 0$$

и решение его будет

$$\psi_\infty = e^{-\beta y}$$

(второе частное решение $\psi'_\infty = e^{+\beta y}$ обращается в ∞ при $y \rightarrow \infty$). Вблизи $y=0$ подстановка $\psi = y^k$ дает для k (в уравнении оставляем члены только с наименьшей степенью y) уравнение

$$k^2 + \varepsilon = 0, \quad \text{т. е.} \quad k = \pm\sqrt{-\varepsilon}.$$

При $\varepsilon > 0$ будут пригодны оба решения ($\psi_0 = y^{\pm\sqrt{-\varepsilon}} = e^{\pm\alpha V^{-\varepsilon} \cdot x}$ остается конечным, если $\sqrt{-\varepsilon}$ — мнимая величина); спектр энергии непрерывный.

Для $\varepsilon = -\lambda^2 < 0$ требованию конечности удовлетворяет только $\psi_0 = y^\lambda$ при $\lambda > 0$.

Для отыскания общего решения после подстановки $\psi = y^\lambda \cdot e^{-\beta y} \cdot F(y)$ приходим к уравнению для $F(y)$ следующего вида:

$$y^2 \frac{d^2F}{dy^2} + [(1 + 2\lambda)y - 2\beta y^2] \frac{dF}{dy} + 2\beta y \left[\beta - \lambda - \frac{1}{2} \right] F = 0.$$

Подставляя $F(y)$ в виде степенного ряда $F(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ и приравнявая нулю коэффициенты при любой степени y , получаем для a_k рекуррентное соотношение:

$$a_{k+1} = a_k \frac{2\beta \left(k + \lambda + \frac{1}{2} - \beta \right)}{(k+1)(k+1+2\lambda)} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Так как при больших k оно превращается в $\frac{a_{k+1}}{a_k} \approx \frac{2\beta}{k}$ и, следовательно, $F_y \rightarrow \infty \approx e^{2\beta y}$, условию конечности при $y \rightarrow \infty$ будет отвечать только решение, представляемое обрывающимся рядом, что может получиться, если при некотором $k=n$ будет $\beta - n - \frac{1}{2} = \lambda$ и,

кроме того, λ должно быть неотрицательным. Подставляя в это условие β и λ из (1) и (2), получаем дискретные уровни энергии $E_n = -V_0 \left[1 - \sqrt{\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2mV_0} \left(n + \frac{1}{2} \right)} \right]^2$ при $n = 0, 1, 2, \dots$. Число их ограничено условием

$$n + \frac{1}{2} < \beta = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2 \alpha^2}}$$

и, очевидно, зависит от глубины ямы V_0 . В частности, при $\beta < \frac{1}{2}$ дискретных уровней нет.

57. Уравнение $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \frac{e^2}{|x|} \psi = E \psi$ для $E > 0$ будет иметь непрерывный спектр. Рассмотрим $E < 0$. Вводя обозначения $\frac{2mE}{\hbar^2} = -\gamma^2$ и $\frac{me^2}{\hbar^2 \gamma} = \kappa$ и новую переменную $\xi = 2\gamma x$, запишем уравнение в безразмерных переменных

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \left(\frac{\kappa}{|\xi|} - \frac{1}{4} \right) \psi = 0.$$

Сначала рассмотрим только область $\xi > 0$.

При $\xi \rightarrow \infty$ уравнение переходит в $\frac{d^2 \psi_\infty}{d\xi^2} - \frac{1}{4} \psi_\infty = 0$ и решение, удовлетворяющее требованию конечности, определяется как $\psi_\infty = e^{-\xi/2}$.

При помощи подстановки $\psi = e^{-\xi/2} \cdot f(\xi)$ вводим новую функцию $f(\xi)$, удовлетворяющую уравнению $\xi \frac{d^2 f}{d\xi^2} - \xi \frac{df}{d\xi} + \kappa f = 0$. Для исследования поведения $f(\xi)$ вблизи $\xi = 0$ подставляем $f = \xi^\alpha$ и, сохраняя члены с наименьшей степенью ξ , получаем, что $\alpha(\alpha - 1) = 0$, т. е. существуют два решения:

1) $f(\xi) = 1$; 2) $f(\xi) = \xi$.

Однако первое решение не может быть использовано, так как конечность $\psi(\xi)$ в точке $\xi = 0$ приведет к тому, что $V\psi = -\frac{e^2 \psi}{\xi} \rightarrow \infty$, а следовательно, и $\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} \rightarrow \infty$. Таким образом, в этом случае и $\psi(\xi)$ станет бесконечным. Поэтому годится только второе решение.

Подстановка $f(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi^k$ приводит обычным путем к рекуррентному соотношению для коэффициентов

$$a_{k+1} = a_k \frac{k - \kappa}{(k+1)k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Из предела этого отношения при $k \gg 1$ следует, что в этом случае $f(\xi)$ обратится в e^ξ , ряд для которого характеризуется таким же отношением коэффициентов. Следовательно, для конечности $\psi = e^{-\xi/2} \cdot f(\xi)$ необходимо, чтобы $f(\xi)$ становилось бы полиномом, а это возможно при обрыве ряда на n -м члене.

Условием того, чтобы $a_{n+1} = 0$, является, как видно из рекуррентного соотношения, условие $\kappa = n$. Подставляя $\kappa = \frac{me^2}{\hbar^2} \frac{\hbar}{\sqrt{-2mE}}$, получаем дискретный спектр энергии

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$$

и соответствующие собственные функции

$$\psi_n(\xi) = e^{-\xi/2} \xi \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \xi^k.$$

Чтобы получить решение для $\xi < 0$, вводим переменную $\eta = -\xi$. Уравнение примет точно такой же вид, как и для $\xi > 0$:

$$\frac{d^2 \psi(\eta)}{d\eta^2} + \left(\frac{\kappa}{\eta} - \frac{1}{4} \right) \psi = 0,$$

и решение его, непрерывным образом продолжающее $\psi(\xi)$ при $\xi > 0$, будет

$$\psi_n(\eta) = -e^{-\eta/2} \eta \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \eta^k = e^{\xi/2} \cdot \xi \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} (-\xi)^k.$$

58. Волновую функцию для сферически симметричного осциллятора, как для всякой центрально-симметричной задачи, следует искать в виде

$$\psi(r, \theta, \varphi) = f(r) P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

где $P_{lm}(\cos \theta)$ — полином Лежандра, $l = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$.

Тогда $f(r)$ должна удовлетворять уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} f \right] + \frac{\mu\omega^2}{2} r^2 f = E f.$$

Если ввести новую функцию $U = r f$ и, как в задаче 52, перейти к $\xi = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} r$ и $\lambda = \frac{E}{\hbar\omega}$, то уравнение приобретет вид

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + \left[2\lambda - \frac{l(l+1)}{\xi^2} - \xi^2 \right] U = 0.$$

Очевидно (см. задачу 52), при $\xi \rightarrow \infty$ $U_\infty = e^{-\xi^2/2}$, а при $\xi \rightarrow 0$, если подставить $U_0 = \xi^\alpha$, то для α получим уравнение $\alpha(\alpha-1) = l(l+1)$. Следовательно, $\alpha_1 = l+1$ и $\alpha_2 = -l$, и конечную при $\xi \rightarrow 0$ функцию дает только α_1 , т. е. $U_0 = \xi^{l+1}$.

Используя эти результаты, будем искать $U(\xi)$ в виде

$$U = e^{-\xi^2/2} \cdot \xi^{l+1} \cdot v(\xi).$$

После подстановки для $v(\xi)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + 2 \frac{dv}{d\xi} \left[\frac{l+1}{\xi} - \xi \right] + 2 \left[\lambda - l - \frac{3}{2} \right] v = 0,$$

решение которого ищем в виде ряда $v = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \xi^k$. Приравнявая нулю коэффициенты при каждой степени ξ , получаем рекуррентное соотношение для коэффициентов

$$a_{k+2} = a_k \frac{2 \left[k+l + \frac{3}{2} - \lambda \right]}{(k+2)(k+2l+3)} \approx \frac{2a_k}{k} \quad (\text{при } k \rightarrow \infty) \quad (1)$$

и определяем наименьший показатель степени k_0 : из $k_0(k_0+1) - 2(l+1)k_0 - 0$ следует, что конечными в нуле остаются только решения с $k_0=0$. Из соотношения (1) следует, что при $\xi \rightarrow \infty$ этот ряд превращается в e^{ξ^2} и $U \rightarrow e^{\xi^2/2}$. Чтобы избежать этого, ряд нужно обрывать, что возможно только при $\lambda = p + l + \frac{3}{2}$. Если учесть еще, что ряд может начинаться только с $k_0=0$, то p в этом выражении может быть только четным, т. е.

$$p = 2n, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\lambda = 2n + l + \frac{3}{2} \text{ и } E_n = \hbar\omega \left(2n + l + \frac{3}{2} \right).$$

Этому уровню энергии отвечает функция

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = C \frac{e^{-\xi^2/2} \cdot \xi^{l+1} \cdot v_n(\xi)}{\xi} P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$

Очевидно, уровень вырожден: при заданном $N = 2n + l$ четном имеем $l = 0, 2, 4, \dots, N$, при N нечетном $l = 1, 3, 5, \dots, N$. Кроме того, при заданных n и l существует еще $(2l+1)$ -кратное вырождение по числу m .

59. В двухмерной задаче

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

и, если $V = V(\rho)$ и не зависит от угла φ , переменные разделяются; волновую функцию можно искать в виде

$$\psi(\rho, \varphi) = e^{im\varphi} U(\rho)$$

(\hat{H} и \hat{L}_z коммутируют в таком поле). Для U получаем уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2 U}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} U \right) - \frac{Ze^2}{\rho} U = EU.$$

Будем рассматривать $E < 0$ (для $E > 0$ получится непрерывный спектр). Заменяя $\rho = at$ и вводя новую функцию $f = \sqrt{\rho} \cdot U$, находим

для нее уравнение

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} a^2 + \frac{2\mu Z e^2}{\hbar^2} \frac{a}{t} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{t^2} \right) f = 0.$$

Выбрав $a = \frac{\hbar^2}{\mu Z e^2}$ и обозначив

$$\frac{2\mu E}{\hbar^2} a^2 = -\gamma^2, \quad (1)$$

упростим это уравнение и запишем его в следующем виде:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \left(\frac{2}{t} - \gamma^2 - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{t^2} \right) f = 0$$

$$(0 \leq t \leq \infty).$$

При $t \rightarrow \infty$ получаем $f_\infty = e^{-it}$, отбрасывая решение e^{+it} .

При $E > 0$ из формулы (1) следует, что $\gamma = i\beta$. Тогда оба решения $e^{\pm\gamma t} = e^{\pm i\beta \frac{\rho}{a}}$ конечны и спектр для E оказывается непрерывным.

При $t \rightarrow 0$, полагая $f_0 = t^\alpha$, получаем $\alpha(\alpha-1) = m^2 - \frac{1}{4}$, т. е. $\alpha_1 = m + \frac{1}{2}$ и $\alpha_2 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)$. Ввиду того, что $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, следует выбрать $\alpha = |m| + \frac{1}{2}$ и искать общее решение как

$$f(t) = e^{-\gamma t} t^{|m| + \frac{1}{2}} v(t).$$

Для функции $v(t)$ в результате получаем уравнение

$$t \frac{d^2 v}{dt^2} + 2 \left[|m| + \frac{1}{2} - \gamma t \right] \frac{dv}{dt} + 2 \left[1 - \left(|m| + \frac{1}{2} \right) \gamma \right] v = 0$$

и ищем ее в виде ряда $v = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k t^k$. Приравнявая нулю коэффициент при наименьшей степени t , т. е. при t^{k_0-1} , получаем

$$k_0(k_0 + 2|m|) = 0,$$

откуда

$$k_0 = 0 \text{ или } k_0 = -2|m|.$$

Второе решение при $t \rightarrow 0$ дает функцию, обращающуюся в бесконечность. Коэффициенты при t^k , где $k = 0, 1, \dots$, будучи приравнены нулю, дают рекуррентное соотношение

$$a_{k+1} = a_k \cdot \frac{2 \left[\gamma \left(k + |m| + \frac{1}{2} \right) - 1 \right]}{(k+1)(k+1+2|m|)}, \quad (2)$$

из которого для $k \gg 1$ $\frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow \frac{2\gamma}{k}$ (отношение, характеризующее функцию $e^{2\gamma t}$). Чтобы $v(t)$ с ростом t не превращалась в $e^{2\gamma t}$, нужно, чтобы ряд оборвался на члене $k=n$, т. е. чтобы

$$\gamma \left[n + |m| + \frac{1}{2} \right] - 1 = 0$$

[см. соотношение (2)]. Согласно формуле (1), находим, что энергия частицы в двухмерной задаче Кеплера может принимать значения

$$E_n = - \frac{\mu e^4 Z^2}{2\hbar^2 \left(n + |m| + \frac{1}{2} \right)^2}$$

$(n = 0, 1, 2, \dots, |m| = 0, 1, 2, \dots)$.

Такой энергии будет соответствовать функция

$$\Psi_{nm}(\rho, \varphi) = e^{im\varphi} \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-\gamma \frac{\rho}{a}} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{|m| + \frac{1}{2}} \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{\rho}{a} \right)^k.$$

60. Для частицы в центральном поле

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} P_{lm}(\cos \vartheta) \cdot f(r).$$

Ее радиальная часть $f(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} + \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) f = 0$$

при $r < R$ и $f=0$ при $r > R$ (см. задачу 50). Таким образом, для f , являющейся решением написанного выше уравнения, граничные условия будут: $f(R) = 0$.

После введения $k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$ и $\chi(r) = \sqrt{r} \cdot f(r)$ для $\chi(r)$ получается уравнение Бесселя:

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr} + \left[k^2 - \frac{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2}{r^2} \right] \chi = 0.$$

Так как при $r \rightarrow 0$ функция $\chi = \mathcal{J}_{\pm \left(l + \frac{1}{2} \right)}(kr) \rightarrow r^{\pm \left(l + \frac{1}{2} \right)}$, то удовлетворять требованию конечности будет только

$$\mathcal{J}_{l + \frac{1}{2}}(kr) \rightarrow \frac{a}{\sqrt{r}} \sin kr \quad (\text{если } l = 0).$$

Уровни энергии, соответствующие этим функциям, получатся из условий непрерывности функции при $r=R$, т. е. из условия $\mathcal{J}_{l + \frac{1}{2}}(kR) = 0$. Обозначая корни этой функции Бесселя через $b_n^{(l)}$,

запишем уровни энергии

$$E_n^{(l)} = \frac{\hbar^2 (b_n^{(l)})^2}{2\mu R^2}.$$

Очевидно, при $l=0$

$$b_n^{(0)} = n\pi \text{ и } E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2\mu R^2}.$$

61. Аналогично задаче 59 получаем

$$E_n = -\frac{Z^2 \mu e^4}{2\hbar^2 n^2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\psi_{nlm} = U_{nl}(\rho) P_{lm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi} = e^{-\rho/n} \sum_{k=l}^{n-1} a_{kl} \rho^k P_{lm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi},$$

где $l=0, 1, 2, \dots, n-1, m=0, \pm 1, \dots, \pm l$ и

$$a_k = \frac{2 \left(\frac{k}{n} - 1 \right) a_{k-1}}{k(k+1) - l(l+1)}.$$

Переменная $\rho = r/a$, где $a = \frac{\hbar^2 Z}{\mu e^2}$.

Степень вырождения уровня E_n равна n^2 .

62. Так как составляющие вектора ∇ в сферических координатах равны

$$\frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

а вектор плотности тока

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2\mu} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi),$$

где

$$\psi = \psi_{nlm} = U_{nl}(\rho) P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

(см. задачу 61), то ввиду вещественности $U_{nl}(\rho)$ и полинома Лежандра $P_{lm}(\cos \theta)$

$$j_r = 0 \text{ и } j_\theta = 0.$$

Для j_φ , подставляя написанные выше выражения, получаем

$$j_\varphi = \frac{i\hbar}{2\mu r \sin \theta} \left(\psi_{nlm} \frac{\partial \psi_{nlm}^*}{\partial \varphi} - \psi_{nlm}^* \frac{\partial \psi_{nlm}}{\partial \varphi} \right) = \frac{\hbar m}{\mu r \sin \theta} |\psi_{nlm}|^2.$$

63. Для электрона, находящегося в атоме водорода на уровне с наименьшей энергией, $n=1, l=0, m=0$. Согласно задаче 61, этому состоянию соответствует функция $\psi_{100} = C e^{-r/a}$. Константа C определяется из условия нормировки:

$$\int |\psi_{100}|^2 d\tau = 4\pi C^2 \int_0^\infty e^{-2r/a} r^2 dr = \pi C^2 a^3 = 1.$$

Интеграл берется как $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = n!$. Тогда $|\psi_{100}|^2 d\tau$ выражает вероятность найти частицу в $d\tau$, и с ее помощью вычисляем

$$\langle r \rangle = \int_0^{\infty} r |\psi_{100}|^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4}{a^3} \int_0^{\infty} e^{-2r/a} r^3 dr = \frac{4}{a^3} \frac{3!}{2^4} \cdot a^4 = \frac{3}{2} a;$$

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^{\infty} r^2 |\psi_{100}|^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4}{a^3} \int_0^{\infty} e^{-2r/a} r^4 dr = 3a^2.$$

Наиболее вероятное значение r_0 находим, приравняв нулю производную выражения $|\psi_{100}|^2 r^2 - C^2 e^{-2r/a} r^2$, определяющего вероятность найти электрон на заданном расстоянии от начала координат:

$$\frac{d}{dr} (e^{-2r/a} r^2) |_{r=r_0} = e^{-2r_0/a} \left(2r_0 - \frac{2}{a} r_0^2 \right) = 0.$$

Отсюда $r_0 = a$.

64. Так как потенциальная энергия от углов не зависит, то

$$\psi(r, \theta, \varphi) = U(r) P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

и радиальная часть функции $U(r)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{l(l+1)U}{r^2} \right) - \left(\frac{e^2}{r} + \frac{C}{r^2} \right) U = EU. \quad (1)$$

Переходя к безразмерной координате $\rho = r/a$ (где $a = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$) и энергии $\varepsilon = \frac{2E\hbar^2}{\mu e^4} = -\gamma^2$ (исследуем только дискретный спектр энергии при $E < 0$), объединяя в уравнении (1) члены вида $1/r^2$ и обозначая $l(l+1) - \frac{2\mu C}{\hbar^2} = s(s+1)$, можем переписать его в виде

$$\frac{d^2 U}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dU}{d\rho} - \frac{s(s+1)}{\rho^2} U + \left(\frac{2}{\rho} - \gamma^2 \right) U = 0.$$

Это уравнение совпадает с тем, которое решалось в задаче 61 с заменой l на s . Его можно решить и несколько иначе. Введем функцию $\chi = rU$; для нее получается уравнение

$$\frac{d^2 \chi}{d\rho^2} + \left[\frac{2}{\rho} - \gamma^2 - \frac{s(s+1)}{\rho^2} \right] \chi = 0.$$

Обычным методом находим $\chi_{\infty} \sim e^{-\gamma\rho}$ и $\chi_0 = \rho^{s+1}$ (второе решение $\chi_0 \sim \rho^{-s}$ при $s > 0$ не годится). Подстановка $\chi(\rho) = e^{-\gamma\rho} \rho^{s+1} f$ приводит к уравнению для f

$$\rho \frac{d^2 f}{d\rho^2} + [2(s+1) - 2\gamma\rho] \frac{df}{d\rho} - 2[\gamma(s+1) - 1] f = 0,$$

решение которого ищем в виде степенного ряда

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при ρ^k , получаем

$$a_{k+1} = a_k \frac{2[\gamma(k+s+1)-1]}{(k+1)(k+2s+2)} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Чтобы f при $\rho \rightarrow \infty$ не обращалась в $e^{2\gamma\rho}$ (что видно из предельного отношения $\frac{a_{k+1}}{a_k} \underset{k \gg 1}{=} \frac{2\gamma}{k}$), необходимо оборвать ряд, т. е. нужно, чтобы

$$\gamma = \sqrt{-\frac{2\hbar^2 E}{\mu e^4}} = \frac{1}{k+s+1}.$$

Таким образом, уровни энергии частицы определяются формулой

$$E_{ks} = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2(k+s+1)^2},$$

где $k=0, 1, \dots$, а $s = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2\mu C}{\hbar^2}} \approx l - \frac{\mu C}{\hbar^2 \left(l + \frac{1}{2}\right)}$, если

$\frac{2\mu C}{\hbar^2} \ll l + \frac{1}{2}$. Если ввести $k+l+1 = n$ — главное квантовое число, то

$$E_{nl} = \frac{-\mu e^4}{2\hbar^2 \left[n - \frac{\mu C}{\hbar^2 \left(l + \frac{1}{2} \right)} \right]^2}$$

оказывается зависящим от n и l , а собственные функции, соответствующие этим уровням,

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = e^{-\gamma\rho} \rho^s \sum_{p=0}^k a_p \rho^p P_{lm}(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

зависят от чисел n , l и m . Таким образом оказывается, что E_{nl} вырожден $(2l+1)$ раз (так как $m=0, \pm 1, \dots, \pm l$).

65. Как обычно полагаем $\psi(r, \theta, \varphi) = U(r) P_{lm}(\cos\theta) e^{im\varphi}$ и для функции $F = rU$ получаем задачу, аналогичную задаче 58. Ее решение дает

$$E_{nl} = \hbar \sqrt{\frac{B}{2\mu}} \left[4n+2 + \sqrt{(2l+1)^2 + \frac{8\mu A}{\hbar^2}} \right];$$

$$U = \frac{e^{-\xi/2}}{\sqrt{\xi}} \sum_{k=0}^n a_k \xi^k,$$

где $\xi = \frac{\sqrt{2\mu B}}{\hbar} r^2$,

$$a_{k+1} = a_k \frac{k-n}{(k+1) \left(k + 2\alpha + \frac{1}{2} \right)} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

и

$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{(2l+1)^2 + \frac{8\mu A}{\hbar^2}}.$$

66. Используя решения задач 49 и 52, можно написать решение в виде

$$\begin{aligned} \psi_{n_1, n_2}(x, y, z) &= A e^{-\xi^{1/2}} H_n(\xi) \cdot \sin \frac{n_1 \pi y}{a} \cdot \sin \frac{n_2 \pi z}{b}; \\ \xi &= \sqrt{\frac{\mu \omega}{\hbar}} \cdot x \end{aligned}$$

при $0 \leq y \leq a$; $0 \leq z \leq b$; в остальной части пространства $\psi = 0$ и соответствующие этой функции уровни энергии

$$E_{n_1, n_2} = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 n_1^2 \pi^2}{8\mu a^2} + \frac{\hbar^2 n_2^2 \pi^2}{8\mu b^2}.$$

Из условия нормировки

$$A^2 = \frac{4}{ab} \sqrt{\frac{\mu \omega}{\hbar \pi}} \cdot \frac{1}{2^n \cdot n!}.$$

67. Обычную координату обозначим через r' и оператор Лапласа, взятый по r' , — через Δ' . Переходя к безразмерным переменным заменой $r' = ar$, $\Delta' = \frac{\Delta}{a^2}$ (где $a = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$ — боровский радиус) и к безразмерной энергии, полагая $E = \varepsilon \frac{e^2}{a} - \varepsilon \frac{\mu e^4}{\hbar^2}$, напишем в этих переменных уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода:

$$-\frac{1}{2} \Delta \psi - \frac{1}{r} \psi = \varepsilon \psi.$$

В параболических координатах (см. приложение 4) оно примет вид

$$\frac{2}{u+v} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(v \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{2}{u+v} \psi + \varepsilon \psi = 0.$$

Очевидно, можно разделить переменные

$$\psi(u, v, \varphi) = U(u) V(v) \Phi(\varphi).$$

При этом $\Phi(\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \text{const} = -m^2,$$

откуда

$$\Phi = e^{im\varphi},$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Подставляя $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \Phi^2} = -m^2 \psi$ и умножая всё уравнение на $\frac{u+v}{2}$, получаем одностепенные уравнения для $U(u)$ и $V(v)$:

$$\frac{d}{du} \left(u \frac{dU}{du} \right) - \frac{m^2}{4u} U + \frac{\varepsilon}{2} uU + \alpha U = 0; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dv} \left(v \frac{dV}{dv} \right) - \frac{m^2}{4v} V + \frac{\varepsilon}{2} vV + \beta V = 0, \quad (2)$$

причем

$$\alpha + \beta = 1. \quad (3)$$

Ищем решение уравнения (1), исследуя $U(u)$ при $u \rightarrow \infty$ и $u \rightarrow 0$. Очевидно, U_∞ определяется из уравнения

$$\frac{d^2 U_\infty}{du^2} + \frac{\varepsilon}{2} U_\infty = 0 \text{ т. е. } U_\infty = e^{\pm \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2}} u} \quad u \geq 0.$$

При $\varepsilon > 0$ оба решения конечны, и спектр энергии непрерывен: при $\varepsilon < 0$ конечным остается только $U_\infty = e^{-\sqrt{|\varepsilon|/2} u}$. Найдем спектр $\varepsilon < 0$.

При $u \rightarrow 0$ ищем $U_0 = u^\gamma$, приравнявая нулю коэффициент при наименьшей степени u , получаем $\gamma^2 - \frac{m^2}{4} = 0$, или $\gamma = \pm m/2$. Для конечности U_0 следует положить $\gamma = |m|/2$.

Общее решение ищем в виде

$$U = u^{|m|/2} e^{-\sqrt{-\frac{\varepsilon}{2}} u} \cdot F(u), \text{ где } F = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k.$$

Уравнение для $F(u)$ в виде

$$u \frac{d^2 F}{du^2} + \left(|m| + 1 - 2u \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2}} \right) \frac{dF}{du} + \left[\alpha - (|m| + 1) \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2}} \right] F = 0$$

приводит к рекуррентным соотношениям для a_k , которые получаем, приравнявая нулю коэффициент при u^k ($k=0, 1, 2, \dots$):

$$a_{k+1} = a_k \frac{\sqrt{-\frac{\varepsilon}{2}} (2k + |m| + 1) - \alpha}{(k+1)(k + |m| + 1)} \approx a_k \frac{2 \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2}}}{k} \quad \text{при } k \gg 1.$$

Для больших u , когда определяющую роль в F играют члены с $k \gg 1$, $F(u) \rightarrow e^2 \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2}} u \left(\text{так как } e^{\rho x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho x)^k}{k!} \text{ и в этом ряду отношение коэффициентов при } x^{k+1} \text{ и } x^k \text{ равно } \frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!} : \frac{\rho^k}{k!} \approx \frac{\rho}{k} \right)$. Следовательно,

$$U = e^{-\sqrt{-\frac{\varepsilon}{2}} u} \cdot F \cdot u^{|m|/2} \rightarrow e^{+\sqrt{-\frac{\varepsilon}{2}} u} \cdot u^{|m|/2}$$

и будет стремиться к бесконечности при $u \rightarrow \infty$.

Таким образом, ряд для $F(u)$ должен обрываться, а это возможно, если при некотором $k = n_1$ будет справедливим равенство

$$\alpha = \sqrt{-\frac{\epsilon}{2}(2n_1 + |m| + 1)}.$$

Тогда $F(u) = \sum_{k=0}^{n_1} a_k u^k = F_{n_1}(u)$ станет полиномом степени n_1 и U будет всюду конечно.

Аналогично решая уравнение (2), получаем для $V(v)$:

$$\beta = \sqrt{-\frac{\epsilon}{2}(2n_2 + |m| + 1)} \text{ и } V_{n_2} = e^{-\sqrt{-\frac{\epsilon}{2}} \cdot v} \cdot v^{|m|/2} \cdot F_{n_2}(v),$$

а из условия (3) вытекает, что

$$\sqrt{-\frac{\epsilon}{2}} \cdot 2(n_1 + n_2 + |m| + 1) = 1.$$

Вводя число $n = n_1 + n_2 + |m| + 1$ (главное квантовое число), которое, очевидно, может принимать значения $n = 1, 2, \dots$, имеем

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= -\frac{1}{2n^2} \text{ и } \psi_{n_1, n_2, m}(u, v, \varphi) = CU_{n_1}(u) \cdot V_{n_2}(v) e^{m i \varphi} = \\ &= Ce^{-\frac{u+v}{2n}} \cdot u^{|m|/2} \cdot v^{|m|/2} F_{n_1}(u) \cdot F_{n_2}(v) \cdot e^{i m \varphi}. \end{aligned}$$

68. При $l=0$ функция в поле центральных сил сводится к ее радиальной части $\psi = R(r)$, удовлетворяющей уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (R \cdot r) \right] - V_0 e^{-r/a} R = ER.$$

Ограничимся значениями $E < 0$. Введем новую функцию $\chi = Rr$ и перейдем к переменной $y = e^{-r/2a}$. Тогда χ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 \chi}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d\chi}{dy} + \left(C^2 - \frac{q^2}{y^2} \right) \chi = 0,$$

причем

$$C^2 = \frac{8\mu V_0 a^2}{\hbar^2}, \quad q^2 = -\frac{8\mu E a^2}{\hbar^2} > 0.$$

Это уравнение Бесселя, общее решение которого

$$\chi = C_1 \mathcal{J}_q(Cy) + C_2 \mathcal{J}_{-q}(Cy).$$

При $y \rightarrow 0$ (т. е. при $r \rightarrow \infty$) χ должно оставаться конечным, а при этом $\mathcal{J}_{-q} \sim y^{-q}$ обращается в бесконечность, следовательно, $C_2 = 0$. При $r \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 1$) $\chi = rR$ должно также быть равным нулю, следовательно, $\mathcal{J}_q(C) = 0$, т. е. C должны быть корнями функции Бесселя q -го порядка. Так как с возрастанием q значения корней \mathcal{J}_q растут, а первый корень \mathcal{J}_0 приблизительно равен $2,4 \dots$, то можно получить оценку $C > 2,4$, т. е.

$$a^2 V_0 > \frac{\hbar^2}{8\mu} \cdot 2,4^2 = \frac{\hbar^2}{\mu} \cdot 0,72.$$

Это условие того, чтобы в потенциальной яме глубиной порядка V_0 и шириной порядка a был хотя бы один уровень энергии. При $r > a$, когда $y \rightarrow 0$ можно получить более простой вид волновой функции:

$$\mathcal{J}_q(Cy) = Ay^q = Ae^{-\frac{rq}{2a}} = Ae^{-\frac{V-2\mu E}{\hbar}} r$$

69. Прежде всего свяжем решения $\psi(x)$ и $\psi(x+l)$. Из уравнений Шредингера для x и $x+l$:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) &= E\psi(x), \\ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\psi(x+l)}{d(x+l)^2} + V(x+l)\psi(x+l) &= E\psi(x+l) \end{aligned}$$

видим, что в силу $V(x+l) = V(x)$ и $\frac{d^2}{d(x+l)^2} = \frac{d^2}{dx^2}$, одному уровню E отвечают $\psi(x)$ и $\psi(x+l)$. Считая E простым собственным значением, получаем, что эти функции могут различаться лишь постоянным множителем, т. е.

$$\psi(x+l) = \rho\psi(x).$$

В общем случае очевидно можно получить

$$\psi(x+nl) = \rho^n\psi(x) \quad (n=0, \pm 1, \dots). \quad (1)$$

Тогда из требования конечности $\psi(x)$ следует, что $|\rho| = 1$, т. е. $\rho = e^{ikl}$, где k — произвольное вещественное число, и

$$\psi(x+l) = e^{ikl}\psi(x). \quad (2)$$

Решив уравнение Шредингера при $-b \leq x \leq 0$ (область I), при $0 \leq x \leq a$ (II) и $a \leq x \leq l$ (III) и воспользовавшись условием (2), очевидно, будем иметь решение при всех x .

I область. Уравнение имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\psi_I}{dx^2} + V_0\psi_I = E\psi_I.$$

Обозначая $\frac{2\mu(V_0-E)}{\hbar^2} = \lambda^2$, можем написать

$$\psi_I = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}.$$

II область ($V=0$). Уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} = E\psi_{II}$$

имеет решение

$$\psi_{II} = C_3 e^{i\kappa x} + C_4 e^{-i\kappa x},$$

где $\kappa^2 = 2\mu E/\hbar^2$.

III область ($V=V_0$). Уравнение такое же, как в области I, т. е.

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\psi_{III}}{dx^2} + V_0\psi_{III} = E\psi_{III},$$

его решение

$$\psi_{III} = C_5 e^{\lambda x} + C_6 e^{-\lambda x}.$$

Если x лежит в области I, то $x+l$ попадает в III и, согласно формуле (2), решения будут связаны условием

$$\psi_{III}(x+l) = e^{ikl} \psi_I(x).$$

Следовательно, $C_5 = C_1 e^{ikl-\lambda l}$; $C_6 = C_2 e^{ikl+\lambda l}$, т. е.

$$\psi_{III} = e^{ikl} (C_1 e^{\lambda(x-l)} + C_2 e^{-\lambda(x-l)}).$$

Решения ψ_I , ψ_{II} , ψ_{III} должны быть непрерывны при переходе из области I в II ($x=0$) и из II в III (точка $x=a$) вместе с их первыми производными. Это приводит к равенствам:

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \text{ и } C_1 + C_2 = C_3 + C_4;$$

$$\left. \frac{d\psi_I}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\psi_{II}}{dx} \right|_{x=0} \text{ и } \lambda(C_1 - C_2) = i\kappa(C_3 - C_4);$$

$$\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a) \text{ и } C_3 e^{i\kappa a} + C_4 e^{-i\kappa a} = e^{ikl} (C_1 e^{-\lambda b} + C_2 e^{\lambda b}).$$

$$\left. \frac{d\psi_{II}}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{d\psi_{III}}{dx} \right|_{x=a} \text{ и } i\kappa(C_3 e^{i\kappa a} - C_4 e^{-i\kappa a}) = \lambda e^{ikl} (C_1 e^{-\lambda b} - C_2 e^{\lambda b}).$$

Получена система четырех линейных однородных уравнений относительно коэффициентов C_1, C_2, C_3, C_4 . Для существования решения, отличного от нуля, необходимо, как известно, чтобы детерминант этой системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \lambda & -\lambda & -i\kappa & i\kappa \\ -e^{ikl-\lambda b} & -e^{ikl-\lambda b} & e^{i\kappa a} & e^{-i\kappa a} \\ -\lambda e^{ikl-\lambda b} & \lambda e^{ikl-\lambda b} & i\kappa e^{i\kappa a} & -i\kappa e^{-i\kappa a} \end{vmatrix} = 0$$

Вычисление этого детерминанта приводит к уравнению, определяющему энергию частицы, находящейся в периодическом поле:

$$f(E) = \operatorname{ch} \lambda b \cos \kappa a + \frac{\lambda^2 - \kappa^2}{2\lambda\kappa} \operatorname{sh} \lambda b \sin \kappa a = \cos kl. \quad (3)$$

Слева энергия входит через величины κ и l . Чтобы это равенство было возможным, необходимо, очевидно, чтобы $|f(E)| \leq 1$. Можно убедиться, что при $\kappa a = n\pi$ оно нарушается, так как $f(E) = \pm \operatorname{ch} \lambda b$ и $|f(E)| > 1$. Таким образом, энергии

$$E = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2\mu a^2}$$

оказываются запрещенными для электрона в периодическом поле (кристалле).

70. Полученное в задаче 69 уравнение (3) в предельном случае, когда $V_0 \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow 0$ так, что $\lambda b \rightarrow 0$ и $\frac{\operatorname{sh} \lambda b}{\lambda b} \rightarrow 1$, переходит

в уравнение

$$f(E) = \cos \kappa l + P \frac{\sin \kappa l}{\kappa l} = \cos kl, \quad (1)$$

где $P = \lim_{\substack{V_0 \rightarrow \infty \\ b \rightarrow 0}} \frac{\lambda^2 ab}{2}$. Если обозначить $\frac{P}{\kappa l} = \operatorname{tg} \beta$, то оно примет вид

$$\frac{\cos(\kappa l - \beta)}{\cos \beta} = \cos kl.$$

Очевидно, границы энергетических зон будут лежать вблизи $\cos(\kappa l - \beta) = \pm \cos \beta$, т. е. при $\kappa l = n\pi$ или $\kappa l - 2\beta = n\pi$. Подставив $\kappa l = n\pi - \varepsilon$, получим

$$(-1)^n (\cos \varepsilon - \operatorname{tg} \beta \sin \varepsilon) = \cos kl.$$

Для $0 < \varepsilon \ll 1$ стоящее слева выражение меньше 1. Следовательно $\kappa l = n\pi$ являются точками, в которых начинаются запрещенные полосы энергии. Таким же образом можно убедиться, что $\kappa l = n\pi + 2\beta$ — нижние границы разрешенных полос энергии (начала). Полоса энергии с номером n определяется κl , лежащими в пределах:

$$(n-1)\pi + 2\beta \leq \kappa l \leq n\pi.$$

Если $\kappa l \gg 1$, то $\beta = \operatorname{arctg} \frac{P}{\kappa l} \approx \frac{P}{n\pi}$ и ширина запрещенной полосы между n -ой и $(n+1)$ -ой разрешенными полосами равна:

$$\Delta(\kappa_n l) = 2\beta = \frac{2P}{n\pi}.$$

Если рассмотреть значение $\kappa = \kappa_0$, которому отвечает $kl = 0$, и разложить вблизи этой точки левую и правую части равенства (1) как $f(E) = A(\kappa_0) + B(\kappa - \kappa_0)$ и $\cos kl = 1 - \frac{k^2 l^2}{2}$, то из уравнения

$$A + B(\kappa - \kappa_0) = 1 - \frac{k^2 l^2}{2}$$

можно получить

$$\kappa = C + Dk^2.$$

Поскольку $\kappa = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}$, то $E = E_0 + F \cdot k^2$. Коэффициенты C, D, E_0 и F могут быть выражены через A, B и κ_0 .

71. Введем $kl = \xi$ и запишем уравнение (1) задачи 70 как

$$f(\xi) = \cos \xi + \frac{P \sin \xi}{\xi} = \cos kl.$$

В задаче 70 было показано, что правой границей разрешенной зоны является $\xi = n\pi$ и в этой точке $f(\xi) = (-1)^n$. В запрещенной зоне, где $\xi > n\pi$, $|f| > 1$ и равенство возможно для комплексных значений kl .

Если $f(\xi) > 1$, то $\cos kl = \operatorname{ch} \mu > 1$; $kl = i\mu$. Если $f(\xi) < -1$, то $\cos kl = -\operatorname{ch} \mu < -1$; $kl = i\mu + \pi$.

Функция $f(\xi) > 1$ при $\xi \geq 2n\pi$, когда $\sin \xi > 0$, и $f(\xi) < -1$ при $\xi \geq (2n+1)\pi$ и $\sin \xi < 0$. Таким образом, если ввести $\varepsilon = \pm 1$ так, чтобы $\varepsilon \cdot \sin \xi > 0$, то $\cos kl = \varepsilon \operatorname{ch} \mu$ и в запрещенной зоне может быть записано условие

$$\varepsilon \operatorname{ch} \mu = f(\xi) = \frac{P \sin \xi}{\xi} + \cos \xi. \quad (1)$$

Найдем решение уравнения Шредингера для полубесконечного кристалла. Условие (1) задачи 69 теперь будет справедливым только для $n > 0$ (так как при $x < 0$ потенциал уже не периодичен), и, следовательно, $|\rho|$ может быть и меньше единицы. Если ввести $\rho = e^{ikl}$, то это значит, что возможны решения с комплексным k при условии, что $\operatorname{Im}(k) > 0$.

При $x < 0$ уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\psi}{dx^2} + W_0\psi = E\psi$$

имеет решение

$$\psi_{x < 0} = Ae^{\sqrt{q^2 - \xi^2} \frac{x}{l}},$$

где введены обозначения $l\sqrt{\frac{2\mu W_0}{\hbar^2}} = q$, $l\sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}} = \kappa l = \xi$. При этом $\sqrt{q^2 - \xi^2} > 0$.

При $x > 0$ (внутри кристалла) рассмотрим область I: $0 \leq x \leq l$; в ней

$$\psi_I = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}. \quad (2)$$

В области II $l \leq x \leq 2l$ и

$$\psi_{II} = C_3 e^{ix} + C_4 e^{-ix}. \quad (3)$$

Но если выбрать $x=0$, то $x=l$ лежит еще в области I, а поэтому можно считать $C_3 = C_1$ и $C_4 = C_2$ и в силу формулы (1) задачи 69 получить условие:

$$C_1 e^{i\kappa l} + C_2 e^{-i\kappa l} = e^{ikl} (C_1 + C_2),$$

т. е.

$$C_2 = -C_1 \frac{1 - e^{i(\kappa - k)l}}{1 - e^{-i(\kappa + k)l}}, \quad (4)$$

где, по-прежнему, $\xi = \kappa l$. Таким образом, при $x > 0$ функция определена формулой (2) при условии (4).

Условие непрерывности ψ и $\frac{d\psi}{dx}$ в точке $x=0$ дает

$$A - C_1 + C_2 \text{ и } \frac{A \sqrt{q^2 - \xi^2}}{l} = i\kappa (C_1 - C_2).$$

Откуда

$$\sqrt{q^2 - \xi^2} = \frac{e^{ikl} - \cos \xi}{\sin \xi} \cdot \xi. \quad (5)$$

Рассмотрим это равенство для комплексных значений k . Тогда $e^{ikl} = \varepsilon e^{-\mu}$ (где $\varepsilon \sin \xi \geq 0$) и условие (5) дает

$$\sqrt{q^2 - \xi^2} \frac{\sin \xi}{\xi} + \cos \xi = \varepsilon e^{-\mu}. \quad (6)$$

Кроме того, условие (1) тоже должно выполняться. Беря разность равенств (1) и (6), получаем

$$(P - \sqrt{q^2 - \xi^2}) \cdot \frac{\sin \xi}{\xi} = \varepsilon \operatorname{sh} \mu. \quad (7)$$

Так как $\sin \xi$ и ε имеют одинаковый знак, а $\sqrt{q^2 - \xi^2}$, ξ и μ больше нуля, то отсюда получаем

$$P - \sqrt{q^2 - \xi^2} > 0,$$

т. е.

$$q^2 - P^2 < \xi^2 < q^2.$$

Только при этом условии возможно существование дополнительных уровней, отвечающих комплексному k . Возводя в квадрат и вычитая выражения (7) и (1), получаем уравнение, определяющее уровни энергии (ξ):

$$\frac{q^2}{2P} - \sqrt{q^2 - \xi^2} = \xi \operatorname{ctg} \xi. \quad (8)$$

Покажем, что этим лежащим в запрещенной зоне значениям энергии отвечает функция, убывающая с ростом $|x|$ по обе стороны границы кристалл-вакуум (плоскость $x=0$).

Действительно, при $x < 0$ решение $\psi_{x < 0} = A e^{\sqrt{q^2 - \xi^2} \frac{x}{a}}$ обладает этим свойством. При $x > 0$ решение удовлетворяет условию $\psi(x+l) = e^{ikl} \psi(x)$ (периодическое поле), которое можно переписать в виде

$$\frac{\psi(x)}{e^{ikx}} = \frac{\psi(x+l)}{e^{ik(x+l)}} = u(x),$$

где $u(x)$ является периодической функцией. Следовательно, для комплексного k

$$\psi(x) = e^{ikx} u(x) = \varepsilon e^{-\mu x/\varepsilon} \cdot u(x).$$

Таким образом, найдено состояние с энергией, лежащей в запрещенной зоне, и вероятность обнаружить частицу убывает экспоненциально по обе стороны от $x=0$ (от поверхности кристалла). Значение ξ , т. е. положение уровня энергии, можно найти, решая графически уравнение (8).

72. Так как подинтегральная функция $|\hat{A}\psi + i\eta\hat{B}\psi|^2$ неотрицательна, то и

$$\int |\hat{A}\psi + i\eta\hat{B}\psi|^2 d\tau = I(\eta) \geq 0.$$

Он может быть представлен как $I(\eta) = a\eta^2 + b\eta + d$. При этом

$$a = \int (\hat{B}\psi)^* (\hat{B}\psi) d\tau.$$

Обозначая $\hat{B}\psi = \psi_1$ и пользуясь самосопряженностью \hat{B} , получаем

$$a = \int \psi_1 \cdot (\hat{B}\psi)^* d\tau = \int \psi^* \hat{B}\psi_1 d\tau = \int \psi^* \hat{B}^2\psi d\tau = \langle B^2 \rangle.$$

Таким же образом можно показать, что

$$b = i \int [\hat{B}\psi (\hat{A}\psi)^* - (\hat{B}\psi)^* (\hat{A}\psi)] d\tau = i \int \psi^* (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) \psi d\tau = i \langle C \rangle = C';$$

$$d = \int (\hat{A}\psi)^* (\hat{A}\psi) d\tau = \int \psi^* \hat{A}^2\psi d\tau = \langle A^2 \rangle.$$

Уравнение $I(\eta) = 0$ не имеет вещественных корней (различных), условием чего является $b^2 - 4ad \leq 0$, т. е.

$$\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \frac{(C')^2}{4}.$$

Так как оператор, сопряженный \hat{C} ,

$$\hat{C}^+ = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})^+ = -\hat{C}$$

антиэрмитов, то $\langle C \rangle$ мнимо, а $C' = i \langle C \rangle$ вещественно и $(C')^2 > 0$.

Вводя $\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle A \rangle$ и $\Delta\hat{B} = \hat{B} - \langle B \rangle$, можно убедиться, что

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} - \Delta\hat{B}\Delta\hat{A} = \hat{C} \text{ и } \langle \Delta A^2 \rangle \cdot \langle \Delta B^2 \rangle \geq \frac{(C')^2}{4}.$$

Например, если $\hat{A} = \hat{p}_x$, $\hat{B} = \hat{x}$, то

$$\langle \Delta p_x^2 \rangle \cdot \langle \Delta x^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}.$$

73. Так как $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ и $\hat{x} = x$, то (см. задачу 72)

$$\langle p_x^2 \rangle \langle x^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (1)$$

Рассмотрим оператор энергии одномерного гармонического осциллятора:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2 \hat{x}^2}{2}.$$

Очевидно $\langle H \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2} \langle x^2 \rangle$. Заменяя $\langle p^2 \rangle$ величиной $\frac{\hbar^2}{4 \langle \Delta x^2 \rangle}$, имеем

$$\langle H \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8\mu \langle x^2 \rangle} + \frac{\mu\omega^2}{2} \langle x^2 \rangle = f(\langle x^2 \rangle).$$

Выберем $\langle x^2 \rangle$, соответствующее минимуму f , т. е. из условия

$$\frac{\partial f}{\partial \langle x^2 \rangle} = -\frac{\hbar}{8\mu \langle x_0^2 \rangle^2} + \frac{\mu\omega^2}{2} = 0.$$

Подставляя в $f(\langle x^2 \rangle)$, получаем

$$f(\langle x_0^2 \rangle) = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad \langle H \rangle \geq \frac{\hbar\omega}{2}.$$

74. Вводя координату центра тяжести X_C и относительную координату $x = x_1 - x_2$, разделяем переменные и получаем

$$\psi = C e^{i \frac{P X_C}{\hbar}} \cdot e^{-\xi^2/2} \cdot H_n(\xi),$$

где $\xi = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} x$ и $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$,

$$E = \frac{P^2}{2(m_1 + m_2)} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad (n = 0, 1, \dots).$$

75. Разделяя переменные, как в задаче 74, можно искать функцию в виде

$$\psi = F(R_C) \Phi(r),$$

где $F = e^{i \frac{P R_C}{\hbar}}$ и $\Phi = \Phi_{nlm}(r, \nu, \varphi) = U_{nl}(r) P_{lm}(\cos \theta) e^{i m \varphi}$. Здесь $U_{nl} = e^{-r/na} \sum_{k=1}^{n-1} a_k \left(\frac{r}{a}\right)^k$ такое же, как в задаче 61, и

$$E_{n, \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2(m+M)} - \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

(\mathbf{p} непрерывно, $\mu = \frac{mM}{m+M}$; m и M — соответственно массы электрона и ядра).

76. Очевидно, общая потенциальная энергия в этой задаче

$$V(x_1, x_2) = \frac{k}{2} (x_1^2 + x_2^2) + \frac{k_1}{2} (x_1 - x_2)^2,$$

где k и k_1 — упругие постоянные, характеризующие связь частиц с точкой $x=0$ и друг с другом. Вводя координату центра тяжести $X_C = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и относительную координату $x = x_1 - x_2$, получаем уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2 \psi}{dX_C^2} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{M\omega^2}{2} X_C^2 \psi + \mu \frac{\omega_1^2}{2} x^2 \psi = E \psi,$$

где $M = 2m$ — общая масса, $\mu = \frac{m}{2}$ — приведенная масса системы,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{k}{2m}} \quad \text{и} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k+2k_1}{2\mu}} = \sqrt{\frac{k+2k_1}{m}}.$$

Переменные разделяются, и, подставляя $\psi = f(X_C) \cdot F(x)$, получаем два одномерных уравнения для гармонического осциллятора с частотами ω и ω_1 :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2 f}{dX_C^2} + \frac{M\omega^2}{2} X_C^2 f &= E_1 f; \\ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{\mu\omega_1^2}{2} x^2 F &= E_2 F. \end{aligned}$$

Вводя $\xi = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}} X_C$ и $u = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_1}} x$, можем, сравнивая с задачей 52, написать решение

$$\psi_{n_1 n_2} = C e^{-\xi^2/2} H_{n_1}(\xi) \cdot e^{-u^2/2} H_{n_2}(u),$$

где H_n — полином Эрмита, и соответствующий этой функции уровень энергии

$$E_{n_1 n_2} = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_1.$$

77. Частице в такой потенциальной яме с энергией $E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$

в x -представлении отвечает функция $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$ в промежутке $0 \leq x \leq a$; при $x > a$ и $x < 0$ она равна нулю (см. задачу 49).

Распределение по импульсам определяется волновой функцией в p -представлении, к которой можно перейти от $\psi(x)$ по обычному правилу:

$$\Phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \psi_p^*(x) dx,$$

где $\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} e^{ipx/\hbar}$ — собственные функции оператора импульса в x -представлении, нормированные так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_p^*(x) \psi_{p'}(x) dx = \delta(p - p').$$

Подставляя для данного случая $n = 2$, $\psi_2(x)$, получаем

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\hbar}} e^{ipx/\hbar} dx = \sqrt{\frac{2}{a\hbar}} \int_0^a \sin \frac{2\pi x}{a} e^{-ipx/\hbar} dx = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2a\hbar}} \cdot 4\pi a \hbar^2 \frac{e^{-ipa/\hbar} - 1}{4\pi^2 \hbar^2 - p^2 a^2}, \end{aligned}$$

и, следовательно, вероятность найти эту частицу с импульсом, лежащим в интервале $p, p + dp$, равна

$$dW(p) = |\Phi(p)|^2 dp = \frac{32\pi a \hbar^3 \cdot \sin^2\left(\frac{pa}{2\hbar}\right)}{(a^2 p^2 - 4\pi^2 \hbar^2)^2} \cdot dp.$$

78. В x -представлении $\hat{x} = x$. Чтобы перейти к новому представлению, воспользуемся выражением для среднего значения λ через оператор:

$$\langle \lambda \rangle = \int \psi^* \hat{L} \psi dt.$$

Подставим в $\langle x \rangle$ $\psi(x)$ через $\varphi(p)$:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(p) e^{ipx/h} dp.$$

Тогда

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \cdot x \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(p) e^{ipx/h} dp \cdot dx.$$

Меняя порядок интегрирования по p и x , замечая, что $xe^{ipx/h} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} e^{ipx/h}$ и проводя интегрирование по p по частям (причем $\varphi(p) = 0$ на границах интеграла в силу требования интегрируемости $|\varphi(p)|^2$), получаем

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(p) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial e^{ipx/h}}{\partial p} dp dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/h} \cdot i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp dx. \end{aligned}$$

Так как $\int \psi^* \cdot \frac{1}{\sqrt{h}} e^{ipx/h} dx = \varphi^*(p)$, то

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(p) i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p) dp,$$

т. е.

$$\hat{x}_p = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}.$$

Собственные функции \hat{x}_p ищем по общему правилу. Это функции, удовлетворяющие уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial p} = x\varphi(p)$$

и условиями конечности, однозначности и непрерывности. Решение этого уравнения

$$\varphi(p) = Ce^{-ixp/h}$$

будет удовлетворять всем условиям при любом вещественном x ; спектр \hat{x} непрерывный.

79. Для частицы в однородном потенциальном поле $\hat{V} = A\hat{x} = = A i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$ (см. задачу 78). Уравнение для собственных функций оператора энергии в импульсном представлении имеет вид

$$\frac{p^2}{2m} \Phi + i\hbar A \frac{\partial \Phi}{\partial p} = E\Phi.$$

Разделяя переменные, напишем

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = \frac{E - \frac{p^2}{2m}}{i\hbar A} dp, \text{ откуда } \Phi = C e^{\frac{i}{\hbar A} \left(\frac{p^2}{2m} - Ep \right)}.$$

Конечность $\Phi(p)$ обеспечена при любом вещественном E , т. е. спектр энергии непрерывный. Постоянную C определяем из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_E^*(p) \Phi_{E'}(p) dp = \delta(E - E') = C^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar A} (E' - E) p} dp.$$

Так как $\delta(E - E') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E - E') y} dy$, то

$$C^2 = 1/2\pi \hbar A.$$

80. Определим волновые функции для указанного в условии задачи вида потенциала (см. задачу 49).

При $x > \frac{a}{2}$ и $x < -\frac{a}{2}$ $\psi(x) = 0$, на отрезке $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx},$$

где $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$.

Требования непрерывности в точках $x = \pm a/2$ дают

$$\psi\left(-\frac{a}{2}\right) = A e^{-ika/2} + B e^{ika/2} = 0; \quad \psi\left(\frac{a}{2}\right) = A e^{ika/2} + B e^{-ika/2} = 0, \quad (1)$$

откуда $k_n a = n\pi$, и условие (1) сведется к $(A + B) \cos \frac{n\pi}{2} = 0$ или $(A - B) \sin \frac{n\pi}{2} = 0$, т. е. для n четных получим

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a},$$

для n нечетных

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a}$$

(функции пронормированы обычным путем).

Матричный элемент $\langle n | ex | m \rangle = e \int_{-a/2}^{a/2} \psi_n^* x \psi_m dx \neq 0$, очевидно,

только тогда, когда n и m имеют различную четность, в противном случае под интегралом будет нечетная функция и он обратится в нуль. Пусть n — четное, а m — нечетное число. В силу четности подынтегральной функции, вводя $y = \frac{\pi x}{a}$, можем написать:

$$\begin{aligned} \langle n | ex | m \rangle &= 2e \cdot \frac{2}{a} \int_0^{a/2} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot x dx = \\ &= \frac{2ae}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} [\sin(n+m)y + \sin(n-m)y] y dy, \end{aligned}$$

и так как $\int_0^{\pi/2} y \sin(n+m)y dy = \frac{\sin(n+m) \frac{\pi}{2}}{(n+m)^2} = \frac{(-1)^{\frac{n+m-1}{2}}}{(n+m)^2}$, то

$$\langle n | ex | m \rangle = \frac{2ae}{\pi^2} \left[\frac{(-1)^{\frac{n+m-1}{2}}}{(n+m)^2} + \frac{(-1)^{\frac{n-m-1}{2}}}{(n-m)^2} \right] = (-1)^{\frac{n-m+1}{2}} \frac{8aem\pi}{\pi^2 (n^2 - m^2)^2}.$$

Из аналогичных соображений выражение $\langle n | x^2 | m \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \psi_n^* \psi_m dx$ отлично от нуля только, если n и m одинаковой четности. Если n и m четные, то

$$\begin{aligned} \langle n | x^2 | m \rangle &= \frac{4}{a} \int_0^{a/2} x^2 \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \\ &= \frac{2a^2}{\pi^3} \int_0^{\pi/2} y^2 [\cos(n-m)y - \cos(n+m)y] dy = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \frac{8a^2 m \pi}{\pi^3 (n^2 - m^2)^2}, \end{aligned}$$

так как

$$\int_0^{\pi/2} y^2 \cos(n-m)y dy = \frac{\pi}{(n-m)^2} \cos(n-m) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \cdot (-1)^{\frac{n-m}{2}}}{(n-m)^2}.$$

Для нечетных n и m

$$\langle n | x^2 | m \rangle = \frac{4a^2}{\pi^2} \frac{n^2 + m^2}{(n^2 - m^2)^2}.$$

Матричный элемент импульса

$$\langle n | p | m \rangle = \frac{\hbar}{i} \int_{-a/2}^{+a/2} \psi_n^* \frac{d\psi_m}{dx} dx \neq 0,$$

если n и m различной четности, и равен (для четного n и нечетного m):

$$\begin{aligned} \langle n | p | m \rangle &= \frac{\hbar}{i} \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \sin \frac{n\pi x}{a} \frac{d}{dx} \left(\cos \frac{m\pi x}{a} \right) dx = \\ &= -\frac{\hbar}{i} \frac{2m}{a} \int_0^{\pi/2} [\cos(n-m)y - \cos(n+m)y] dy = \\ &= -\frac{\hbar}{i} \frac{2m}{a} \left[\frac{(-1)^{\frac{n-m-1}{2}}}{n-m} - \frac{(-1)^{\frac{n+m-1}{2}}}{n+m} \right] = (-1)^{n-m+1} \frac{\hbar}{ia} \frac{4mn}{n^2 - m^2}. \end{aligned}$$

Если n и m поменяются четностью, результат для $\langle n | p | m \rangle$ оказывается такой же.

81. Уравнение для собственных функций одномерного гармонического осциллятора в p -представлении имеет вид

$$\frac{p^2}{2m} \Phi(p) + \frac{m\omega^2}{2} \left(i\hbar \frac{d}{dp} \right)^2 \Phi(p) = E\Phi(p).$$

Вводя безразмерную переменную $\eta = \frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}}$ и полагая $\frac{2E}{\hbar\omega} = \lambda$, приходим к уравнению, совпадающему с безразмерным уравнением для этой же задачи в x -представлении. Ссылаясь на задачу 52, можем написать

$$\begin{aligned} \Phi_n(p) &= C^{-\eta^2/2} \cdot H_n(\eta) \quad (H_n - \text{полином Эрмита}); \\ E_n &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega. \end{aligned}$$

Таким образом, для гармонического осциллятора распределение по координатам и импульсам однотипно.

82. Для гармонического осциллятора

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{q}^2}{2}$$

и

$$\langle H \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \langle q^2 \rangle \geq 0.$$

Следовательно, оператор \hat{H} не имеет отрицательных собственных значений, т. е. $H_n \geq 0$.

Введя

$$\hat{X} = \hat{p} + im\omega\hat{q}, \quad (1)$$

$$\hat{X}^+ = \hat{p} - im\omega\hat{q} \quad (2)$$

и учитывая, что $\hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p} = -i\hbar$, можем представить

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{q}^2) = \frac{1}{2m} \left[\hat{X}\hat{X}^+ + im\omega(\hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p}) \right] = \frac{1}{2m} \hat{X}\hat{X}^+ + \frac{\hbar\omega}{2}, \quad (3)$$

или

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{X}^+ \hat{X} - \frac{\hbar\omega}{2}.$$

Составим коммутаторы \hat{H} с \hat{X} и \hat{X}^+ :

$$\hat{H}\hat{X} - \hat{X}\hat{H} = \left(\frac{1}{2m} \hat{X}\hat{X}^+ + \frac{\hbar\omega}{2}\right) \hat{X} - \hat{X} \left(\frac{1}{2m} \hat{X}^+ \hat{X} - \frac{\hbar\omega}{2}\right) = \hbar\omega \hat{X};$$

аналогично получим

$$\hat{H}\hat{X}^+ - \hat{X}^+ \hat{H} = -\hbar\omega \hat{X}^+.$$

Записав эти равенства в собственном представлении \hat{H} , где $\langle n | H | n' \rangle = H_n \delta_{nn'}$, получим

$$\begin{aligned} \hbar\omega \langle n | X | n' \rangle &= \langle n | HX | n' \rangle - \langle n | XH | n' \rangle = \\ &= \sum_{n''} [\langle n | H | n'' \rangle \langle n'' | X | n' \rangle - \langle n | X | n'' \rangle \langle n'' | H | n' \rangle] = \\ &= (H_n - H_{n'}) \langle n | X | n' \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\langle n | X | n' \rangle (H_n - H_{n'} - \hbar\omega) = 0,$$

т. е. что $\langle n | X | n' \rangle$ может быть не равным нулю только, если $H_{n'} = H_n - \hbar\omega$. Аналогично $\langle n | X^+ | n' \rangle \neq 0$, если $H_{n'} = H_n + \hbar\omega$. Написав равенство

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{X}^+ \hat{X} - \frac{\hbar\omega}{2}$$

в этом же представлении (диагональный член), получим

$$\langle n | H | n \rangle = H_n = \frac{1}{2m} \sum_{n'} \langle n | X^+ | n' \rangle \langle n' | X | n \rangle - \frac{\hbar\omega}{2}.$$

В сумме может быть отличен от нуля член с $\langle n | X^+ | n' \rangle$ только, если $H_{n'} = H_n + \hbar\omega$ есть тоже собственное значение \hat{H} ; если же это не так, то сумма будет равна нулю и $H_n = -\frac{\hbar\omega}{2}$, что невозможно, в силу сказанного раньше. Следовательно, должно быть верным первое предположение, т. е. если H_n — собственное значение \hat{H} , то и $H_{n'} = H_n + \hbar\omega$ является тоже его собственным значением.

Рассматривая выражение (3), тем же путем получим, что

$$H_n = \frac{1}{2m} \langle n | X | n' \rangle \langle n' | X^+ | n \rangle + \frac{\hbar\omega}{2}, \quad (4)$$

где $H_{n'} = H_n - \hbar\omega$ и либо $H_{n'}$ — тоже собственное значение \hat{H} (т. е. H_n — не наименьшее собственное значение), либо, если это не так, то $\langle n | X | n' \rangle = 0$ и $H_n = \frac{\hbar\omega}{2}$ — нижайший уровень энергии, а следующий от него отстоит на $\hbar\omega$. Таким образом, найдено, что

$$H_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad (5)$$

а $\langle n | X | n-1 \rangle$ и $\langle n | X^+ | n+1 \rangle$, отличны от нуля. Теперь из равенств (4) и (5) можно получить, учитывая, что $(\langle n | X | n-1 \rangle)^* = \langle n-1 | X^+ | n \rangle$, равенство

$$|\langle n | X | n-1 \rangle|^2 = 2mn\hbar\omega.$$

Отсюда

$$\langle n | X | n-1 \rangle = (\langle n | X^+ | n-1 \rangle)^* = \sqrt{2m\hbar\omega n} e^{i\varphi}.$$

Возвращаясь к (1) и (2), получаем (выбирая $e^{i\varphi} = i$):

$$\begin{aligned} \langle n | q | n-1 \rangle &= \langle n-1 | q | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar n}{2m\omega}}; \\ \langle n | p | n-1 \rangle &= (\langle n-1 | p | n \rangle)^* = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} n \cdot i. \end{aligned}$$

83. Основываемся на перестановочных свойствах момента количества движения:

$$\hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_x = i\hbar \hat{L}_z \quad \text{и} \quad \hat{L}_x \hat{L}^2 - \hat{L}^2 \hat{L}_x = 0,$$

где $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$. Введем

$$\hat{X} = \hat{L}_x + i\hat{L}_y \quad \text{и} \quad \hat{X}^+ = \hat{L}_x - i\hat{L}_y.$$

Очевидно, \hat{L}_z , \hat{X} и \hat{X}^+ коммутируют с \hat{L}^2 . Записав равенство $\hat{L}^2 \hat{X} - \hat{X} \hat{L}^2 = 0$ в том представлении, где \hat{L}^2 и \hat{L}_z диагональны, т. е. $\langle l | L^2 | l' \rangle = L_l^2 \delta_{ll'}$, получим

$$\langle lm | X | l' m' \rangle (L_l^2 - L_{l'}^2) = 0,$$

при этом отличными от нуля будут только диагональные по l матричные элементы \hat{X} , а также \hat{X}^+ и \hat{L}_z . Поэтому в дальнейших соотношениях между этими операторами величину \hat{L}^2 можно просто считать ее собственным значением L_l^2 .

Представим \hat{L}^2 в виде:

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 &= (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)(\hat{L}_x - i\hat{L}_y) + i(\hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_x) + \hat{L}_z^2 = \\ &= \hat{X} \hat{X}^+ + \left(\hat{L}_z - \frac{\hbar}{2}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{4}. \end{aligned} \quad (1)$$

С другой стороны,

$$\hat{L}^2 = \hat{X}^+ \hat{X} + \left(\hat{L}_z + \frac{\hbar}{2}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{4}. \quad (2)$$

Составив коммутаторы \hat{L}_z с \hat{X} и с \hat{X}^+ , можно убедиться, что

$$\hat{L}_z \hat{X} - \hat{X} \hat{L}_z = \hat{L}_z (\hat{L}_x + i\hat{L}_y) - (\hat{L}_x + i\hat{L}_y) \hat{L}_z = i\hbar \hat{L}_y + i(-i\hbar \hat{L}_x) = \hbar \hat{X},$$

и аналогично

$$\hat{L}_z \hat{X}^+ - \hat{X}^+ \hat{L}_z = -\hbar \hat{X}^+.$$

Записав эти соотношения в (L^2, L_z) -представлении и обозначив $\langle lm | L_z | lm' \rangle = m\hbar\delta_{mm'}$, находим

$$\hbar\langle lm | X | lm' \rangle = \sum_m [\langle lm | L_z | lm'' \rangle \langle lm'' | X | lm' \rangle - \langle lm | X | lm'' \rangle \times \\ \times \langle lm'' | L_z | lm' \rangle] = \langle lm | X | lm' \rangle \cdot (m - m') \hbar,$$

т. е.

$$\langle lm | X | lm' \rangle \cdot (m - m' - 1) \hbar = 0.$$

Следовательно, $\langle lm | X | lm' \rangle \neq 0$ только, если $m' = m - 1$. Точно так же $\langle lm | X^+ | lm' \rangle \neq 0$ лишь, если $m' = m + 1$.

Написав диагональный (mm -ый) матричный элемент равенства (1), получим

$$L_i^2 = \sum_{m'} \langle lm | X | lm' \rangle \langle lm' | X^+ | lm \rangle + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2 - \frac{\hbar^2}{4}.$$

В сумме может быть отличен от нуля один член, тот, для которого $m' = m - 1$. Если такое $m'\hbar$ не является собственным значением \hat{L}_z , то вся сумма равна нулю и

$$L_i^2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2 - \frac{\hbar^2}{4}.$$

В противном случае

$$L_i^2 > \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2 - \frac{\hbar^2}{4}.$$

Следовательно, для каждого L_i^2 существует некоторое минимальное собственное значение L_z , равное $m_0\hbar$, такое, что

$$L_i^2 = \left(m_0 - \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2 - \frac{\hbar^2}{4},$$

и любое другое собственное значение \hat{L}_z может отличаться от $m_0\hbar$ на целое кратное \hbar .

Запишем диагональный элемент равенства (2):

$$L_i^2 = \sum_{m'} \langle lm | X^+ | lm' \rangle \langle lm' | X | lm \rangle + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2 - \frac{\hbar^2}{4}.$$

Здесь $\langle lm | X^+ | lm' \rangle \neq 0$ только, если существует собственное значение \hat{L}_z , равное $m'\hbar = (m + 1)\hbar$. Если его нет, т. е. если $m\hbar = m_1\hbar$ представляет наибольшее собственное значение \hat{L}_z при данном L_i^2 , то

$$L_i^2 = \left(m_1 + \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2 - \frac{\hbar^2}{4}.$$

Очевидно, что

$$m_1\hbar = -\frac{\hbar}{2} + \sqrt{L_i^2 + \frac{\hbar^2}{4}} \quad (3)$$

— наибольшее собственное значение L_z ;

$$m_0 \hbar = \frac{\hbar}{2} - \sqrt{L_l^2 + \frac{\hbar^2}{4}} \quad (4)$$

— наименьшее собственное значение L_z .

Разность $(m_1 - m_0) \hbar = 2 \sqrt{L_l^2 + \frac{\hbar^2}{4}} - \hbar$ должна быть, очевидно, равна $2l\hbar$, где $2l$ — целое число (так как все собственные значения L_z должны отстоять друг от друга на \hbar). Отсюда

$$2 \sqrt{L_l^2 + \frac{\hbar^2}{4}} = (2l + 1) \hbar \quad \text{и} \quad L_l^2 = l(l + 1) \hbar^2,$$

где l может быть либо целым (если $2l$ четно), либо полуцелым числом, и притом, как видно из самого введения $2l$, неотрицательным, т. е. $l = 0, 1, 2, \dots$ или $l = 1/2, 3/2, \dots$. Подставляя $\sqrt{L_l^2 + \frac{\hbar^2}{4}}$ в (3) и (4), получаем

$$m_1 = m_{\max} = l; \quad m_0 = m_{\min} = -l.$$

Так как $\langle lm' | X^+ | lm \rangle = (\langle lm | X | lm' \rangle)^*$, то

$$L_l^2 = |\langle lm | X | l, m-1 \rangle|^2 + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2 - \frac{\hbar^2}{4},$$

и отсюда

$$\begin{aligned} \langle l, m-1 | X^+ | lm \rangle^* &= \langle lm | X | l, m-1 \rangle = \\ &= \hbar \sqrt{l(l+1) + \frac{1}{4} - \left(m - \frac{1}{2}\right)^2} = \hbar \sqrt{(l+m)(l-m+1)}. \end{aligned}$$

Из определения \hat{X} и \hat{X}^+ следует, что

$$\hat{L}_x = \frac{\hat{X} + \hat{X}^+}{2}, \quad \hat{L}_y = \frac{\hat{X} - \hat{X}^+}{2i}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \langle lm | L_x | l, m-1 \rangle &= \frac{\hbar}{2} \sqrt{(l-m+1)(l+m)} = \langle l, m-1 | L_x | l, m \rangle; \\ \langle lm | L_y | l, m-1 \rangle &= \frac{-i\hbar}{2} \sqrt{(l-m+1)(l+m)} = (\langle l, m-1 | L_y | lm \rangle)^*, \end{aligned}$$

причем $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$.

84. Чтобы найти распределение по энергиям, $\langle E \rangle$ и $\langle E^2 \rangle$, следует, пронормировав функцию $\psi = A(a-x) \cdot x$, разложить ее по нормированным собственным функциям оператора энергии, равным (см. задачу 49):

$$\psi_n = \sqrt{\frac{a}{2}} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Из условия $1 = A^2 \int_0^a x^2 (a-x)^2 dx$ находим $A^2 = \frac{30}{a^6}$. Определим c_n :

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^a \psi(x) \cdot \psi_n^*(x) dx = A \sqrt{\frac{a}{2}} \int_0^a x(a-x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \\ &= A \sqrt{\frac{a}{2}} \left\{ a \left[-\frac{a^2}{n\pi} (-1)^n \right] + \frac{a^3}{n\pi} (-1)^n - \frac{2a^3}{(n\pi)^3} [(-1)^n - 1] \right\} = \\ &= A \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \frac{2a^3}{(n\pi)^3} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

и получим

$$W(E_n) = |c_n|^2 = \frac{240}{(n\pi)^6} [1 - (-1)^n]^2 \neq 0$$

только для $n = 1, 3, 5, \dots$. Для четных n функции ψ и ψ_n оказываются различной четности по отношению к $x - \frac{a}{2}$. Для $n = 1$ ($E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2\mu a^2}$) оказывается

$$W(E_1) = \frac{240 \cdot 2^2}{\pi^6} \approx 0,999,$$

т. е. с подавляющей вероятностью в этом состоянии частица будет иметь энергию E_1 .

Среднюю энергию можно вычислить как $\langle E \rangle = \sum W(E_n) \cdot E_n$ и как

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{H} \psi dx = A^2 \int_0^a x(a-x) \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} \right) [x(a-x)] dx = \frac{5\hbar^2}{\mu a^2}$$

(хотя при $x > a$, $x < 0$. $V = \infty$, но $V\psi = 0$).

Можно проверить, что $\langle E \rangle = \sum_{n=1, 3, 5} \frac{960n^2}{n^6 \pi^6} \cdot \frac{\hbar^2 \pi^2}{2\mu a^2}$ дает тот же результат $\langle E \rangle = \frac{10}{\pi^2} E_1$.

Так как $V^2 \psi$ уже нельзя считать равным нулю, величину $\langle E^2 \rangle$ можно вычислить как

$$\begin{aligned} \langle E^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{H}^2 \psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{H}\psi)^* (\hat{H}\psi) dx = \\ &= \int_0^a \left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} [Ax(a-x)] \right\}^2 dx = \left(\frac{\hbar^2}{\mu} A \right)^2 \cdot a = \frac{\hbar^4 \cdot 30}{\mu^2 a^4}, \end{aligned}$$

или

$$\langle E^2 \rangle = \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{960}{n^6 \pi^6} \frac{\hbar^4 \pi^4 n^4}{4\mu^2 a^4} = \frac{\hbar^4}{\mu^2 a^4} \cdot \frac{240}{\pi^2} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Отсюда

$$\langle \Delta E^2 \rangle = \langle E^2 \rangle - (\langle E \rangle)^2 = \frac{5\hbar^4}{\mu^2 a^4}.$$

85. Нормированную исходную функцию запишем в виде

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \left[1 - \frac{1}{2} e^{i \cdot 2\varphi} - \frac{1}{2} e^{-i \cdot 2\varphi} \right],$$

из которого ясно, что при измерении момента можно получить значения $L_z = 0, +2\hbar, -2\hbar$ с вероятностями

$$W(0) = \frac{2}{3}, \quad W(2) = W(-2) = \frac{1}{6};$$

$$\langle L_z \rangle = 0, \quad \langle L_z^2 \rangle = \frac{4}{3} \hbar^2.$$

86. Для частицы, локализованной в точке x_0 , надо написать волновую функцию как собственную функцию оператора \hat{x} . В x -представлении $\hat{x} = x$ и уравнение сводится к $x\psi = x_0\psi$, т. е. $(x - x_0)\psi = 0$ и $\psi(x) \neq 0$ при $x = x_0$. Таким образом $\psi(x) = A\delta(x - x_0)$; спектр непрерывный. Условие нормировки

$$A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \delta(x - x'_0) dx = \delta(x_0 - x'_0)$$

даёт $A = 1$, т. е. $\psi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$.

В p -представлении $\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$ (см. задачу 77) и его собственные функции получаются из уравнения

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial p} = x_0 \varphi, \text{ откуда } \varphi_{x_0}(p) = C e^{-ix_0 p/\hbar}.$$

Постоянная C определяется из $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{x_0}(p) \varphi_{x_1}(p) dp = \delta(x_1 - x_0)$, откуда

$$C^2 = \frac{1}{\hbar}$$

(так как $\delta(x_1 - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x_1 - x_0)t} dt$).

Аналогично собственные функции импульса равны:

$$\psi_p(x) = C e^{ip_0 x/\hbar} \text{ и } \varphi_p(p) = \delta(p - p_0).$$

87. Чтобы написать соотношение, аналогичное связи

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \psi_1(\mathbf{r})$$

в p -представлении, следует обе функции преобразовать к этому представлению. Пусть

$$\varphi(\mathbf{p}) = \frac{1}{h^{3/2}} \int \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} d\mathbf{r}$$

и

$$\varphi_1(\mathbf{p}) = \frac{1}{h^{3/2}} \int \psi_1(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} d\mathbf{r}.$$

Подставим в первый интеграл $\psi(\mathbf{r}) = \frac{\psi_1(\mathbf{r})}{r}$ и запишем $\frac{1}{r}$ в виде разложения по плоским волнам. Пусть

$$\frac{1}{r} = \int a(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{k}.$$

Чтобы найти $a(\mathbf{k})$, применим к этому равенству оператор Лапласа:

$$\Delta \frac{1}{r} = \int a(\mathbf{k}) \Delta e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{k} = - \int a(\mathbf{k}) k^2 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{k}.$$

С другой стороны,

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{k}$$

и, следовательно, $a(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi^2\hbar^2}$.

Заменяя $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}_1}{\hbar}$, $d\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{p}_1}{\hbar^3}$, окончательно напишем

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi^2\hbar} \int \frac{1}{p_1^2} e^{i\frac{\mathbf{p}_1\mathbf{r}}{\hbar}} d\mathbf{p}_1.$$

Тогда

$$\varphi(\mathbf{p}) = \frac{1}{h^{3/2}} \int \frac{1}{r} \psi_1(\mathbf{r}) e^{-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{r}}{\hbar}} d\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi^2\hbar} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{p_1^2} \left(\frac{1}{h^{3/2}} \int \psi_1(\mathbf{r}) e^{-\frac{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\mathbf{r}}{\hbar}} d\mathbf{r} \right),$$

и так как выражение, стоящее в скобках, есть по определению $\varphi_1(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)$, то

$$\varphi(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi^2\hbar} \int \frac{\varphi_1(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)}{p_1^2} d\mathbf{p}_1,$$

или, после замены $\mathbf{p}-\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'$,

$$\varphi(\mathbf{p}) = \int \frac{1}{2\pi^2\hbar} \frac{d\mathbf{p}'}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2} \varphi_1(\mathbf{p}').$$

Оператор $\frac{\hat{1}}{r}$ в p -представлении является интегральным оператором.

88. Волновая функция для частицы в поле центральных сил имеет вид

$$\psi_{nlm} = R_{nl}(r) P_{lm}(\cos\theta) e^{im\varphi}.$$

Вычислим матричный элемент $D_z = ez$:

$$\langle nlm | D_z | n'l'm' \rangle = \int \psi_{nlm}^* ez \psi_{n'l'm'} d\tau.$$

Очевидно его можно представить в виде произведения интегралов по r , θ , φ :

$$\langle nlm | D_z | n'l'm' \rangle = I_r \cdot I_\theta \cdot I_\varphi.$$

Вид угловой функции одинаков в любом сферически-симметричном поле и поэтому вычисление I_θ и I_φ может быть произведено без конкретизации $V(r)$. Так как

$$z = r \cos \theta, \quad d\tau = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

то, относя к I_φ все множители, зависящие от φ , получаем

$$I_\varphi = \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} \cdot e^{im'\varphi} \, d\varphi = 2\pi \delta_{mm'}$$

и, следовательно,

$$\langle nlm | D_z | n'l'm' \rangle = 0 \quad \text{при } m' \neq m.$$

При $m = m'$ вычисление I_θ дает

$$I_\theta = \int_0^\pi P_{lm}(\cos \theta) \cos \theta P_{l'm}(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta.$$

Вводя $x = \cos \theta$, запишем

$$I_\theta = \int_{-1}^1 P_{lm}(x) x P_{l'm}(x) \, dx.$$

Полиномы Лежандра удовлетворяют такому равенству

$$x P_{lm} = a P_{l+1, m} + b P_{l-1, m},$$

где

$$a = \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1}}; \quad b = \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}}; \quad \int_{-1}^1 P_{lm} P_{l'm} \, dx = \delta_{ll'}.$$

В силу этого

$$I_\theta = \int_{-1}^1 (a P_{l+1, m} + b P_{l-1, m}) \cdot P_{l'm} \, dx = a \delta_{l+1, l'} + b \delta_{l-1, l'}$$

и отличен от нуля только при $l' = l \pm 1$.

Для вычисления матричных элементов D_x и D_y удобнее ввести

$$D_\pm = D_x \pm i D_y = e^{\pm i\varphi} \sin \theta \, \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Составив

$$\langle nlm | D_\pm | n'l'm' \rangle = \int \psi_{nlm}^* r \sin \theta \cdot e^{\pm i\varphi} \psi_{n'l'm'} \, d\tau = I'_l I'_\theta I'_\varphi,$$

можно вычислить I'_φ и I'_θ . Так как

$$I'_\varphi = \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} e^{\pm i\varphi} \cdot e^{im'\varphi} \, d\varphi = 2\pi \delta_{m', m \mp 1},$$

то матричный элемент D_+ отличен от нуля только при $m' = m - 1$, а D_- — при $m' = m + 1$. Вычислим I_θ для D_+ , полагая $m' = m - 1$:

$$I'_\theta = \int_0^\pi P_{lm}(\cos \theta) \cdot \sin \theta \cdot P_{l', m-1}(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Вводя снова $x = \cos \theta$; $\sin \theta = \sqrt{1-x^2}$, получаем

$$I'_\theta = \int_{-1}^1 P_{lm}(x) \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot P_{l', m-1}(x) \cdot dx.$$

Но из теории полиномов Лежандра имеем

$$\sqrt{1-x^2} \cdot P_{l', m-1} = a_1 P_{l'+1, m} + b_1 P_{l'-1, m},$$

где

$$a_1 = \sqrt{\frac{(l'+m)(l'+m+1)}{4(l'+1)^2-1}}; \quad b_1 = -\sqrt{\frac{(l'-m+1)(l'-m)}{4(l')^2-1}},$$

и следовательно,

$$I'_\theta = a_1 \delta_{l, l'+1} + b_1 \delta_{l, l'-1}$$

и не равен нулю при $l' = l \pm 1$.

Для D_- , считая $m' = m + 1$, получаем

$$I'_\theta = \int_{-1}^1 P_{lm}(x) \cdot \sqrt{1-x^2} P_{l', m+1}(x) dx.$$

Заменяя $\sqrt{1-x^2} P_{lm} = a_2 P_{l+1, m+1} + b_2 P_{l-1, m+1}$, где

$$a_2 = \sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{4(l+1)^2-1}}; \quad b_2 = -\sqrt{\frac{(l-m)(l-m-1)}{4l^2-1}},$$

имеем

$$I'_\theta = a_2 \delta_{l+1, l'} + b_2 \delta_{l-1, l'}.$$

Выражения для матричных элементов D_x и D_y получаются очевидным путем:

$$\langle nlm | D_x | n'l'm' \rangle = \frac{1}{2} [\langle nlm | D_+ | n'l'm' \rangle + \langle nlm | D_- | n'l'm' \rangle];$$

$$\langle nlm | D_y | n'l'm' \rangle = \frac{1}{2i} [\langle nlm | D_+ | n'l'm' \rangle - \langle nlm | D_- | n'l'm' \rangle].$$

Ясно, что они отличны от нуля, если $l' = l \pm 1$ и $m' = m \pm 1$.

89. Воспользуемся общим определением

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} (\hat{H}\hat{L} - \hat{L}\hat{H}).$$

Так как $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \hat{V}(\mathbf{r})$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = 0$ и для любых двух составляющих \mathbf{r} верно: $\hat{x}\hat{y} - \hat{y}\hat{x} = 0$, то $\hat{\mathbf{r}}\hat{V} - \hat{V}\hat{\mathbf{r}} = 0$ и

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{i}{2\mu\hbar} (\hat{p}^2\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}\hat{p}^2).$$

Записывая $\mathbf{r} = \hat{i}\hat{x} + \hat{j}\hat{y} + \hat{k}\hat{z}$, а $\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2$ и используя основные перестановочные соотношения квантовой механики $\hat{p}_x\hat{y} - \hat{y}\hat{p}_x = i\hbar\delta_{xy}$, получаем

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{i}{2\mu\hbar} [\mathbf{i} (\hat{p}_x^2\hat{x} - \hat{x}\hat{p}_x^2) + \mathbf{j} (\hat{p}_y^2\hat{y} - \hat{y}\hat{p}_y^2) + \mathbf{k} (\hat{p}_z^2\hat{z} - \hat{z}\hat{p}_z^2)].$$

Но $\hat{p}_x^2\hat{x} - \hat{x}\hat{p}_x^2 = \hat{p}_x\hat{x} - \hat{p}_x\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_x^2$, и соединяя попарно члены, можно из первой пары вынести за скобки слева, а из второй — справа общий множитель \hat{p}_x . Тогда $\hat{p}_x^2\hat{x} - \hat{x}\hat{p}_x^2 = -2i\hbar\hat{p}_x$ и, следовательно,

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{i}{2\mu\hbar} (-2i\hbar) \{\mathbf{i}\hat{p}_x + \mathbf{j}\hat{p}_y + \mathbf{k}\hat{p}_z\} = \frac{\hat{\mathbf{p}}}{\mu}.$$

Оператор $\hat{\mathbf{p}}$ тоже явно не зависит от времени и

$$\frac{d\hat{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}}\hat{H}].$$

В силу того, что $\hat{p}_x\hat{p}_y - \hat{p}_y\hat{p}_x = 0$, это выражение сведется к

$$\frac{d\hat{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{i}{\hbar} (\hat{V}\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}}\hat{V}).$$

Вычислим его в x -представлении. Тогда $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$, $\hat{V} = V(x, y, z)$ и вычисляя выражение

$$(\mathbf{V}\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}}\mathbf{V})\psi(\mathbf{r}) = -i\hbar(\mathbf{V}\cdot\nabla\psi - \nabla(V\psi)) = i\hbar(\nabla V)\cdot\psi,$$

получаем

$$\frac{d\hat{\mathbf{p}}}{dt} = -\nabla V = \mathbf{F}.$$

Так как коммутационные соотношения при переходе к другим представлениям не изменяются, то это соотношение справедливо всегда.

90. Согласно обычным правилам коммутации

$$\frac{d\hat{L}_z}{dt} = \hat{x}\frac{\partial\hat{V}}{\partial y} - \hat{y}\frac{\partial\hat{V}}{\partial x}$$

и \hat{L}_z является интегралом движения в поле с осью симметрии OZ ;

$$\frac{d\hat{L}_z^2}{dt} = i\hbar(\Delta_{yz}V - V\Delta_{yz}) = 0$$

в поле центральных сил, когда $V = V(r)$.

91. Используя правила коммутации координат и импульсов: $\hat{p}_x\hat{y} - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar\delta_{xy}$ составим сначала $\frac{d\hat{x}}{dt}$. Для простоты обозначим $\hat{P}_x = \hat{p}_x - eA_x$. Так как \hat{x} коммутирует с \hat{P}_y и \hat{P}_z (и тем более

с еф), то

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}}{dt} &= \frac{i}{\hbar} (\hat{H}\hat{x} - \hat{x}\hat{H}) = \frac{i}{2\hbar\mu} (\hat{P}_x^2 \hat{x} - \hat{x} \hat{P}_x^2) = \\ &= \frac{i}{2\hbar\mu} [\hat{P}_x (\hat{P}_x \hat{x} - \hat{x} \hat{P}_x) + (\hat{P}_x \hat{x} - \hat{x} \hat{P}_x) \hat{P}_x] = \frac{\hat{P}_x}{\mu}.\end{aligned}$$

Составим $\frac{d\hat{P}_x}{dt} = \frac{d}{dt} (\hat{p}_x - e\hat{A}_x)$. Так как $\mathbf{A}(r, t)$ может зависеть от t , то $\frac{\partial \hat{P}_x}{\partial t} = -e \frac{\partial \hat{A}_x}{\partial t}$ и

$$\frac{d\hat{P}_x}{dt} = -e \frac{\partial \hat{A}_x}{\partial t} + \frac{i}{2\mu\hbar} [\hat{P}_y^2 \hat{P}_x - \hat{P}_x \hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2 \hat{P}_x - \hat{P}_x \hat{P}_z^2] + \frac{ie}{\hbar} (\hat{\varphi} \hat{P}_x - \hat{P}_x \hat{\varphi}).$$

Очевидно,

$$\hat{\varphi} \hat{P}_x - \hat{P}_x \hat{\varphi} = \hat{\varphi} \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{\varphi} = i\hbar \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x}.$$

Обозначим

$$\hat{D} = \hat{P}_y^2 \hat{P}_x - \hat{P}_x \hat{P}_y^2 = \hat{P}_y (\hat{P}_y \hat{P}_x - \hat{P}_x \hat{P}_y) + (\hat{P}_y \hat{P}_x - \hat{P}_x \hat{P}_y) \hat{P}_y.$$

Составим сначала

$$\begin{aligned}\hat{P}_y \hat{P}_x - \hat{P}_x \hat{P}_y &= (\hat{p}_y - e\hat{A}_y) (\hat{p}_x - e\hat{A}_x) - (\hat{p}_x - e\hat{A}_x) (\hat{p}_y - e\hat{A}_y) = \\ &= -e (\hat{p}_y \hat{A}_x - \hat{A}_x \hat{p}_y + \hat{A}_y \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{A}_y);\end{aligned}$$

так как $\hat{p}_y \hat{A}_x - \hat{A}_x \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial \hat{A}_x}{\partial y}$, то

$$\hat{P}_y \hat{P}_x - \hat{P}_x \hat{P}_y = -i\hbar e \left(\frac{\partial \hat{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \hat{A}_x}{\partial y} \right) = -i\hbar e (\text{rot } \mathbf{A})_z$$

и

$$\hat{D} = -i\hbar e (\hat{P}_y \hat{B}_z + \hat{B}_z \hat{P}_y), \text{ где } \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Таким образом:

$$\frac{d\hat{P}_x}{dt} = -e \frac{\partial \hat{A}_x}{\partial t} - e \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} + \frac{e}{2\mu} \{ \hat{P}_y \hat{B}_z + \hat{B}_z \hat{P}_y - \hat{P}_z \hat{B}_y - \hat{B}_y \hat{P}_z \},$$

и так как $-\frac{\partial \hat{A}_x}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} = E_x$, то получена сила Лоренца в операторном виде

$$\frac{d\hat{P}_x}{dt} = -eE_x + \frac{e}{2} (\hat{y} \hat{B}_z + \hat{B}_z \hat{y} - \hat{z} \hat{B}_y - \hat{B}_y \hat{z}),$$

где \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{B} — индукция магнитного поля.

92. Оператор \hat{x}_1 явно от времени не зависит, коммутирует с α_i , α_4 , \mathbf{A} и еф; пользуясь обычными правилами коммутации импульсов

и координат:

$$\hat{p}_i \hat{x}_k - \hat{x}_k \hat{p}_i = -i\hbar \delta_{ik},$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_1}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [c\hat{\alpha}_1(\hat{p}_1 - e\hat{A}_1)\hat{x}_1 - \hat{x}_1 c\hat{\alpha}_1(\hat{p}_1 - e\hat{A}_1)] = \\ &= \frac{i}{\hbar} c\hat{\alpha}_1(\hat{p}_1\hat{x}_1 - \hat{x}_1\hat{p}_1) = c\hat{\alpha}_1. \end{aligned}$$

Обозначив $\hat{p}_1 - e\hat{A}_1 = \hat{P}_1$, вычислим $\frac{d\hat{P}_1}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\hat{p}_1 - e\hat{A}_1) &= -e\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [c\hat{\alpha}_2(\hat{P}_2\hat{P}_1 - \hat{P}_1\hat{P}_2) + \\ &+ c\hat{\alpha}_3(\hat{P}_3\hat{P}_1 - \hat{P}_1\hat{P}_3)] + \frac{i}{\hbar} e(\hat{\varphi}\hat{P}_1 - \hat{P}_1\hat{\varphi}). \end{aligned}$$

Операторы \hat{P}_i коммутируют с α_i , кроме того (см. задачу 91), выражение

$$\hat{P}_1\hat{P}_2 - \hat{P}_2\hat{P}_1 = i\hbar \frac{e}{c} \hat{B}_3, \text{ где } \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A},$$

и

$$\hat{\varphi}\hat{P}_1 - \hat{P}_1\hat{\varphi} = \hat{\varphi}\hat{p}_1 - \hat{p}_1\hat{\varphi} = i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}.$$

Окончательно

$$\frac{d\hat{P}_1}{dt} = -e\frac{\partial A_1}{\partial t} - e\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + e[c\hat{\alpha}_2\hat{B}_3 - c\hat{\alpha}_3\hat{B}_2].$$

С учетом того, что $c\hat{\alpha}_i = \hat{x}_i$, снова получена сила Лоренца в операторной записи.

93. Для системы частиц оператор импульса системы $\hat{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{p}}_i$ и оператор энергии

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m_i} + \sum_{l=1}^N U_l(\mathbf{r}_l) + \sum_{i>k}^N U_{ik}(\mathbf{r}_{ik}),$$

где $\sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_i)$ — потенциальная энергия во внешнем поле,

$\sum_{i>k}^N U_{ik}(\mathbf{r}_{ik})$ — энергия взаимодействия частиц, входящих в систему.

Применяя коммутационные правила, находим

$$\frac{d\hat{\mathbf{P}}}{dt} = -\sum_{k=1}^N \nabla_k U_k.$$

94. Так как $V(x)$ имеет разрыв в точке $x=0$, то, обозначая область $x < 0$ как область I ($V=0$), а область, где $x > 0$, — областью II ($V=V_0$), следует, решив уравнение Шредингера в этих областях, «сшить» решения, т. е. приравнять функции и их первые производные в точке $x=0$.

В области I уравнение Шредингера принимает вид

$$\frac{d^2\psi_I}{dx^2} + k_1^2\psi_I = 0, \text{ где } k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2},$$

и его решения

$$\psi_I = C_1 e^{ik_1 x} + C_2 e^{-ik_1 x}. \quad (1)$$

В области II уравнение Шредингера сводится к виду

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} + k_2^2\psi_{II} = 0, \text{ где } k_2^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2},$$

причем $k_2^2 > 0$ для $E > V_0$, $k_2^2 < 0$ при $E < V_0$. Его решение

$$\psi_{II} = C_3 e^{ik_2 x} + C_4 e^{-ik_2 x}. \quad (2)$$

Условия «сшивания» дают:

$$\begin{aligned} \psi_I(0) &= \psi_{II}(0); \quad \left. \frac{d\psi_I}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\psi_{II}}{dx} \right|_{x=0}; \\ C_1 + C_2 &= C_3 + C_4; \quad ik_1(C_1 - C_2) = ik_2(C_3 - C_4). \end{aligned}$$

Четыре постоянные должны удовлетворить двум уравнениям. Ввиду того, что одной постоянной можно распорядиться произвольно и что в области II из физических соображений можно ожидать найти только частицу, движущуюся в положительном направлении оси, т. е. обладающую $p_x = \hbar k_2 > 0$, нужно положить $C_4 = 0$. Если $E < V_0$, тогда $k_2 = i\alpha$ и $e^{-ik_2 x} = e^{+\alpha x} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда необходимо $C_4 = 0$, чтобы ψ_{II} было всюду конечным. Уравнения дают:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}; \quad \frac{C_3}{C_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}.$$

Определим коэффициенты отражения и прохождения частицы как отношения соответствующих плотностей токов:

$$R = \left| \frac{j_{\text{отр}}}{j_{\text{пад}}} \right|; \quad D = \left| \frac{j_{\text{прош}}}{j_{\text{пад}}} \right|.$$

Для $E > V_0$

$$j_{\text{прош}} = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi_{II} \frac{d\psi_{II}^*}{dx} - \psi_{II}^* \frac{d\psi_{II}}{dx} \right) = \frac{\hbar k_2}{m} |C_3|^2.$$

В выражении (1) первое слагаемое представляет частицу, движущуюся в положительном направлении оси OX («падающую» на барьер), а второе — отраженную. Составляем с помощью этих функций плотности соответствующих токов:

$$j_{\text{пад}} = \frac{\hbar k_1}{m} |C_1|^2 \text{ и } j_{\text{отр}} = -\frac{\hbar k_1}{m} |C_2|^2,$$

и получаем

$$R = \frac{|k_1 - k_2|^2}{|k_1 + k_2|^2}; \quad D = \left| \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \right|.$$

В том случае, когда $E < V_0$, $k_2 = i\alpha$ и функция $\psi_{II} = C_3 e^{-\alpha x}$ вещественна и убывает с удалением от $x = 0$. Очевидно, для этого случая $j_{\text{прош}} = 0$ и $D = 0$. В согласии с этим

$$R = \left| \frac{k_1 - i\alpha}{k_1 + i\alpha} \right|^2 = 1.$$

95. Так же, как в задаче 94, $R = \left| \frac{j_{\text{отр}}}{j_{\text{пад}}} \right|$ и $D = \left| \frac{j_{\text{прош}}}{j_{\text{пад}}} \right|$. Найдем функции, характеризующие падающую, отраженную и прошедшую через барьер частицы.

Обозначая I—область $x < 0$ ($V = 0$) и вводя $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, II—область $0 \leq x \leq a$ ($V = V_0$), $k_2^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$ и III—область $x > a$ ($V = 0$), запишем уравнение Шредингера и его решение в каждой области:

$$\frac{d^2 \psi_I}{dx^2} + k_1^2 \psi_I = 0, \quad \psi_I = C_1 e^{ik_1 x} + C_2 e^{-ik_1 x};$$

$$\frac{d^2 \psi_{II}}{dx^2} + k_2^2 \psi_{II} = 0; \quad \psi_{II} = C_3 e^{ik_2 x} + C_4 e^{-ik_2 x};$$

$$\frac{d^2 \psi_{III}}{dx^2} + k_1^2 \psi_{III} = 0; \quad \psi_{III} = C_5 e^{ik_1 x} + C_6 e^{-ik_1 x}.$$

Полагаем $C_6 = 0$, так как в области III есть только прошедшая волна (см. задачу 94). Требуя непрерывности ψ и $\frac{d\psi}{dx}$ при $x = 0$ и $x = a$, получаем четыре уравнения для C_i .

$$\begin{aligned} \psi_I(0) &= \psi_{II}(0); & C_1 + C_2 &= C_3 + C_4; \\ \left. \frac{d\psi_I}{dx} \right|_{x=0} &= \left. \frac{d\psi_{II}}{dx} \right|_{x=0}; & ik_1(C_1 - C_2) &= ik_2(C_3 - C_4); \\ \psi_{II}(a) &= \psi_{III}(a); & C_3 e^{ik_2 a} + C_4 e^{-ik_2 a} &= C_5 e^{ik_1 a}; \\ \left. \frac{d\psi_{II}}{dx} \right|_{x=a} &= \left. \frac{d\psi_{III}}{dx} \right|_{x=a}; & ik_2(C_3 e^{ik_2 a} - C_4 e^{-ik_2 a}) &= ik_1 C_5 e^{ik_1 a}. \end{aligned}$$

Отсюда можно определить отношения коэффициентов $\frac{C_i}{C_1}$ ($i = 2, 3, 4, 5$) Составляя $j = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \frac{d\psi^*}{dx} - \psi^* \frac{d\psi}{dx} \right)$, находим

$$j_{\text{пад}} = \frac{\hbar k_1}{m} |C_1|^2; \quad j_{\text{отр}} = -\frac{\hbar k_1}{m} |C_2|^2; \quad j_{\text{прош}} = \frac{\hbar k_1}{m} |C_5|^2$$

и

$$R = \left| \frac{C_2}{C_1} \right|^2; \quad D = \left| \frac{C_5}{C_1} \right|^2.$$

Определим из уравнений отношения $\frac{C_2}{C_1}$ и $\frac{C_5}{C_1}$:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}; \quad \frac{C_5}{C_1} = \frac{\Delta_5}{\Delta_1},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -\frac{k_2}{k_1} & \frac{k_2}{k_1} & 0 \\ 0 & e^{ik_2 a} & e^{-ik_2 a} & -e^{ik_1 a} \\ 0 & e^{ik_2 a} & -e^{-ik_2 a} & -\frac{k_1}{k_2} e^{ik_1 a} \end{vmatrix} = 4e^{ik_1 a} \left[\cos k_2 a - \frac{i(k_1^2 + k_2^2) \sin k_2 a}{2k_1 k_2} \right],$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -\frac{k_2}{k_1} & \frac{k_2}{k_1} & 0 \\ 0 & e^{ik_2 a} & e^{-ik_2 a} & -e^{ik_1 a} \\ 0 & e^{ik_2 a} & -e^{-ik_2 a} & -\frac{k_1}{k_2} e^{ik_1 a} \end{vmatrix} = \frac{2e^{ik_1 a}}{k_1 k_2} i (k_2^2 - k_1^2) \sin k_2 a;$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -\frac{k_2}{k_1} & \frac{k_2}{k_1} & -1 \\ 0 & e^{ik_2 a} & e^{-ik_2 a} & 0 \\ 0 & e^{ik_2 a} & -e^{-ik_2 a} & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

Подставляя вычисленные Δ_1 , Δ_2 , Δ_5 в выражение для R и D , считая $E > V_0$ (k_2 вещественно) и производя некоторые упрощения, получаем

$$R = \frac{(k_2^2 - k_1^2)^2 \sin^2 k_2 a}{|2k_1 k_2 \cos k_2 a - (k_1^2 + k_2^2) i \sin k_2 a|^2} = \frac{(k_2^2 - k_1^2)^2 \sin^2 k_2 a}{4k_1^2 k_2^2 + (k_2^2 - k_1^2)^2 \sin^2 k_2 a};$$

$$D = \frac{4k_1^2 k_2^2}{4k_1^2 k_2^2 + (k_2^2 - k_1^2)^2 \sin^2 k_2 a}.$$

Легко видеть, что $D + R = 1$ и что для $k_2 a = n\pi$ барьер прозрачен, т. е. $D = 1$, $R = 0$. Решение годится для $V_0 > 0$ и $V_0 < 0$ (когда частица проходит над потенциальной ямой).

Обращаясь к случаю $V_0 > 0$ и $E < V_0$, получаем мнимое $k_2 = i\beta$. Тогда $\sin k_2 a = i \operatorname{sh} \beta a$, и мы находим выражения для R и D в виде

$$R = \frac{(k_1^2 + \beta^2)^2 \operatorname{sh}^2 \beta a}{4k_1^2 \beta^2 + (k_1^2 + \beta^2)^2 \operatorname{sh}^2 \beta a}; \quad D = \frac{4k_1^2 \beta^2}{4k_1^2 \beta^2 + (k_1^2 + \beta^2)^2 \operatorname{sh}^2 \beta a}.$$

При $\beta a \gg 1$ можно получить

$$D \approx \frac{16k_1^2 \beta^2}{(k_1^2 + \beta^2)^2} e^{-2\beta a}.$$

96. Пусть область I содержит точки с координатами $0 \leq x \leq a$, II — $a \leq x \leq b$ и III — $x \geq b$.

Заметим, что при $x < 0$ $V = \infty$ и, следовательно, $\psi = 0$. Выбрав ψ_I так, чтобы непрерывность при $x = 0$ была обеспечена, можно написать решения уравнения Шредингера в областях I, II и III:

$$\frac{d^2\psi_I}{dx^2} + k^2\psi_I = 0, \quad \text{где } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{и } \psi_I = A \sin kx;$$

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} - \kappa^2\psi_{II} = 0, \quad \text{где } \kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) \quad \text{и } \psi_{II} = B_1 e^{\kappa(x-a)} + B_2 e^{-\kappa(x-a)};$$

$$\frac{d^2\psi_{III}}{dx^2} + k^2\psi_{III} = 0; \quad \psi_{III} = e^{ik(x-b)} + C e^{-ik(x-b)}.$$

Решение нормировано таким образом, что амплитуда волны, выходящей из потенциальной ямы, принята за единицу. Это не ограничивает его общности, так как все уравнения однородны и определяют только отношения коэффициентов.

Условия непрерывности на границах $x = a$ и $x = b$ самой функции и ее первой производной запишутся так:

$$A \sin ka = B_1 + B_2; \tag{1}$$

$$kA \cos ka = \kappa(B_1 - B_2); \tag{2}$$

$$B_1 e^{\kappa l} + B_2 e^{-\kappa l} = 1 + C; \tag{3}$$

$$\kappa(B_1 e^{\kappa l} - B_2 e^{-\kappa l}) = ik(1 - C). \tag{4}$$

При этом введено обозначение $l = b - a$ — ширина барьера. Складывая и вычитая уравнения (1) и (2), находим B_1 и B_2 и, подставив их в формулы (3) и (4), с которыми произведем те же операции, получаем уравнения, определяющие амплитуду A волны во внутренней области и амплитуду C падающей на барьер волны:

$$\frac{A}{2} \left\{ \sin ka \left[\operatorname{ch} \kappa l + \frac{\kappa}{ik} \operatorname{sh} \kappa l \right] + \frac{k}{\kappa} \cos ka \left[\operatorname{sh} \kappa l + \frac{\kappa}{ik} \operatorname{ch} \kappa l \right] \right\} = 1;$$

$$\frac{A}{2} \left\{ \sin ka \left[\operatorname{ch} \kappa l - \frac{\kappa}{ik} \operatorname{sh} \kappa l \right] + \frac{k}{\kappa} \cos ka \left[\operatorname{sh} \kappa l - \frac{\kappa}{ik} \operatorname{ch} \kappa l \right] \right\} = C.$$

Отсюда

$$C = \frac{\sin ka \left[\operatorname{ch} \kappa l - \frac{\kappa}{ik} \operatorname{sh} \kappa l \right] + \frac{k}{\kappa} \cos ka \left[\operatorname{sh} \kappa l - \frac{\kappa}{ik} \operatorname{ch} \kappa l \right]}{\sin ka \left[\operatorname{ch} \kappa l + \frac{\kappa}{ik} \operatorname{sh} \kappa l \right] + \frac{k}{\kappa} \cos ka \left[\operatorname{sh} \kappa l + \frac{\kappa}{ik} \operatorname{ch} \kappa l \right]}.$$

Замечая, что числитель и знаменатель являются комплексно сопряженными числами, видим, что $|C|^2 = 1$. Падающая волна полностью отражается в $x = 0$. Записывая выражение для A в виде

$$\frac{A}{4} e^{\kappa l} \left\{ \left(1 + \frac{\kappa}{ik} \right) \left(\sin ka + \frac{k}{\kappa} \cos ka \right) + \left(1 - \frac{\kappa}{ik} \right) \left(\sin ka - \frac{k}{\kappa} \cos ka \right) e^{-2\kappa l} \right\} = 1,$$

видим, что при вещественном κ ($E < V_0$) второе слагаемое всегда гораздо меньше первого ($e^{-2\kappa l} \ll 1$) и, следовательно, отбрасывая его, получаем, что $|A|^2 \sim e^{-2\kappa l}$, т. е. $|A|^2 \ll 1$ — амплитуда волны во

внутренней области гораздо меньше, чем во внешней. Это справедливо при всех значениях энергии, кроме тех, при которых

$$\sin k_0 a + \frac{k_0}{\kappa_0} \cos k_0 a = 0 \text{ или } \operatorname{tg} k_0 a = -\frac{k_0}{\kappa_0}.$$

(Сравнивая с задачей 51, можно убедиться, что это условие дает уровни энергии в потенциальной яме ограниченной глубины.) Тогда член с $e^{-2\kappa_0 l}$ играет определяющую роль и A значительно возрастает:

$$A = 2i \frac{\sqrt{\kappa_0^2 + k_0^2}}{\kappa_0 - ik_0} e^{\kappa_0 l} \text{ и } C = -\frac{\kappa_0 + ik_0}{\kappa_0 - ik_0},$$

т. е.

$$|A|^2 = 4e^{2\kappa_0 l} \text{ и } |C|^2 = 1.$$

Таким образом, вблизи собственных значений энергии для потенциальной ямы конечной глубины амплитуда волны во внутренней области скачком изменяется с $e^{-2\kappa_0 l}$ до $e^{+2\kappa_0 l}$.

97. Если расположить начало координат на границе металл—вакуум, то для характеристики сил, не дающих электронам выйти из металла, полагаем, что потенциальная энергия электронов в металле ниже их энергии в вакууме на V_0 , т. е. полагаем $V=0$ при $x < 0$ (в металле) и $V=V_0$ при $x > 0$.

Пусть OX является нормалью к поверхности металла. Если в этом направлении приложено внешнее электрическое поле E , то при $x > 0$ потенциальная энергия станет равна $V(x) = V_0 - e|E|x$ и вероятность выхода электрона сквозь такой барьер будет определяться коэффициентом прохождения

$$D = D_0 e^{-2 \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{V(x) - E_x} dx}$$

Дело сводится к вычислению интеграла, стоящего в показателе степени.

Задача рассматривается как одномерная. Существенно только движение вдоль оси OX и $E_x = \frac{p_x^2}{2m}$ означает энергию, связанную с этим движением. Точки x_1 и x_2 определяются из условия $V(x_1) = V(x_2) = E_x$. Для нашей задачи $x_1 = 0$, а x_2 находим из равенства

$$V_0 - e|E|x_2 = E_x.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{x_2} \sqrt{V_0 - E_x - e|E|x} dx &= -\frac{2}{3e|E|} (V_0 - E_x - e|E|x)^{3/2} \Big|_0^{x_2} = \\ &= \frac{2}{3e|E|} (V_0 - E_x)^{3/2}. \end{aligned}$$

$$D = D_0 \exp \left[-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar e |\mathbf{E}|} (V_0 - E_x)^{3/2} \right],$$

т. е. D растет с ростом $|\mathbf{E}|$ и E_x .

Если обозначить dn —число электронов внутри металла (отнесенное к единице объема), обладающих импульсами в пределах $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + d\mathbf{p}$, то плотность электрического тока, выходящего в направлении оси OX из металла, равна

$$j = e \int v_x \cdot dn \cdot D, \text{ где } v_x = \frac{p_x}{m};$$

интегрирование распространяется по всем значениям p_y и p_z и по $p_x > 0$. Считая, что электронный газ крайне вырожден (т. е. ведет себя так же, как при $T = 0$), получаем

$$dn = 2 \frac{dp_x dp_y dp_z}{h^3}$$

(среднее заполнение состояния равно 1) при $\frac{p^2}{2m} \leq \zeta$, где ζ —максимальная энергия, т. е. уровень химического потенциала, и

$$dn = 0 \text{ при } \frac{p^2}{2m} > \zeta.$$

Следовательно, переходя к цилиндрическим координатам в пространстве импульсов и полагая $p_y = \rho \cos \varphi$, $p_z = \rho \sin \varphi$, можем написать

$$j = \frac{2e}{h^3} \int_0^{\sqrt{2m\zeta}} dp_x \int_0^{\sqrt{2m\zeta - p_x^2}} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot v_x \cdot D(v_x).$$

Подставляя $\eta = \zeta - E_x$, $d\eta = -v_x dp_x$ и проводя интегрирование по φ и ρ , получаем

$$j = \frac{4\pi em}{h^3} \int_0^{\zeta} \eta \cdot d\eta \cdot D(\eta);$$

$$D(\eta) = D_0 \exp \left[-\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m}}{\hbar e |\mathbf{E}|} (V_0 - \zeta + \eta)^{3/2} \right].$$

Так как $D(\eta)$ с ростом η очень быстро убывает, то главную роль будут играть члены с малыми η . Поэтому разложив показатель степени в ряд по η , обозначив $\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar e |\mathbf{E}|} (V_0 - \zeta)^{3/2} = q$ и $\frac{\eta}{V_0 - \zeta} = \xi$, можно распространить пределы интегрирования по ξ до бесконечности и

получить

$$j = D_0 \frac{4\pi em}{\hbar^3} e^{-\frac{2}{3}q} (V_0 - \zeta)^2 \int_0^\infty e^{-q\xi} \xi d\xi = D_0 \frac{4\pi em}{\hbar^3} \frac{(V_0 - \zeta)^2}{q^2} e^{-\frac{2}{3}q} =$$

$$= A |\mathbf{E}|^2 \exp \left[-\frac{4\sqrt{2m}}{3|\mathbf{E}|\hbar e} (V_0 - \zeta)^{3/2} \right].$$

98. Альфа-частица в ядре находится в глубокой потенциальной яме; можно приближенно считать, что $V = -V_0$ при $r \leq r_0$; r_0 характеризует радиус действия ядерных сил. При $r \geq r_0$ (вне ядра) $V = \frac{2Ze^2}{r}$. Коэффициент прохождения частицы через барьер, ограниченный при $r = r_0$ вертикальной прямой, а при $r > r_0$ — гиперболой $V = \frac{2Ze^2}{r}$, определяется как

$$D = D_0 \exp \left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{r_0}^{r_2} \sqrt{\frac{2Ze^2}{r} - E} dr \right), \quad (1)$$

где E — энергия частицы, падающей на барьер, r_0 и r_2 — точки поворота, в которых $V = E$, т. е. $r_2 = \frac{2Ze^2}{E}$.

Для вычисления интеграла в формуле (1) введем $\cos^2 u = \frac{r}{r_2}$; очевидно, при $r = r_2$ $u = 0$ и, обозначая $\frac{r_0}{r_2} = \cos^2 u_0$, можем написать

$$I = \int_0^{u_0} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 u} - 1} \cdot 2 \sin u \cdot \cos u \, du \cdot \sqrt{E} \cdot \frac{2Ze^2}{E} = \frac{2Ze^2}{\sqrt{E}} \left[u_0 - \frac{\sin 2u_0}{2} \right].$$

В предположении, что $\sqrt{\frac{r_0}{r_2}} \ll 1$, разложим в ряд

$$u_0 = \arccos \sqrt{\frac{r_0}{r_2}} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{r_0}{r_2}}.$$

Тогда

$$\sin 2u_0 \approx 2 \sqrt{\frac{r_0}{r_2}}.$$

Таким образом,

$$I = \frac{2Ze^2}{\sqrt{E}} \left[\frac{\pi}{2} - 2 \sqrt{\frac{r_0}{r_2}} \right]$$

и

$$D = D_0 \exp \left[-\frac{4}{\hbar} \left(\frac{\pi Ze^2}{v_\infty} + \sqrt{2mZe^2 r_0} \right) \right],$$

где $v_\infty = \sqrt{2mE}$ — скорость вылетевшей α -частицы, измеряемая вдали от ядра, где $V = 0$ и

$$\lambda = nD_0 \exp \left[-\frac{4}{\hbar} \left(\frac{\pi Ze^2}{v_\infty} + \sqrt{2mZe^2 r_0} \right) \right].$$

99. Выбирая ось OZ в направлении магнитной индукции и записывая составляющие вектора-потенциала в виде $A_x = -By$, $A_y = -A_z = 0$, можно свести уравнение

$$\frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2\mu} \psi = E\psi$$

к виду

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \psi - \frac{i\hbar}{\mu} e By \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{e^2}{2\mu} B^2 y^2 \psi = E\psi. \quad (1)$$

Так как коэффициенты его не зависят от x и z , то можно искать ψ в виде

$$\psi = e^{i\alpha x} \cdot e^{i\beta z} \cdot f(y)$$

и после подстановки ψ в (1), получим уравнение для f :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{\mu \omega_0^2}{2} y_1^2 f = \epsilon f,$$

где введены обозначения $\omega_0 = \frac{eB}{\mu}$; $\epsilon = E_0 - \frac{\hbar^2 \beta^2}{2\mu}$; $y_1 = y + \frac{\hbar \alpha}{eB}$.

Получено уравнение для одномерного гармонического осциллятора. Вводя безразмерную координату $\xi = \sqrt{\frac{\mu \omega_0}{\hbar}} y_1$, можно, согласно задаче 52, написать решение

$$f_n(y_1) = C e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)$$

(H_n — полиномы Эрмита) и

$$\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

или для полной функции и энергии электрона в магнитном поле

$$\begin{aligned} \psi_{n\alpha\beta} &= C_n e^{i(\alpha x + \beta z)} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi); \\ E_{n\beta} &= \frac{e\hbar}{2\mu} B(2n + 1) + \frac{\hbar^2 \beta^2}{2\mu}. \end{aligned}$$

Из условия нормировки находим

$$C_n = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu \omega_0}{\hbar \pi}} \frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n!}}.$$

Спектр энергии непрерывен для движения вдоль оси OZ — по направлению магнитной индукции, и дискретен по отношению к движению в перпендикулярной к \mathbf{B} плоскости.

100. Сравнивая временное уравнение для частицы в электрическом и магнитном полях, которые характеризуются вектором-потен-

циалом \mathbf{A} и скалярным потенциалом φ :

$$\frac{1}{2\mu} (-i\hbar\nabla - e\mathbf{A})^2 \Psi = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi \right) \Psi,$$

с уравнением, в которое входят измененные потенциалы $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$, $\varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}$, и, следовательно, измененная функция Ψ' :

$$\frac{1}{2\mu} (-i\hbar\nabla - e\mathbf{A} - e\nabla f)^2 \Psi' = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi + e \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Psi',$$

можно увидеть, что действие оператора ∇ на Ψ эквивалентно действию $\left(\nabla - \frac{ie}{\hbar} \nabla f \right)$ на Ψ' и $\frac{\partial}{\partial t}$ на Ψ эквивалентно действию оператора $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{ie}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial t} \right)$ на Ψ' . Это показывает, что Ψ отличается от Ψ' на множитель $e^{-\frac{ief}{\hbar}}$:

$$\Psi = \Psi' e^{-\frac{ief}{\hbar}}.$$

Действительно, дифференцируя Ψ по x, y, z или t , получаем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi'}{\partial t} e^{-\frac{ief}{\hbar}} + \Psi' \frac{\partial e^{-\frac{ief}{\hbar}}}{\partial t} = e^{-\frac{ief}{\hbar}} \left(\frac{\partial}{\partial t} - i \frac{e}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Psi'.$$

При таком изменении функции выражения вида $|\Psi|^2$, $\langle \lambda \rangle = \int \Psi^* \hat{L} \Psi dt$ не меняются.

101. Написав временное уравнение и раскрыв $(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2$, имеем

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \Psi + \frac{i\hbar e}{\mu} \mathbf{A} \nabla \Psi + \frac{i\hbar e}{2\mu} \operatorname{div} \mathbf{A} \cdot \Psi + \frac{e^2}{2\mu} \mathbf{A}^2 \Psi + e\varphi \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (1)$$

Сопряженное ему уравнение выглядит так:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla \Psi^* - \frac{i\hbar e}{\mu} \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi^* - \frac{i\hbar e}{2\mu} \operatorname{div} \mathbf{A} \cdot \Psi^* + \frac{e^2}{2\mu} \mathbf{A}^2 \Psi^* + e\varphi \Psi^* = -i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}. \quad (2)$$

Составим выражение $\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \Psi^* \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \cdot \Psi$, вычитая из уравнения (1), умноженного на Ψ^* , уравнение (2), умноженное на Ψ . Разделив полученную разность на $i\hbar$, напишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 &= \frac{i\hbar}{2\mu} (\Psi^* \cdot \Delta \Psi - \Delta \Psi^* \cdot \Psi) + \\ &+ \frac{e}{\mu} (\Psi^* \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi + \nabla \Psi^* \cdot \mathbf{A} \Psi + \operatorname{div} \mathbf{A} \cdot \Psi^* \cdot \Psi). \end{aligned} \quad (3)$$

Так как

$$\Psi^* \Delta \Psi - \Delta \Psi^* \Psi = \operatorname{div} (\Psi^* \cdot \nabla \Psi - \nabla \Psi^* \cdot \Psi),$$

а

$$\Psi^* \mathbf{A} \nabla \Psi + \nabla \Psi^* \mathbf{A} \Psi + \operatorname{div} \mathbf{A} \cdot \Psi^* \cdot \Psi = \operatorname{div} (\mathbf{A} \cdot \Psi^* \cdot \Psi),$$

то выражение (3) можно представить как

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

где

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2\mu} (\nabla \Psi^* \cdot \Psi - \Psi^* \cdot \nabla \Psi) - \frac{e}{\mu} \mathbf{A} \cdot |\Psi|^2.$$

Можно проверить, что при переходе от φ , \mathbf{A} к $\varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}$ и $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$, сопровождающемся заменой Ψ на $\Psi' = \Psi e^{\frac{ief}{\hbar}}$ (см. задачу 100), $\mathbf{j}' = \mathbf{j}$.

102. Из равенств $\hat{\sigma}_z \alpha = \alpha$ и $\hat{\sigma}_z \beta = -\beta$ следует, что оператор $\hat{\sigma}_z$ имеет два собственных значения, равных $+1$ и -1 , и, следовательно, отвечает составляющей вектора спина (в единицах $\hbar/2$). Собственные функции для $\hat{\sigma}_z$: α и β , очевидно, не будут собственными для $\hat{\sigma}_x$ и $\hat{\sigma}_y$, но складывая и вычитая равенства

$$\hat{\sigma}_x \alpha = \beta, \quad \hat{\sigma}_x \beta = \alpha, \quad (1)$$

$$\hat{\sigma}_y \alpha = i\beta, \quad \hat{\sigma}_y \beta = -i\alpha, \quad (2)$$

получаем

$$\hat{\sigma}_x (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta), \quad \hat{\sigma}_y (\alpha + i\beta) = \alpha + i\beta,$$

$$\hat{\sigma}_x (\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta), \quad \hat{\sigma}_y (\alpha - i\beta) = -(\alpha - i\beta).$$

Эти уравнения показывают, что $\hat{\sigma}_x$ и $\hat{\sigma}_y$ имеют такие же собственные значения, как и $\hat{\sigma}_z$, равные ± 1 . Составляя выражение

$$(\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x) (\alpha) = \hat{\sigma}_x (-\beta) - \hat{\sigma}_z (\beta) = (-\beta) - (-\beta) = (-\frac{2\beta}{2}) = -2i\hat{\sigma}_y (\alpha),$$

убеждаемся, что $\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x = -2i\hat{\sigma}_y$. Кроме того, применяя к равенствам (1) оператор $\hat{\sigma}_y$, получаем

$$\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x (\alpha) = \hat{\sigma}_y (\beta) = (-i\alpha) = -i\hat{\sigma}_z (\alpha),$$

откуда следует, что

$$\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x = -i\hat{\sigma}_z.$$

Запись $\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y (\alpha) = i\hat{\sigma}_z (\alpha)$ означает, что

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y \alpha = i\hat{\sigma}_z \alpha \quad \text{и} \quad \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y \beta = i\hat{\sigma}_z \beta,$$

и, поскольку это справедливо для всех собственных функций (их всего две), то верно и для любой функции, а следовательно, можно просто написать равенство операторов.

Таким образом, доказано, что вектор $\frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}$ удовлетворяет перестановочным соотношениям $\left[\frac{\hbar}{2} \hat{\sigma} \cdot \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma} \right] = i \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}$, как и орбитальный момент количества движения.

Кроме того, так как $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ имеют собственные значения ± 1 , то их квадраты имеют все собственные значения равные 1, и при действии на любую линейную комбинацию функций α и β получим

$$\hat{\sigma}_x^2 (\alpha/\beta) = \hat{\sigma}_x (\alpha/\beta) = (\alpha/\beta),$$

т. е. $\hat{\sigma}_x^2 = 1$, и, следовательно,

$$\left(\frac{\hbar}{2} \hat{\sigma} \right)^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 = \hbar^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right).$$

103. Так как $\hat{\sigma}_x$ коммутирует с \hat{p} , \hat{r} , то составляя $\frac{d\hat{\sigma}_x}{dt}$ по общему правилу, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_x}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_x\hat{H}] = \\ &= -\frac{i}{\hbar} \frac{e\hbar}{2\mu} [(\hat{\sigma}_y B_y + \hat{\sigma}_z B_z) \hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_x (\hat{\sigma}_y B_y + \hat{\sigma}_z B_z)] = \\ &= \frac{e}{\mu} (\hat{\sigma}_y B_z - \hat{\sigma}_z B_y), \end{aligned}$$

так как $\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = i \hat{\sigma}_z$.

104. Пусть α и β — функции, действие на которые операторов $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ и $\hat{\sigma}_z$ определено в условии задачи 102. Будем обозначать функцию α для нейтрона (n) $\alpha(S_n) \equiv \alpha_n$ и для протона (p) $\alpha(S_p) \equiv \alpha_p$. Очевидно, для системы слабо взаимодействующих частиц общую функцию надо искать в виде произведения одночастичных функций. В частности, собственную функцию оператора $\hat{S}_z = \hat{\sigma}_{nz} + \hat{\sigma}_{pz}$ будем искать в виде

$$\chi(S_n, S_p) = A\alpha_n\alpha_p + B\alpha_n\beta_p + C\beta_n\alpha_p + D\beta_n\beta_p.$$

Действуя на нее \hat{S}_z , получаем

$$\begin{aligned} \hat{S}_z \chi &= (\hat{\sigma}_{nz} + \hat{\sigma}_{pz}) \chi = A\alpha_n\alpha_p + B\alpha_n\beta_p - C\beta_n\alpha_p - D\beta_n\beta_p + \\ &+ A\alpha_n\alpha_p - B\alpha_n\beta_p + C\beta_n\alpha_p - D\beta_n\beta_p = 2A\alpha_n\alpha_p - 2D\beta_n\beta_p. \end{aligned}$$

Таким образом, оказывается, что все четыре произведения $\alpha_n\alpha_p$, $\alpha_n\beta_p$, $\alpha_p\beta_n$ и $\beta_p\beta_n$ являются собственными функциями S_z , отвечающими соответственно собственным значениям: 2, 0, 0 и -2 . В единицах \hbar это отвечает значениям 1, 0 и -1 . Составим теперь $\hat{S}^2 = (\hat{\sigma}_p + \hat{\sigma}_n)^2$ и определим его действие на χ . Очевидно,

$$\hat{S}^2 = (\hat{\sigma}_{px} + \hat{\sigma}_{nx})^2 + \dots = 6 + 2(\hat{\sigma}_n \cdot \hat{\sigma}_p), \text{ так как } \hat{\sigma}_{px}^2 = \dots = 1,$$

и

$$\hat{S}^2 \chi = 6\chi + 2(\hat{\sigma}_n \hat{\sigma}_p)(A\alpha_n \alpha_p + B\alpha_n \beta_p + C\beta_n \alpha_p + D\beta_n \beta_p).$$

Непосредственно вычислим

$$A(\hat{\sigma}_{nx} \hat{\sigma}_{px} + \hat{\sigma}_{ny} \hat{\sigma}_{py} + \hat{\sigma}_{nz} \hat{\sigma}_{pz}) \alpha_n \alpha_p = A(\beta_n \beta_p - \beta_n \beta_p + \alpha_n \alpha_p) = A\alpha_n \alpha_p.$$

Таким же образом

$$B(\hat{\sigma}_{nx} \hat{\sigma}_{px} + \hat{\sigma}_{ny} \hat{\sigma}_{py} + \hat{\sigma}_{nz} \hat{\sigma}_{pz}) \alpha_n \beta_p = B[\beta_n \alpha_p + i\beta_n(-i\alpha_p) - \alpha_n \beta_p] = B(2\beta_n \alpha_p - \alpha_n \beta_p);$$

$$C(\hat{\sigma}_{nx} \hat{\sigma}_{px} + \hat{\sigma}_{ny} \hat{\sigma}_{py} + \hat{\sigma}_{nz} \hat{\sigma}_{pz}) \beta_n \alpha_p = C(\alpha_n \beta_p + \alpha_n \beta_p - \beta_n \alpha_p) = C(2\alpha_n \beta_p - \beta_n \alpha_p);$$

$$D(\hat{\sigma}_{nx} \hat{\sigma}_{px} + \hat{\sigma}_{ny} \hat{\sigma}_{py} + \hat{\sigma}_{nz} \hat{\sigma}_{pz}) \beta_n \beta_p = D(\alpha_n \alpha_p - \alpha_n \alpha_p + \beta_n \beta_p) = D\beta_n \beta_p.$$

Следовательно,

$$\hat{S}^2 \chi = 8A\alpha_n \alpha_p + 8D\beta_n \beta_p + 4(B+C)(\alpha_n \beta_p + \beta_n \alpha_p).$$

Отсюда следует, что $\alpha_n \alpha_p$ и $\beta_n \beta_p$ являются собственными функциями оператора \hat{S}^2 , отвечающими одному собственному значению δ , т. е.

$$\left(\frac{\hbar}{2} \hat{S}\right)^2 \alpha_n \alpha_p = 1(1+1) \cdot \hbar^2 \alpha_n \alpha_p$$

и

$$\left(\frac{\hbar}{2} S\right)^2 \beta_n \beta_p = 1 \cdot 2 \cdot \hbar^2 \beta_n \beta_p.$$

Написав равенство

$$\hat{S}^2 (B\alpha_n \beta_p + C\beta_n \alpha_p) = 4(B+C)(\alpha_n \beta_p + \beta_n \alpha_p),$$

нужно отыскать такие B и C , чтобы функция $B\alpha_n \beta_p + C\beta_n \alpha_p$ была собственной функцией \hat{S}^2 . Для этого приравняем

$$4(B+C)(\alpha_n \beta_p + \beta_n \alpha_p) = 4\lambda(B\alpha_n \beta_p + C\beta_n \alpha_p),$$

тогда

$$B+C = \lambda B; \quad B+C = \lambda C$$

и условием разрешимости этих двух однородных уравнений для B и C является равенство нулю определителя системы

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 0.$$

Следовательно, есть два решения:

1) $\lambda = 2$, $B = C$. Тогда собственная функция $\alpha_n \beta_p + \beta_n \alpha_p$ отвечает собственному значению \hat{S}^2 , равному δ , и собственному значению \hat{S}_z , равному 0;2) $\lambda = 0$, $B = -C$, и собственная функция оказывается антисимметричной, $\alpha_n \beta_p - \beta_n \alpha_p$. Она отвечает собственным значениям \hat{S}^2 и \hat{S}_z , равным нулю.

Таким образом, собственному значению $\left(\frac{\hbar}{2}\hat{S}\right)^2 = 2\hbar^2$ соответствуют три симметричные функции $\alpha_n\alpha_p$, $\beta_n\alpha_p + \alpha_n\beta_p$, $\beta_n\beta_p$, описывающие состояния со значениями $\frac{\hbar}{2}\hat{S}_z$, равными \hbar , 0 , $-\hbar$. Это состояние является триплетным. Собственным значениям \hat{S}^2 и \hat{S}_z равным нулю, отвечает одна антисимметричная собственная функция—синглетное состояние системы.

105. Пусть $\hat{S}_1 = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_1$ и $\hat{S}_2 = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_2$ (причем $\hat{\sigma}_i^2 = 3$; $\hat{\sigma}_{ix}^2 = \dots = 1$).

Рассмотрим квадрат суммы этих операторов:

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2(\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2).$$

Как в триплетном, так и в синглетном (см. задачу 104) состоянии \hat{S}^2 , \hat{S}_1^2 и \hat{S}_2^2 имеют определенные значения: собственное значение $\hat{S}^2 = \hbar^2 s(s+1)$ ($s=1$ для триплетного и $s=0$ для синглетного состояния);

$$\hat{S}_1^2 = \hat{S}_2^2 = \hbar^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \hbar^2.$$

Следовательно, значения скалярного произведения спинов двух частиц можно записать

$$(\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2) = \frac{\hbar^2}{4} \text{ в триплетном состоянии,}$$

$$(\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2) = -\frac{3}{4} \hbar^2 \text{ в синглетном } \gg .$$

Соответственно в этих состояниях $(\hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2) = 1$ и $(\hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2) = -3$.

106. Согласно задаче 105, обозначив собственные функции триплетного и синглетного состояний через χ_t и χ_s , можно написать

$$(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2) \cdot \chi_t = 1 \cdot \chi_t; \quad (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2) \cdot \chi_s = -3 \chi_s.$$

Так как три триплетных и одна синглетная функции образуют полную систему спиновых функций для системы двух частиц, то следует сначала определить действие $(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^k$ на χ_t и χ_s . Очевидно,

$$(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^2 \chi_t = (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2) \cdot (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2) \chi_t = 1^2 \cdot \chi_t$$

и, следовательно,

$$(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^k \chi_t = 1^k \cdot \chi_t = \chi_t.$$

Таким же образом

$$(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^2 \chi_s = (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2) \cdot (-3 \chi_s) = (-3)^2 \chi_s$$

и

$$(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^k \chi_s = (-3)^k \chi_s.$$

Допустив, что

$$(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^k = A + B(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2),$$

покажем, как подобрать A и B , чтобы это равенство было справедливо при действии на χ_t и χ_s , а следовательно, и на любую спиновую функцию двух частиц. Так как

$$(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^k \chi_t = (A + B) \chi_t \quad \text{и} \quad (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^k \chi_t = 1 \cdot \chi_t,$$

то

$$A + B = 1.$$

С другой стороны

$$(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^k \chi_s = [A + B (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)] \chi_s = (A - 3B) \chi_s$$

и

$$(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^k \chi_s = (-3)^k \chi_s,$$

т. е.

$$A - 3B = (-3)^k.$$

Отсюда

$$A = \frac{3 + (-3)^k}{4}; \quad B = \frac{1 - (-3)^k}{4}.$$

Следовательно,

$$(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^k = \frac{3 + (-3)^k}{4} + \frac{1 - (-3)^k}{4} (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2);$$

например для $k = 2$

$$(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^2 = 3 - 2 (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2).$$

107. Записав обычное уравнение для собственных функций и собственных значений оператора: $\hat{\sigma}_x \chi = \lambda \chi$, представим искомую функцию в виде матрицы $\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Действуя на нее матрицей $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, приходим к равенствам

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \quad b = \lambda a; \quad a = \lambda b;$$

и, следовательно, $\lambda^2 = 1$; $\lambda = \pm 1$. Подставляя $\lambda_1 = 1$ в равенство $b = \lambda a$, получаем собственную функцию $\chi_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, отвечающую этому собственному значению. Таким же образом для $\lambda_2 = -1$ имеем $\chi_2 = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Из условия нормировки

$$\chi_1^+ \chi_1 = |a|^2 (1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2|a|^2 = 1$$

следует, что $a = (\sqrt{2})^{-1}$.

Аналогично для $\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ из равенства

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

получим

$$-ib = \lambda a; \quad ia = \lambda b;$$

откуда

$$\lambda = \pm 1; \quad b = \pm ia; \quad \chi_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}; \quad \chi_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

108. Выразим оператор спина частицы \hat{S} через $\hat{\sigma}$:

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma},$$

где $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ — матрицы Паули, удовлетворяющие условиям: $\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = 1$ и $\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = -\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x$ и т. д. Составляя проекцию \mathbf{S} на \mathbf{a} , равную $\left(\frac{\hat{S} \cdot \mathbf{a}}{a} \right)$, и возводя это выражение в квадрат, получим, пользуясь свойствами матриц $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$:

$$\begin{aligned} \frac{(\hat{S} \cdot \mathbf{a})^2}{a^2} &= \frac{\hbar^2}{4a^2} (\hat{\sigma}_x a_x + \hat{\sigma}_y a_y + \hat{\sigma}_z a_z) (\hat{\sigma}_x a_x + \hat{\sigma}_y a_y + \hat{\sigma}_z a_z) = \\ &= \frac{\hbar^2}{4a^2} [\hat{\sigma}_x^2 a_x^2 + \hat{\sigma}_y^2 a_y^2 + \hat{\sigma}_z^2 a_z^2 + (\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x) a_x a_y + \dots] = \frac{\hbar^2}{4}. \end{aligned}$$

109. Так как решение невозмущенной задачи при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ (гармонический осциллятор; см. задачу 52) дает невырожденные собственные значения оператора \hat{H}_0 , равные

$$E_n^0 = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega,$$

то для отыскания собственных значений и функций оператора $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$ следует воспользоваться формулами

$$E_n = E_n^0 + \langle n | \hat{W} | k \rangle + \sum_{k \neq n} \frac{\langle n | \hat{W} | k \rangle \langle k | \hat{W} | n \rangle}{E_n^0 - E_k^0} \quad (1)$$

и

$$\psi_n = \psi_n^0 + \sum_{k \neq n} \frac{\langle k | \hat{W} | n \rangle}{E_n^0 - E_k^0} \psi_k^0, \quad (2)$$

где $\psi_n^0 = C_n e^{-\xi^2/2} \cdot H_n(\xi)$, H_n — полином Эрмита, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$.

Задача сводится к вычислению матричных элементов

$$\langle k | \hat{W} | n \rangle = \langle k | \hat{W}_1 | n \rangle + \langle k | \hat{W}_2 | n \rangle,$$

где $W_1 = \varepsilon_1 x^3$ и $W_2 = \varepsilon_2 x^4$. Воспользовавшись вычисленными в задаче 82 матричными элементами координаты

$$\langle n | x | n+1 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar(n+1)}{2m\omega}} \quad \text{и} \quad \langle n | x | n-1 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar n}{2m\omega}}$$

(остальные $\langle n | x | k \rangle = 0$) и записав эти результаты более компактно:

$$\langle n | x | k \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (V\sqrt{n} \delta_{n, k+1} + V\sqrt{n+1} \delta_{k, n+1}),$$

можно $\langle n | W_1 | k \rangle$ вычислить, пользуясь правилом умножения матриц:

$$\langle n | W_1 | k \rangle = \varepsilon_1 \langle n | x^3 | k \rangle = \varepsilon_1 \sum_l \langle n | x^3 | l \rangle \langle l | x | k \rangle.$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} \langle n | x^2 | l \rangle &= \sum_p \langle n | x | p \rangle \langle p | x | l \rangle = \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \sum_p (V\sqrt{n} \delta_{n, p+1} + V\sqrt{n+1} \delta_{n+1, p}) (V\sqrt{p} \delta_{p, l+1} + V\sqrt{p+1} \delta_{l, p+1}). \end{aligned}$$

Очевидно, в произведениях вида $V\sqrt{p} \delta_{p, l+1}$ можно $V\sqrt{p}$ заменять на $V\sqrt{l+1}$ и $\delta_{n, p+1}$ на $\delta_{p, n-1}$. В силу этого

$$\begin{aligned} \langle n | x^2 | l \rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left[V\sqrt{n(l+1)} \sum_p \delta_{n-l, p} \delta_{p, l+1} + \right. \\ &+ V\sqrt{(n+1)(l+1)} \sum_p \delta_{n+1, p} \delta_{p, l+1} + V\sqrt{nl} \sum_p \delta_{n-1, p} \delta_{p, l-1} + \\ &\left. + V\sqrt{(n+1)l} \sum_p \delta_{n+1, p} \delta_{p, l-1} \right] \end{aligned}$$

и, например, первое слагаемое будет равно

$$\begin{aligned} V\sqrt{n(l+1)} \sum_p \delta_{n-l, p} \delta_{p, l+1} &= V\sqrt{n(l+1)} (\delta \cdot \delta)_{n-1, l+1} = \\ &= \delta_{n, l+2} V\sqrt{n(l+1)} = \delta_{n, l+2} V\sqrt{n(n-1)}; \end{aligned}$$

так как δ_{ik} является единичной матрицей, то $\delta^2 = \delta$.

Проделав эту операцию со всеми членами, получим

$$\begin{aligned} \langle n | x^2 | l \rangle &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right) [V\sqrt{n(n-1)} \delta_{n, l+2} + \\ &+ (2n+1) \delta_{nl} + V\sqrt{(n+1)(n+2)} \delta_{n, l-2}]. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в $\langle n | x^3 | k \rangle$ и проделав аналогичные расчеты, можем написать

$$\begin{aligned} \langle n | x^3 | k \rangle &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{3/2} \sum_l [V\sqrt{n(n-1)} \delta_{n, l+2} + (2n+1) \delta_{nl} + \\ &+ V\sqrt{(n+1)(n+2)} \delta_{n, l-2}] [V\sqrt{l} \delta_{l, k+1} + V\sqrt{k} \delta_{l, k-1}] = \\ &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{3/2} [V\sqrt{n(n-1)(n-2)} \delta_{n, k+3} + 3n^{3/2} \delta_{n, k+1} + \\ &+ 3(n+1)^{3/2} \delta_{n, k-1} + V\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)} \delta_{n, k-3}]. \end{aligned}$$

Таким образом, $\langle n | W_1 | n \rangle = 0$ и $\langle n | W_1 | k \rangle$ при заданном n отличен от нуля только в четырех случаях: при $k = n \pm 1$ и $k = n \pm 3$. Следовательно, этот член дает поправку в формуле (1) только во втором приближении, а в формуле (2) — в первом, и можно ограничиться только ими. Учитывая, что знаменатели формул (1) и (2) при $k = n \pm 1$ обращаются в $E_n^0 - E_{n \pm 1}^0 = \mp \hbar \omega$ и при $k = n \pm 3$ — в $E_n^0 - E_{n \pm 3}^0 = \mp 3\hbar \omega$, можно написать

$$\begin{aligned} \psi_n = & \psi_n^0 + \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{3/2} \left[\frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)}}{3\hbar\omega} \psi_{n-3}^0 + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}{-3\hbar\omega} \psi_{n+3}^0 + \frac{3(n+1)^{3/2}}{-\hbar\omega} \psi_{n+1}^0 + \frac{3n^{3/2}}{\hbar\omega} \psi_{n-1}^0 \right]. \end{aligned}$$

При вычислении энергии следует учесть вместе с поправкой второго порядка от \hat{W}_1 поправку первого порядка от \hat{W}_2 , т. е. вычислить $\langle n | W_2 | n \rangle = \varepsilon_2 \langle n | x^4 | n \rangle$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \langle n | x^4 | n \rangle = & \sum_k \langle n | x^3 | k \rangle \langle k | x | n \rangle = \\ = & \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \sum_k (V \sqrt{n(n-1)(n-2)} \delta_{n, k+3} + 3n^{3/2} \delta_{n, k+1} + \\ & + 3(n+1)^{3/2} \delta_{n, k-1} + V \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)} \delta_{n, k-3}) (V \sqrt{n} \delta_{n, k+1} + \\ & + V \sqrt{n+1} \delta_{n, k-1}) = \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \cdot [3n^2 + 3(n+1)^2]. \end{aligned}$$

(Отличные от нуля результаты получаем только при умножении $\delta_{n, k+1} \cdot \delta_{n, k+1}$ и $\delta_{n, k-1} \cdot \delta_{n, k-1}$. В остальных членах получаются нули, например $\sum_k \delta_{n, k+3} \cdot \delta_{n, k+1} = \delta_{n-3, n-1} = 0$.)

Окончательно

$$\begin{aligned} E_n = & \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega + \varepsilon_2 \langle n | x^4 | n \rangle + \varepsilon_1^2 \left[\frac{(\langle n | x^3 | n-3 \rangle)^2}{3\hbar\omega} + \right. \\ & \left. + \frac{(\langle n | x^3 | n+3 \rangle)^2}{-3\hbar\omega} + \frac{(\langle n | x^3 | n-1 \rangle)^2}{\hbar\omega} + \frac{(\langle n | x^3 | n+1 \rangle)^2}{-\hbar\omega} \right], \end{aligned}$$

и после подстановки вычисленных матричных элементов находим

$$\begin{aligned} E_n = & \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega + 3\varepsilon_2 \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 (2n^2 + 2n + 1) - \\ & - \frac{\varepsilon_1^2}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^3 (30n^2 + 30n + 11). \end{aligned}$$

110. В отсутствие магнитного поля невозмущенное уравнение

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + V(r) \right] \psi = E_{nl} \psi$$

имеет решение

$$\psi = \psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$

В присутствии магнитного поля оператор Гамильтона $\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{i\hbar e}{\mu} \mathbf{A} \cdot \nabla$ (если пренебречь \mathbf{A}^2). Считая второе слагаемое энергией возмущения, можно найти поправку к E_{nl} в первом приближении

$$E'_{nl} = E - E_{nl} = \langle n | W | n \rangle = \int \psi_{nlm}^* \frac{i\hbar e}{\mu} \mathbf{A} \cdot \nabla \psi_{nlm} d\tau.$$

Если ось OZ направлена по магнитной индукции \mathbf{B} , то можно выбрать вектор-потенциал \mathbf{A} таким образом:

$$A_x = -\frac{1}{2} B \cdot y; \quad A_y = \frac{1}{2} B \cdot x; \quad A_z = 0.$$

Тогда

$$i\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla = \frac{i\hbar B}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{i\hbar B}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

и так как $\frac{\partial \psi_{nlm}}{\partial \varphi} = im \psi_{nlm}$ (ψ_{nlm} является собственной функцией оператора $L_z = i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$), то поправка к энергии

$$E'_{nl} = -\frac{eB}{2\mu} \hbar m \int |\psi_{nlm}|^2 d\tau = -\frac{eB}{2\mu} \cdot \hbar m.$$

Для определения собственной функции возмущенной задачи и поправки к энергии во втором приближении, надо вычислить недиагональные матричные элементы

$$\langle nlm | W | nlm' \rangle = \frac{i\hbar Be}{2\mu} \int \psi_{nlm}^* \frac{\partial \psi_{nlm'}}{\partial \varphi} d\tau = -\frac{\hbar Be}{2\mu} m' \int \psi_{nlm}^* \psi_{nlm'} d\tau,$$

равные нулю при $m \neq m'$.

Таким образом, магнитное поле не изменяет собственных функций невозмущенной задачи ($\psi'_{nlm} = \psi_{nlm}$) и поправка во втором приближении равна нулю, а уровни энергии расщепляются в зависимости от m :

$$E_{nlm} = E_{nl} - \frac{eB}{2\mu} \cdot \hbar m.$$

111. Вычислив матричные элементы энергии возмущения $\hat{W} = e|\mathbf{E}|a \cos \varphi$ на функциях невозмущенной задачи $U_m^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$, получаем, что отличны от нуля только

$$\langle m | W | m-1 \rangle = \langle m | W | m+1 \rangle = \frac{ea|\mathbf{E}|}{2}$$

и, следовательно,

$$U_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} - \frac{\mu a^2 e |\mathbf{E}| a}{\hbar^2 \sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{i(m-1)\varphi}}{2m-1} - \frac{e^{i(m+1)\varphi}}{2m+1} \right];$$

$$E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2\mu a^2} + \frac{e|\mathbf{E}|^2 a^4}{\hbar^2} \mu \frac{1}{4m^2 - 1}.$$

112. В отсутствие поля невозмущенная задача (атом водорода; см. задачу 61) имеет n^2 кратно вырожденные собственные значения, следовательно, числу $n = 2$ отвечают четыре собственные функции, определяемые уравнением

$$\hat{H}_0 \Psi_{2lm} = E_2^0 \Psi_{2lm}$$

Выпишем их подробно:

$$\begin{aligned} \psi_1^0 = \psi_{200} = R_{20}(r); \quad \psi_2^0 = \psi_{210} = R_{21}(r) P_{10}(\cos \theta) = R_{21} \cos \theta; \\ \psi_3^0 = \psi_{211} = R_{21} \sin \theta e^{i\varphi}; \quad \psi_4^0 = \psi_{21-1} = R_{21} \sin \theta e^{-i\varphi}; \quad (1) \\ (P_{11}(\cos \theta) = \sin \theta). \end{aligned}$$

Выбирая ось OZ вдоль направления внешнего электрического поля \mathbf{E} , в которое помещен атом, можно написать \hat{H} возмущенной задачи в виде:

$$\hat{H} = \hat{H}^0 - e|\mathbf{E}|z; \quad \text{очевидно, } \hat{W} = -e|\mathbf{E}|z.$$

Собственные функции этого оператора, соответствующие E_2^0 , следует искать в виде линейной комбинации функций (1): $\psi = \sum_{i=1}^4 c_i \psi_i^0$. Энергетические уровни вычисляются из условия равенства нулю детерминанта:

$$|(E_2^0 - E) \delta_{ik} + \langle i | W | k \rangle| = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \quad (2)$$

Очевидно, $\langle i | W | k \rangle$ может быть представлен в виде произведения интегралов по r , θ и φ

$$\langle i | W | k \rangle = -e|\mathbf{E}| \int \psi_i^{0*} \cdot z \cdot \psi_k^0 d\tau = -e|\mathbf{E}| I_r \cdot I_\theta \cdot I_\varphi.$$

Так как $z = r \cos \theta$ от φ не зависит, то

$$I_\varphi = \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} \cdot e^{im'\varphi} d\varphi = 0 \quad \text{для } m \neq m'.$$

Таким образом,

$$\langle 1 | W | 3 \rangle = \langle 1 | W | 4 \rangle = \langle 2 | W | 3 \rangle = \langle 2 | W | 4 \rangle = \langle 3 | W | 4 \rangle = 0.$$

Кроме того, если $m = m'$ и $l = l'$, то

$$I_\theta = \int_0^\pi P_{lm}(\cos \theta) \cdot \cos \theta \cdot P_{lm}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 |P_{lm}(x)|^2 \cdot x \cdot dx = 0$$

в силу четности $|P_{lm}(x)|^2$ и, следовательно, нечетности подынтегральной функции. По этой причине все $\langle k | W | k \rangle$ равны нулю. Отличными от нуля могут быть только $\langle 1 | W | 2 \rangle$ и $\langle 2 | W | 1 \rangle$:

$$\langle 1 | W | 2 \rangle = -e|\mathbf{E}| \int_0^\infty R_{20} \cdot R_{21} \cdot r^3 dr \cdot \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{4\pi}{3} e|\mathbf{E}| \cdot I_r.$$

Для вычисления $I_r = \int_0^{\infty} R_{l0} R_{21} r^2 dr$ следует явно записать нормированные радиальные функции для водорода. Из задачи 61 известно

$$R_{nl} = U_{nl} = e^{-\frac{r}{na}} \sum_{k=l}^{n-1} a_k \left(\frac{r}{a}\right)^k,$$

где $a = \frac{\hbar^2}{\mu l^2}$ — боровский радиус, а a_k связаны рекуррентным соотношением

$$a_k = \frac{2\left(\frac{k}{n} - 1\right) a_{k-1}}{k(k+1) - l(l+1)}.$$

Следовательно, $R_{21} = a_1 e^{-r/2a} \cdot \frac{r}{a}$ (в этом случае $l = n - 1 = 1$ и вся сумма вырождается в одно слагаемое $a_1 \cdot \frac{r}{a}$) и $R_{20} = a'_0 e^{-r/2a} \left(1 - \frac{r}{2a}\right)$. (Здесь $n - 1 = 1$ и $l = 0$, $a'_1 = \frac{2\left(\frac{1}{2} - 1\right) a'_0}{1 \cdot 2} = -\frac{a'_0}{2}$). Коэффициенты a'_0 и a_1 определяются из условий нормировки

$$\int |\psi_{200}|^2 d\tau = \int |\psi_1^0|^2 d\tau = 4\pi \int_0^{\infty} e^{-r/a} \left(1 - \frac{r}{2a}\right)^2 r^2 dr \cdot (a'_0)^2 = 1,$$

$$\int |\psi_{210}|^2 d\tau = \int |\psi_2^0|^2 d\tau = a_1^2 \cdot 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r/a} \frac{r^4 dr}{a^2} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 1.$$

Так как $\int_0^{\infty} r^n e^{-r/a} dr = n! a^{n+1}$, получаем

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{8\pi a^3}} e^{-r/2a} \left(1 - \frac{r}{2a}\right); \quad R_{21} = \frac{e^{-r/2a}}{\sqrt{8\pi a^3}} \cdot \frac{r}{2a}.$$

Подставляя их в I_r , можно написать

$$I_r = \frac{1}{16\pi a^4} \int_0^{\infty} e^{-r/a} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) r^4 dr = \frac{1}{16\pi a^4} \left(4! a^5 - \frac{1}{2a} 5! a^6\right) = -\frac{9a}{4\pi},$$

и, следовательно,

$$\langle 1 | W | 2 \rangle = \langle 2 | W | 1 \rangle = 3e | \mathbf{E} | a.$$

Из уравнения (2) получаем

$$E' = E_2^0 + 3e | \mathbf{E} | a; \quad E'' = E_2^0 - 3e | \mathbf{E} | a; \quad E''' = E'''' = E_2^0.$$

Соответствующие им функции равны

$$\begin{aligned} \psi' &= c_1' (\psi_1^0 + \psi_2^0), & \psi'' &= c_1'' (\psi_1^0 - \psi_2^0); \\ \psi''' &= c_3''' \psi_3^0 + c_4''' \psi_4^0; & \psi^{IV} &= c_3^{IV} \psi_3^0 + c_4^{IV} \psi_4^0. \end{aligned}$$

Из условия нормировки

$$c'_1 = c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Расщепление уровней энергии атома водорода в электрическом поле оказывается пропорциональным величине приложенного поля.

113. В отсутствии поля уравнение Шредингера (для невозмущенной задачи)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + V(r) \right] \psi = \hat{H}^0 \psi = E_{nl} \psi$$

имеет вырожденные собственные значения — каждому уровню энергии E_{nl} отвечают $2l+1$ собственные функции ψ_{nlm} , отличающиеся различными m при одних и тех же n и l . Следовательно, волновую функцию возмущенной задачи надо искать в виде

$$\psi = \sum_{m=-l}^l c_m \psi_{nlm}.$$

Для атома во внешнем электрическом поле \mathbf{E} уравнение имеет вид

$$(\hat{H}^0 - e|\mathbf{E}|z)\psi = E\psi$$

и роль возмущения W играет член $e|\mathbf{E}|z$ (поле направлено по оси OZ). Уровни E получаем, приравнявая нулю детерминант

$$|(E_{nl} - E) \delta_{mm'} + \langle m | W | m' \rangle| = 0.$$

Очевидно

$$\langle m | W | m' \rangle = -e|\mathbf{E}| \int \psi_{nlm}^* z \psi_{nlm'} d\tau = -e|\mathbf{E}| \cdot I_r \cdot I_\theta \cdot I_\varphi.$$

Для $m \neq m'$

$$I_\varphi = \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} \cdot e^{im'\varphi} d\varphi = 0;$$

для $m = m'$

$$I_\theta = \int_0^\pi P_{lm}(\cos \theta) \cdot \cos \theta \cdot P_{lm}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 |P_{lm}(x)|^2 \cdot x dx = 0$$

в силу нечетности подынтегральной функции.

Таким образом, уравнение для E сведется к

$$(E_{nl} - E)^{2l+1} = 0, \quad \text{т. е. } E = E_{nl}.$$

Расщепление (в этом приближении) уровня энергии во внешнем электрическом поле отсутствует.

114. Так же, как в задаче 67, обозначая обычные координаты и энергию через \mathbf{r}' , E' , а безразмерные $\frac{\mathbf{r}'}{a} = \mathbf{r}$ ($a = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$) и $\frac{E'}{e^2/a} = \epsilon$, можем написать уравнение Шредингера для атома водорода, поме-

ценного в электрическое поле \mathbf{E} , параллельное OZ , в виде

$$-\frac{1}{2} \Delta \psi - \frac{1}{r} \psi - gz \psi = \epsilon \psi.$$

При этом энергия возмущения $-e|\mathbf{E}|z' = -gz$, где $g = \frac{|\mathbf{E}|a^2}{e}$ — безразмерное внешнее электрическое поле.

В параболических координатах $u = r + z$, $v = r - z$, ψ это уравнение приобретает вид (см. приложение IV):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(v \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \\ + \left[1 + \epsilon \frac{u+v}{2} + \frac{g}{4} (u^2 - v^2) \right] \psi = 0. \end{aligned}$$

Оно допускает разделение переменных:

$$\psi = U(u) V(v) \cdot e^{im\varphi} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

причем $U(u)$ и $V(v)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d}{du} \left(u \frac{dU}{du} \right) + \left[\alpha_1 + \frac{\epsilon u}{2} - \frac{m^2}{4u} + \frac{gu^2}{4} \right] U = 0; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dv} \left(v \frac{dV}{dv} \right) + \left[\beta_1 + \frac{\epsilon v}{2} - \frac{m^2}{4v} - \frac{gv^2}{4} \right] V = 0; \quad (2)$$

при этом $\alpha_1 + \beta_1 = 1$. Сравнивая их с соответствующими уравнениями при $g=0$, решенными в задаче 67, в которой было получено

$$\begin{aligned} U_{n_1}^0(u) &= e^{-\sqrt{-\frac{\epsilon}{2}}u} F_{n_1}^{m|} (u) \cdot u^{1/2}; \\ \alpha &= \sqrt{-\frac{\epsilon}{2}} (2n_1 + |m| + 1) \end{aligned}$$

(для первого уравнения), можно искать решение (1) при помощи теории возмущений. Собственное значение α является простым, а поэтому поправку $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha$, следует искать в виде

$$\Delta\alpha = - \int_0^\infty U_{n_1}^{0*} \frac{gu^2}{4} U_{n_1}^0 du.$$

При этом

$$\int_0^\infty |U_{n_1}^0|^2 du = 1.$$

Полином $F_{n_1}^{m|}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} u \frac{d^2 F_{n_1}^{m|}}{du^2} + \left(|m| + 1 - 2u \sqrt{-\frac{\epsilon}{2}} \right) \frac{dF_{n_1}^{m|}}{du} + \\ + \left[\alpha - (|m| + 1) \sqrt{-\frac{\epsilon}{2}} \right] F_{n_1}^{m|} = 0. \end{aligned}$$

Если подставить сюда значение α и ввести новую переменную

$$x = 2u \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2}}, \quad (3)$$

оно примет вид

$$x \frac{d^2 F_{n_1}^{|m|}}{dx^2} + [|m| + 1 - x] \frac{dF_{n_1}^{|m|}}{dx} + n_1 F_{n_1}^{|m|} = 0.$$

Записав $F_{n_1}^{|m|} = \sum_{k=0}^{n_1} b_k x^k$, найдем рекуррентное соотношение для коэффициентов b_k :

$$b_{k+1} = b_k \frac{k - n_1}{(k+1)(k+|m|+1)} \quad (k=0, 1, \dots). \quad (4)$$

Можно непосредственно проверить, что если выбрать

$$b_0 = (|m|+1)(|m|+2)\dots(|m|+n_1),$$

то

$$F_{n_1}^{|m|} = \frac{e^x}{x^{|m|}} \cdot \frac{d^{n_1}(e^{-x} \cdot x^{|m|+n_1})}{dx^{n_1}} = (-1)^{n_1} x^{n_1} + \dots \quad (5)$$

Остальные коэффициенты можно вычислить по формуле (4).

Для произвольной функции $f(x)$ вычислим интеграл вида

$$I = \int_0^{\infty} x^{|m|} e^{-x} \cdot F_{n_1}^{|m|} \cdot f(x) dx.$$

Подставляя (5) и интегрируя полученный интеграл по частям, находим

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} x^{|m|} e^{-x} \cdot \frac{e^x}{x^{|m|}} \cdot \frac{d^{n_1}(e^{-x} \cdot x^{n_1+|m|})}{dx^{n_1}} \cdot f dx = \\ &= (-1)^{n_1} \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{n_1+|m|} \cdot \frac{d^{n_1} f}{dx^{n_1}} dx. \end{aligned}$$

Пользуясь этим результатом, вычислим интеграл нормировки и матричный элемент. Вводя замену (3), запишем

$$U_{n_1} = C_{n_1, m} e^{-x/2} F_{n_1}^{|m|}(x) \cdot x^{|m|/2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |U_{n_1}|^2 du &= \frac{C_{n_1, m}^2}{\sqrt{-2\varepsilon}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{|m|} F_{n_1}^{|m|} \cdot F_{n_1}^{|m|} dx = \\ &= \frac{C_{n_1, m}^2}{\sqrt{-2\varepsilon}} (-1)^{n_1} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n_1+|m|} \frac{d^{n_1} F_{n_1}^{|m|}}{dx^{n_1}} dx \end{aligned}$$

и, так как $\frac{d^{n_1} F_{n_1}^{|m|}}{dx^{n_1}} = (-1)^{n_1} \cdot n_1!$, то

$$C_{n_1, m}^2 = \frac{\sqrt{-2\varepsilon}}{n_1! (n_1 + |m|)!}.$$

Таким же образом

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= -\frac{g}{4} \frac{C_{n_1, m}^2}{(\sqrt{-2\varepsilon})^3} \int_0^\infty e^{-x} x^{|m|} F_{n_1}^{|m|} \cdot (F_{n_1}^{|m|} \cdot x^2) dx = \\ &= -\frac{g}{4} \frac{C_{n_1, m}^2}{(\sqrt{-2\varepsilon})^3} (-1)^{n_1} \int_0^\infty e^{-x} x^{n_1 + |m|} \frac{d^{n_1}}{dx^{n_1}} (F_{n_1}^{|m|} \cdot x^2) dx. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{d^{n_1} (F_{n_1}^{|m|} \cdot x^2)}{dx^{n_1}} = b_{n_1} \frac{(n_1 + 2)!}{2!} x^2 + b_{n_1 - 1} \frac{(n_1 + 1)!}{1!} x + b_{n_1 - 2} \cdot n_1!,$$

и $b_{n_1} = (-1)^{n_1}$, а из формулы (4)

$$b_{n_1 - 1} = \frac{n_1 (n_1 + |m|)}{-1} b_{n_1}; \quad b_{n_1 - 2} = \frac{(n_1 - 1) (n_1 - 1 + |m|)}{-2} b_{n_1 - 1},$$

то

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{g}{8\varepsilon \cdot n_1! (n_1 + |m|)!} \int_0^\infty e^{-x} \left[\frac{(n_1 + 2)!}{2!} x^{n_1 + |m| + 2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n_1 (n_1 + |m|) (n_1 + 1)!}{1} x^{n_1 + |m| + 1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n_1 (n_1 - 1) (n_1 + |m|) (n_1 + |m| - 1)}{2!} n_1! x^{n_1 + |m|} \right] dx \end{aligned}$$

и после упрощений получаем

$$\Delta\alpha = \frac{g}{8\varepsilon} [6n_1^2 + 6n_1 (|m| + 1) + (|m| + 1) (|m| + 2)].$$

Если обратиться к уравнению (2), в котором роль энергии возмущения играет член $-\frac{gv^2}{4}$, а собственное значение — величина $(-\beta_1)$, то

$$\begin{aligned} \Delta\beta = \beta_1 - \beta = \int_0^\infty |V_{n_2}^{|m|}(v)|^2 \frac{gv^2}{2} dv = -\frac{g}{8\varepsilon} [6n_2^2 + 6n_2 (|m| + 1) + \\ + (|m| + 1) (|m| + 2)] \end{aligned}$$

(так как невозмущенные уравнения (1) и (2) идентичны). Значение энергии ε определяется из условия

$$\begin{aligned} 1 = \alpha + \Delta\alpha + \beta + \Delta\beta = \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2}} \cdot 2 (n_1 + n_2 + |m| + 1) + \\ + \frac{g}{8\varepsilon} [6 (n_1^2 - n_2^2) + 6 (|m| + 1) (n_1 - n_2)]. \end{aligned}$$

Так как $n_1 + n_2 + |m| + 1 = n$ и в поправочном члене, пропорциональном g , можно заменить ε его значением $\varepsilon_0 = -\frac{1}{2n^2}$ из невозможной задачи, то окончательно это условие записывается как

$$\sqrt{-2\varepsilon n} \left[1 - \frac{3}{2} g n^3 (n_1 - n_2) \right] = 1,$$

откуда

$$\varepsilon = -\frac{1}{2n^2} - \frac{3}{2} g n (n_1 - n_2).$$

Так как при заданном n числа n_1 и n_2 могут принимать значения от 0 до $n-1$, то максимальное значение $n_1 - n_2$ равно $n-1$, а минимальное равно $-(n-1)$. Следовательно, поправка к ε_0 может принимать $2n-1$ значение.

Таким образом, под влиянием поля уровень энергии в атоме водорода расщепляется на $2n-1$ уровень и величина расщепления пропорциональна полю ($g \sim |E|$).

115. Функции Ψ_0 и Ψ_1 удовлетворяют уравнению

$$\hat{H}\Psi_n = i\hbar \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} \text{ и } \Psi_n = u_n(r) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}; \quad \int \Psi_n^* \Psi_m d\tau = \delta_{nm} \quad (n, m = 0, 1).$$

После включения возмущения \hat{W} уравнение приобретает вид

$$(\hat{H} + \hat{W}) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Решение его следует искать как

$$\Psi = a_0(t) \Psi_0 + a_1(t) \Psi_1,$$

где $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$ и начальные значения коэффициентов $a_0(0) = 1$; $a_1(0) = 0$. Подставляя Ψ в уравнение, обычным методом находим

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{a}_0 &= a_0 W_{00} + a_1 W_{10} e^{\frac{i}{\hbar}(E_0 - E_1)t}; \\ i\hbar \dot{a}_1 &= a_0 W_{01} e^{\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_0)t} + a_1 W_{11}, \end{aligned}$$

где $W_{ik} = \int u_i^* \hat{W} u_k d\tau$ — матричные элементы \hat{W} . Если ввести $\alpha_0(t) = a_0(t)$ и $\alpha_1(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(E_0 - E_1)t} \cdot a_1(t)$, то уравнения для α_i :

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{\alpha}_0 &= \alpha_0 W_{00} + \alpha_1 W_{10}, \\ i\hbar \dot{\alpha}_1 &= \alpha_0 W_{01} + \alpha_1 [W_{11} + E_1 - E_0] \end{aligned}$$

являются однородными линейными уравнениями с постоянными коэффициентами и α_i можно искать в виде $\alpha_0 = A e^{-i\Omega t}$; $\alpha_1 = B e^{-i\Omega t}$. Коэффициенты A и B находятся из уравнений:

$$\begin{aligned} (W_{00} - \hbar\Omega) A + W_{10} B &= 0; \\ W_{01} A + [W_{11} + E_1 - E_0 - \hbar\Omega] B &= 0, \end{aligned}$$

условием разрешимости которых является равенство нулю детерминанта, приводящее к определению Ω :

$$\hbar\Omega_{12} = W_{00} + \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{|W_{10}|^2 + \frac{\gamma^2}{4}},$$

где

$$\gamma = W_{11} - W_{00} + E_1 - E_0.$$

Отсюда

$$\alpha_0 = A_1 e^{-i\Omega_1 t} + A_2 e^{-i\Omega_2 t}; \quad \alpha_1 = B_1 e^{-i\Omega_1 t} + B_2 e^{-i\Omega_2 t},$$

причем

$$B_i = \frac{\hbar\Omega_i - W_{00}}{W_{10}} A_i \quad (i = 1, 2). \quad (1)$$

Из начальных условий имеем

$$A_1 + A_2 = 1; \quad B_1 + B_2 = 0; \quad (2)$$

и, следовательно,

$$\alpha_0 = A_1 (e^{-i\Omega_1 t} - e^{-i\Omega_2 t}) + e^{-i\Omega_2 t};$$

$$\alpha_1 = B_1 (e^{-i\Omega_1 t} - e^{-i\Omega_2 t}).$$

Подставив выражение (1) в формулы (2), получим

$$A_1 = \frac{W_{00} - \hbar\Omega_1}{\hbar(\Omega_1 - \Omega_2)};$$

$$B_1 = -\frac{(\hbar\Omega_1 - W_{00})(\hbar\Omega_2 - W_{00})}{\hbar(\Omega_1 - \Omega_2)W_{10}} = \frac{W_{10}}{\hbar(\Omega_1 - \Omega_2)}.$$

Задача решена полностью

Оценим поведение $|\alpha_i|^2 = |\alpha_i(t)|^2$ во времени.
Вычисляя обычным путем модуль, находим

$$|\alpha_0|^2 = 1 + 4(A_1^2 - A_1) \sin^2 \sigma t$$

и

$$|\alpha_1|^2 = 4B_1^2 \sin^2 \sigma t,$$

где

$$\sigma = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} = \frac{\sqrt{|W_{10}|^2 + \frac{\gamma^2}{4}}}{\hbar}.$$

Используя выражения Ω_1 и Ω_2 , можно показать, что

$$4(A_1^2 - A_1) = (2A_1 - 1)^2 - 1 = \left[\frac{2W_{00} - \hbar(\Omega_1 + \Omega_2)}{\hbar(\Omega_1 - \Omega_2)} \right]^2 - 1 = \frac{\gamma^2}{4\sigma^2} - 1 = -\frac{|W_{10}|^2}{\sigma^2},$$

так как $4\sigma^2 - \gamma^2 = 4|W_{10}|^2$ и, следовательно,

$$|\alpha_0|^2 = |a_0|^2 = 1 - \frac{|W_{10}|^2}{\sigma^2} \sin^2 \sigma t;$$

$$|\alpha_1|^2 = |a_1|^2 = \frac{|W_{10}|^2}{\sigma^2} \sin^2 \sigma t.$$

Возмущение приводит к переходу системы из состояния Ψ_0 в Ψ_1 с частотой

$$\sigma = \frac{1}{\hbar} \sqrt{|W_{10}|^2 + \frac{\gamma^2}{4}}.$$

116. Вероятность перехода из состояния ψ_1 в ψ_p под влиянием возмущения $\hat{W}(\mathbf{r}, t)$ определяется в первом приближении коэффициентом $c_p(T)$, равным

$$c_p(T) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^T W_{p1}(t) e^{i \frac{E_p - E_1}{\hbar} t} dt,$$

где

$W_{p1} = \int \psi_p^* \hat{W}(\mathbf{r}, t) \psi_1 d\tau$, а E_1 и E_p — энергии соответствующих состояний. Для начального состояния надо написать функцию с $n=1$, $l=0$, $m=0$ для электрона в кулоновском поле с зарядом Ze . Эта функция найдена в задаче 61 и равна $\psi_1 = \psi_{100} = Ce^{-rZ/a}$, где $a = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$. Из условия нормировки имеем $C = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a^3}}$. В конечном состоянии электрон описывается плоской волной $\psi_p = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{\hbar}}$, где V —

объем области, в которой находится атом. Для определения числа состояний с данным импульсом накладываем, как обычно, требование периодичности: $\psi_p(x+L) = \psi_p(x)$ (причем $L^3 = V$) и получаем разрешенные значения

$$p_n = \frac{hn}{L}.$$

Отсюда число состояний с импульсами, попадающими в интервал $\mathbf{p} - (\mathbf{p} + d\mathbf{p})$, равно $\rho dp_x dp_y dp_z = 2 \frac{dp_x dp_y dp_z}{h^3} \cdot V$ (множитель 2 указывает число возможных проекций спина). Переходя к сферическим координатам в пространстве импульсов, можем написать число состояний с энергией в интервале $E_p - (E_p + dE_p)$ (где $E_p = \frac{p^2}{2\mu}$) и с направлением импульса в угле $d\Omega$:

$$\rho(E_p) dE_p d\Omega = \frac{2mp}{h^3} d\Omega dE_p.$$

Для данного случая вектор-потенциал задан как

$$A_x = A \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}); \quad A_y = A_z = 0 \quad (\mathbf{k} \parallel OZ).$$

Следовательно,

$$\hat{W} = -\frac{e}{\mu} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) = -\frac{eA}{\mu} \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}) \cdot \hat{p}_x.$$

Из того, что $W_{p1} = \int \psi_p^* \hat{W} \psi_1 d\tau = W_{1p}^* = \left[\int \psi_1^* \hat{W} \psi_p d\tau \right]^*$ и что $\hat{p}_x \psi_p = p_x \psi_p$, следует, что матричный элемент возмущения W_{p1} может быть записан в виде

$$W_{p1} = -\frac{eA p_x}{\mu} \int \psi_p^* \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}) \cdot \psi_1 d\tau.$$

Представляя

$$\cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} + e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}],$$

можем написать

$$c_p(T) = -\frac{e p_x A}{2i\hbar\mu} \left[\int \psi_p^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi_1 d\tau \int_0^T e^{\frac{i}{\hbar}(E_p - E_1 + \hbar\omega)t} dt + \int \psi_p^* e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi_1 d\tau \int_0^T e^{\frac{i}{\hbar}(E_p - E_1 - \hbar\omega)t} dt \right].$$

Так как

$$\int_0^T e^{\frac{i}{\hbar}(E_p - E_1 \pm \hbar\omega)t} dt = \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(E_p - E_1 \pm \hbar\omega)T} - 1}{(E_p - E_1 \pm \hbar\omega) \frac{i}{\hbar}},$$

то из двух слагаемых, входящих в $c_p(T)$, главную роль при фотоэффекте ($E_p > E_1$) играет то, в котором знаменатель содержит $E_p - E_1 - \hbar\omega \sim 0$. Пренебрегая вторым членом и подставляя ψ_p и ψ_1 имеем

$$c_p(T) = -\frac{e A p_x}{2\hbar\mu} \sqrt{\frac{Z^3}{\pi\omega^3 V}} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(E_p - E_1 - \hbar\omega)T} - 1}{[E_p - E_1 - \hbar\omega] \frac{i}{\hbar}} \cdot I,$$

где

$$I = \int e^{-Zr/a} \cdot e^{i\left(\mathbf{k}\mathbf{r} - \frac{p\mathbf{r}}{\hbar}\right)} d\tau = \int_0^\infty e^{-Zr/a r^2} dr \int_0^\pi e^{-iqr \cos\theta} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi;$$

при этом $\frac{p}{\hbar} - \mathbf{k} = \mathbf{q}$ и ось OZ выбрана вдоль \mathbf{q} , так что $\mathbf{q}\mathbf{r} = qr \cos\theta$.

Тогда, так как $\int_0^\infty e^{-ar} r dr = \frac{1}{a^2}$, то

$$I = \frac{2\pi}{iq} \left[\int_0^\infty e^{-r\left(\frac{Z}{a} - iq\right)} r dr - \int_0^\infty e^{-r\left(\frac{Z}{a} + iq\right)} r dr \right] = \frac{8\pi \frac{Z}{a}}{\left(\frac{Z^2}{a^2} + q^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Вероятность перехода в интервал состояний ΔE_p , равная

$$dW = \int_{\Delta E_p} |c_p(T)|^2 \rho(E_p) dE_p d\Omega,$$

содержит рядом с плавной функцией от E_p выражение

$$\frac{\left| e^{i(E_p - E_1 - \hbar\omega) \frac{T}{\hbar}} - 1 \right|^2}{(E_p - E_1 - \hbar\omega)^2 \frac{1}{\hbar^2}} dE_p = \frac{\sin^2 \frac{(E_p - E_1 - \hbar\omega) T}{2\hbar}}{\left(\frac{E_p - E_1 - \hbar\omega}{2\hbar} T \right)^2} \frac{dE_p}{2\hbar} 2\hbar T^2 =$$

$$= 2\pi \hbar T \delta(E_p - E_1 - \hbar\omega) dE_p,$$

и поэтому вероятность вылета фотозлектрона за 1 сек в угол $d\Omega$ равна

$$\frac{dW}{T} = 32\pi \frac{e^2}{\mu} \frac{A^2 Z^5}{h^3 a^5} \frac{\rho_x^2 \rho}{\left(\frac{Z^2 + q^2}{a^2} \right)^4} \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_p - E_1 - \hbar\omega) d\Omega,$$

причем $E_p = E_1 + \hbar\omega = \hbar\omega - J$, так как $E_1 = -J = -\frac{\mu e^4 Z^2}{2\hbar^2}$, где J — энергия ионизации атома.

Если подставить q^2 в знаменатель, то

$$\frac{Z^2}{a^2} + q^2 = \frac{Z^2}{a^2} + \frac{p^2}{\hbar^2} + k^2 - \frac{2pk}{\hbar} \cos\alpha = \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[\frac{\mu Z^2 e^4}{2\hbar^2} + \frac{p^2}{2\mu} \right] + k^2 - \frac{2pk}{\hbar} \cos\alpha =$$

$$= \frac{2\mu}{\hbar^2} \cdot \hbar\omega + k^2 - \frac{2pk}{\hbar} \cos\alpha \approx \frac{2\mu\omega}{\hbar} \left(1 - \frac{v}{c} \cos\alpha \right),$$

если пренебречь $k^2 \ll \frac{p^2}{\hbar^2}$.

Если направить \mathbf{k} по оси OZ , то $p_x = p \sin\alpha \cos\varphi$, и окончательно

$$\frac{dW}{T} = \frac{e^2}{\mu} \frac{A^2}{2\pi a^5 \mu^4} \frac{Z^5}{\omega^4} \frac{\sin^2\alpha \cos^2\varphi}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos\alpha \right)^4} p^3 d\Omega \delta \left(\frac{p^2}{2\mu} + J - \hbar\omega \right).$$

117. По условию задачи уравнения

$$\hat{H}_i u_n(\mathbf{r}_i) \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i u_n + V(\mathbf{r}_i) u_n = E_n u_n(\mathbf{r}_i) \quad (i = 1, 2)$$

решены и требуется найти собственные функции и собственные значения оператора $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{12}$, считая, что $\hat{H}_{12} = \hat{H}_{21}$. Рассматривая \hat{H}_{12} как возмущение, решаем сперва невозмущенную задачу:

$$\hat{H}_0 \Psi_{01}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) \Psi_{01}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E_0 \Psi_{01}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2).$$

Очевидно, можно написать

$$\Psi_{01}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = u_r(\mathbf{r}_1) \cdot u_s(\mathbf{r}_2).$$

Этой функции отвечает уровень энергии $E_0 = E_r + E_s$, которому можно, однако, привести в соответствие и другую функцию

$$\Psi_{02}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = u_s(\mathbf{r}_1) u_r(\mathbf{r}_2)$$

(частицы поменялись состояниями: теперь первая находится в s -том, а вторая — в r -том состоянии). Так как уровень E_0 оказался дву-

кратно вырожденным, то собственную функцию возмущенной задачи будем искать в виде

$$\Psi = a\Psi_{01} + b\Psi_{02}.$$

Подставляя ее в уравнение $(\hat{H}_1 + \hat{H}_2 | \hat{H}_{12} - E)\Psi = 0$, обозначая $E = E_r + E_s + \varepsilon$, получаем упрощенное уравнение

$$(\hat{H}_{12} - \varepsilon)(a\Psi_{01} + b\Psi_{02}) = 0.$$

Умножая его по очереди на Ψ_{01}^* и Ψ_{02}^* и интегрируя по переменным $d\tau_1$ и $d\tau_2$, приходим к двум уравнениям для a и b :

$$(C_{11} - \varepsilon)a + C_{12}b = 0; \quad (1)$$

$$C_{21}a + (C_{22} - \varepsilon)b = 0. \quad (2)$$

В силу симметричности \hat{H}_{12} коэффициенты $C_{11} = C_{22}$ и $C_{12} = C_{21}$. Действительно, замена \mathbf{r}_1 на \mathbf{r}_2 и \mathbf{r}_2 на \mathbf{r}_1 переводит Ψ_{01} в Ψ_{02} и, следовательно, коэффициент

$$C_{11} = \iint \Psi_{01}^* \hat{H}_{12} \Psi_{01} d\tau_1 d\tau_2 = \iint u_r^*(\mathbf{r}_1) u_s^*(\mathbf{r}_2) \hat{H}_{12} u_r(\mathbf{r}_1) u_s(\mathbf{r}_2) d\tau_1 \cdot d\tau_2$$

только наименованием переменных отличается от

$$C_{22} = \iint \Psi_{02}^* \hat{H}_{12} \Psi_{02} d\tau_1 d\tau_2 = \iint u_r^*(\mathbf{r}_2) u_s(\mathbf{r}_1) \hat{H}_{12} u_r(\mathbf{r}_2) u_s(\mathbf{r}_1) d\tau_1 d\tau_2$$

Точно так же

$$C_{12} = \iint \Psi_{01}^* \hat{H}_{12} \Psi_{02} d\tau_1 d\tau_2 = C_{21} = \iint \Psi_{02}^* \hat{H}_{12} \Psi_{01} d\tau_2 d\tau_1,$$

так как $\hat{H}_{12} = \hat{H}_{21}$. Обозначая $C_{11} - C_{22} = K$ и $C_{12} = C_{21} = A$, записываем уравнения (1) и (2) в виде

$$(K - \varepsilon)a + Ab = 0, \quad Aa + (K - \varepsilon)b = 0$$

и из условия разрешимости этой системы получаем

$$K - \varepsilon = \pm A.$$

1-й случай: $\varepsilon = K - A$; $a = b$. Таким образом, уровню $E' = E_r + E_s + K - A$ отвечает функция

$$\Psi' = a(\Psi_{01} + \Psi_{02}) = a[u_r(\mathbf{r}_1)u_s(\mathbf{r}_2) + u_s(\mathbf{r}_1)u_r(\mathbf{r}_2)].$$

2-й случай: $\varepsilon = K + A$; $a = -b$. Уровню $E'' = E_r + E_s - K - A$ соответствует функция

$$\Psi'' = a(\Psi_{01} - \Psi_{02}) = a[u_r(\mathbf{r}_1)u_s(\mathbf{r}_2) - u_s(\mathbf{r}_1)u_r(\mathbf{r}_2)].$$

Из условия нормировки находим $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, так как

$$\int |\Psi_{01}|^2 d\tau_1 d\tau_2 = \int |\Psi_{02}|^2 d\tau_1 d\tau_2 = 1$$

и

$$\int \Psi_{01}^* \Psi_{02} d\tau_1 d\tau_2 = \left(\int u_r^*(\mathbf{r}_1) u_s(\mathbf{r}_1) d\tau_1 \right)^2 = 0.$$

Если рассматриваемые частицы — электроны, то полная функция — пространственная и спиновая $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \sigma_1, \sigma_2)$ — должна быть антисимметрична, и следовательно, уровню

$$E' = E_r + E_s + K + A$$

отвечает одна функция

$$\Phi_a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{01} + \Psi_{02}) \chi_a(\sigma_1, \sigma_2)$$

(имеется только одна антисимметричная спиновая двухэлектронная функция; см. задачу 104). Следовательно, это синглетный уровень. Второе собственное значение

$$E'' = E_r + E_s + K - A$$

будет триплетным, так как с антисимметричной пространственной функцией $\Psi'' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{01} - \Psi_{02})$ можно комбинировать три симметричные спиновые функции

$$\chi'_c = \alpha_1 \alpha_2; \quad \chi''_c = \beta_1 \beta_2; \quad \chi'''_c = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2).$$

118. Волновая функция системы в начальный момент задана в виде (см. задачу 117)

$$\Psi_{t=0} = u_r(\mathbf{r}_1) u_s(\mathbf{r}_2) = \Psi_{01} = \Psi(0).$$

Чтобы определить изменение ее во времени, представим $\Psi(t)$ как результат действия некоторого оператора \hat{S} на $\Psi(0)$. $\Psi(t) = \hat{S}\Psi(0)$. Подставляя эту функцию во временное уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} \Psi(0) = \hat{H} \hat{S} \Psi(0)$$

и проводя формально интегрирование по t , находим

$$\hat{S} = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \quad \text{и} \quad \Psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \Psi(0).$$

Если $\Psi(0)$ разложить по собственным функциям \hat{H} , удовлетворяющим уравнению $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$, то

$$\Psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \sum_n c_n \psi_n = \sum_n c_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \psi_n,$$

так как действие любой функции от оператора $f(\hat{H})$ на собственные функции \hat{H} равно

$$f(\hat{H}) \psi_n = f(E_n) \psi_n.$$

Таким образом, чтобы определить $\Psi(t)$, надо сперва разложить ее начальное значение $\Psi(0)$ по собственным функциям H — по ψ_n .

В задаче 117 были найдены в нулевом приближении собственные функции H :

уровню $E' = E_r + E_s + K + A$ соответствовала

$$\Psi' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{01} + \Psi_{02}),$$

уровню $E'' = E_r + E_s + K - A$ —

$$\Psi'' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{01} - \Psi_{02}).$$

Отсюда можно найти

$$\Psi_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi' + \Psi'') = \Psi(0)$$

и согласно доказанному раньше

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{i}{\hbar} E' t} \Psi' + e^{-\frac{i}{\hbar} E'' t} \Psi'' \right).$$

Подставляя сюда E' и E'' и переходя снова к Ψ_{01} и Ψ_{02} , находим

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar} (E_r + E_s + K)t} \left[(\Psi_{01} + \Psi_{02}) e^{-\frac{i}{\hbar} At} + (\Psi_{01} - \Psi_{02}) e^{\frac{i}{\hbar} At} \right] = \\ &= c_1(t) \Psi_{01} + c_2(t) \Psi_{02}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (E_r + E_s + K)t \right] \cos \frac{At}{\hbar}; \\ c_2(t) &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (E_r + E_s + K)t \right] \sin \frac{At}{\hbar}, \end{aligned}$$

т. е. вероятности найти систему в состояниях Ψ_{01} и Ψ_{02} равны соответственно

$$W_{01} = |c_1|^2 = \cos^2 \frac{At}{\hbar}; \quad W_{02} = |c_2|^2 = \sin^2 \frac{At}{\hbar}.$$

Время, необходимое для того, чтобы частицы обменялись состояниями, т. е. $\Psi_{01} = u_r(\mathbf{r}_1) u_s(\mathbf{r}_2)$ перешло в $\Psi_{02} = u_r(\mathbf{r}_2) u_s(\mathbf{r}_1)$, определяется тем, чтобы $c_1(\tau) = 0$, т. е. $\frac{A\tau}{\hbar} = \frac{\pi}{2}$, откуда

$$\tau = \frac{\pi \hbar}{2A}.$$

119. Параметры выбранной для применения вариационного метода функции $\varphi = A(1 + \alpha r) e^{-\alpha r}$ определяются таким образом, чтобы вычисленный на этой функции средний гамильтониан

$$\langle H \rangle = \int \varphi^* \hat{H} \varphi d\tau$$

имел бы минимум при условии нормированности φ . Последнее дает

$$\int |\varphi|^2 d\tau = 4\pi A^2 \int_0^{\infty} (1 + \alpha r)^2 e^{-2\alpha r} r^2 dr = \\ = 4\pi A^2 \left[\frac{2!}{(2\alpha)^3} + 2\alpha \frac{3!}{(2\alpha)^4} + \frac{4! \alpha^2}{(2\alpha)^5} \right] = \frac{7\pi A^2}{\alpha^3} = 1,$$

т. е.

$$A^2 = \frac{\alpha^3}{7\pi}.$$

Оператор энергии для трехмерного изотропного осциллятора

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{m\omega^2}{2} r^2.$$

В силу самосопряженности \hat{p} можно удобно преобразовать $\langle T \rangle$:

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2m} \int \varphi^* \hat{p}^2 \varphi d\tau = \frac{1}{2m} \int |\hat{p}\varphi|^2 d\tau = \frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla\varphi|^2 d\tau,$$

и так как φ от углов не зависит, то

$$|\nabla\varphi| = \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| = A\alpha^2 r e^{-\alpha r}$$

и

$$\langle T \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} A^2 \alpha^4 \cdot 4\pi \int_0^{\infty} r^4 e^{-2\alpha r} dr = \frac{3}{14} \frac{\hbar^2 \alpha^2}{m}.$$

Вычисление $\langle V \rangle$ дает

$$\langle V \rangle = \int \varphi^* \frac{m\omega^2}{2} r^2 \varphi d\tau = 4\pi A^2 \frac{m\omega^2}{2} \int_0^{\infty} (1 + \alpha r)^2 e^{-2\alpha r} r^4 dr = \frac{81}{28} \frac{m\omega^2}{\alpha^2}.$$

и, следовательно,

$$\langle H \rangle \equiv \bar{H}(\alpha) = \frac{3}{14} \frac{\hbar^2 \alpha^2}{m} + \frac{m\omega^2}{\alpha^2} \cdot \frac{81}{28}.$$

Условие нормировки учтено непосредственно и следует искать минимум $\bar{H}(\alpha)$. Очевидно, α_0 определяется из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{3}{14} \frac{\hbar^2 \alpha^2}{m} + \frac{81}{28} \frac{m\omega^2}{\alpha^2} \right) \Big|_{\alpha_0} = 0$$

и равно

$$\alpha_0^2 = 3 \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{m\omega}{\hbar},$$

а

$$\bar{H}(\alpha_0) = \langle H \rangle_{\min} = \frac{9}{7} \sqrt{\frac{3}{2}} \hbar\omega \approx 1,575 \hbar\omega,$$

что всего на 5% больше точного значения наименьшего уровня энергии этой задачи $E_0 = \frac{3}{2} \hbar \omega$.

120. Условие нормировки функции $\varphi = B e^{-\alpha r/2a}$ дает

$$\int |\varphi|^2 d\tau = 4\pi B^2 \int_0^\infty e^{-\alpha r/a} \cdot r^2 dr = 4\pi B^2 \cdot \frac{2! a^3}{\alpha^3} = 1$$

и

$$B^2 = \frac{\alpha^3}{8\pi a^3}.$$

Аналогично задаче 119, составив $\frac{d\varphi}{dr} = -B \frac{\alpha}{2a} e^{-\alpha r/2a}$, вычислим

$$\langle T \rangle = \int \left| \frac{d\varphi}{dr} \right|^2 d\tau \cdot \frac{\hbar^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot B^2 \cdot \frac{\alpha^2}{4a^2} \cdot 4\pi \int_0^\infty e^{-\alpha r/a} \cdot r^2 dr = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{8ma^2}$$

и

$$\langle V \rangle = -A \int \varphi^* e^{-r/a} \varphi d\tau = -4\pi AB^2 \int_0^\infty e^{-(\alpha+1)\frac{r}{a}} \cdot r^2 dr = -A \frac{\alpha^3}{(1+\alpha)^3}.$$

Из условия минимума функции

$$\langle H \rangle = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{8ma^2} - \frac{A\alpha^3}{(1+\alpha)^3}$$

получим

$$\frac{\hbar^2 \alpha_0}{4ma^2} - \frac{3A\alpha_0^2}{(1+\alpha_0)^4} = 0.$$

Решить это уравнение четвертой степени относительно α_0 можно только численным методом, для чего нужны конкретные значения параметров задачи. Тогда основной уровень энергии дейтерона будет равен $\langle H \rangle(\alpha_0)$.

121. Для атома водорода $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{r}$. Проводя вычисления аналогично задаче 119 на обеих функциях, получаем

$$\langle H \rangle_{\min} [\varphi_1] \approx -\frac{me^4}{2,07\hbar^2};$$

$$\langle H \rangle_{\min} [\varphi_2] \approx -\frac{me^4}{2,3\hbar^2}.$$

Очевидно, φ_1 является лучшим приближением, чем φ_2 , так как $\bar{H}_{\min}[\varphi_1] < \bar{H}_{\min}[\varphi_2]$.

122. Представим гамильтониан задачи двух электронов вблизи ядра

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_2 - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} - \frac{e^2}{r_{12}}$$

в виде $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{12}$, причем

$$\begin{aligned}\hat{H}_1 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 - \frac{(2-s)e^2}{r_1}; \\ \hat{H}_2 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_2 - \frac{(2-s)e^2}{r_2}; \\ \hat{H}_{12} &= \frac{e^2}{r_{12}} - \frac{se^2}{r_1} - \frac{se^2}{r_2}.\end{aligned}$$

Уравнение $\hat{H}_1 u(r_1) = E_0 u(r_1)$ является уравнением Шредингера для водородной задачи с зарядом ядра $(2-s)e$ (параметр s будем определять таким образом, чтобы вычисленное E было минимальным). Следовательно,

$$E_0 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} (2-s)^2$$

и соответствующая нормированная собственная функция (см. задачу б1)

$$u = \frac{\sqrt{\gamma^3}}{\sqrt{\pi}} e^{-\gamma r_1}, \text{ где } \gamma = \frac{me^2}{\hbar^2} (2-s).$$

Основное состояние гелия в нулевом приближении (невозмущенная задача) описывается функцией

$$\Psi(r_1, r_2) = u(r_1) u(r_2).$$

Поправку к энергии $\varepsilon = E - 2E_0$ следует вычислять как

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \int \Psi^* \hat{H}_{12} \Psi d\tau_1 d\tau_2 = \frac{e^{2\gamma^6}}{\pi^2} \times \\ &\times \int d\tau_1 \int d\tau_2 e^{-2\gamma(r_1+r_2)} \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{s}{r_1} - \frac{s}{r_2} \right).\end{aligned}\quad (1)$$

Интегрирование легче всего провести в эллиптических координатах, помещая ядро и первый электрон в фокусы и обозначая

$$\begin{aligned}r_1 &= 2c; \quad r_2 = c(\xi - \eta); \quad r_{12} = c(\xi + \eta); \\ d\tau_2 &= c^3 (\xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta d\varphi.\end{aligned}$$

Координаты ξ, η, φ меняются в пределах

$$1 \leq \xi \leq \infty, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{e^{2\gamma^6}}{\pi^2} \int d\tau_1 e^{-2\gamma r_1} \cdot 2\pi c^2 \int_1^\infty d\xi \int_{-1}^1 d\eta (\xi^2 - \eta^2) \times \\ &\times e^{-2\gamma c(\xi-\eta)} \left(\frac{1}{\xi+\eta} - \frac{s}{2} - \frac{s}{\xi-\eta} \right) = \frac{e^{2\gamma^6}}{\pi^2} \int d\tau_1 e^{-2\gamma r_1} 2\pi c^2 I(r_1).\end{aligned}\quad (2)$$

Интегрируя по ξ и η , вычисляем интегралы:

$$I_0 = \int_1^{\infty} e^{-2\gamma c \xi} d\xi = \frac{e^{-2\gamma c}}{2\gamma c};$$

$$I_1 = \int_1^{\infty} e^{-2\gamma c \xi} \xi d\xi = \frac{e^{-2\gamma c}}{2\gamma c} \left(1 + \frac{1}{2\gamma c}\right);$$

$$I_2 = \int_1^{\infty} e^{-2\gamma c \xi} \xi^2 d\xi = \frac{e^{-2\gamma c}}{2\gamma c} \left[1 + \frac{2}{2\gamma c} + \frac{2}{(2\gamma c)^2}\right];$$

$$A_0 = \int_{-1}^1 e^{2\gamma c \eta} d\eta = \frac{e^{2\gamma c} - e^{-2\gamma c}}{2\gamma c};$$

$$A_1 = \int_{-1}^1 e^{2\gamma c \eta} \eta d\eta = \frac{e^{2\gamma c}}{2\gamma c} \left(1 - \frac{1}{2\gamma c}\right) + \frac{e^{-2\gamma c}}{2\gamma c} \left(1 + \frac{1}{2\gamma c}\right);$$

$$A_2 = \int_{-1}^1 e^{2\gamma c \eta} \eta^2 d\eta = \frac{e^{2\gamma c}}{2\gamma c} \left[1 - \frac{2}{2\gamma c} + \frac{2}{(2\gamma c)^2}\right] - \frac{e^{-2\gamma c}}{2\gamma c} \left[1 + \frac{2}{2\gamma c} + \frac{2}{(2\gamma c)^2}\right].$$

Эти интегралы входят в $I(r_1)$ следующим образом:

$$I(r_1) = \frac{s}{2} (I_0 A_2 - I_2 A_0) - (s+1) I_0 A_1 + (1-s) I_1 A_0.$$

После подстановки вычисленных I_k и A_k получаем

$$\begin{aligned} I(r_1) &= \frac{2}{(2\gamma c)^3} [1 - s - 2\gamma c s - e^{-4\gamma c} (2\gamma c + 1)] = \\ &= \frac{2}{\gamma^3 r_1^3} [1 - s - \gamma s r_1 - e^{-2\gamma r_1} (1 + \gamma r_1)], \end{aligned}$$

и, вводя его в выражение (2), производим интегрирование по r_1 :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{e^2 \gamma^6}{\pi^3} \int_0^{\infty} 4\pi r_1^2 dr_1 e^{-2\gamma r_1} 2\pi \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 \cdot I(r_1) = \\ &= 4e^2 \gamma^3 \int_0^{\infty} [(1-s) r_1 e^{-2\gamma r_1} - s \gamma r_1^2 e^{-2\gamma r_1} - r_1 e^{-4\gamma r_1} - \\ &\quad - \gamma r_1^2 e^{-4\gamma r_1}] dr_1 = e^2 \gamma \left(\frac{5}{8} - 2s\right). \end{aligned}$$

Следовательно, так как $e^2 \gamma = \frac{me^4}{\hbar^2} (2-s)$, то

$$\begin{aligned} E &= 2E_0 + \varepsilon = -\frac{me^4}{\hbar^2} (2-s)^2 + \frac{me^4}{\hbar^2} (2-s) \left(\frac{5}{8} - 2s\right) = \\ &= -\frac{me^4}{\hbar^2} (2-s) \left(\frac{11}{8} + s\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Из $\frac{\partial E}{\partial s} = 0$ получаем

$$s_0 = \frac{5}{16}.$$

Следовательно, энергия основного состояния гелия

$$E_{\min} = E(s_0) = - \left(\frac{27}{16}\right)^2 \frac{me^4}{\hbar^2}.$$

Потенциал ионизации атома равен разности полученного значения $|E(s_0)|$ и энергии однократно ионизированного гелия

$$|E_{\text{He}^+}| = \frac{2^2 me^4}{2\hbar^2} = \frac{2me^4}{\hbar^2},$$

т. е.

$$J = \frac{me^4}{\hbar^2} \left[\left(\frac{27}{16}\right)^2 - 2 \right] = 0,8477 \frac{me^4}{\hbar^2} = 23,0 \text{ эв.}$$

(Экспериментальное значение $J = 24,46$ эв.)

123. Согласно условию требуется найти приближенную волновую функцию, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta\psi + k^2\psi - \lambda U(r)\psi = 0,$$

где $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} > 0$ (задача рассеяния) и $\lambda U = \frac{2mV(r)}{\hbar^2}$ считается малым.

При $\lambda = 0$ уравнение $\Delta\psi_0 + k^2\psi_0 = 0$ имеет решение $\psi_0 = e^{ikr}$ (падающая частица).

В первом приближении будем искать $\psi = \psi_0 + \lambda\psi_1$ и, собирая члены с λ в первой степени, получим уравнение для ψ_1 :

$$\Delta\psi_1 + k^2\psi_1 = Ue^{ikr}. \quad (1)$$

Чтобы найти его решение, сравним (1) с уравнением для запаздывающих потенциалов:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho(r, t) \text{ и } \varphi(r, t) = \int \frac{\rho(r', t - \frac{|r-r'|}{c})}{|r-r'|} dt,$$

когда $\rho = \rho_0 e^{-i\omega t}$ и $\varphi(r, t) = \varphi_0(r) e^{-i\omega t}$. Тогда $\varphi_0(r)$ удовлетворяет уравнению вида

$$\Delta\varphi_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_0 = -4\pi\rho_0 \quad (2)$$

и равно

$$\varphi_0(r) = \int \frac{\rho_0(r') e^{i\frac{\omega}{c}|r-r'|}}{|r-r'|} dt'.$$

Уравнение (2) при $\frac{\omega}{c} = k$ и $\rho_0 = -\frac{Ue^{ikr}}{4\pi}$ совпадает с уравнением (1)

и, очевидно, можно написать для рассеянной волны

$$\psi_{\text{рас}} = \lambda\psi_1 = -\frac{1}{4\pi} \int dt' \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} V(r') e^{ikr'} \cdot \frac{2m}{\hbar^2}.$$

При $r \gg r'$ приближенно $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - r' \cos \alpha$, и, пренебрегая в знаменателе r' по сравнению с r , обозначая $kr' \cos \alpha = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}'$ (\mathbf{k}_1 имеет направление распространения рассеянной волны) и вводя $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| = K = 2k \sin \frac{\theta}{2}$, где θ — угол рассеяния, получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{рас}} &= -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d\tau' e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}'} \cdot V(r') = \\ &= -\frac{2m}{4\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^\infty V(r') r'^2 dr' \cdot 2\pi \int_0^\pi e^{iKr' \cos \theta'} \cdot \sin \theta' d\theta'. \end{aligned}$$

При этом предполагаем, что $V(r')$ от углов не зависит. Окончательно, так как

$$\int_0^\pi e^{iKr' \cos \theta'} \cdot \sin \theta' d\theta' = 2 \frac{\sin Kr'}{Kr'},$$

то, обозначая $f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr' \cdot r'^2 V(r') \cdot \frac{\sin Kr'}{Kr'}$, можно записать для рассеянной волны

$$\Psi_{\text{рас}} = \frac{e^{ikr}}{r} \cdot f(\theta).$$

Составляя плотности токов с использованием функций $\psi_0 = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ и $\psi_{\text{рас}}$, получим

$$qd\Omega = \frac{|\mathbf{j}_{\text{рас}} \cdot d\mathbf{S}|}{|j_{\text{пад}}|} = |f(\theta)|^2 \frac{dS}{r^2} = |f(\theta)|^2 d\Omega.$$

124. Используя задачу 123, вычислим $qd\Omega$ для $V(r') = \frac{Ze^2}{r'}$. Для сходимости интеграла введем временно множитель $e^{-\alpha r'}$, т. е. положим $V(r') = \frac{Ze^2}{r'} \cdot e^{-\alpha r'}$. Тогда

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{Ze^2}{K} \int_0^\infty e^{-\alpha r'} \sin Kr' dr' = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{Ze^2}{\alpha^2 + K^2}$$

и при $\alpha = 0$, подставляя K , получаем

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{2mZe^2}{\hbar^2 K^2}; \\ qd\Omega &= \frac{4m^2 Z^2 e^4}{\hbar^4 K^4} d\Omega = \frac{m^2 Z^2 e^4 d\Omega}{\hbar^4 k^4 \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

125. Напишем потенциальную энергию взаимодействия падающей на атом частицы с его ядром (заряд Ze) и с электронами, распределенными с плотностью $\rho(r)$:

$$V(r') = \frac{Zee_1}{r'} - ee_1 \int \frac{\rho(r'') d\tau''}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|}.$$

Следовательно, согласно задаче 123, запишем

$$f(\theta) = -\frac{mZe_1}{2\pi\hbar^2} I_1 + \frac{mee_1}{2\pi\hbar^2} I_2,$$

где

$$I_1 = \int \frac{e^{i\mathbf{K}r'}}{r'} d\tau'; \quad I_2 = \int e^{i\mathbf{K}r'} d\tau' \cdot \int \frac{\rho(r'') d\tau''}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|}; \quad (\mathbf{K} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1).$$

Чтобы вычислить $I(r'') = \int \frac{e^{i\mathbf{K}r'} d\tau'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|}$, заметим, что этот интеграл удовлетворяет уравнению $\Delta I(r'') = -4\pi e^{i\mathbf{K}r''}$ и, следовательно, положив $I(r'') = Ae^{i\mathbf{K}r''}$, получим $-K^2 Ae^{i\mathbf{K}r''} = -4\pi e^{i\mathbf{K}r''}$, т. е. $A = \frac{4\pi}{K^2}$. Таким образом,

$$I_1 = \frac{4\pi}{K^2}, \quad I_2 = 4\pi \int \rho(r'') \cdot e^{i\mathbf{K}r''} \frac{d\tau''}{K^2}$$

и

$$f(\theta) = -\frac{2mee_1}{\hbar^2 K^2} \{Z - F(\theta)\},$$

где

$$F(\theta) = 4\pi \int_0^\infty \rho(r'') \frac{\sin Kr''}{Kr''} r''^2 dr'' - \text{атомный фактор.} \quad (1)$$

Положив $\rho = \rho_0 e^{-r/a}$, из условия нормировки

$$\int_0^\infty \rho d\tau = 4\pi\rho_0 \int_0^\infty e^{-r/a} r^2 dr = 4\pi\rho_0 \cdot 2a^3 = Z$$

можно вычислить ρ_0 :

$$\rho_0 = \frac{Z}{8\pi a^3}.$$

Подставляя в формулу (1), получаем

$$\begin{aligned} F(\theta) &= 4\pi\rho_0 \int_0^\infty e^{-r/a} \frac{e^{iKr} - e^{-iKr}}{2iKr} r^2 dr = \\ &= \frac{Z}{4ia^3K} \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{a} - iK\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{a} + iK\right)^2} \right] = \frac{Z}{(1 + a^2K^2)^2} \end{aligned}$$

и

$$q(\theta) = \frac{4m^2e^2e_1^2}{\hbar^4K^4} Z^2 \left[1 - \frac{1}{(1 + a^2K^2)^2} \right]^2.$$

Вводя сюда $K = 2k \sin \frac{\theta}{2}$, $\hbar k = mv$, находим

$$q(\theta) = \frac{Z^2e^2e_1^2}{\left(\frac{mv^2}{2}\right)^2} \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2} \left[1 - \frac{1}{(1 + a^2K^2)^2} \right].$$

Для быстрых частиц, рассеивающихся на большие углы θ , $aK \gg 1$ и

$$q(\theta) \approx \frac{Z^2 e^2 e_1^2}{\left(\frac{mv^2}{2}\right)^2} \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}.$$

Для малых aK имеем $1 - \frac{1}{(1+a^2K^2)^2} \approx 2a^2K^2$ и

$$q(\theta) = \frac{16m^2 e^2 e_1^2}{\hbar^4} Z^2 a^4,$$

т. е. $q(\theta)$ конечно.

126. Согласно задаче 123 $q(\theta) d\Omega = |f(\theta)|^2 d\Omega$, где $f(\theta)$ — амплитуда рассеянной волны, определяемая в виде

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr \cdot r^2 \frac{\sin Kr}{Kr} V(r), \quad (1)$$

а $K = |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| = 2k \sin \frac{\theta}{2}$, θ — угол рассеяния.

Подставляя в выражение (1) $V = A \frac{e^{-\kappa r}}{r}$, получаем

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{2mA}{\hbar^2 K} \cdot \frac{1}{2i} \left[\int_0^\infty e^{-(\kappa - iK)r} r dr - \int_0^\infty e^{-(\kappa + iK)r} r dr \right] = \\ &= -\frac{mA}{\hbar^2 K i} \left[\frac{1}{\kappa - iK} - \frac{1}{\kappa + iK} \right] = -\frac{2mA}{\hbar^2 (\kappa^2 + K^2)} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$qd\Omega = \frac{4m^2 A^2}{\hbar^4 (\kappa^2 + K^2)^2} \cdot 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Полное сечение

$$\begin{aligned} \sigma &= \int qd\Omega = 2\pi \int_0^\pi \frac{4m^2 A^2}{\hbar^4} \cdot \frac{\sin \theta d\theta}{[\kappa^2 + 2k^2 (1 - \cos \theta)]^2} = \\ &= \frac{8\pi m^2 A^2}{\hbar^4} \cdot \frac{1}{2k^2} \left(\frac{1}{\kappa^2} - \frac{1}{\kappa^2 + 4k^2} \right) = \frac{4\pi}{\kappa^2 + 4k^2} \left(\frac{2mA}{\kappa \hbar^2} \right)^2. \end{aligned}$$

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

1. $p = \frac{1}{N}.$

2. $dw = \frac{2 dt}{T} = \frac{1}{\pi} \frac{d\varphi}{\varphi_0^2 - \varphi^2}$

3. $C = \frac{\alpha}{\pi}.$

$$4. d\omega(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} dx.$$

5. Обозначим через $P_n(t)$ вероятность вылета n электронов за время t , а через $P_0(t)$ — вероятность невылета ни одного электрона за это же время. Используя допущение а) и учитывая правило подсчета вероятности двух последовательных событий, получим

$$\begin{aligned} P_n(t+dt) &= P_{n-1}(t)P_1 + P_n(t)(1-P_1), \\ P_0(t+dt) &= P_0(t)(1-P_1), \end{aligned} \quad (1)$$

где P_1 — вероятность вылета одного электрона за бесконечно малое время dt . Эта вероятность по условию б) задачи равна

$$P_1 = \lambda dt. \quad (2)$$

Раскладывая теперь левые части уравнений (1) в ряд по степеням dt и устремляя потом $dt \rightarrow 0$, найдем

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} &= \lambda [P_{n-1}(t) - P_n(t)], \\ \frac{dP_0}{dt} &= -\lambda P_0(t). \end{aligned} \quad (3)$$

К полученной системе дифференциальных уравнений (3) для $P_n(t)$ следует еще добавить начальные условия, которые можно задать так:

$$P_n(0) = \begin{cases} 1, & \text{когда } n=0; \\ 0, & \text{когда } n \neq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Решение системы (3) с начальными условиями (4) легко находится и имеет вид

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (\text{распределение Пуассона}).$$

6. Используя распределение, полученное в предыдущей задаче, имеем

$$\begin{aligned} \overline{\Delta n^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t) - \left[\sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) \right]^2 = \\ &= \lambda t \left[\lambda t \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \right] - \\ &\quad - (\lambda t)^2 \left[e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \right]^2 = \lambda t, \end{aligned}$$

ибо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Но $\lambda t = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) = \bar{n} - n_0 t$. Итак,

$$\overline{\Delta n^2} = n_0 t.$$

7. Вероятность того, что в объеме V_0 находится одна молекула, равна $P = \frac{V_0}{V}$. Ясно, что вероятность того, что произвольные n молекул из общего числа N попадут в V_0 , будет

$$P_n(V_0) = C_N^n P^n (1-P)^{N-n},$$

где $C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ — число способов, которыми можно выбрать n произвольных молекул из общего числа N . Полученное выражение

$$P_N(V_0) = \frac{N!}{(N-n)! n!} \left(\frac{V_0}{V}\right)^n \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)^{N-n} \quad (1)$$

носит название биномиального закона.

Рассмотрим теперь два предельных случая:

а) поскольку $\bar{n} = PN$, то

$$P_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(\bar{n})^n}{n!} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^N = \frac{(\bar{n})^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \quad (2)$$

что совпадает с конечной формулой задачи 5, если помнить, что $\lambda t = \bar{n}$;

б) используя в этом случае формулу Стирлинга $\ln n! \approx n \ln n - n$, находим из выражения (2)

$$\ln P_n = n \ln \bar{n} - \bar{n} - \ln n! = -(\bar{n} - \Delta n) \ln \left(1 + \frac{\Delta n}{\bar{n}}\right) + \Delta n.$$

Учитывая теперь, что $\Delta n \ll \bar{n}$, получаем с точностью до 0 $\left[\left(\frac{\Delta n}{\bar{n}}\right)^2\right]$ для P_n следующее соотношение:

$$\ln P_n \approx -\frac{(\Delta n)^2}{2\bar{n}}.$$

Отсюда

$$P_n = C e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}}.$$

Теперь нормируя эту вероятность $\int_{-\infty}^{\infty} P_n dn = 1$, находим, что

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}}.$$

Полученное выражение для P_n носит название распределения Гаусса.

8. Данное неравенство следует из простых свойств интеграла и функции $\rho(x)$:

$$\begin{aligned} \omega(x > a) &= \int_a^x \rho(x) dx \leq \int_a^{\infty} \rho(x) \frac{x^2}{a^2} dx \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \frac{x^2}{a^2} dx \leq \frac{\overline{x^2}}{a^2}. \end{aligned}$$

Здесь $\rho(x)$ — вероятность того, что значение случайной величины x лежит в интервале $[x; x+dx]$

9. Введем в рассмотрение следующее выражение:

$$\frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \text{ где } -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

В этом выражении коэффициент при $e^{i\varphi}$ можно интерпретировать как вероятность шага на одну единицу вправо, а коэффициент при $e^{-i\varphi}$ — как вероятность аналогичного шага влево. Очевидно, что вероятность того, что частица после t шагов окажется в точке l , будет равна коэффициенту при $e^{i\varphi l}$ в разложении бинома:

$$\left[\frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \right]^t = \frac{1}{2^t} e^{i\varphi t} + \dots + P_t(l) e^{i\varphi l} + \dots + \frac{1}{2^t} e^{-i\varphi t}. \quad (1)$$

Умножим выражение (1) на $\frac{1}{2\pi} e^{-i\varphi l}$ и полученное равенство проинтегрируем по φ от $-\pi$ до π :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \right]^t e^{-i\varphi l} d\varphi = P_t(l),$$

так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\varphi(n-\pi)} d\varphi = \delta_{nk} = \begin{cases} 1; & n = k, \\ 0; & n \neq k. \end{cases}$$

Таким образом, искомая вероятность будет равна

$$P_t(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^t \varphi e^{-i\varphi l} d\varphi.$$

10. По аналогии с задачей 9 получим результаты:

1) для квадратной решетки вероятность того, что частица после t шагов попадет из начала координат в точку $l(l_1, l_2)$, равна

$$\begin{aligned} P_t(l) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{4} (e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1} e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2}) \right]^t \times \\ &\quad \times e^{-i(\varphi_1 l_1 + \varphi_2 l_2)} d\varphi_2 d\varphi_1; \end{aligned}$$

2) для простой кубической решетки эта же вероятность будет

$$P_t(l) \equiv P_t(l_1, l_2, l_3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{3} (\cos \varphi_1 + \right. \\ \left. + \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3) \right]^t e^{-i(\varphi_1 l_1 + \varphi_2 l_2 + \varphi_3 l_3)} d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3.$$

11. Рассмотрим совокупность всех траекторий, оканчивающихся в точке 1, и введем для них следующую производящую функцию:

$$u_s(z, 1) = \sum_{t=0}^{\infty} P_t(l) \cdot z^t = \\ = \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(\varphi_1 l_1 + \varphi_2 l_2 + \dots + \varphi_s l_s)}}{1 + \frac{z}{s} (\cos \varphi_1 + \dots + \cos \varphi_s)} d\varphi_1 \dots d\varphi_s.$$

Здесь s — размерность пространства.

Теперь покажем, что через эту функцию выражается вероятность невозвращения частицы в начало координат. Пусть: A — некоторое событие, которое может осуществляться повторно; f_j — вероятность того, что событие A осуществляется впервые в j -м испытании; u_j — вероятность того, что событие A осуществляется в j -м испытании независимо от того, осуществлялось ли оно раньше.

Положим $u_0 \equiv 1$ и построим полиномы:

$$u(z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^j; \quad F(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j z^j.$$

Легко сообразить, что

$$u_j = u_0 f_j + u_1 f_{j-1} + \dots + u_{j-1} f_1.$$

Умножая теперь обе части этого равенства на z^j и суммируя по j от 1 до ∞ , получим

$$u(z) - 1 = F(z) u(z),$$

т. е.

$$F(z) = 1 - [u(z)]^{-1}.$$

Но $F(1) = f_1 + f_2 + \dots$ есть вероятность того, что событие A когда-либо произойдет.

Отсюда возникают две возможности:

- если $u(1) = \infty$, то $F(1) = 1$ и событие A достоверно;
- если $u(1) < \infty$, то $F(1) < 1$ и существует положительная вероятность неосуществления события A .

В нашем случае $u(1)$ (вероятность того, что частица когда-либо вернется в начало координат) совпадает с

$$u_s(1) = \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi_1 \dots d\varphi_s}{1 - \frac{1}{s} (\cos \varphi_1 + \dots + \cos \varphi_s)}$$

Эти интегралы для одномерного и двухмерного случаев расходятся при малых значениях углов $\varphi_i \rightarrow 0$. Для одномерного случая это очевидно, а для двухмерного это можно получить, перейдя к полярной системе координат. Таким образом, в одномерном и двухмерном случаях частица, блуждающая случайным образом в смежные точки, всегда возвращается в начало координат. Для трехмерного случая интеграл может быть оценен численно:

$$u_s(1) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3}{1 - \frac{1}{3}(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3)} \approx 1,52,$$

т. е. существует вероятность (0,34) невозвращения частицы в начало координат.

12. Поскольку p сохраняется, то фазовая траектория имеет вид, показанный на рис. 56.

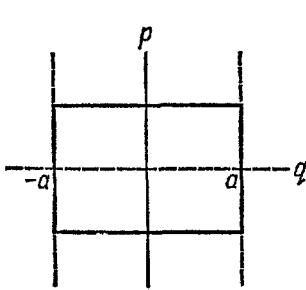


Рис. 56

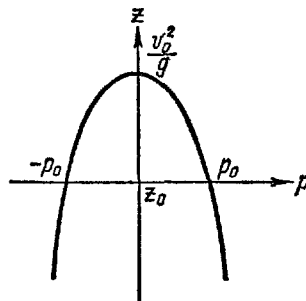


Рис. 57

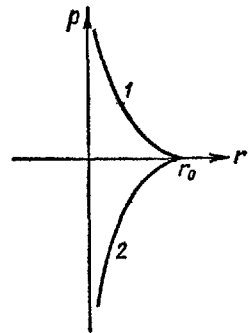


Рис. 58

13. Закон сохранения энергии сразу дает в данном случае уравнение фазовой траектории:

$$\frac{p_0^2}{2m} + mgz_0 = \frac{p^2}{2m} + mgz.$$

Траектория представляет собой параболу, показанную на рис. 57.

14. $p = \pm \sqrt{2me_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$. Первая ветвь соответствует движению заряда от r_0 до e_1 , а вторая — от e_1 до r_0 (рис. 58).

15. Считая, что в начальный момент скорость и координата осциллятора равны v_0 и x_0 соответственно, имеем

$$x = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \right].$$

Так как $\gamma \ll \omega_0$, то

$$\frac{v}{\omega} = e^{-\gamma t/2} \left[\frac{v_0}{\omega} \cos \omega t - x_0 \sin \omega t \right].$$

Отсюда

$$\left(x^2 + \frac{p^2}{k^2}\right) = \left(x_0^2 + \frac{p_0^2}{k^2}\right) e^{-\gamma t}.$$

Уравнение траектории представляет собой эллиптическую спираль (рис. 59). Изменение объема со временем будет происходить по закону

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \iint_G dp dx = \iint_{G_0} \frac{D(p, x)}{D(p_0, x_0)} dp_0 dx_0 = \\ &= e^{-\gamma t} \iint_{G_0} \left| \begin{array}{cc} \cos \omega t; & \frac{1}{m\omega} \sin \omega t \\ -m\omega \sin \omega t; & \cos \omega t \end{array} \right| dp_0 dx_0 = \\ &= e^{-\gamma t} \Gamma(0). \end{aligned}$$

16. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{p_\varphi^2}{2J} + mgL(1 - \cos \varphi) = H_0,$$

где J — момент инерции, p_φ — обобщенный импульс. Отсюда

$$p_\varphi = \pm \sqrt{2J(H_0 - mgL) + 2Jmg \cos \varphi}.$$

1-й случай. Фазовая траектория показана на рис. 60. Она отвечает вращательному движению в двух различных направлениях.

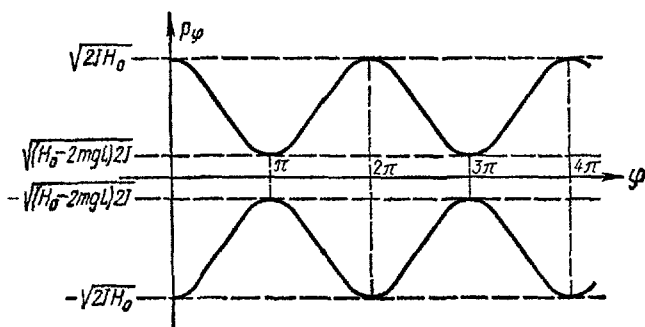


Рис. 60

2-й случай. Фазовая траектория показана на рис. 61. Из рисунка следует, что в точке $\varphi = \pi$ соприкасаются две ветви фазовой траектории. В этой точке возникает неоднозначность. Но если подсчитать время, необходимое для достижения точки $\varphi = \pi$, то оно равно ∞ . Действительно, так как $p_\varphi = J \frac{d\varphi}{dt}$, то

$$t = \int_0^\pi \frac{J d\varphi}{\sqrt{4mgL \cdot J \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} = \infty.$$

В 3-м случае возможные значения угла будут лежать в пределах $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, где φ_0 — определяется из условия $p_\varphi = 0$. Фазовая траектория будет иметь вид, показанный на рис. 62, и описывает колебательное движение маятника.

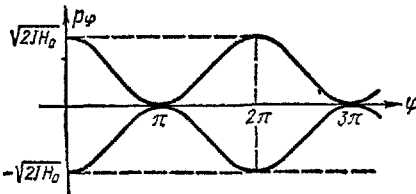


Рис. 61

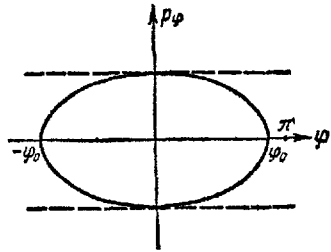


Рис. 62

17. 1. Законы сохранения энергии и импульса дают связь между импульсами частиц до и после столкновения:

$$p_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_2,$$

$$p_2' = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} p_1.$$

Отсюда

$$\frac{D(p_1', p_2', q_1', q_2')}{D(p_1, p_2, q_1, q_2)} = 1,$$

т. е. фазовый объем сохраняется.

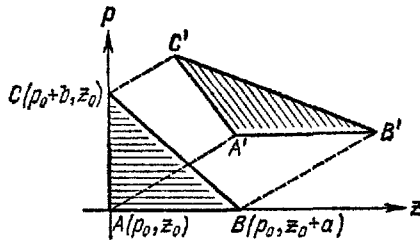


Рис. 63

2. Вершины треугольника $A(p_0, z_0)$, $B(p_0, z_0 + a)$, $C(p_0 + b, z_0)$ через некоторый промежуток времени t займут положения (рис. 63);

$$A'(p_1, z_1), \text{ где } p_1 = p_0 - mgt, \quad z_1 = z_0 + \frac{p_0}{m}t - \frac{gt^2}{2};$$

$$B'(p_2, z_2), \text{ где } p_2 = p_0 - mgt, \quad z_2 = z_1 + a;$$

$$C'(p_3, z_3), \text{ где } p_3 = p_1 + b; \quad z_3 = z_1 + \frac{b}{m}t.$$

Как видно, при этом площадь нового треугольника будет равна

$$S = \frac{ab}{2} = S_0.$$

Таким образом, форма области, занятой фазовыми точками, изменилась, но величина площади осталась прежней.

18. Вероятность того, что энергия H замкнутой системы лежит в интервале $[E, E + dE]$, дается микроканоническим распределением Гиббса (см. формулу (4));

$$\rho(H) = \frac{\delta(H-E)}{\Omega(E)}.$$

Здесь $\delta(H-E)$ —дельта-функция Дирака (49), а $\Omega(E)$ —нормировочный множитель распределения, который равен

$$\Omega(E) = \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial H} \right|_{H=E},$$

где Γ —фазовый объем, ограниченный гиперповерхностью постоянной энергии $H(p_i, q_i) = E$. Исходя из этого, находим

$$а) \Gamma(H) = \int^{2N} d^N p = \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2} + 1\right)} (2mH)^{\frac{3N}{2}},$$

где интегрирование проводилось по гиперповерхности, определяемой условием $\frac{p_1^2 + \dots + p_N^2}{2m} \leq H$ [см. формулу (59)]. Отсюда.

$$\rho(H) = \delta(H-E) \cdot \frac{2}{3N} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3N}{2} + 1\right)}{2m^{\frac{3N}{2}} \pi^{\frac{3N}{2}}} \cdot E^{1-\frac{3N}{2}};$$

$$б) \Gamma(H) = \int^{2N} d^N p d^N q = H^N \left(\frac{2m\pi}{\omega}\right)^N \frac{1}{N!},$$

где интегрирование проводилось по гиперповерхности, определяемой условием $\frac{p_1^2 + \omega^2 q_1^2}{2m} + \dots + \frac{p_N^2 + \omega^2 q_N^2}{2m} \leq H$ [см. (59)]. Отсюда

$$\rho(H) = \delta(H-E) \frac{(N-1)!}{E^{N-1}} \cdot \left(\frac{\omega}{2\pi m}\right)^N.$$

19. При наличии теплового контакта между системой с энергией $H(p_i, q_i)$ ($i=1, \dots, n$) и термостата с энергией $H_0(p'_i, q'_i)$ ($i=1, \dots, N \gg n$), которые вместе образуют общую замкнутую систему с энергией $H + H_0 = E$, плотность вероятности для «ансамбля» можно легко найти из микроканонического распределения. Действительно, согласно правилу сложения вероятностей, получаем

$$\rho(H) = \int \rho(H, H_0) dp'_i dq'_i.$$

Но $\rho(H, H_0)$ дается микроканоническим распределением

$$\rho(H, H_0) = \frac{\delta(H + H_0 - E)}{\Omega(E)}.$$

Поэтому

$$\rho(H) = \frac{\Omega_0(E - H)}{\Omega(E)},$$

$$\text{где } \Omega_0(E - H) = \left. \frac{\partial \Gamma_0}{\partial H_0} \right|_{H_0 = E - H},$$

а Γ_0 — объем, ограниченный гиперповерхностью постоянной энергии термостата $H_0(p_i', q_i') = \text{const}$. Используя теперь результаты предыдущей задачи, имеем

$$a) \quad \Omega_0(E - H) = \frac{3N}{2} \frac{(2\pi m)^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2} + 1\right)} (E - H)^{\frac{3N}{2} - 1}.$$

Устремим $N \rightarrow \infty$, но при этом положим

$$\lim_{\substack{E \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{E}{N} = \frac{3}{2} \Theta,$$

где Θ — модуль распределения. Тогда

$$\rho(H) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{3N}{2} (2\pi m)^{\frac{3N}{2}} E^{\frac{3N}{2} - 1}}{\Omega(E)} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{H}{\frac{3}{2} N \Theta}\right)^{\frac{3N}{2} - 1}.$$

Первый предел конечный, ибо

$$\Omega(E) = \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial (H + H_0)} \right|_{H + H_0 = E}$$

есть полная нормировка. Поэтому

$$\rho(H) = \text{const} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{2H}{3N\Theta}\right)^{\frac{3N\Theta}{2H}} \right]^{H/\Theta} = \text{const} e^{-H/\Theta};$$

б) решение в этом случае аналогично решению а), но требуется, чтобы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E}{N} = \Theta.$$

Полученные формулы совпадают с формулой (7), которая может быть выведена в общем виде, без учета конкретной модели термостата

20. Для идеального газа

$$H = \sum_{i=1}^N [\varepsilon(\mathbf{P}_i) + U(\mathbf{r}_i)] = \sum_{i=1}^N H_i,$$

где $\varepsilon(\mathbf{p}_i)$ — кинетическая энергия частицы, $U(\mathbf{r}_i)$ — потенциальная энергия «взаимодействия» частицы со стенками сосуда, равная

$$U(\mathbf{r}_i) = \begin{cases} 0; & \mathbf{r}_i \subset V, \\ \infty; & \mathbf{r}_i \notin V. \end{cases}$$

Тогда

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sum_{i=1}^N H_i}{\Theta}} d^N p d^N r = V^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{H_i}{\Theta}} d\Gamma_i \right]^N = V^N (z_i)^N.$$

Обозначая $z_i \equiv f(\Theta)$, находим свободную энергию

$$F = -N\Theta \ln V - N\Theta \ln f(\Theta)$$

и затем энтропию, давление и среднюю энергию соответственно:

$$S = N \ln f(\Theta) \cdot V + N\Theta \frac{\partial \ln f(\Theta)}{\partial \Theta},$$

$$p = \frac{N\Theta}{V}, \quad E = N\Theta^2 \frac{\partial \ln f(\Theta)}{\partial \Theta}.$$

21. 1. Считая, что $H_i = \frac{p_i^2}{2m}$, получаем [см. формулу (61)]:

$$z_i = (2\pi m\Theta)^{3/2};$$

$$p = \frac{N\Theta}{V}; \quad S = \frac{3}{2} N [\ln(2\pi m\Theta \cdot V) + 1]; \quad E = \frac{3}{2} N\Theta; \quad C_V = \frac{3}{2} kN.$$

2. Энергия системы имеет вид:

$$H_i = \frac{p_i^2}{2M} + \frac{1}{2\mu r_0^2} \left[p_{i\vartheta}^2 + \frac{p_{i\varphi}^2}{\sin^2 \vartheta} \right] \left(M = m_1 + m_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right),$$

$$z_i = (2\pi M\Theta)^{3/2} 8\pi^2 r_0^2 \mu \Theta = A \cdot \Theta^{5/2},$$

где $A \equiv 8\pi^2 r_0^2 \mu (2\pi M)^{3/2}$, r_0 — равновесное расстояние между атомами в молекуле. Тогда

$$p = \frac{N\Theta}{V}; \quad S = N \ln V \cdot A + \frac{5}{2} N \ln V\Theta + \frac{5}{2} N;$$

$$E = \frac{5}{2} N\Theta; \quad C_V = \frac{5}{2} kN.$$

3. В приближении малых колебаний имеем

$$H_i \cong \frac{p_i^2}{2M} + \frac{1}{2\mu} \left[p_{i\vartheta}^2 + \frac{p_{i\varphi}^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{p_{i\varrho}^2}{r^2} \right] + U(r_0) + \frac{\gamma}{2} (r - r_0)^2,$$

где потенциальная энергия атомов представлена в виде

$$U(r) = U(r_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \Big|_{r=r_0} (r - r_0)^2 + \dots,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \Big|_{r=r_0} \equiv \gamma.$$

При низких температурах оценку интеграла состояний можно легко получить, учитывая тот факт, что подинтегральная функция имеет резкий максимум в точке r_0 . Отсчитывая энергию от $U(r_0)$, находим, что

$$z_i = (2\pi M)^{3/2} 4\pi (2\pi\mu)^{3/2} \Theta^3 r_0^2 \sqrt{\frac{2\pi\theta}{\gamma}} = B\Theta^{7/2},$$

где $B \equiv (2\pi M)^{3/2} 4\pi (2\pi\mu)^{3/2} r_0^2 \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}}$.

Тогда

$$p = \frac{N\Theta}{V}; \quad S = N \ln V \cdot B + \frac{7}{2} N \ln V\Theta + \frac{7}{2} N; \quad E = \frac{7}{2} N\Theta; \quad C_V = \frac{7}{2} kN.$$

22. В обоих случаях $p = \frac{N\Theta}{2}$, так как газы идеальны, и $H = \sum_{i=1}^N H_i$.

$$a) z_i = 4\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{ap^i}{\Theta}} p^2 dp = \frac{4\pi}{l} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{l}\right)}{a^{3/l}} \Theta^{1/l}.$$

Отсюда

$$E = \frac{1}{l} 3N\Theta.$$

В данном случае $p = \frac{l}{3V} \cdot E$;

$$б) z_i = 4\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{c\sqrt{m^2c^2+p^2}}{\Theta}} p^2 dp.$$

Делая замену $p = mc \operatorname{sh} t$, приводим z_i к виду

$$z_i = 4\pi m^3 c^3 \int_0^{\infty} e^{-z_0 \operatorname{ch} t} \operatorname{sh}^2 t \cdot \operatorname{ch} t \cdot dt,$$

где $z_0 \equiv \frac{mc^2}{\Theta}$. Отсюда

$$z_i = \frac{4\pi}{z_0} m^3 c^3 \left[K_0(z_0) + \frac{2}{z_0} K_1(z_0) \right],$$

где $K_0(z_0)$ и $K_1(z_0)$ — функции Ханкеля мнимого аргумента. Средняя энергия системы равна

$$E = N\Theta \left[1 + 2 \frac{K_0(z_0) + \left(\frac{z_0}{2} + \frac{2}{z_0}\right) K_1(z_0)}{K_0(z_0) + \frac{2}{z_0} K_1(z_0)} \right].$$

Используя асимптотику функций Ханкеля, легко получить, что при $kT \ll mc^2$

$$E = Nmc^2 + \frac{3}{2} NkT.$$

23. Пусть минимальное значение энергии системы равно нулю, тогда

$$Z(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta E} \Omega(E) dE. \quad (1)$$

Если предположить, что $E > 0$ и $\Omega(E) = 0$ для $E < 0$, то $\Omega(E)$ находится по следующей формуле:

$$\Omega(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\beta E} Z(\beta) d\beta,$$

ибо из формулы (1) следует, что Z и $\Omega(E)$ связаны преобразованием Лапласа. Отсюда, используя теорему Коши для производной, находим

$$\Omega(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{A}{\beta^N} e^{\beta E} d\beta = AE^{N-1} \frac{1}{(N-1)!}.$$

24. $\rho = C \exp \left\{ -\frac{H(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}_i)}{kT} + \frac{1}{2kT} \sum_i m [\Omega \mathbf{r}_i]^2 \right\}$, где \mathbf{v}_i , \mathbf{r}_i — соответственно скорости и координаты частиц относительно вращающейся системы координат.

25. Используя результат предыдущей задачи, получаем

$$F = F_0 - NkT \ln \left[\frac{2kT}{m\Omega^2 R^2} (e^{\frac{m\Omega^2 R^2}{2kT}} - 1) \right].$$

Отсюда, учитывая, что $dV = 2\pi h R dR$, находим

$$p = -\frac{NkT}{V} \cdot \frac{U(R)}{kT} \cdot \frac{e^{-U/kT}}{e^{-U/kT} - 1}; \quad U \equiv -\frac{m\Omega^2 R^2}{2}.$$

26. Рассмотрим полную производную по времени от следующей суммы по всем частицам тела:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}_i} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i. \quad (1)$$

Усредним это выражение по времени:

$$\tilde{F}^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t F(t') dt'. \quad (2)$$

Тогда, если частицы совершают движение в конечной области и со скоростями, не обращающимися в бесконечность в этой области, то для левой части равенства (1) усреднение по времени даст нуль ($t \rightarrow \infty$). Для слагаемых правой части, учитывая теорему Эйлера

об однородных функциях, находим

$$\sum_{i=1}^N p_i \overline{\frac{\partial T}{\partial p_i}} = 2\overline{T} \equiv 2T_0,$$

T_0 —средняя кинетическая энергия частиц системы;

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \dot{p}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \mathbf{F}_i,$$

где \mathbf{F}_i —сила, которая действует на i -ю частицу. Выражение $\sum_i \mathbf{r}_i \mathbf{F}_i$ в механике называют вириалом.

Пусть частицы системы движутся в объеме V . Тогда со стороны единицы площади поверхности на частицы системы будем действовать сила— $\mathbf{n} p(t)$ (\mathbf{n} —внешняя нормаль к поверхности, ограничивающей объем V , а $p(t)$ —давление в данный момент времени, оказываемое частицами системы на данную единичную площадку). Поскольку, кроме того, между частицами системы существуют силы взаимодействия $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, то

$$\sum_{i=1}^N \overline{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i} = - \oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \cdot p \, dS - \sum_{i=1}^N \overline{\mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}} = -p_0 \cdot 3V - nU_0,$$

так как

$$\oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} p(t) \, dS = \overline{p(t)} \iiint \operatorname{div} \mathbf{r} \, dV = 3p_0 V,$$

где p_0 —среднее давление в системе, а $U_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \overline{U(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)}$ —средняя потенциальная энергия взаимодействия частиц системы между собой.

Итак, окончательно получаем, что давление в системе

$$p = \frac{2}{3} \frac{T_0}{V} + \frac{nU_0}{3V} = \frac{2}{3} \frac{N\varepsilon_0}{V} + \frac{nU_0}{3V},$$

где ε_0 —средняя кинетическая энергия движения отдельной частицы.

$$27. \overline{H^n} = \Theta^n \frac{\Gamma\left(\frac{3N}{2} + n\right)}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)} \quad [\text{см. (62)}]. \quad \text{Исходя из полученных результатов}$$

таков

$$\sqrt{\overline{(H-\overline{H})^2}} = \Theta \sqrt{\frac{3N}{2}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

28. Пусть

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N).$$

Тогда, пользуясь теоремой сложения вероятностей, можно определить вероятность того, что скорость частицы будет находиться

в интервале $[\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}]$:

$$1) \quad d\rho(\mathbf{v}) = e^{-\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sum_{i=1}^N \frac{mv_i^2}{2kT}} d^{N-1}\mathbf{v}' \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)}{kT}} d^N r \, dv_x \, dv_y \, dv_z = C e^{-m\mathbf{v}^2/2kT} \, dv_x \, dv_y \, dv_z,$$

где $C = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$ находится из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho(\mathbf{v}) = 1.$$

Учитывая, что $dv_x \, dv_y \, dv_z = v^2 \sin^2 \theta \, dv \, d\theta \, d\varphi$ и $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$, получаем

$$2) \quad d\rho(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 \, dv,$$

$$3) \quad d\rho(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/kT} \sqrt{\varepsilon} \, d\varepsilon.$$

29. По общему правилу нахождения среднего имеем

$$\bar{v}^n = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \int_0^{\infty} v^{n+2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \, dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right).$$

Используя значения гамма-функции [см. формулы (53), (54)], находим

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

а из условия $\frac{\partial}{\partial v}(e^{-mv^2/2kT} v^2) = 0$ определяем

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

30. Из формулы предыдущей задачи имеем

$$\bar{\varepsilon} = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{3}{2} kT, \quad \varepsilon_0 = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{kT}{2}.$$

Как видно, $\bar{\varepsilon} \neq \varepsilon_0$, хотя для энергии всей системы справедливо следующее соотношение:

$$H_0 \approx \bar{H} = E.$$

Последнее может иметь место лишь в случае большого числа частиц в системе.

31. Записав распределение Максвелла по импульсам частиц, получим

$$d\rho(p) = C e^{-\frac{c \sqrt{m^2 c^2 + p^2}}{kT}} dp_x \, dp_y \, dp_z.$$

Из условия нормировки $\int d\rho(p) = 1$ определяем C :

$$C = \left\{ 4\pi (mc)^3 \left[2 \left(\frac{kT}{mc^2} \right) K_1 \left(\frac{mc^2}{kT} \right) + \frac{kT}{mc^2} K_0 \left(\frac{mc^2}{kT} \right) \right] \right\}^{-1},$$

где $K_0(z)$ и $K_1(z)$ — функции Ханкеля мнимого аргумента.

$$32. \quad d\rho(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2} dv_x dv_y dv_z.$$

33. Определим вероятность того, что первая молекула имеет скорость \mathbf{v}_1 , а вторая \mathbf{v}_2 . Из распределения Гиббса получим

$$d\rho(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = ce^{-\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2kT}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2.$$

Используя условие нормировки, получаем

$$d\rho(v_1, v_2) = 16\pi^3 \left(\frac{m_1 m_2}{4\pi^2 k^2 T^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2kT}} v_1^2 v_2^2 dv_1 dv_2.$$

Переходя к новым переменным $\mathbf{v}' = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_0 = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$ и учитывая, что $m_1 m_2 = \mu M$, получаем

$$d\rho(v', v_0) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{M v'^2}{2kT}} v'^2 dv' \times 4\pi \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{M v_0^2}{2kT}} v_0^2 dv_0, \\ \left(M = m_1 + m_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right).$$

Проинтегрировав это выражение по скорости центра масс v_0 , найдем распределение частиц газа по величине относительной скорости:

$$d\rho(v') = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{M v'^2}{2kT}} v'^2 dv'.$$

Отсюда

$$\bar{v}' = \sqrt{2} \bar{v},$$

где \bar{v} — средняя скорость движения частиц газа.

34. Для характеристики столкновения частиц вводится полное эффективное сечение рассеяния σ — величина, определяющая отношение вероятности данного столкновения в единицу времени к плотности потока частиц. Если в единице объема среднее число частиц n , то среднее число столкновений, испытываемых данной молекулой со всеми остальными в единицу времени будет

$$\nu = \int \sigma(v') n v' d\rho(v').$$

Для нашего случая $\sigma = 4\pi R_0^2$. Тогда

$$\nu = 4\pi \sqrt{\frac{kT}{\pi m}} \cdot \sigma.$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{\bar{v}}{v} = \frac{1}{4\pi n R_0^2 \sqrt{2}}.$$

$$35. \frac{n_2}{n_1} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(1) - \frac{1}{e}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{e} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(1)}, \quad \text{где } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ [см. фор-}$$

мулы (63)—(66)]. Но $\operatorname{erf}(1) = 0,84$. Поэтому $\frac{n_2}{n_1} = 0,4$.

36. Сечение рассеяния в данном случае равно

$$\sigma = \pi D^2 \left[1 + \frac{\alpha}{D^2 m v'^2} \right],$$

где $D = 2R_0$, v' — относительная скорость движения частиц. Усредняя теперь это выражение по v' , получаем формулу Сюзерленда:

$$\bar{\sigma} = \pi D^2 \left(1 + \frac{a}{T} \right),$$

где $a \equiv \frac{\alpha}{D^2 k}$;

37. $v = n_0 \bar{\sigma} \cdot \sqrt{2}$. Здесь $n'_0 = \frac{N}{S}$, \bar{v} — средняя скорость в двухмерном случае, N — общее число частиц на поверхности, S — площадь поверхности.

38. Поскольку атомы движутся с различными скоростями, то благодаря эффекту Доплера наблюдатель будет воспринимать свет всех длин волн. К примеру, от атома, который удаляется со скоростью v_z от наблюдателя, находящегося на оси Oz , свет будет восприниматься и с длиной

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{v_z}{c} \right).$$

Поэтому интенсивность света, воспринимаемая наблюдателем в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$, будет

$$J d\lambda = \alpha \cdot dn(\lambda),$$

где $dn(\lambda)$ — число атомов во всем объеме, излучающих свет с длиной волны, лежащей в интервал $[\lambda, \lambda + d\lambda]$, α — постоянная величина, определяемая из условия

$$\int J(\lambda) d\lambda = N J_0.$$

Если принять распределение скоростей атомов по Максвеллу, то

$$\begin{aligned} dn(\lambda) &= dn(v_z) = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-mv_z^2/2kT} dv_z = \\ &= N \left(\frac{mc^2}{2\lambda_0^2 \pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{mc^2}{2kT\lambda_0^2} (\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda, \end{aligned}$$

так как

$$v_z = \frac{c}{\lambda_0} (\lambda - \lambda_0).$$

Тогда

$$J(\lambda) d\lambda = \alpha N \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi \delta^2}} e^{-(\lambda - \lambda_0)^2 / \delta^2} d\lambda,$$

где $\delta = \sqrt{\frac{2kT\lambda_0^2}{mc^2}}$ — доплеровская полуширина спектральной линии.

Найдем теперь α :

$$NJ_0 = \frac{\alpha N}{\sqrt{\pi \delta^2}} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - \lambda_0)^2 / \delta^2} d\lambda \approx \frac{\alpha N}{\sqrt{\pi \delta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda - \lambda_0)^2 / \delta^2} d\lambda = \alpha N,$$

$$\alpha = J_0.$$

При вычислении интеграла нижний предел был заменен на $-\infty$, так как подынтегральная функция при $\lambda < 0$ практически равна нулю.

Итак, для спектральной плотности излучения получаем следующую гауссову кривую (рис. 64):

$$J(\lambda) = \frac{J_0 N}{\sqrt{\pi} \cdot \delta} e^{-(\lambda - \lambda_0)^2 / \delta^2}.$$

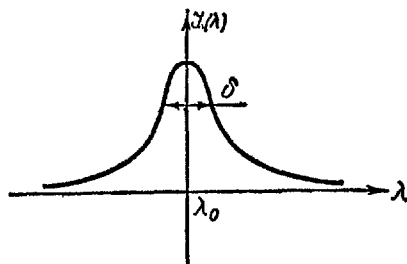


Рис. 64

39. Допуская, что энергия свободного электрона внутри металла меньше его энергии вне металла на величину работы выхода $e\phi$, и считая, что электроны подчиняются распределению Максвелла, получаем для плотности тока вдоль оси Ox , перпендикулярной поверхности металла:

$$j_x = n_0 e \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{v_{0x}}^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2 + mv_z^2}{2kT}} dv_y dv_z.$$

Величина v_{0x} определяется из условия выхода электрона из металла:

$$\frac{mv_{0x}^2}{2} = e\phi.$$

Тогда

$$j_x = \frac{n_0 e^2 \bar{v}}{4} e^{-e\phi/kT}.$$

Это классическая формула Ричардсона.

41. Интегрируя распределение Гиббса по импульсам, получаем вероятность того, что координаты частицы лежат в интервале $[x, x + dx]$, $[y, y + dy]$, $[z, z + dz]$, равную

$$d\rho(\mathbf{r}) = Ce^{-\frac{U(x, y, z)}{kT}} dx dy dz.$$

Число таких частиц в единице объема

$$dn(\mathbf{r}) = n_0 d\rho(\mathbf{r}),$$

где n_0 — среднее число частиц в единице объема. Это формула Больцмана.

42. По определению, имеем

$$z_0 = \frac{\int_0^{\infty} ze^{-\frac{mgz}{kT}} dz}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz} = \frac{kT}{mg},$$

так как по формуле Больцмана

$$dm(z) \sim e^{-\frac{mgz}{kT}}.$$

43. Центр тяжести для одного сорта частиц

$$z_k = \frac{\int_0^h ze^{-\frac{m_k g z}{kT}} dz}{\int_0^h e^{-\frac{m_k g z}{kT}} dz} = z_{0k} \frac{h}{e^{z_{0k} h} - 1},$$

где $z_{0k} = \frac{kT}{m_k g}$.

Общий центр тяжести будет

$$z_0 = \frac{\sum_{k=1}^l N m_k z_k}{\sum_{k=1}^l N m_k} = \frac{l k T}{g M} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^l \frac{h m_k}{e^{z_{0k} h} - 1},$$

$$M = \sum_k m_k.$$

44. Считая, что скорости молекул распределены по Максвеллу, получаем

$$v = \frac{4\pi R_0^2}{\sqrt{6\pi}} \sqrt{\frac{3kT}{m}} \cdot \frac{\gamma m M}{kT \cdot R_0} \cdot e^{-\frac{\gamma m M}{kT R_0}},$$

где γ — постоянная всемирного тяготения.

45. $M = \frac{SP_2}{2\pi m k T_2} \cdot 0,41.$

46. Введем сферическую систему координат, направив ось z вдоль вектора u (рис. 65). Если столкновение молекулы со сферой происходит в точке A с относительной скоростью v , то $|v_1| = |v'|$ и $\gamma = \gamma'$ (столкновение упругое). Отсюда следует, что сфера будет испытывать «сопротивление» от удара одной молекулы, равное

$$-2mv' \cos \gamma \cos \alpha, \quad (1)$$

так как сфера получает импульс $2mv' \cos \gamma$, направленный вдоль прямой OB . Но

$$\cos \alpha = \cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \cos \beta \quad (2)$$

(соотношение для сферического треугольника ABC).

Распределение Максвелла в данной системе координат будет иметь вид

$$dn(v') = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{m}{2kT} (v'^2 + u^2 - 2v'u \cos \theta) \right\} v'^2 \sin \theta dv' d\theta d\varphi, \quad (3)$$

а число столкновений в единицу времени, при которых точка $B(\gamma, \beta)$ лежит в элементе телесного угла $\sin \gamma d\gamma d\beta$, равно числу молекул в объеме

$$R^2 \sin \gamma d\gamma d\beta \cdot v' \cos \gamma \quad (4)$$

(элемент поверхности, умноженный на путь в единицу времени).

Учитывая симметрию и используя соотношения (1)–(4), получаем для полной силы сопротивления

$$F = -2mn \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} R^2 \int_0^\infty v'^4 dv' \int_0^\pi 2\pi \sin \theta d\theta \times \\ \times \exp \left[-\frac{m}{2kT} (v'^2 + u^2 - 2v'u \cos \theta) \right] \int_0^{\pi/2} \cos^2 \gamma \sin \gamma d\gamma \times \\ \times \int_0^{2\pi} d\beta (\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \cos \beta) = \\ = 2\pi^2 R^2 m \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{(kT)^2}{mu^2} \int_0^\infty v'^2 \left[\left(\frac{mu}{kT} v' - 1 \right) e^{-\frac{m(u-v')^2}{2kT}} + \right. \\ \left. + e^{-\frac{m(u+v')^2}{2kT}} \left(\frac{mu}{kT} v' + 1 \right) \right] dv'.$$

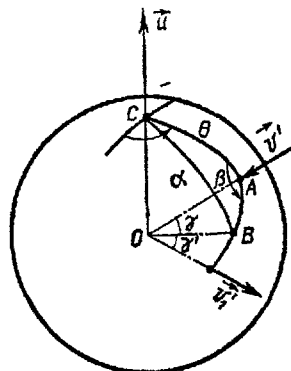


Рис. 65

Используя соотношения для интеграла ошибок [см. формулы (63)—(65)], можно найти окончательный вид для

$$F = -nkT\pi R^3 \left[\frac{e^{-b^2}}{b\pi^{1/2}} (1 + 2b^2) + \left(2b^2 + 2 - \frac{1}{2b^2} \right) \Phi(b) \right],$$

где

$$b = \frac{u}{\sqrt{m/2kT}}.$$

$$47. N = \int_0^{\theta_0} dN(\theta) = S \frac{N}{2V} \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \frac{R^2}{R^2 + h^2} \quad (\text{см. рис. 43}).$$

48. Используя распределение Максвелла, находим число молекул, вылетающих через отверстие S_0 за время dt :

$$\begin{aligned} -dN &= dt n_0 S_0 \int_0^{\infty} v_x dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_y dv_z \times \\ &\times \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} = n_0 S_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \cdot dt = \frac{\rho}{kT} S_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} dt; \end{aligned}$$

скорость же истечения газа будет

$$v = -\frac{dN}{dt} = \frac{\rho S_0}{4kT} \bar{v}.$$

49. Учитывая соотношение $\bar{A}_s = kT \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial a_s} \right)_T$, имеем для среднего дипольного момента всего газа

$$\begin{aligned} P &= -kT \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial E} \right)_T, \quad Z = (z_i)^N, \\ z_i &= \int e^{\frac{H_i}{kT}} d\Gamma, \quad H_i = H_{0i} - (\mathbf{p}_i \mathbf{E}), \end{aligned}$$

где H_{0i} — энергия отдельной частицы без поля. Отсюда (см. задачу 21)

$$z_i = \varphi(T) \int_0^{\pi} e^{\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}} \sin \theta d\theta,$$

$\varphi(T)$ — известная функция от температуры. Тогда

$$P = N p_0 \left[\operatorname{cth} \frac{p_0 E}{kT} - \frac{kT}{p_0 E} \right] = N p_0 \cdot L \left(\frac{p_0 E}{kT} \right),$$

где $L(x) = \operatorname{cth} x - \frac{1}{x}$ — функция Ланжевена.

В случае высоких температур или слабых электрических полей

$$\frac{p_0 E}{kT} \ll 1.$$

Тогда раскладывая функцию $L\left(\frac{\rho_0 E}{kT}\right)$ в ряд:

$$L\left(\frac{\rho_0 E}{kT}\right) = \frac{1}{3} \frac{\rho_0 E}{kT} + 0 \left[\left(\frac{\rho_0 E}{kT}\right)^3 \right],$$

получаем линейную зависимость P от E (рис. 66):

$$P = \frac{1}{3} N \rho_0 \frac{\rho_0 E}{kT}.$$

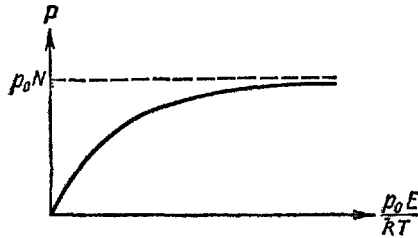


Рис. 66

Для единицы объема газа дипольный момент равен

$$p = \frac{P}{V} = \frac{N}{3V} \cdot \frac{\rho_0^2 E}{kT} = \beta E,$$

где $\beta = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \frac{\rho_0^2}{kT}$ есть, по определению, поляризуемость газа. Диэлектрическая проницаемость будет равна

$$\epsilon = 1 + 4\pi\beta = 1 + \frac{4}{3} \frac{\pi n \rho_0^2}{kT}, \quad n = \frac{N}{V}.$$

50. $\epsilon = 1 + 4\pi \left(n\alpha + \frac{1}{3} \frac{n\rho_0^2}{kT} \right).$

51. Пусть внешнее поле (магнитное поле с индукцией B_0) направлено вдоль оси OZ , т. е. $\mathbf{B} = 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + B_0 \mathbf{k}$. Векторный потенциал в этом случае будет

$$\mathbf{A} = 0 \cdot \mathbf{i} + B_0 \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k},$$

а функция Лагранжа

$$L(r, v) = \sum_{l=1}^N \frac{m_l v_l^2}{2} - U(r, \dots, r_N) + \sum_{k \neq l} \frac{e_l e_k}{r_{lk}} (\mathbf{v}_l \cdot \mathbf{v}_k) + \sum_{k=1}^N e_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{A}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Z &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{\Theta} \left[\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial r_k} \dot{r}_k - L \right] \right\} d^N \mathbf{r} d^N \mathbf{p} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{\Theta} \left[\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial r_k} \dot{r}_k - L \right] \right\} D_{i,k} d^N \mathbf{r} d^N \mathbf{v}, \end{aligned}$$

где

$$D_{ik} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_{1x}}{\partial v_{1x}} & \dots & \frac{\partial p_{1x}}{\partial v_{Nz}} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{1x} \partial v_{1x}} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_{1x} \partial v_{Nz}} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Определитель D_{ik} не зависит от B , ибо L линейно по v в тех членах, где содержится B . Показатель \exp также не зависит от B , ибо члены с B сократятся. Поэтому вектор намагниченности вдоль поля

$$M_z = -kT \frac{\partial \ln Z}{\partial B} = 0,$$

т. е. классическая система не может быть равновесно намагниченной. Это кажется очень парадоксальным, ибо часто дается «классическое» объяснение пара- и диамагнетизма. При таком «классическом» объяснении предполагается существование устойчивых электрических систем со стабильными орбитами. Но ведь именно это не объяснимо с точки зрения классической физики.

52. $\kappa = \sqrt{\frac{T_n T_{эл}}{4\pi n_0 e^2 (T_n + T_e)}}$.

53. Функция Гамильтона в данном случае имеет вид

$$H = H(p_i, q_i) + \frac{P_M^2}{2M} + Mgz,$$

где P_M, z — соответственно импульс и координата поршня массы M . Поскольку всегда должно выполняться соотношение $Mg = pS$, то распределение Гиббса принимает вид

$$\rho = c \exp \left\{ - \frac{H(p_i, q_i) - \frac{P_M^2}{2M} - pV}{kT} \right\},$$

Найдем в этом случае статистический интеграл:

$$\begin{aligned} Z &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{P_M^2}{2MkT}} dP_M \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{pV}{kT}} dV (2\pi m \Theta)^{\frac{3N}{2}} V^N = \\ &= N! (2\pi m)^{\frac{3N+1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{M}{m}} \Theta^{\frac{5N+3}{2}} P_{1-N} \end{aligned}$$

и средний объем системы

$$\bar{V} = \int V \rho(V) d\Gamma = \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right)_{\Theta} = \frac{N+1}{p} \cdot kT.$$

Это соотношение и определяет уравнение состояния в случае непостоянства объема.

54. У к а з а н и е. Воспользоваться аддитивностью гамильтониана.

55. Рассмотрим произвольную механическую величину $U(p_i, q_i, a_s)$. Дифференцируя среднее значение \bar{U} этой величины по $\Theta = kT$, по-

лучаем

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \Theta} = -\frac{1}{\Theta^2} \overline{(U - \bar{U})(H - \bar{H})}.$$

Полагая $U = H$, находим

$$\overline{(H - \bar{H})^2} = kT^2 C_V.$$

$$56. \quad \overline{F \frac{\partial H}{\partial q_i}} = -\Theta F e^{\frac{F-H}{\Theta}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \Theta \int e^{\frac{F-H}{\Theta}} \frac{\partial F}{\partial q_i} d\Gamma = -\Theta \frac{\partial \bar{F}}{\partial q_i}.$$

Аналогично доказывается и второе равенство.

57. В приближении малой плотности статистический интеграл реального газа равен

$$Z = Z_{ид} \left(1 + \frac{N}{V} \cdot \frac{N}{2} \cdot \beta \right),$$

где $\beta = -8v_0 + \frac{8U_0 v_0}{kT}$, $v_0 = \frac{4\pi r_0^3}{3}$ — объем молекулы.

Обозначая $n = \frac{N}{V}$ и $b = 4Nv_0$, получаем

$$E = E_0 - \frac{nbU_0}{1 + nb \left(\frac{U_0}{kT} - 1 \right)};$$

$$C_V = (C_V)_{ид} - k \left(\frac{nbU_0}{kT} \right)^2 \frac{1}{\left[1 + nb \left(\frac{U_0}{kT} - 1 \right) \right]^2}.$$

С понижением температуры теплоемкость падает.

58. Критическая точка определяется из трех уравнений:

$$\left(p - \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT;$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = 0; \quad \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} = 0.$$

Находя отсюда $p_{кр}$, $T_{кр}$ и $V_{кр}$, получаем требуемое соотношение.

59. Статистический интеграл системы равен (см. задачу 21):

$$Z = (z_i)^N;$$

$$z_i = 4\pi V (4\pi^2 M \mu)^{3/2} \Theta^3 \int_0^{\infty} r^2 e^{-U/kT} dr.$$

Учитывая ангармонизм колебаний, имеем

$$U(r - r_0) = \frac{1}{2} (r - r_0)^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \Big|_{r=r_0} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial r^3} \Big|_{r=r_0} (r - r_0)^3 +$$

$$+ \frac{1}{24} \frac{\partial^4 U}{\partial r^4} \Big|_{r=r_0} (r - r_0)^4 + \dots = \gamma (r - r_0)^2 + \alpha (r - r_0)^3 + \beta (r - r_0)^4 + \dots,$$

где α , β , γ — соответствующие производные. Если считать ангармоническую добавку малой, то интеграл можно вычислить прибли-

женно, раскладывая экспоненту с ангармоническими членами в ряд:

$$z_i = A \Theta^3 r_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\gamma x^2}{kT}} \left[1 - \frac{\alpha x^3}{kT} - \frac{\beta x^4}{kT} + \frac{\alpha^2}{2(kT)^2} x^6 + \dots \right] dx =$$

$$= A r_0^2 \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \Theta^{7/2} [1 + B \Theta],$$

$$A \equiv 4\pi V (4\pi^2 M \mu)^{3/2} \quad B = \frac{15}{8} \frac{\alpha^2}{\gamma^3} - \frac{3}{4} \frac{\beta}{\gamma^2}.$$

Отсюда

$$E = \frac{7}{2} N k T + N k^2 T^2 B;$$

$$C_V = \frac{7}{2} N k + 2 N k^2 B \cdot T = (C_V)_{\text{вл}} + C'_V.$$

Итак, поправка к теплоемкости равна $C'_V = 2 N k^2 T \cdot B$, т. е. пропорциональна температуре, и поэтому существенна при высоких температурах.

60. Атомы в молекуле находятся на некотором среднем расстоянии r_0 .

Определим коэффициент линейного расширения следующим образом:

$$\alpha_0 = \frac{\bar{x}}{r_0 T},$$

где \bar{x} — среднее смещение атома из положения равновесия. Но

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-U/kT} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-U/kT} dx},$$

причем

$$U(x) = \left(\frac{A}{r_0^{12}} - \frac{B}{r_0^6} \right) + \frac{3}{r_0^2} \left(\frac{26A}{r_0^{12}} - \frac{7B}{r_0^6} \right) x^2 - \frac{28}{r_0^3} \left(\frac{13A}{r_0^{12}} - \frac{2B}{r_0^6} \right) x^3,$$

где равновесное расстояние между атомами $r_0 = \sqrt[3]{B/2A}$ определяется из условия $\frac{\partial U}{\partial r} = 0$. Поскольку в точке минимума $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \Big|_{r=r_0} > 0$, то отсюда следует, что коэффициент $\frac{13A}{r_0^{12}} - \frac{2B}{r_0^6} > 0$. Тогда

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\gamma x^2}{kT}} \left(1 + \frac{\delta x^3}{kT} \right) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\gamma x^2}{kT}} \left(1 + \frac{\delta x^2}{kT} \right) dx} = \frac{3}{4} kT \frac{\delta}{\gamma^2},$$

$$\delta = \frac{28}{r_0^3} \left(\frac{13A}{r_0^{12}} - \frac{2B}{r_0^6} \right); \quad \gamma = \frac{3}{r_0^2} \left(\frac{26A}{r_0^{12}} - \frac{7B}{r_0^6} \right).$$

Окончательно

$$\alpha_0 = \frac{\bar{x}}{r_0 T} = \frac{3}{4} \frac{\delta}{\gamma^2} \frac{k}{r_0}.$$

$$61. \Omega(E) \sim \exp \left[\frac{\frac{1}{\alpha^{n+1}} (n+1)}{k n^{n+1}} E^{n+1} \right].$$

63. Согласно допущению запишем $S = f(w)$. Пусть система состоит из двух независимых подсистем. Тогда, согласно общим свойствам энтропии и вероятности, имеем

$$S = S_1 + S_2 = f(w_1) + f(w_2);$$

$$f(w_1) + f(w_2) = f(w_1 \cdot w_2).$$

Отсюда

$$S = f(w) = \text{const} \cdot \ln w.$$

Для определения постоянной следует это соотношение применить к идеальному газу. Она оказалась равной постоянной Больцмана k .

$$64. dQ = dE + pdV - E \cdot dp$$

65. Все макроскопические величины для равновесного состояния системы являются функциями температуры и внешних параметров. Поэтому

$$A = A(a, T),$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial a} \right)_T da + \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_a dT = dA.$$

При $dA = 0$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial a} \right)_T \left(\frac{\partial a}{\partial T} \right)_A + \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_a = 0$$

или

$$\left(\frac{\partial A}{\partial a} \right)_T \left(\frac{\partial a}{\partial T} \right)_A \left(\frac{\partial T}{\partial A} \right)_a = -1.$$

66. Выбирая в качестве $A = P$ и $a = V$, на основании тождества предыдущей задачи, находим

$$\alpha = p_0 \beta \gamma.$$

67. У к а з а н и е. Определяя $p_{кр}$, $V_{кр}$ и $T_{кр}$ аналогично задаче 58 и вводя переменные

$$\pi = \frac{p}{p_{кр}}, \quad \tau = \frac{T}{T_{кр}} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{V}{V_{кр}},$$

получаем

$$1) \pi (2\omega - 1) = \tau^2 \left(1 - \frac{1}{\pi\omega} \right);$$

$$2) \left(\pi + \frac{4}{\omega^{5/3}} \right) (4\omega - 1) = 5\tau.$$

$$68. T_B = \frac{a}{R \cdot b}.$$

69. Скорость распространения звуковых волн в газе равна

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}.$$

Учитывая соотношение Реша,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s = \frac{C_p}{C_v} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$$

(см. задачу 75) и связь $V \cdot \rho = \mu$ (μ — молекулярный вес), получаем

$$v = V \sqrt{-\frac{C_p}{C_v \cdot \mu} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}.$$

Но для реального газа

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \frac{2a}{V^3} - \frac{RT}{(V-b)^2}.$$

Тогда

$$v = \sqrt{\frac{C_p}{C_v \cdot \mu} \left[\frac{RT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^3} \right]} \approx \frac{V}{V-b} \sqrt{\frac{C_p}{C_v \mu} R \cdot T} \approx \frac{V}{V-b} v_{\text{ид.}}$$

70. $HM^{-\gamma} = \text{const}$, $\gamma \equiv \frac{C_H}{C_M}$.

71. $(V-b)^R \exp\left(-\int_0^T \frac{C_v}{T} dT\right) = \text{const}$.

72. $C_E - C_D = \frac{TE^3}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\right)^2 > 0$.

Указание. Воспользоваться соотношениями:

$$dQ = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_a dT + \left[\bar{A} + \left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)_T\right] da,$$

$$dA_0 = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \epsilon(T) \mathbf{E}.$$

73. По определению $C_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_v$. Отсюда

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial V}\right)_T = T \frac{\partial}{\partial V} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_v \right]_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v.$$

Для реального газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} = 0,$$

т. е. C_v не зависит от объема.

74. Для теплового двигателя, работающего по циклу, изображенному на рис. 46,

$$\eta = 1 - \frac{1}{8^{1-1}},$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$; по циклу, изображенному на рис. 47,

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma \epsilon^{\gamma-1}} \frac{\rho^{\gamma}-1}{\rho-1}.$$

Указание. Воспользоваться уравнением адиабаты $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ и выражением для к. п. д. двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q},$$

где A —работа за цикл, Q —количество теплоты, выделяющееся в цилиндре за тот же цикл.

75. Указание. Воспользоваться свойством якобианов [см. формулу (74)] и соотношением (см. задачу 80)

$$C_p - C_v = -T \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}.$$

76. Рассмотрим обратимый гальванический элемент и проведем с ним цикл Карно (рис. 67). Элемент сначала работает изотермически (участок 1—2) при постоянном э. д. с. \mathcal{E} , затем адиабатически (2—3). После этого через него пропускается ток от внешнего источника и при этом совершается работа сначала изотермически (3—4) при постоянной э. д. с. $\mathcal{E} - \Delta\mathcal{E}$, а потом адиабатически (4—1).

На участке 1—2 элемент получает от нагревателя количество теплоты $Q_1 = E_2 - E_1 + W_1$, где $W_1 = e\mathcal{E}$ —работа по изотермическому переносу заряда, а $(E_2 - E_1)$ —изменение внутренней энергии элемента. Это изменение равно тепловому эффекту химической реакции— qe (q —тепловой эффект химической реакции на единицу прошедшего заряда). Таким образом,

$$Q_1 = e\mathcal{E} - qe.$$

На участке 2—3 э. д. с. элемента уменьшится на величину $\Delta\mathcal{E}$ (а температура—на ΔT). Поэтому

$$\eta = \frac{\Delta A}{Q_1} = \frac{e\Delta\mathcal{E}}{(e\mathcal{E} - q)e},$$

где $\Delta A = e\Delta\mathcal{E}$ —работа за цикл, равная площади цикла 1—2—3—4—1. Но для цикла Карно

$$\eta = \frac{T - (T - \Delta T)}{T} = \frac{\Delta T}{T}.$$

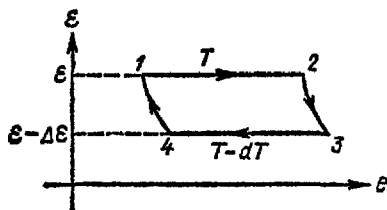


Рис. 67

Решая совместно два последних равенства, находим

$$\mathcal{E} = q + T \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_V.$$

Это уравнение Гельмгольца—Гиббса для гальванического элемента.

$$77. \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_E = \frac{D(T, E)}{D(T, V)} \cdot \frac{D(T, V)}{D(V, E)} = \frac{\rho - T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_V}{C_V}.$$

78. Внутренняя энергия плазмы равна

$$E = E_{\text{ид}} + E_1,$$

где $E_{\text{ид}} = C_V \cdot T$ — средняя кинетическая энергия движения частиц плазмы (внутренняя энергия идеального газа);

$E_1 = \frac{1}{2} Ne\varphi_+(0) - \frac{1}{2} Ne\varphi_-(0)$ — средняя энергия электростатического взаимодействия частиц плазмы между собой;

$\varphi_+(0)$, $\varphi_-(0)$ — потенциалы, создаваемые всеми зарядами, кроме данного положительного (отрицательного) в месте нахождения этого заряда. Определим эти потенциалы. На некотором расстоянии r от фиксированного заряда плотность зарядов будет

$$\rho(r) = e(n_+ - n_-).$$

Потенциал φ определится из уравнения Пуассона с учетом распределения Больцмана:

$$\Delta\varphi = 4\pi en_0 \left[\exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right) \right],$$

где $n_0 = \frac{N}{V}$, N — число частиц одного сорта в объеме V .

В случае высоких температур $\frac{e\varphi}{kT} \ll 1$, и поэтому

$$\Delta\varphi = \kappa^2 \varphi \left(\kappa^2 = \frac{8\pi e^2 n_0}{kT} \right).$$

Решение данного уравнения имеет вид

$$\varphi(r) = \frac{C_1}{r} e^{-\kappa r} + \frac{C_2}{r} e^{\kappa r}.$$

Здесь $\varphi(r)$ — потенциал в точке на расстоянии r от данного заряда, создаваемый всеми зарядами (в том числе и данным). Требуя конечного значения потенциала φ на бесконечности и в местах нахождения самих зарядов, получим $C_1 = e$ и $C_2 = 0$. Отсюда

$$\varphi_+(0) = -ek, \quad \varphi_-(0) = ek;$$

$$E = E_{\text{ид}} - Ne^2 \sqrt{\frac{8\pi e^2 N}{V \cdot kT}}.$$

79. Используя общее соотношение $E = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right)_V$, находим

$$F = F_{\text{ид}} - \frac{2}{3} Ne^2 \sqrt{\frac{8\pi Ne^2}{V \cdot kT}}.$$

Отсюда

$$p = \frac{NkT}{V} - \frac{1}{3} Ne^2 \sqrt{\frac{8\pi Ne^2}{kTV^2}};$$

$$S = S_{ид} - \frac{1}{3} Ne^2 \sqrt{\frac{8\pi Ne^2}{kT^3V}};$$

$$C_V = (C_V)_{ид} + \frac{1}{2} Ne^2 \sqrt{\frac{8\pi Ne^2}{3kTV}}.$$

$$80. \text{ а) } C_p = T \frac{D(S, p)}{D(T, V)} \cdot \frac{D(T, V)}{D(T, p)} = C_V - T \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p};$$

$$\text{ б) } C_V = T \frac{D(S, V)}{D(p, T)} \cdot \frac{D(p, T)}{D(T, V)} = C_p + T \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} \text{ [см. формулу (77)].}$$

81. Указание. Воспользоваться первым началом термодинамики в переменных p и T .

82. Указание. Воспользоваться результатом задачи 64.

$$83. C_p - C_V = \frac{R}{1 - \frac{2a(V-b)^2}{RTV^3}}.$$

$$84. Q = \frac{C_V}{R} \left[\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V_2 - b) - \left(p + \frac{a}{V_1^2} \right) (V_1 - b) + a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) \right].$$

85. $pV^n = \text{const}$, где $n = \frac{C_p - C}{C_V - C}$ — показатель политропы.

$$86. S = S_0 + C_p \ln T - \alpha V_0 p = \text{const.}$$

$$87. C_V \ln T + \alpha p_0 V = \text{const.}$$

88. Из первого начала термодинамики $dQ = dE + p dV$ следует, что в первом случае $dQ_p = d(E + p_0 V)$, во втором $dQ_V = dE$. Поэтому

$$dQ_p - dQ_V = p_0 dV.$$

Отсюда

$$Q_p - Q_V = RT (n_2 - n_1),$$

где n_1 и n_2 — число молей реагирующих веществ до и после реакции. Для реакции $\text{H}_2 + \frac{1}{2} \text{O}_2 \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O}$ имеем $n_1 = 3/2$, $n_2 = 1$ и

$$Q_p - Q_V = -\frac{1}{2} RT.$$

$$89. \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

90. Указание. Воспользоваться вторым началом термодинамики для обратимых процессов.

$$91. (\Delta S)_p = \frac{C_p}{T} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \Delta T.$$

92. Пусть изотерма дважды пересекает адиабату в точках A и C . Рассмотрим замкнутый цикл ABC [(рис. 68). Для него $\oint p dV \neq 0$. С другой стороны, энтропия системы в состояниях A и C одинакова, т. е. $S_A = S_C$. Поэтому

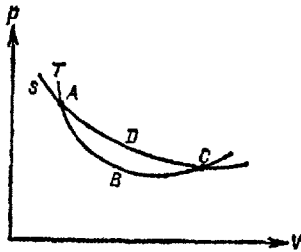


Рис. 68

$$A = Q = \oint_{ABC} T dS = T \int_{ABC} dS = 0.$$

Разрешение данного противоречия и состоит в том, что изотерма не может дважды пересекать адиабату. Из этого следует принцип: термодинамические состояния, достижимые из первоначального состояния изотермически, не достижимы из этого состояния адиабатически.

93. Указание. Следует воспользоваться первым началом термодинамики.

94. $C_p = C_v$ при температуре $t = 4^\circ \text{C}$.

95. Изменение давления идеального газа с высотой будет определяться соотношением

$$dp = -\rho g dh = -\frac{\mu}{R} \cdot \frac{p}{T} dh$$

($\mu = 29 \text{ кг/кмоль}$ — молекулярный вес, $g = 9,80 \text{ м/сек}^2$). Поскольку рассматриваемый процесс адиабатический, то

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dT}{T}.$$

Из этих двух равенств находим

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g\mu}{R} \cdot \gamma = \frac{C_p}{C_v}.$$

Так как $\gamma = 1,4$; $R = 8,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/град} \cdot \text{кмоль}$, получим

$$\frac{dT}{dh} \approx -10 \text{ град/км}$$

(фактический средний градиент приблизительно равен 8 град/км).

96. Найденное в предыдущей задаче условие механического равновесия имеет место при непостоянной температуре. Возникает вопрос, будет ли это состояние атмосферы устойчивым по отношению к процессу выравнивания температур путем конвекции. Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим два объема газа единичной массы, находящихся на высотах h и $h + dh$. Пусть теперь эти два объема поменяются местами. Если при этом их общая энергия увеличится, то полученное ранее состояние системы будет устойчивым по отношению к перемешиванию атмосферы (конвекции).

Это изменение энергии будет

$$\Delta E + p \Delta V,$$

так как с высотой меняются и температура, и давление. Таким образом, условие устойчивости будет иметь вид

$$\frac{dE}{dh} + p \frac{dV}{dh} \geq 0.$$

Но

$$p \frac{dV}{dh} = \frac{R}{\mu} \frac{dT}{dh} - \frac{V dp}{dh}; \quad \frac{dp}{dh} = -\rho g;$$

$$E = C_V T = \frac{pV}{\gamma - 1}.$$

Отсюда условие устойчивости атмосферы относительно конвекции получим в виде

$$\frac{dT}{dh} \geq -\frac{\mu g (\gamma - 1)}{R \gamma}.$$

$$97. Q = \frac{E^2}{8\pi} T \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}.$$

$$99. \frac{\Delta l}{l} = -\text{const} \cdot \frac{H^2}{2F^2} \left(1 - \frac{\partial l}{\partial F} \cdot \frac{F}{l} \right).$$

100. Для равновесного излучения с плотностью энергии u и давление $p = \frac{u}{3}$. Применяя теперь к равновесному излучению соотношение $T dS = dE + p dV$, которое легко представить в виде

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p,$$

получим

$$u = \sigma T^4,$$

где σ — постоянная величина, не определяемая термодинамически ($\sigma = 7,64 \cdot 10^{-18} \text{ Дж/град}^4 \cdot \text{м}^2$). Все другие термодинамические функции теперь определяются легко. Действительно, поскольку $E = V \sigma T^4$, то

$$S = \frac{4}{3} \sigma T^3 V, \quad F = -\frac{1}{3} \sigma T^4 V, \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

$$\Phi = F + pV = 0 \quad \text{и} \quad H = TS.$$

Находим теплоемкости:

$$C_V = 4\sigma T^3 \cdot V;$$

поскольку для равновесного излучения изобарный процесс есть одновременно и изотермический ($p = \frac{\sigma T^4}{3}$), то

$$C_p = +\infty,$$

а значит и $\gamma = \infty$, хотя уравнение адиабаты для излучения будет $pV^{4/3} = \text{const}$ ($S = \text{const}$).

101. Так как

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N! h^{3N}} e^{\frac{\mu N}{kT}} \int e^{-\frac{H}{kT}} d\Gamma = \exp\left(e^{\frac{\mu}{kT}} \frac{V}{\lambda^3}\right),$$

где $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m kT}}$ — длина «тепловой» волны де-Бройля, то

$$\begin{aligned} \mu &= kT \ln \frac{\bar{N} \lambda^3}{V}; \quad \rho = \frac{\bar{N} kT}{V}; \\ S &= \frac{3}{2} \bar{N} k + \bar{N} k \ln \frac{eV}{\bar{N} \lambda^3} \end{aligned}$$

(e — основание натуральных логарифмов).

102. Искомая вероятность равна

$$\rho_N = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N e^{\frac{\Xi + \mu \bar{N}}{\theta}}.$$

Но поскольку

$$\Xi = -kT e^{\mu/kT} \cdot \frac{V}{\lambda^3}; \quad \bar{N} = e^{\frac{\mu}{kT}} \frac{V}{\lambda^3},$$

то

$$\rho_N = \frac{1}{N!} e^{-\bar{N}} \bar{N}^N,$$

т. е. получено распределение Пуассона.

103. Зависимость μ от U может быть найдена из соотношения

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial \bar{N}}\right)_{S, V} = \mu_0 + U.$$

В частности, в однородном поле тяжести имеем

$$\mu = \mu_0 + mgz.$$

104. Вводя среднее число частиц со спином, направленным вверх, — \bar{N}_1 и вниз — \bar{N}_2 , можно получить (см. задачу 103)

$$\begin{aligned} \mu_1 &= kT \ln \bar{N}_1 - \mu_0 H + \varphi(\Theta), \\ \mu_2 &= kT \ln \bar{N}_2 + \mu_0 H + \varphi(\Theta). \end{aligned}$$

Используя теперь условие равновесия $\mu_1 = \mu_2$, находим

$$\frac{\bar{N}_2}{\bar{N}_1} = e^{-\frac{2\mu_0 H}{kT}}.$$

105. $pV = -\Xi$.

106. Указание. Следует использовать соотношения:

$$\begin{aligned} \Xi &= -pV, \\ dE &= TdS - pdV + \mu dN, \\ dH &= TdS + Vdp + \mu dN. \end{aligned}$$

$$107. C_V = kT \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\mu - \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial T} \right)_\mu^2}{\left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_T} \right].$$

108. Из уравнения Гельмгольца—Гиббса имеем

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(V_2 - V_1)}.$$

Вдали от критической точки можно считать, что $V_2 \gg V_1$ (V_1, V_2 — молярные объемы пара и твердого тела соответственно) и газ подчиняется уравнению Клапейрона—Менделеева. Отсюда

$$p = \text{const} \cdot e^{-\frac{\lambda}{RT}}.$$

109. Пусть концентрация заданного раствора $c = \frac{n}{N} \ll 1$, а $\Phi = N\mu_0(p, T)$ — термодинамический потенциал Гиббса чистого раствора. Обозначим через β изменение Φ при добавлении к растворителю одной молекулы растворенного вещества. Тогда в силу соотношения $c \ll 1$ можно считать, что частицы растворенного вещества не взаимодействуют между собой. Учитывая теперь тождественность частиц растворенного вещества, получаем для термодинамического потенциала всей системы следующее значение:

$$\Phi = N\mu_0 + n\beta + kT \ln n! = N\mu_0 + nkT \ln \left(\frac{n}{e} e^{\frac{\beta}{kT}} \right),$$

ибо $\ln n! \approx n \ln \frac{n}{e}$. Учтем теперь, что Φ должно быть однородной функцией первого порядка по отношению к n и N . Из этого следует, что

$$e^{\frac{\beta}{kT} - 1} = \frac{f(p, T)}{N}$$

(для того чтобы под логарифмом была функция нулевого порядка по отношению к n и N), а

$$\Phi = N\mu_0 + nkT \ln \frac{n}{N} + n\varphi(p, T),$$

где $\varphi(p, T) = kT \ln f(p, T)$. Используя полученное выражение для Φ , находим химические потенциалы соответственно раствора и растворенного вещества:

$$\mu = \frac{\partial \Phi}{\partial N} = \mu_0 - kTc; \quad \mu_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = kT \ln C + kT + \varphi(p, T).$$

110. Для растворенного вещества и растворителя условия равновесия в поле тяжести имеют вид ($T = \text{const}$):

$$kT \ln c + \varphi(p, T) = -mgz + \text{const}; \quad \mu_0 - kTc + mgz = \text{const}.$$

Дифференцируем эти равенства по z и, учитывая, что объем раствора

$$V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_T = N \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial p} \right)_T + n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} \right)_T,$$

получаем

$$\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{V_1}{V_0} \frac{dc}{dz} = \frac{g}{kT} \left(M \frac{V_1}{V_0} - m \right),$$

где M —масса молекулы раствора, m —масса растворенного вещества, $V_0 = \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial p} \right)_T$ и $V_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} \right)_T = \frac{V - NV_0}{n}$ —объемы, приходящиеся на одну молекулу раствора и растворенного вещества соответственно. В первом порядке по c получаем решение

$$c = c_0 \exp \left[-\frac{gz}{kT} \left(m - M \frac{V_1}{V_0} \right) \right].$$

Это барометрическая формула, исправленная на закон Архимеда.

111. Легко показать, что для равновесного излучения потенциал Гиббса $\Phi = E - TS + pV = 0$ (см. задачу 100). Следовательно, и $\mu = 0$.

112. Рассмотрим систему, состояние которой описывается переменными a_1, a_2 , а A_1 и A_2 —обобщенные силы. Если $\varphi(a_1, a_2)$ —некоторая функция состояния системы, то

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial a_2} \right)_{a_1} = \left(\frac{\partial A_2}{\partial a_1} \right)_{a_2}$$

и

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial A_2} \right)_{A_1} = \left(\frac{\partial a_2}{\partial A_1} \right)_{A_2},$$

ибо $f = \varphi - a_1 A_2 - a_2 A_1$ также будет функцией состояния системы. Используя эти соотношения, находим

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial A_1} \right)_{a_2} = \frac{D(a_1, a_2)}{D(A_1; a_2)} = \left(\frac{\partial a_1}{\partial A_1} \right)_{A_2} - \left(\frac{\partial a_1}{\partial A_2} \right)_{A_1} \left(\frac{\partial A_2}{\partial a_2} \right)_{A_1}.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial A_1} \right)_{a_2} < \left(\frac{\partial a_1}{\partial A_1} \right)_{A_2},$$

так как $\left(\frac{\partial A_2}{\partial a_2} \right)_{A_1} > 0$ из условия устойчивости. Это неравенство выражает следующий физический факт: внешнее воздействие A_1 изменяет параметр a_1 , а значит, и параметры a_2, A_2 , причем мерой воздействия будет величина $\frac{\partial a_1}{\partial A_1}$. Сначала, очевидно, A_2 практически не будет изменяться, и приложенное воздействие будет характеризоваться $\left(\frac{\partial a_1}{\partial A_1} \right)_{A_2}$, но потом в системе установятся новые a_2 , и внешнее воздействие уже будет характеризоваться $\left(\frac{\partial a_1}{\partial A_1} \right)_{a_2}$, которое оказывается уменьшенным.

113. Условие равновесия системы пар—жидкость при наличии поверхности раздела имеет вид (μ и p пара и жидкости соответственно равны):

$$dF = -p_1 dV_1 - p_2 dV_2 + \sigma dS,$$

где p_1 — давление в капле жидкости, p_2 — давление пара, σ — коэффициент поверхностного натяжения, dS — элемент поверхности. Учитывая постоянство объема $V_1 + V_2 = \text{const}$ и сферичность поверхности раздела, получаем

$$p_1 = p_2 + \frac{2\sigma}{R}$$

(R — радиус кривизны сферической поверхности).

114. Поскольку в данной реакции $\sum \nu_i = 0$, то

$$K = \frac{m_2 \cdot m_3}{m_1 \cdot m_4},$$

т. е. константа не зависит от p .

115. Пусть в паре образовалась капля жидкости радиуса R . Тогда при этом свободная энергия изменится на величину

$$\Delta F = (\mu_2 - \mu_1)N + \sigma S,$$

где N — число частиц в капле, μ_1 и μ_2 — химические потенциалы пара и жидкости соответственно. Но

$$N = \frac{4\pi R^3}{3v},$$

где v — объем, приходящийся на одну частицу в жидкости.

Если $\mu_2 < \mu_1$, то легко показать, что ΔF в точке $R_{\text{кр}} = \frac{2\sigma v}{\mu_1 - \mu_2}$ имеет максимум. Отсюда следует, что если зародыш-капля будет иметь $R > R_{\text{кр}}$, то капля будет расти, в противном случае она испарится.

116. Пусть капля радиуса R приобретает ион с зарядом q и радиусом R_0 . Изменение свободной энергии в этом случае будет равно

$$\begin{aligned} \Delta F &= \frac{4\pi R^3}{3v} (\mu_2 - \mu_1) + 4\pi\sigma R^2 + \frac{\varepsilon}{8\pi} \int_{R_0}^R \frac{q^2}{\varepsilon r^2} dr + \\ &+ \frac{1}{8\pi} \int_R^{\infty} \frac{q^2}{r^2} dr - \frac{1}{8\pi} \int_{R_0}^{\infty} \frac{q^2}{r^2} dr = \\ &= \frac{4\pi R^3}{3v} (\mu_2 - \mu_1) + 4\pi\sigma R^2 + \frac{q^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right), \end{aligned}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость жидкости. Последнее слагаемое в этой формуле всегда отрицательно и растет с увеличением R , т. е. ΔF уменьшается. Следовательно, капля может расти даже при условии $\mu_2 > \mu_1$, т. е. даже в паре, не достигшем насыщения.

117. Учитывая результаты задачи 101 и применяя к данной реакции условие химического равновесия, получаем

$$\mu_A = \mu_I + \mu_e,$$

$$kT \ln \frac{c_A \rho h^3}{(2\pi m_A kT)^{3/2} kT} + \mu_A^0 =$$

$$= kT \ln \frac{c_I \rho h^3}{(2\pi m_A kT)^{3/2} kT} + \mu_I^0 + kT \ln \frac{c_e \rho h^3}{(2\pi m_e kT)^{3/2} kT} + \mu_e^0.$$

Обозначая первоначальное число атомов N и вводя степень однократной ионизации α , для числа частиц реагентов и их концентраций имеем соотношения:

$$n_e = \alpha N; \quad n_I = \alpha N; \quad n_A = (1 - \alpha) N;$$

$$c_e = \frac{\alpha}{1 + \alpha}; \quad c_I = \frac{\alpha}{1 + \alpha}; \quad c_A = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}.$$

Отсюда окончательно получаем

$$\alpha = \left[1 + \frac{p}{(kT)^{3/2}} \left(\frac{h^2}{2\pi m_e} \right)^{3/2} e^{\frac{\epsilon_0}{kT}} \right]^{-1/2}.$$

$$118. \quad \alpha = \left[1 + \frac{p}{(kT_e)^{3/2}} \left(\frac{h^2}{2m_e \pi} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\epsilon_0}{kT_n} \right) \right]^{-1/2}.$$

Указание. Следует воспользоваться формулой (30).

119. Из первого начала термодинамики при постоянных p и T можно получить, что

$$\Delta Q_p = \Delta E + p_0 \Delta V = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \frac{\Delta \Phi}{T},$$

где Φ — потенциал Гиббса. Но изменение химического потенциала при химической обратимой реакции, идущей при постоянных p и T , равно

$$\Delta \Phi = \sum_i \mu_i \Delta N_i = \sum_i \mu_i \nu_i = kT \ln K_p(T).$$

Отсюда

$$\Delta Q_p = -kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln K_p(T).$$

120. Для реакции $A_2 \rightleftharpoons A + A$ имеем

$$\ln K_p(T) = \frac{2\chi'(T) - \chi(T)}{kT},$$

где $\chi(T) = \mu_{A_2} - kT \ln p_{A_2}$, $\chi'(T) = \mu_A - kT \ln p_A$.

Химический потенциал μ_A определен в задаче 101, а μ_{A_2} находим из большой статистической суммы для двухатомного идеального газа:

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} e^{\mu N/kT} z_{\text{пост}}^N z_{\text{кол}}^N z_{\text{вр}}^N =$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left[e^{\mu/rT} V \left(\frac{2\pi M kT}{h^2} \right)^{3/2} \left(\frac{8\pi^2 J kT}{\gamma h^2} \right) \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} \right]^N,$$

Где M — приведенная масса, J — момент инерции. Отсчет энергии колебаний $\varepsilon_n = h\nu \left(n + \frac{1}{2} \right)$ идет от энергии нулевых колебаний; γ — коэффициент, учитывающий симметрию молекулы, для двухатомной молекулы $\gamma = 2$ — двукратное выражение.

Но

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{x^N}{N!} = e^x \text{ и } pV = kT \ln Z,$$

тогда

$$p = e^{\mu/kT} \left(\frac{2\pi M}{h^2} \right) (kT)^{3/2} \frac{4\pi^2 J}{h^2} \frac{1}{1 - e^{h\nu/kT}};$$

$$\mu = kT \ln p - \frac{7}{2} kT \ln kT - kT \ln \left[\left(\frac{2\pi M}{h^2} \right)^{3/2} \frac{4\pi^2 J}{h^2} \right] +$$

$$+ kT \ln \frac{1}{1 - e^{h\nu/kT}} + \mu_0.$$

Отсюда при $kT \gg h\nu$ имеем

$$\ln K_p(T) = -\frac{kT}{2} + \frac{2\mu_A^0 - 2\mu_{A_2}^0}{kT} + \ln \frac{4J \sqrt{\pi}}{vm^{3/2}}$$

(m — масса атома А),

$$K_p(T) = \frac{4J \sqrt{\pi}}{(kT)^{3/2} v} \cdot \frac{1}{\sqrt{kT}} e^{\Delta\varepsilon/kT}, \text{ а } \Delta Q_p = \frac{kT}{2} + \Delta\varepsilon,$$

где $\Delta\varepsilon = 2\mu_A^0 - 2\mu_{A_2}^0$ — энергия диссоциации молекулы.

$$121. \Delta p = \frac{(N_2 - N_1)}{V} kT.$$

$$122. S = k \left[\ln \frac{a}{a-E} + \frac{E}{a} \ln \left(\frac{a-E}{E} \cdot \frac{g_2}{g_1} \right) \right], \text{ а } \equiv \varepsilon_2 - \varepsilon_1.$$

Данная зависимость представлена на рис. 69, откуда видно, что в области энергий от $\frac{\varepsilon_2 g_2}{g_1 + g_2}$ до ε_2 производная $\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{a_s}$, которая, по

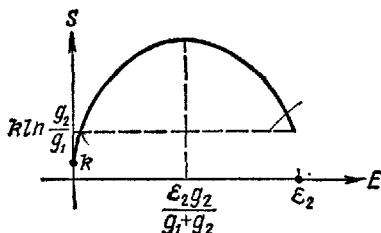


Рис. 69

определению, равна $1/T$, отрицательна, т. е. в этой области и температуру следует считать отрицательной. Заметим, что отрицательные температуры соответствуют более высоким энергиям, чем положительные. С подобным понятием мы всегда будем сталкиваться

в случае квазиравновесных систем со спектром энергии, ограниченным сверху.

$$123. C_V = \frac{Nk}{2} \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \frac{1}{\text{sh}^2 \frac{h\nu}{2kT}}.$$

$$124. E = \varepsilon \left[\frac{1}{1 - e^{-\varepsilon/kT}} \right].$$

$$125. \text{Среднее число фононов с энергией } h\nu \text{ равно } \bar{n} = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Число состояний с энергией в интервале частот $[\nu, \nu + d\nu]$ [см. формулу (82)] равно

$$\Omega(\nu) d\nu = 4\pi\nu^2 d\nu \frac{3V}{c^3},$$

где

$$\frac{3}{c^3} = \frac{2}{c_l^3} + \frac{1}{c_t^3}.$$

Отсюда

$$E = \frac{12V}{c^3} \pi \left(\frac{kT}{h} \right)^4 \hbar \int_0^{\frac{h\nu_{\max}}{kT}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1};$$

ν_{\max} — максимальная дебаевская частота, определяемая из условия $\int_0^{\nu_{\max}} \Omega(\nu) d\nu = 3N$ (сохранение числа степеней свободы системы).

В случае низких температур верхнюю границу можно положить ∞ . Тогда [см. формулу (69)]

$$E = \frac{4}{5} \frac{V}{c^3} \frac{k^4 T^4}{h^3} \pi^5.$$

$$126. C_V = N (3\pi^2)^{2/3} \frac{1}{3c\hbar} \left(\frac{V}{N} \right)^{1/3} kT.$$

$$127. j_x = 2en \left(\frac{m}{h} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_y d\nu_z \frac{kT}{m} \ln \left[1 + e^{\frac{\mu - eW}{kT}} e^{-\frac{m}{2kT} \nu^2} \right].$$

Величина $e^{-\frac{W - \mu}{kT}}$ для металлов порядка e^{-10} при $T \sim 10^3$ °К, поэтому, используя, что при $x \ll 1$ $\ln(1+x) \approx x$, получаем

$$j_x = \frac{4\pi enm}{h^3} (kT)^2 e^{-\frac{W}{kT}}.$$

Здесь $\omega = W - \mu$ — эффективная работа выхода. Это и есть квантовая формула Ричардсона.

$$128. \rho = \frac{1}{5} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3}.$$

129. $\rho = \frac{2}{3} \frac{E}{V} = \frac{2}{5} \frac{N}{V} \mu_0 \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)^2 \right]$, где $\mu_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3}$ — уровень Ферми для электронов в металле при $T=0$.

$$130. S = \begin{cases} -k \sum_i [\bar{n}_i \ln \bar{n}_i + (1 - \bar{n}_i) \ln (1 - \bar{n}_i)] & \text{для фермионов,} \\ -k \sum_i [\bar{n}'_i \ln \bar{n}'_i - (1 + \bar{n}'_i) \ln (1 + \bar{n}'_i)] & \text{для бозонов.} \end{cases}$$

Здесь

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{kT}} + 1}, \quad \bar{n}'_i = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{kT}} - 1}.$$

$$131. C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V, \quad E = \int_0^\infty \frac{\epsilon g(\epsilon) d\epsilon}{\exp\left(\frac{\epsilon - \mu}{kT}\right)}, \quad \text{где } \mu \text{ находится из условия}$$

$$\int_0^\infty \frac{g(\epsilon) d\epsilon}{\exp\left(\frac{\epsilon - \mu}{kT}\right)} = N.$$

В случае низких температур эти интегралы могут быть представлены в виде

$$N = \int_0^\mu g(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} k^2 T^2 g'(\mu) + \dots,$$

$$E = \int_0^\mu \epsilon g(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} k^2 T^2 g(\mu) + \frac{\pi^2}{6} k^2 T^2 \mu g'(\mu) + \dots$$

[см. формулу (68)]. Но при $T=0$

$$\int_0^{\mu_0} g(\epsilon) d\epsilon = N,$$

а $\mu - \mu_0 \ll \mu_0$, μ при $T \rightarrow 0$. Поэтому, с точностью до квадратичных членов по T , находим

$$\int_{\mu_0}^\mu g(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} k^2 T^2 g'(\mu) + \dots = 0,$$

$$g(\mu_0) (\mu - \mu_0) + \frac{\pi^2}{6} k^2 T^2 g'(\mu_0) = 0,$$

$$\mu = \mu_0 - \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \left[\frac{d}{d\epsilon} \ln g(\epsilon) \right]_{\epsilon=\mu_0}.$$

Используя найденное значение μ , с той же точностью получаем

$$E = \int_0^{\mu_0} \varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon + (\mu - \mu_0) \mu_0 g(\mu_0) + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 g(\mu_0) + \\ + \frac{\pi^2}{6} k^2 T^2 \mu_0 g'(\mu_0) + \dots = E_0 + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 g(\mu_0).$$

Отсюда

$$C_V \approx \frac{\pi^2}{3} k^2 g(\mu_0) T.$$

132. Невозможно, ибо уравнение для определения химического потенциала N частиц, занимающих область $L_x \times L_y$,

$$N = 2\pi (L_x \times L_y) \frac{m}{h^2} \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) + 1} = \frac{2\pi (L_x \times L_y) m kT}{h^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(\frac{n\mu}{kT}\right)$$

не имеет решений порядка $1/N$.

$$133. \quad C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{V\hbar}{4\pi^2 A^{3/2}} \left(\frac{k}{\hbar}\right)^{5/2} T^{5/2} \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2} dx}{e^x - 1} \right] = \frac{15}{32} \pi \frac{V\hbar}{A^{3/2}} \times \\ \times \left(\frac{k}{\pi\hbar}\right)^{5/2} \cdot 1,341 \cdot T^{3/2} = B \cdot T^{3/2} \text{ [см. формулу (69)].}$$

134. Состояние твердого тела в гармоническом приближении определяется объемом V и набором осцилляторов ($n_i = 1, 2, \dots$). Энергия кристалла в этом приближении равна

$$E = E_0(V) + \sum_{i=1}^{3N-6} \left(n_i + \frac{1}{2}\right) h\nu_i(V),$$

где $E_0(V)$ — энергия взаимодействия неподвижных N частиц кристалла.

Зная E , можно найти давление $p = kT \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T$; здесь

$$Z = e^{-E_0(V)/kT} \prod_{i=1}^{3N-6} \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{h\nu_i}{kT}};$$

тогда

$$p = -\left(\frac{\partial E_0}{\partial V}\right)_T - \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{3N-6} \left(\frac{1}{2} h\nu_i + \frac{h\nu_i}{e^{h\nu_i/kT} - 1}\right) \left(\frac{\partial \ln \nu_i}{\partial \ln V}\right) = -\frac{\partial E_0}{\partial V} + \frac{\gamma E}{V}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\gamma C_V}{V}.$$

Далее, воспользовавшись тождеством задачи 65 и определениями α и β , получаем требуемое соотношение.

$$135. \quad \Omega(E) \sim e^{S/k} \sim e^{\frac{4}{5} \pi^{1/2} N \left(\frac{T}{T_0}\right)^3}, \text{ где } T_0 = \frac{h\nu_{\max}}{k}.$$

136. Пусть значения энергии нижнего края зоны проводимости E_c , а верхнего края валентной зоны — E_v . Тогда из условия нейтральности полупроводника ($n = p$) для простейшего закона дисперсии

$$\varepsilon_n = E_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}, \quad \varepsilon_p = E_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p}$$

получим

$$2 \left(\frac{m_n k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{\frac{\mu - E_c}{kT}} = 2 \left(\frac{m_p k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{\frac{E_v - \mu}{kT}}.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{E_g^0 - \xi T}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_n}{m_p}.$$

137. $n = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi^2 \hbar^3} (8m_1^2 m_2)^{3/2} (kT)^{3/2} F_{1/2} \left[\frac{1}{kT} (\mu - E_c) \right]$ [см. формулу (70)].

При интегрировании по k были взяты бесконечные пределы, что, очевидно, возможно лишь тогда, когда эти пределы лежат вне области занятых состояний. В практически интересных случаях это всегда выполняется.

138. Полная концентрация n равна сумме концентраций в нижней (n_1) и верхней (n_2) зонах, т. е.

$$n = n_1 + n_2 = \frac{2}{(2\pi)^3} \int dk \left\{ 1 + \exp \left[\frac{1}{kT} (E_1 - \mu) \right] \right\}^{-1} + \frac{2}{(2\pi)^3} \int dk \left\{ 1 + \exp \left[\frac{1}{kT} (E_2 - \mu) \right] \right\}^{-1}.$$

Здесь $E_1(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m_1}$; $E_2 = \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m_2} + E_0$. Энергия отсчитывается от нижнего края первой зоны. Тогда

$$n = 2 \left(\frac{m_1 k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} F_{1/2} \left(\frac{\mu}{kT} \right) + 2 \left(\frac{m_2 k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} F_{1/2} \left(\frac{\mu - E_0}{kT} \right).$$

Используя предельное значение интеграла Ферми [см. (71), (72)], находим

а) $\mu = kT \ln \frac{n}{2 \left(\frac{kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \left[m_1^{3/2} + m_2^{3/2} e^{-E_0/kT} \right]}$;

б) $n = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m_1}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mu^{3/2} \left[1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{E_0}{\mu} \right)^{3/2} \Theta(\mu - E_0) \right]$,

где

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

139. $n = \frac{2}{(2\pi)^3} \int dk f(E) = \int_0^\infty dE g(E) f(E)$, где $g(E) = \frac{k^2}{\pi^2} \frac{dk}{dE}$ — плот-

ность состояний. В случае малых значений энергии, легко полу-

чаем

$$k^2 = \frac{1}{2\gamma} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8m\gamma E}{\hbar^2}} \right) \approx \frac{2mE}{\hbar^2} \left(1 + \frac{2m\gamma E}{\hbar^2} \right).$$

Отсюда

$$n = 2 \left(\frac{m_n kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \left[F_{1,2} \left(\frac{\mu}{kT} \right) + \frac{15}{2} \frac{m_n \gamma kT}{\hbar^2} F_{3/2} \left(\frac{\mu}{kT} \right) \right].$$

140. Если выбрать за начало отсчета энергии край зоны проводимости, то

$$g(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{2m(0)}{\hbar^2} \right]^{3/2} \left[E^{1/2} \left(1 + \frac{E}{E_g} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{2E}{E_g} \right) \right].$$

В вырожденном случае имеем

$$n = \frac{1}{3\pi^2} \left[\frac{2m(0)}{\hbar^2} \right]^{3/2} \mu^{3/2} \left(1 + \frac{\mu}{E_g} \right)^{3/2}.$$

141. Условимся отсчитывать энергии от нижнего края зоны проводимости 1 (рис. 70). Вероятность того, что квантовое состояние с энергией ε не занято электроном, т. е. по определению является дыркой, равна

$$f'(\varepsilon) = 1 - f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left(\mu - \frac{\varepsilon}{kT}\right) + 1}.$$

Энергия электрона в зоне проводимости $\varepsilon_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}$, на донорном уровне $\varepsilon = -E_1$, на акцепторном уровне $\varepsilon = -E_2$, в валентной зоне (2) $\varepsilon = -E_0 - \varepsilon'_p$, где $\varepsilon'_p = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p}$ — «кинетическая» энергия дырки.

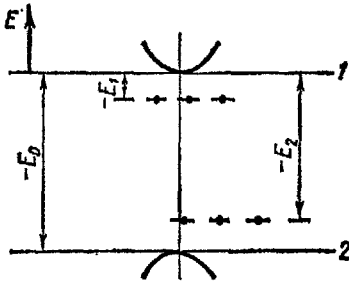


Рис. 70

Запишем теперь условие электронейтральности полупроводника:

$$\int_{\text{зоне 1}} \frac{2g(\varepsilon) d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon_n - \mu}{kT}\right) + 1} + \sum_{\text{акц.}} \frac{1}{\exp\left(\frac{-E_2 - \mu}{kT}\right) + 1} =$$

$$= \int_{\text{зоне 2}} \frac{2g'(\varepsilon) d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\mu + E_0 + \varepsilon_p}{kT}\right) + 1} + \sum_{\text{дон.}} \frac{1}{\exp\left(\frac{\mu - E_1}{kT}\right) + 1}.$$

Считая, что электроны в зоне проводимости 1, а дырки в валентной зоне 2 подчиняются статистике Больцмана, получаем для $x = \exp(\mu/kT)$ следующее уравнение:

$$\frac{(2\pi m_n kT)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} x + \frac{n_2}{e^{-E_2/kT} \frac{1}{x} + 1} = \frac{(2\pi m_p kT)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} e^{-E_0/kT} \frac{1}{x} + \frac{n_1}{e^{-E_1/kT} x + 1},$$

где n_1 и n_2 — концентрации доноров и акцепторов соответственно.

Отсюда видно, что концентрации электронов в зоне проводимости n и дырок в валентной зоне p равны:

$$n = \frac{(2\pi m_n kT)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} e^{\mu/kT};$$

$$p = \frac{(2\pi m_p kT)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} e^{-\frac{E_0 + \mu}{kT}}.$$

Это уравнение 4-го порядка относительно x . Поэтому рассмотрим его решение в частном случае: $n_2 = 0$ при условии $kT \gg E_1$, тогда

$$\mu = kT \ln \frac{4\pi^3 \hbar^3 n_1}{(2\pi m_n kT)^{3/2}}$$

и $n \approx n_1$, т. е. все доноры ионизированы.

Аналогично можно рассмотреть и полупроводник акцепторного типа.

142. Указание. Следует воспользоваться результатами предыдущей задачи.

143. Энергия электронов и дырок, находящихся в 1 см^3 , равна

$$E = 2 \int_0^\infty \epsilon f(\epsilon) g(\epsilon) d\epsilon + 2 \int_0^\infty (E_0 + \epsilon') f'(\epsilon) g'(\epsilon) d\epsilon = n(3kT + E_0).$$

Здесь

$$n = \frac{(2\pi \sqrt{m_n m_p} kT)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} e^{-E_0/kT}.$$

Отсюда

$$C_V = kn \left[\frac{15}{2} + 3 \left(\frac{E_0}{kT} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{E_0}{kT} \right)^2 \right].$$

Формула справедлива при $E_0 \gg kT$ (электронный газ невырожден).

144. $p = \frac{c}{8\pi^2 \hbar^3} \left[p_0 \left(\frac{2}{3} p_0^2 - m^2 c^2 \right) \sqrt{p_0^2 + m^2 c^2} + (mc)^4 \operatorname{arcsinh} \frac{p_0}{mc} \right]$, где $p_0 = (3\pi^2)^{1/3} \hbar \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}$ — граничный импульс для ферми-частиц.

$$145. \frac{N_{\text{орт}}}{N_{\text{пар}}} = 3 \frac{\sum_{j=1, 3, \dots} (2j+1) e^{-\frac{T_c}{T} j(j+1)}}{\sum_{j=0, 2, \dots} (2j+1) e^{-\frac{T_c}{T} j(j+1)}},$$

где $T_c = \frac{\hbar^2}{2Jk}$. Учитывая, что $T \ll T_c$, получаем

$$\frac{N_{\text{орт}}}{N_{\text{пар}}} = 9e^{-2 \frac{T_c}{T}}.$$

146. Пусть $W(E_k)$ — вероятность нахождения частицы в состоянии E_k . Ясно, что для того, чтобы две частицы с энергиями E_1 и E_2 соответственно могли после столкновения перейти в состояния E_3 и

E_4 , необходимо, чтобы последние были не заполнены (принцип запрета Паули)

Используя теперь гипотезу о молекулярном хаосе, получаем для процесса

$$E_1 + E_2 \rightleftharpoons E_3 + E_4$$

следующее функциональное уравнение:

$$W(E_1) W(E_2) [1 - W(E_3)] [1 - W(E_4)] = W(E_3) W(E_4) \times \\ \times [1 - W(E_1)] [1 - W(E_2)].$$

Вводя функцию $f(E) = W^{-1}(E) - 1$, получаем

$$f(E_3) \cdot f(E_4) = f(E_1) f(E_2).$$

Решением данного уравнения при условии $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$ служит функция

$$f(E) = Ae^{\alpha E}.$$

Поэтому

$$W(E) = \frac{1}{Ae^{\alpha E} + 1}.$$

147. Рассмотрим кристалл как совокупность $3N$ (точнее $3N - 6$, но при больших N это несущественно) нормальных колебаний с частотой ω_j . Средняя энергия, связанная с каждым колебанием, будет $(n_j + \frac{1}{2}) \hbar \omega_j$. Энергия, приходящаяся на j -й осциллятор, равна

$$NM\omega_j^2 \bar{r}_j^2 = (\bar{n}_j + \frac{1}{2}) \hbar \omega_j,$$

где M — масса атома, r_j — вклад от j -го нормального колебания в смещение атома

Разделив равенство на $NM\omega_j^2$ и просуммировав по j , получим

$$\bar{r}^2 = \frac{\hbar}{MN} \sum_j \frac{(\bar{n}_j + \frac{1}{2})}{\omega_j}.$$

Заменяя суммирование интегрированием и учитывая дебаевский характер спектра, находим

$$\bar{r}^2 = \frac{\hbar}{2MN} \int_0^{\omega_{\max}} \operatorname{cth} \left(\frac{\hbar \omega}{2kT} \right) \frac{g(\omega)}{\omega} d\omega,$$

где $g(\omega) = \frac{9N\omega^2}{\omega_{\max}^3}$ (см. задачу 125), ω_{\max} определяется из сохранения

числа степеней свободы системы. $\int_0^{\omega_{\max}} g(\omega) d\omega = 3N.$

Определяя дебаевскую температуру $T_D = \frac{\hbar \omega_{\max}}{k}$, в случае $T \ll T_D$ получаем

$$\bar{r}^2 = \frac{9\hbar^2}{4MkT_D} \left(1 + \frac{2\pi^2 T^2}{3T_0} \right).$$

148. $T' = \frac{\partial E'}{\partial S'} = T \sqrt{1 - \beta^2}$, $\rho' = \rho (1 - \beta^2)^{-1}$.

149. $u(\nu, T) = \frac{8\pi n^3(\nu)}{c^3} \hbar \nu^3 \frac{d \ln [n(\nu) \cdot \nu]}{d \ln \nu} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$.

150. Энергия электрона со спиновым моментом μ_0 в магнитном поле равна

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \pm \mu_0 H.$$

Отсюда магнитный момент единицы объема будет

$$M = \mu_0 \int_0^\infty [g(\varepsilon + \mu_0 H) - g(\varepsilon - \mu_0 H)] f(\varepsilon) d\varepsilon \approx 2\mu_0^2 H \int_0^\infty \frac{dg}{d\varepsilon} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} + 1} d\varepsilon.$$

Определим теперь магнитную восприимчивость в некоторых частных случаях

а) при $T = 0^\circ\text{K}$

$$\chi = \frac{M}{H} = 2\mu_0^2 \cdot g(\mu_0),$$

где μ_0 — химический потенциал электронов при абсолютном нуле;

б) сильное вырождение ($kT \ll \mu_0$)

$$\chi = 2\mu_0^2 g(\mu_0) \left[1 + \frac{\pi^2}{6} k^2 T^2 \frac{\partial^2 \ln g(\mu_0)}{\partial \mu_0^2} + \dots \right]$$

[см. формулу (68)];

в) отсутствие вырождения ($kT \gg \mu_0$)

$$\chi = \frac{n\mu_0^2}{kT},$$

так как $f = e^{\frac{\mu - \varepsilon}{kT}}$ (n — число электронов в единице объема).

151. В случае бoльцмановской статистики статистический интеграл системы равен $Z = \frac{1}{N!} Z_i^N$. Если система электронов находится в кубе с ребром L , а поле H направлено по оси OZ , то

$$z_i = \frac{L}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{p_z^2}{2m_n kT}} dp_z \sum_i \Omega(E_i) e^{-\frac{2\mu_0^* H \left(l + \frac{1}{2} \right)}{kT}} \cdot 2 \operatorname{ch} \frac{\mu_0 H}{kT}.$$

Здесь $\mu_0^* = \frac{e\hbar}{2m_n c}$, $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$, $\Omega(E_l)$ — кратность вырождения l -го уровня, равная

$$\Omega(E_l) = \frac{L^2}{h^2} \int \int dp_x dp_y = \frac{L^2 e H}{h^2 c},$$

где интеграл берется в области

$$2\mu_0^* H l < \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m_n} < 2\mu_0^* H (l+1),$$

так как в уровень $2\mu_0^* H \left(l + \frac{1}{2}\right)$ в магнитном поле H объединяются все уровни, лежащие в области интегрирования при $H=0$.

В случае слабых полей

$$\begin{aligned} M &= N\mu_0 \operatorname{th} \frac{\mu_0 H}{kT} - N\mu_0 \operatorname{cth} \left(\frac{\mu_0^* H}{kT} - \frac{kT}{\mu_0^* H} \right) \approx \\ &\approx \frac{NH}{kT} \left(\mu_0^2 - \frac{1}{3} \mu_0^{*2} \right); \\ \chi &= \frac{N}{kT} \left(\mu_0^2 - \frac{1}{3} \mu_0^{*2} \right). \end{aligned}$$

$$152. \chi = \frac{(-1) \cdot 2\pi (2m_n)^{3/2}}{3h^3} \mu_0^2.$$

Указание. Следует определить свободную энергию системы, воспользовавшись формулой суммирования Эйлера:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} f(n) dn + \frac{1}{2} f(0) - \frac{1}{12} f'(0) + \frac{1}{720} f'''(0) - \dots$$

$$153. \Delta = \sqrt{\frac{kT}{\alpha}}.$$

$$154. \overline{\Delta p^2} = -kT \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S.$$

$$155. \Delta S = -\frac{mgl\varphi^2}{T}.$$

156. Решение задачи аналогично решению задачи 154. В переменных V, T имеем

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p \Delta T} &= k^2 T^2 \frac{1}{C_V} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V, \\ \overline{\Delta V \Delta S} &= kT \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \end{aligned}$$

157. Соотношения, приведенные в условии, следуют из решения задачи 154.

$$158. \overline{(\Delta H)^2} = \frac{g_1 g_2 a^2}{(g_2 + g_1 e^{a/kT})^2} e^{a/kT}.$$

159. Используя соотношение $\overline{\Delta N^2} = kT \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu} \right)_T, \alpha_s$, получаем для идеальных газов:

$$а) \overline{\Delta N^2} = \bar{N}, \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{\bar{N}}};$$

$$б) \overline{\Delta n_i^2} = \bar{n}_i (1 - \bar{n}_i), \quad \delta = \sqrt{\frac{1 - \bar{n}_i}{\bar{n}_i}};$$

$$в) \overline{\Delta n_i^2} = \bar{n}_i (1 + \bar{n}_i), \quad \delta = \sqrt{\frac{1 + \bar{n}_i}{\bar{n}_i}}.$$

Как видим, для Ферми-газа (случай б) флуктуация числа частиц обращается в нуль при $n_i = 0, 1$, хотя в случае $n_i = 0$ относительная флуктуация равна ∞ . Для Бозе-газа флуктуация остается конечной (равной единице) и при очень больших n_i .

160. Указание. Следует воспользоваться соотношениями:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial T} \right)_{\mu/T} &= \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu} \right)_T \left[\frac{\mu}{T} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{\bar{N}} \right], \\ \left(\frac{\partial E}{\partial \bar{N}} \right)_T &= \mu - T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{\bar{N}}. \end{aligned}$$

161. $\overline{(\Delta r_c)^2} = \frac{\overline{\rho(r)}}{N^2} \int r^2 dx dy dz = \frac{3}{5N} R_0^2$, где R_0 — радиус сферы, $\rho(r)$ — плотность.

162. В силу однородности времени и обратимости уравнений механики, имеем

$$\overline{q_i^t q_k^0} = \overline{q_i^0 q_k^t}; \quad \overline{q_i^0 q_k^0} = \overline{q_i^t q_k^t}.$$

Найдем теперь:

$$\begin{aligned} \overline{(q_i^t - q_i^0)(q_k^t - q_k^0)} &= \overline{q_i^t(q_k^t - q_k^0)} - \\ &= \overline{q_i^0(q_k^t - q_k^0)} = 2\overline{q_i^t(q_k^t - q_k^0)}. \end{aligned}$$

Но среднее значение физической величины $F = F(p, q)$ по неравновесному ансамблю $H_0(p, q) - \alpha Q$ будет

$$\bar{F} = \int F(p, q, \alpha) \cdot e^{\frac{\Psi - H_0 + \alpha Q - \alpha Q_0}{kT}} d\Gamma,$$

где α — дополнительная сила, включаемая в момент $t=0$ в направлении координаты Q .

Дифференцируя это выражение по α и устремляя потом $\alpha \rightarrow 0$, получаем

$$\left(\frac{\partial F^t}{\partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \frac{1}{kT} \overline{F^t(Q^t - Q^0)}.$$

Отсюда

$$\overline{(q_i^t - q_i^0)(q_k^t - q_k^0)} = 2kT \left(\frac{\partial q_i^t}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha_k=0}.$$

В частном случае, при $q_t = q_k = q$ и $\alpha_t = \alpha_k = \alpha$

$$\overline{(q^t - q^0)^2} = 2kT \left(\frac{\partial q^t}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}.$$

163. Допустим, что уравнение движения броуновской частицы можно представить в виде

$$m\ddot{x} = -6\pi a\eta \dot{x} + \alpha.$$

Здесь: первый член — сила сопротивления (формула Стокса), а α — дополнительная сила, включенная в $t=0$. Решая это уравнение при начальных условиях:

$$\dot{x}|_{t=0} = 0, \quad x|_{t=0} = 0,$$

получаем

$$x(t) = \frac{\alpha}{6\pi a\eta} t + \frac{\alpha m}{(6\pi a\eta)^2} \cdot \left(e^{-\frac{6\pi a\eta}{m} t} - 1 \right).$$

При больших t ($t \gg \frac{m}{6\pi a\eta}$)

$$\overline{\Delta x^2} = 2Dt$$

— соотношение Эйнштейна (здесь $D = \frac{kT}{6\pi a\eta}$).

$$164. N = \frac{RT \cdot t}{3\pi a\eta \cdot \Delta x^2}.$$

165. Если поле тяжести направлено вдоль оси OZ , то

$$\overline{(z^t - z^0)^2} = 2D \cdot t + \left(\frac{mg_z}{6\pi a\eta} \right)^2 t^2.$$

166. Уравнение диффузии при наличии внешнего поля $U = U(x)$ имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{n}{kT} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial x} \right],$$

где D — коэффициент диффузии, $n(x)$ — концентрация частиц.

В случае стационарного режима $n = n(x)$

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} = 0,$$

где поток частиц вдоль оси Ox равен

$$j_x = -D \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{n}{kT} + \frac{\partial n}{\partial x} \right) = -D e^{-U/kT} \frac{\partial}{\partial x} (n e^{U/kT}).$$

Интегрируя это выражение в пределах от x_1 до x_2 , получаем

$$j_x = \frac{n(x_2) \exp \left[\frac{U(x_2)}{kT} \right] - n(x_1) \exp \left[\frac{U(x_1)}{kT} \right]}{\int_{x_1}^{x_2} \exp \left[\frac{U(x)}{kT} \right] dx} (-D).$$

167. $\sigma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \frac{ne^2}{m_n} \tau(\mu)$, где

$$n = \left(\frac{2m_n \mu}{3\pi^2 \hbar^3} \right)^{3/2}, \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

В данном случае не делалось никаких предположений о зависимости τ от скорости.

168. Определим для данной задачи плотность тока j_1 и поток тепла j_2 вдоль оси OX :

$$j_1 = \int ev_x f dv, \\ j_2 = \int \frac{mv^2}{2} v_x f dv.$$

Функция f находится из кинетического уравнения:

$$f = f_0 - \tau \left(\frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} + v_x \frac{\partial f_0}{\partial x} \right).$$

Примем, что

$$f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi\Theta} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2\Theta}},$$

а поле E и $\frac{\partial\Theta}{\partial x}$ мало изменяют f_0 .

Тогда

$$f = f_0 + \frac{\tau e E}{\Theta} v_x f_0 - \frac{\tau v_x}{\Theta^2} \left[\varepsilon - \frac{3}{2} \Theta \right] f_0 \frac{\partial\Theta}{\partial x}.$$

Отсюда [см. формулу (51)]

$$j_1 = \frac{4enA}{3m\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{l+5}{2}\right) \left(\frac{2\Theta}{m}\right)^{l/2} \left[eE - \left(\frac{l}{2} + 1\right) \frac{\partial\Theta}{\partial x} \right], \\ j_2 = \frac{4nA}{3m\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{l+7}{2}\right) \left(\frac{2\Theta}{m}\right)^{l/2} \Theta \left[eE - \left(\frac{l}{2} + 2\right) \frac{\partial\Theta}{\partial x} \right].$$

Представим j_1 и j_2 в виде

$$j_1 = L_{11} E + L_{12} \frac{\partial\Theta}{\partial x}; \\ j_2 = L_{21} E + L_{22} \frac{\partial\Theta}{\partial x}.$$

Из этих соотношений следует, что коэффициенты электропроводности и теплопроводности равны:

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{e^2 n A}{m \sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{l+5}{2}\right) \left(\frac{2\Theta}{m}\right)^{l/2} \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x} \equiv 0 \right), \\ K = \left[-L_{22} + \frac{L_{12} L_{21}}{L_{11}} \right] = \frac{3nA}{3m\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{l+7}{2}\right) \left(\frac{2\Theta}{m}\right)^{l/2} \Theta$$

(теплопроводность измеряется при $j_1 = 0$).

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1) $t=0$ (время релаксации $\tau = A = \text{const}$), тогда

$$\sigma = \frac{ne^2 A}{m}; \quad K = \frac{5}{2} n\lambda_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}};$$

2) $\tau = \frac{\lambda_0}{v}$ (λ_0 —средняя длина свободного пробега электрона), тогда

$$\sigma = \frac{4}{3} e^2 n\lambda_0 \sqrt{\frac{1}{2\pi m kT}}; \quad K = \frac{8}{3} n\lambda_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}.$$

169. Стационарное уравнение Больцмана при наличии постоянных E и H имеет вид

$$-e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{f-f_0}{\tau}.$$

Если $v(p) = \frac{p^2}{2m}$, то при замене f в левой части на f_0 , член с \mathbf{H} обращается в нуль. Поэтому

$$-e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} - \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \frac{\partial (f-f_0)}{\partial p} = -\frac{f-f_0}{\tau}.$$

Ищем решение данного уравнения в виде

$$f = f_0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon},$$

где $\mathbf{a}(\varepsilon)$ —неизвестный вектор.

Подставляя предполагаемое f в уравнение Больцмана, получаем для вектора \mathbf{a} уравнение

$$-e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{a} = +\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\tau}; \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{e\mathbf{H}}{mc}.$$

Отсюда

$$-e\mathbf{E} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{\tau}.$$

Умножая поочередно обе части этого уравнения на $\boldsymbol{\omega}$ сперва скалярно, а потом векторно, получаем два уравнения, из которых и находим вектор \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = -\frac{e\tau}{1+\omega^2\tau^2} [\mathbf{E} + \tau^2 (\boldsymbol{\omega}\mathbf{E}) \boldsymbol{\omega} + \tau (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E})].$$

Отсюда

$$j_{\alpha} = -e^2 \int_0^{\infty} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\tau \cdot v^2}{3(\omega^2\tau^2+1)} \times \\ \times [\delta_{\alpha\beta} + \tau^2 \omega_{\alpha} \omega_{\beta} \pm (1-\delta_{\alpha\beta}) \tau \omega_{\gamma}] E_{\gamma} \cdot \frac{2fp}{h^3},$$

где $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1; & \alpha = \beta \\ 0; & \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{e|\mathbf{H}|}{mc}.$

В последнем выражении берется знак «плюс» или «минус» в зависимости от четности или нечетности перестановки α, β, γ по отношению к x, y, z .

Если поле направлено по оси OZ , то

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= \frac{ne^2}{m_n} \frac{\tau(\mu)}{1 + \omega^2 \tau(\mu)}; & \sigma_{zz} &= \frac{ne^2}{m_n} \tau(\mu); \\ \sigma_{yx} = -\sigma_{xy} &= \frac{ne^2}{m_n} \frac{\omega \tau^2(\mu)}{1 + \omega^2 \tau^2(\mu)}; & \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \sigma_{zx} &= 0.\end{aligned}$$

170. Уравнение Больцмана имеет вид

$$\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -\frac{f - f_0}{\tau},$$

где

$$f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2kT} [(v_x - \beta y)^2 + v_y^2 + v_z^2] \right\},$$

так как поле скоростей для данного потока $v_x = \beta y$; $v_y = 0$; $v_z = 0$.

Отсюда

$$f = f_0 - \tau \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_0 = f_0 + \tau \beta v_x' \frac{\partial}{\partial v_x'} f_0(v_x', v_y', v_z'),$$

где $v_x' = v_x - \beta y$, $v_y' = v_y$, $v_z' = v_z$ — скорости молекул относительно потока жидкости. Определим теперь количество движения, переносимого вдоль оси OY через перпендикулярную единичную площадку в единицу времени (это будет напряжение сдвига X_y):

$$X_y = m\tau\beta \int d\mathbf{v}' v_y'^2 f_0 = n\tau kT \frac{\partial v_x}{\partial y} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Величина $\eta = nkT \cdot \tau$ и есть коэффициент вязкости.

171. Функция $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{r}} f = 0.$$

В момент времени $t = 0$

$$f(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t) = \rho_0(\mathbf{r}_0) f_0(\mathbf{v}).$$

Поскольку частицы движутся по инерции, то $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ и

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \rho_0(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) f_0(\mathbf{v})$$

будет решением уравнения Больцмана.

Отсюда

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}, t) &= \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = \left(\frac{m}{2\pi kT t^2} \right)^{1/2} \frac{1}{r} \times \\ &\times \int_0^\infty \left[e^{-\frac{m}{2kT t^2} (r_0 - r)^2} - e^{-\frac{m}{2kT t^2} (r_0 + r)^2} \right] \rho(r_0) r_0 dr_0.\end{aligned}$$

Учитывая теперь, что

$$\rho(r_0) = \begin{cases} \rho_0; & 0 \leq r_0 \leq a, \\ 0; & r_0 > a, \end{cases}$$

получаем

$$\rho(r, t) = \frac{\rho_0}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi m}{2kTt^3}} r} \cdot \left[e^{-\left(\sqrt{\frac{m}{2kTt^2}} r + a\right)^2} - e^{-\left(\sqrt{\frac{m}{2kTt^2}} r - a\right)^2} \right] + \Phi\left(\sqrt{\frac{m}{2kTt^2}} + a\right) - \Phi\left(\sqrt{\frac{m}{2kTt^2}} - a\right) \right\},$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Приложение 1

Основные формулы векторного анализа

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k}; \quad (1)$$

$$\int \varphi \mathbf{n} dS = \int \nabla\varphi dV \quad (\mathbf{n} \text{ — внешняя нормаль}); \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}; \quad (3)$$

$$\int (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS = \int \operatorname{div} \mathbf{a} dV; \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}; \quad (5)$$

$$\int [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] dS = \int \operatorname{rot} \mathbf{a} dV; \quad (6)$$

$$(\mathbf{a}\nabla) \mathbf{b} = a_x \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z}; \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \nabla \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad (8)$$

$$\Delta \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial z^2}; \quad (9)$$

$$\operatorname{rot} \nabla \varphi = 0; \quad (10)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0; \quad (11)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}; \quad (12)$$

$$\nabla(\varphi f) = \varphi \nabla f + f \nabla \varphi; \quad (13)$$

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \varphi; \quad (14)$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\nabla \varphi \times \mathbf{a}]; \quad (15)$$

$$\operatorname{div}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}; \quad (16)$$

$$\nabla(\mathbf{a}\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b}\nabla) \mathbf{a} + [\mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{b}] + [\mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}]; \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} \nabla a^2 = (\mathbf{a}\nabla) \mathbf{a} + [\mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}]; \quad (18)$$

$$\operatorname{rot}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = (\mathbf{b}\nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a}; \quad (19)$$

$$\oint_L \mathbf{a}_i dl = \int_S \operatorname{rot}_n \mathbf{a} dS; \quad (20)$$

$$\oint_L \psi dl = \int_S |\mathbf{n} \times \nabla \varphi| dS. \quad (21)$$

Криволинейные координаты

Многие задачи решаются гораздо проще при использовании вместо декартовых координат других систем координат, более естественным образом связанных с данной задачей. Например, для задач с осевой симметрией удобно пользоваться цилиндрической системой координат; если задача имеет шаровую симметрию — сферической системой координат и т. д. Такие координатные системы называются криволинейными системами координат.

Поскольку обычно векторы и операции над ними (например, div , rot и др.) определяются по декартовой системе координат, то необходимо иметь формулы, выражающие эти операции в произвольной системе координат.

Рассмотрим проекции вектора в криволинейной системе координат. Пусть задана некоторая криволинейная система координат:

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3), \\ y &= y(q_1, q_2, q_3), \\ z &= z(q_1, q_2, q_3), \end{aligned} \quad (1)$$

или в векторном виде

$$\mathbf{r} = x(q_1, q_2, q_3) \mathbf{i} + y(q_1, q_2, q_3) \mathbf{j} + z(q_1, q_2, q_3) \mathbf{k}.$$

Производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \mathbf{k}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} &= \frac{\partial x}{\partial q_2} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \mathbf{k}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} &= \frac{\partial x}{\partial q_3} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_3} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_3} \mathbf{k}; \end{aligned} \quad (2)$$

в общем случае образуют тройку линейно-независимых векторов, так как якобиан перехода (1) отличен от нуля.

Модули этих векторов соответственно равны:

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}, \\ H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}, \\ H_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}; \end{aligned} \quad (3)$$

они называются параметрами Ламэ.

Если тройку векторов (2) разделить на модули (3)

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}; \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}; \quad (4)$$

то получится тройка единичных векторов, которые можно выбрать за базис. В общем случае этот базис не ортогональный, но в дальнейшем будут использоваться такие специальные криволинейные системы координат, для которых базис, определяемый формулами (4), будет ортогональный. Базис ортогональной криволинейной системы координат обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0; \\ \mathbf{e}_1 = [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3]; \quad \mathbf{e}_2 = [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1]; \quad \mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2]. \end{aligned} \quad (5)$$

Связь между декартовым базисом \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} и базисом \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 дается формулами (2) и (4).

Рассмотрим частный случай цилиндрической системы. Формулы (1) в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi, \\y &= \rho \sin \varphi, \\z &= z,\end{aligned}$$

или, если принять $q_1 = \rho$; $q_2 = \varphi$; $q_3 = z$, то

$$\mathbf{r} = \rho \cos \varphi \mathbf{i} + \rho \sin \varphi \mathbf{j} + z \mathbf{k}.$$

Вычисляем по формулам (3) параметры Ламэ:

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1;$$

$$H_2 = \rho; \quad H_3 = 1.$$

По формулам (4) находим связь между декартовым базисом и цилиндрическим, который обозначим \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_z :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}; \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}; \\ \mathbf{e}_z &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}.\end{aligned}\tag{6}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что базис ортогональный, т. е. $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_z = 0$.

Формулы (6) нетрудно обратить

$$\begin{aligned}\mathbf{i} &= -\mathbf{e}_\varphi \sin \varphi + \mathbf{e}_r \cos \varphi; \\ \mathbf{j} &= \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi + \mathbf{e}_r \sin \varphi; \\ \mathbf{k} &= \mathbf{e}_z.\end{aligned}\tag{7}$$

Теперь можно найти составляющие некоторого вектора \mathbf{a} на базис криволинейной системы координат:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = a_r \mathbf{e}_r + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi + a_z \mathbf{e}_z.\tag{8}$$

Подставляя (6) в (8), находим

$$\begin{aligned}a_x &= a_r \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi; \\ a_y &= a_r \sin \varphi + a_\varphi \cos \varphi; \\ a_z &= a_z.\end{aligned}\tag{9}$$

Аналогично находим связь между декартовым базисом и базисом для сферической системы координат:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi; \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi; \\ z &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

Приведем для справок готовый результат:

$$\begin{aligned}H_1 &= 1; \quad H_2 = r; \quad H_3 = r \sin \theta; \\ \mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}; \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}; \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}.\end{aligned}\tag{10}$$

Легко проверить, что этот базис ортогональный, т. е.

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0.$$

Проекции вектора связаны между собой следующим образом:

$$\begin{aligned} a_x &= a_r \sin \theta \cos \varphi + a_\theta \cos \theta \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi; \\ a_y &= a_r \sin \theta \sin \varphi + a_\theta \cos \theta \sin \varphi + a_\varphi \cos \varphi; \\ a_z &= a_r \cos \theta - a_\theta \sin \theta. \end{aligned}$$

В том случае, когда в задаче встречаются вместе r и z (см. задачу 114), удобно пользоваться параболическими координатами:

$$u = r + z; \quad v = r - z; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Их наименование связано с тем, что поверхности

$$u = \text{const} \quad \text{и} \quad v = \text{const}$$

представляют параболоиды вращения. (Чтобы убедиться в этом, следует возвести в квадрат выражения $r = u - z$ и $r = v + z$. В результате получаются равенства

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2uz \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = v^2 + 2vz,$$

которые являются уравнениями параболоидов, если положить $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$.)

Если обозначить $u = q_1$, $v = q_2$ и $\varphi = q_3$, то получим

$$x = \sqrt{q_1 q_2} \cos q_3; \quad y = \sqrt{q_1 q_2} \sin q_3; \quad z = \frac{q_1 - q_2}{2}.$$

Вычисляя по формулам (3) коэффициенты Ламэ, получаем соответственно:

$$H_1 = \sqrt{\frac{u+v}{4u}}; \quad H_2 = \sqrt{\frac{u+v}{4v}}; \quad H_3 = \sqrt{uv}.$$

Приложение 3

Дифференциальные операции в криволинейных координатах

Операция ∇ в ортогональной криволинейной системе координат. Операция ∇ в декартовой системе координат определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial z} \right) \mathbf{k} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial q_1} \left(\frac{\partial q_1}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial q_1}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial q_1}{\partial z} \mathbf{k} \right) + \frac{\partial f}{\partial q_2} \left(\frac{\partial q_2}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial q_2}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial q_2}{\partial z} \mathbf{k} \right) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial q_3} \left(\frac{\partial q_3}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial q_3}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial q_3}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{\partial f}{\partial q_1} \nabla q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \nabla q_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3} \nabla q_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим вектор ∇q_1 . Скалярные произведения его на орты \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 соответственно равны:

$$\begin{aligned} (\nabla q_1 \cdot \mathbf{e}_1) &= \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial q_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial q_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) = \frac{1}{H_1} \frac{\partial q_1}{\partial q_1} = \frac{1}{H_1}; \\ (\nabla q_1 \cdot \mathbf{e}_2) &= \frac{1}{H_2} \left(\frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial q_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial q_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) = \frac{1}{H_2} \frac{\partial q_1}{\partial q_2} = 0; \\ (\nabla q_1 \cdot \mathbf{e}_3) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что вектор ∇q_1 направлен вдоль \mathbf{e}_1 и модуль его равен $\frac{1}{H_1}$, следовательно,

$$\nabla q_1 = \frac{1}{H_1} \mathbf{e}_1. \quad (2)$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned}\nabla q_2 &= \frac{1}{H_2} \mathbf{e}_2; \\ \nabla q_3 &= \frac{1}{H_3} \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Подставляя полученные формулы в (1), находим

$$\nabla f = \frac{1}{H_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \mathbf{e}_3. \quad (3)$$

Для цилиндрической системы координат

$$\begin{aligned}H_1 &= 1, \quad H_2 = \rho; \quad H_3 = 1; \\ \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_r + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z.\end{aligned} \quad (4)$$

Для сферической системы координат

$$\begin{aligned}H_1 &= 1; \quad H_2 = r; \quad H_3 = r \sin \theta; \\ \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi.\end{aligned} \quad (5)$$

Операция div a в криволинейной системе координат. В декартовой системе операция div определяется следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Разлагая вектор \mathbf{a} по ортам криволинейной ортогональной системы координат, запишем [см формулу (14) приложения 1]:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) &= a_1 \operatorname{div} \mathbf{e}_1 + a_2 \operatorname{div} \mathbf{e}_2 + a_3 \operatorname{div} \mathbf{e}_3 + \\ &+ \mathbf{e}_1 \cdot \nabla a_1 + \mathbf{e}_2 \cdot \nabla a_2 + \mathbf{e}_3 \cdot \nabla a_3.\end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы довести вычисления до конца, необходимо вычислить $\operatorname{div} \mathbf{e}_1$, $\operatorname{div} \mathbf{e}_2$, $\operatorname{div} \mathbf{e}_3$. Для этого к формуле (2) применим операцию rot:

$$\operatorname{rot} \nabla q_1 = \operatorname{rot} \left(\frac{1}{H_1} \mathbf{e}_1 \right) = 0. \quad (7)$$

Воспользовавшись формулами приложения 1, находим

$$\frac{1}{H_1} \operatorname{rot} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{H_1^2} [\nabla H_1 \times \mathbf{e}_1] = 0,$$

откуда

$$\operatorname{rot} \mathbf{e}_1 = \frac{1}{H_1} \nabla H_1 \times \mathbf{e}_1. \quad (8)$$

Согласно формуле (3)

$$\nabla H_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \mathbf{e}_3. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8) и используя формулу (5) приложения 2, получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{e}_1 = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_3. \quad (10)$$

Аналогично находим

$$\operatorname{rot} \mathbf{e}_2 = \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \mathbf{e}_3 - \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \mathbf{e}_1; \quad (11)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e}_3 = \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \mathbf{e}_2. \quad (12)$$

Так как, согласно формуле (5) приложения 2, $\mathbf{e}_1 = [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3]$, то, воспользовавшись формулой (16) приложения 1, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{e}_1 = \operatorname{div} [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_3 \operatorname{rot} \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \operatorname{rot} \mathbf{e}_3. \quad (13)$$

Подставляя (11) и (12) в (13), находим

$$\operatorname{div} \mathbf{e}_1 = \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1}; \quad (14)$$

аналогично получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{e}_2 = \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2}; \quad (15)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{e}_3 = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3}. \quad (16)$$

Подставляя (14)—(16), а также выражения для ∇a_1 , ∇a_2 , ∇a_3 согласно формуле (3) в выражение (6), после алгебраических преобразований имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 H_1 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 H_1 H_2) \right]. \quad (17)$$

Подставляя в (17) параметры Ламэ для цилиндрической системы координат, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}; \quad (18)$$

аналогично находим в сферической системе координат

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (19)$$

Операция rot в криволинейной системе координат:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{rot} (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) = a_1 \operatorname{rot} \mathbf{e}_1 + a_2 \operatorname{rot} \mathbf{e}_2 + a_3 \operatorname{rot} \mathbf{e}_3 + [\nabla a_1 \times \mathbf{e}_1] + [\nabla a_2 \times \mathbf{e}_2] + [\nabla a_3 \times \mathbf{e}_3]. \quad (20)$$

Подставляя (10)—(12) в (20), а также подставляя ∇a_1 , ∇a_2 , ∇a_3 согласно формуле (3), после алгебраических операций имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a} = & \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (a_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 H_2) \right] \mathbf{e}_1 + \\ & + \frac{1}{H_1 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (a_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (a_3 H_3) \right] \mathbf{e}_2 + \\ & + \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (a_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (a_1 H_1) \right] \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (21)$$

Приводим для справок выражение для $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z; \quad (22)$$

в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\varphi) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right\} \mathbf{e}_r + \\ & + \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) \right\} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right\} \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (23)$$

Операция Δf в криволинейной системе координат. Так как $\Delta f = \operatorname{div} \nabla f$, то, подставляя ∇f согласно формуле (3) в формулу (17), получаем

$$\operatorname{div} \nabla f = \Delta f = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right].$$

В цилиндрических координатах имеем

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}; \quad (24)$$

в сферических координатах

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}, \quad (25)$$

в параболических координатах

$$\Delta f = \frac{4}{u+v} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(v \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{u+v}{4uv} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right\}. \quad (26)$$

Операция $\Delta \mathbf{a}$ в криволинейной системе координат. Операция

$$\Delta \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial z^2}$$

в криволинейной системе координат находится с помощью формулы (12) приложения 1:

$$\Delta \mathbf{a} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{a} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}.$$

Ввиду громоздкости общей формулы приведем для справок выражение для $\Delta \mathbf{a}$ в цилиндрической системе координат

$$\Delta \mathbf{a} = \left(\Delta a_r - \frac{a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{2} \left(\Delta a_\varphi - \frac{a_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_\varphi + \Delta a_z \mathbf{e}_z; \quad (27)$$

в сферической системе координат

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{a} = & \left[\Delta a_r - \frac{2}{r^2} \left(a_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \mathbf{e}_r + \\ & + \left[\Delta a_\theta + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{a_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \mathbf{e}_\theta + \\ & + \left[\Delta a_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} - \frac{a_\varphi}{2 \sin \theta} \right) \right] \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (28)$$

Операцию Δ в формулах (27) и (28) следует понимать в виде (24) и (25) соответственно.

Дополнение по квантовой механике

Вычисление интеграла

$$I = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}} dr, \quad (I)$$

где $0 < r_1 < r_2$, A, B, C — вещественны. Значения r_1 и r_2 обращают в нуль подкоренное выражение; оно положительно при $r_1 < r < r_2$ и, следовательно, $A < 0$ и $C < 0$, так как

$$A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2} = \frac{A(r-r_1)(r-r_2)}{r^2} = C \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) > 0.$$

Собозначим $f(z) = \sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}}$, где z — комплексная переменная. Очевидно, $z=r_1$ и $z=r_2$ — точки ветвления этой функции.

Для вычисления I проведем разрез по линии r_1-r_2 . Пусть на нижнем берегу разреза $f > 0$, на верхнем $f < 0$. Вычислим интеграл по контуру разреза в положительном направлении (по нижнему берегу от r_1 до r_2 , по верхнему — от r_2 до r_1). Обозначая этот контур l , будем, очевидно, иметь

$$\int_l f(z) dz = \int_{r_1}^{r_2} |f| dr + \int_{r_2}^{r_1} [-|f|] dr = 2I.$$

Полусом $f(z)$ является точка $z=0$. Следовательно, l можно деформировать любым образом, лишь бы внутри контура оставались точки $z=r_1$ и $z=r_2$ и не содержалась точка $z=0$. Если рассматривать контур L в окрестности $z=\infty$ и контур λ вокруг точки $z=0$, то по теореме Коши

$$\int_L f(z) dz = \int_l f(z) dz + \int_\lambda f(z) dz$$

причем все контуры следует обходить в положительном направлении (против часовой стрелки).

Для вычисления интегралов по L и λ разложим $f(z)$ вблизи $z=\infty$ и $z=0$. При $z=\infty$ имеем

$$f(z) = \sqrt{A} \left(1 + \frac{2B}{Az} + \frac{C}{A^2 z^2} \right)^{1/2} \approx \sqrt{A} \left(1 + \frac{B}{Az} + \dots \right).$$

При переходе от точек $z < r_2$, лежащих на нижнем берегу разреза (где $f = \frac{\sqrt{A(z-r_1)(z-r_2)}}{z} > 0$ и $\arg f = 0$), к точкам $z > r_2$ аргумент разности $z-r_2$ увеличивается на π и следовательно, $\arg f$ от 0 возрастает до $\pi/2$. Таким образом, в написанном выше выражении надо считать $\sqrt{A} = +i | \sqrt{A} |$, так как $\arg \left(1 + \frac{B}{Az} + \dots \right) = 0$.

Вблизи $z=0$

$$f(z) = \frac{\sqrt{C}}{z} \left(1 + \frac{2Bz}{C} + \frac{Az^2}{C} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{C}}{z} \left(1 + \frac{Bz}{C} + \dots \right).$$

Теперь при переходе от $z > r_1$ на нижнем берегу разреза к $z < r_1$ аргумент $z - r_1$ уменьшается на π (переход происходит по часовой стрелке) и, следовательно, $\sqrt{C} = -i |\sqrt{C}|$.

Применяя теорию вычетов, имеем

$$\int_L f(z) dz = \sqrt{A} \int_L \left(1 + \frac{B}{Az} + \dots\right) dz = 2\pi i \frac{B}{\sqrt{A}},$$

$$\int_{\lambda} f(z) dz = \sqrt{C} \int_{\lambda} \frac{dz}{z} \left(1 + \frac{Bz}{C} + \dots\right) dz = 2\pi i \sqrt{C}.$$

и окончательно

$$I = \frac{1}{2} \left[\int_L f(z) dz - \int_{\lambda} f(z) dz \right] = \pi i \left(\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C} \right) = \pi \left(\frac{B}{|\sqrt{A}|} - |\sqrt{C}| \right) \quad (11)$$

Приложение 5

Полиномы Лежандра

Уравнение

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_l(x)}{dx} \right] + l(l+1) P_l(x) = 0 \quad (1)$$

имеет решением полиномы Лежандра

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (x^2-1)^l}{dx^l}. \quad (2)$$

Составляя для $Z = (x^2-1)^l$ тождество $(x-1) \frac{dZ}{dx} - 2lxZ = 0$ и дифференцируя

его l раз по x , можно в этом убедиться.

Согласно выражению (2) можно составить

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1; & P_1(x) &= x; \\ P_2(x) &= \frac{1}{2} (3x^2 - 1); & P_3(x) &= \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \end{aligned}$$

и т. д. и убедиться в том, что $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$.

Производящей функцией для $P_l(x)$ является функция $\frac{1}{|r'-r|}$ при $r' = r$ и $r < 1$. Обозначая угол между r и r' как $\arccos x$, записываем

$$F(r, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^l. \quad (3)$$

Очевидно, что при $r > 1$, вводя $r_1 = \frac{1}{r}$, можно получить разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^{-l-1};$$

$P_l(x)$ может быть определен также следующим образом:

$$P_l(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{2^l} \frac{(z^2-1)^l}{(-x+z)^{l+1}} dz, \quad (4)$$

где L — произвольный замкнутый контур, охватывающий точку $z = x$, являющуюся полюсом подынтегральной функции. Разлагая $f(z) = (z^2 - 1)^l$ в ряд по степеням $z - x$ и применяя теорию вычетов, можно убедиться, что определение (4) согласуется с выражением (2). Производя в (4) замену $\frac{z-x}{z^2-1} = \frac{\zeta}{2}$, причем $z = \frac{1}{\zeta} (1 - \sqrt{1 - 2x\zeta + \zeta^2})$ (выбирается только z , переходящее в x при $\zeta \rightarrow 0$), получаем

$$P_l(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{l!} \oint \frac{d\zeta}{\zeta^{l+1} \sqrt{1 - 2x\zeta + \zeta^2}} = \frac{1}{l!} \left[\frac{\partial^l}{\partial x^l} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2x\zeta + \zeta^2}} \right) \right]_{\zeta=0},$$

что показывает эквивалентность определений (4) и (3).

Пользуясь формулой (3), легко получить рекуррентные соотношения между полиномами $P_l(x)$ и их производными.

Составляя $(1 - 2xr + r^2) \frac{\partial F}{\partial r}$, приходим к соотношению

$$\frac{x-r}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} (x-r) P_l(x) r^l = \sum_{l=0}^{\infty} (1-2xr+r^2) l P_l(x) r^{l-1} \quad (5)$$

и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r^l , получаем

$$(l+1) P_{l+1}(x) - 2(l+1) x P_l(x) + l P_{l-1}(x) = 0. \quad (6)$$

Составим выражение

$$F + 2r \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1-r^2}{(\sqrt{1-2xr+r^2})^3} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(x) r^l. \quad (7)$$

С другой стороны

$$r^2 \frac{\partial F}{\partial r} + rF = \frac{r-xr^2}{(\sqrt{1-2xr+r^2})^3} = \sum_{l=0}^{\infty} l P_{l-1}(x) r^l \quad (8)$$

и, складывая (5) и (8), получаем

$$\frac{x-r}{(\sqrt{1-2xr+r^2})^3} + \frac{r-xr^2}{(\sqrt{1-2xr+r^2})^3} = \frac{x(1-r^2)}{(\sqrt{1-2xr+r^2})^3} = \sum_{l=0}^{\infty} l P_{l-1} r^l + \sum_{l=0}^{\infty} l P_l r^{l-1}.$$

Сравнивая с (7), находим, что

$$(2l+1) x P_l(x) = (l+1) P_{l+1}(x) + l P_{l-1}(x).$$

Составляя $(1 - 2xr + r^2) \frac{\partial F}{\partial x}$, находим соотношение

$$P_l(x) = P'_{l+1}(x) - 2x P'_l(x) + P'_{l-1}(x). \quad (9)$$

Подставляем в (9) P'_{l+1} из (6) и полученное выражение $P_l(x) = x P'_l(x) - P'_{l-1}(x)$ умножаем на 2 и складываем с (9). В итоге имеем:

$$(2l+1) P_l(x) = \frac{dP_{l+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{l-1}(x)}{dx}. \quad (10)$$

Используя определение (2), вычислим ортонормировочный интеграл для по-

линомов Лежандра. Предполагая, что $l \geq k$, производим в следующем ниже выражении интегрировании по частям с учетом того, что на границах при $x = \pm 1$ функция $(x^2 - 1)$ обращается в нуль. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_k(x) P_l(x) dx &= \frac{1}{2^l l! 2^k k!} \int_{-1}^1 \frac{d^l (x^2 - 1)^l}{dx^l} \frac{d^k (x^2 - 1)^k}{dx^k} dx = \\ &= \dots = \frac{1}{2^l l! 2^k k!} (-1)^l \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^l \frac{d^{l+k} (x^2 - 1)^k}{dx^{k+l}} dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{kl}. \end{aligned}$$

Приложение 6

Полиномы Чебышева—Эрмита

Полиномы Чебышева—Эрмита $H_n(x)$ могут быть определены на промежутке $-\infty \leq x \leq \infty$ при помощи производящей функции

$$F(x, t) = e^{-t^2 + 2tx} = e^{x^2} e^{-(t-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n. \quad (1)$$

Отсюда непосредственно получаем

$$H_n(x) = \left(\frac{\partial^n F(x, t)}{\partial x^n} \right)_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n (e^{-x^2})}{dx^n}. \quad (2)$$

Равенство $\frac{\partial F(x, t)}{\partial x} = 2t \frac{\partial F(x, t)}{\partial t}$ после использования (1) приобретает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H'_n(x) t^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} t \frac{H_n(x)}{n!} t^n,$$

откуда, приравнявая коэффициенты при t^n слева и справа, получаем

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x). \quad (3)$$

Аналогично, из равенства $\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + 2(t-x)F(x, t) = 0$ вытекает соотношение

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad (n \geq 1) \quad (4)$$

Комбинируя (3) и (4), приходим к линейному однородному уравнению для $H_n(x)$:

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0. \quad (5)$$

Свойство ортогональности полиномов $H_n(x)$ получается из соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \frac{d^n (e^{-x^2})}{dx^n} dx$$

(используется формула (2), $n > m$). Производя интегрирование по частям и замечая, что при $x = \pm \infty$ обращаются в нуль все производные от e^{-x^2} , находим

[согласно формуле (3)]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^{n-1} 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x) \frac{d^{n-1} e^{-x^2}}{dx^{n-1}} = \dots =$$

$$= (-1)^{n-m} 2^m \cdot m! \int_{-\infty}^{\infty} H_0(x) \frac{d^{n-m} (e^{-x^2})}{dx^{n-m}} dx = 0.$$

Полагая в этом равенстве $n = m$, можно для нормирования $H_n(x)$ вычислить

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = 2^n \cdot n! \sqrt{\pi}.$$

Ортонормированными функциями являются

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{(2^n \cdot n! \sqrt{\pi})^{1/2}} H_n(x) e^{-x^2/2}$$

($n = 0, 1, 2, \dots$).

Общее выражение для $H_n(x)$:

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1} (2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} - \dots$$

позволяет вычислить любой из них. В частности

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1; & H_1(x) &= 2x; \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2; & H_3(x) &= 8x^3 - 12x. \end{aligned}$$

Кроме того, $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

Приложение 7

Вырожденная гипергеометрическая функция

Эта функция для всех конечных z и a и при произвольном c , не равном $0, -1, -2, \dots$, определяется следующим рядом:

$$F(a, c; z) = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \cdot \frac{z^2}{2!} + \dots (F(a; a; z) = e^z). \quad (1)$$

Вырожденная гипергеометрическая функция является частным решением уравнения:

$$z \frac{d^2 \Phi}{dz^2} + (c-z) \frac{d\Phi}{dz} - a\Phi = 0. \quad (2)$$

Если c — не целое число, то вторым частным решением (2) есть функция:

$$z^{1-c} F(a-c+1, 2-c; z). \quad (3)$$

Функция $F(a, c; z)$ удовлетворяет ряду соотношений, которые следуют из формул (1) и (2):

$$\begin{aligned} & - F(a, c; z) = e^z F(c-a; c; z); \\ (c-a) F(a-1, c; z) + (2a-c+z) F(a, c; z) &= a F(a+1, c; z); \\ \frac{d}{dz} F(a, c; z) &= \frac{a}{c} F(a+1, c+1, z); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{d^n}{dz^n} F(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)} \cdot F(a+n; c+n; z).$$

Если a равно нулю или целому отрицательному числу $a = -n$, то $F(a, c; z)$ сводится к полиному n степеней:

$$F(-n, c, z) = 1 - \frac{n}{c} z + \dots + (-1)^n \frac{(c-1)!}{(c+n-1)!} z^n = \frac{z^{1-c} e^z \Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \frac{d^n}{dz^n} (z^{c+n-1} \cdot e^{-z}). \quad (5)$$

Асимптотика функций:

$$\operatorname{Re} z \rightarrow \infty; \quad F(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^{a-c} \cdot e^z \cdot [1 + O(|z|^{-1})]; \quad (6)$$

$$\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty; \quad F(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} [1 + O(|z|^{-1})];$$

$$\operatorname{Re} c \rightarrow \infty; \quad F(a, c; z) = 1 + O(|c|^{-1}) \text{ при конечном } z, a.$$

Любое уравнение вида:

$$(a_0 x + b_0) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + (a_1 x + b_1) \frac{d\varphi}{dx} + (a_2 x + b_2) \varphi = 0 \quad (7)$$

может быть приведено к (2) следующей заменой.

$$\varphi = e^{\nu x} \Phi, \quad x = \lambda z + \mu,$$

где величины ν , λ , μ определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned} a_0 \mu + b_0 &= 0; \\ a_0 + \lambda(2a_0 \nu + a_1) &= 0; \\ a_0 \nu^2 + a_1 \nu + a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

ЛИТЕРАТУРА

И. В. Мещерский. Сборник задач по теоретической механике. М., «Наука», 1968.

Л. Г. Коткин, В. Г. Сербо. Сборник задач по классической механике. М., «Наука», 1969.

В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. Сборник задач по электродинамике. М., Физматгиз, 1962.

О. Ф. Томасевич. Збірник задач з теоретичної фізики. Киев, Изд. Киевского университета, 1958.

Flückiger i H. Marschall. Metody rachunkowe teorii kwantow. Warszawa, 1958.

И. И. Гольдман и В. Д. Кривченков. Сборник задач по квантовой механике. М., Гостехтеоретиздат, 1957.

В. И. Коган и В. М. Галицкий. Сборник задач по квантовой механике. М., Гостехтеоретиздат, 1956.

СОДЕРЖАНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие	
Раздел I. Классическая механика	3
§ 1. Основные законы, формулы и понятия . . .	5
§ 2. Задачи	18
Раздел II. Электродинамика	
§ 1. Основные законы, формулы и понятия . . .	34
§ 2. Задачи	43
Раздел III. Квантовая механика	
§ 1. Основные понятия, законы и формулы . . .	57
§ 2. Задачи	67
Раздел IV. Статистическая физика и термодинамика	
§ 1. Основные положения и законы	78
§ 2. Задачи	91
Ответы, решения и указания	
Классическая механика	107
Электродинамика	123
Квантовая механика	171
Статистическая физика и термодинамика	268
Приложения	
Основные формулы векторного анализа	321
Криволинейные координаты	322
Дифференциальные операции в криволинейных координатах	324
Дополнение по квантовой механике	328
Полиномы Лежандра	329
Полиномы Чебышева—Эрмита	331
Вырожденная гипергеометрическая функция . .	332
Литература	334

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ**

Редактор Е. С. Гридасова
Художественный редактор В. И. Пономаренко
Технический редактор Н. В. Яшукова
Корректор Г. А. Четккина

Сдано в набор 20/X-71 г. Подп. к печати 7/III-72 г. Формат 60×90/16. Объем 21 печ. л. Уч.-изд. л. 17,10. Изд. № ФМ-436. Заказ № 2500. Тираж 50.000 экз. Цена 64 коп.

План выпуска литературы для вузов и техникумов
изд-ва «Высшая школа» на 1972 г. Позиция № 54

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14
Издательство «Высшая школа»

Ордена Грудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, М-54, Валовая, 28.