

CLASSICAL ELECTRODYNAMICS

by

John David Jackson
Professor of Physics,
University of Illinois

JOHN WILEY & SONS, INC.
NEW YORK — LONDON

1962

Дж. ДЖЕКСОН

Классическая
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
Г. В. ВОСКРЕСЕНСКОГО и Л. С. СОЛОВЬЕВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Э. Л. БУРШТЕЙНА

1 9 6 5

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА

Книга Джексона представляет собой современный курс электродинамики. В ее основу положен курс лекций, которые автор читал в течение многих лет в Иллинойском университете и университете Мак-Гилла (США).

Благодаря незаурядному педагогическому мастерству, с которым написана книга, и умелому подбору материала в ней удачно сочетаются четкость и простота изложения со строгостью и глубиной. Автор ставит перед собой задачу не только дать ясное представление о физических основах электродинамики, но и привить читателю навыки самостоятельного решения электродинамических задач. Этому способствуют хорошо подобранные задачи и упражнения, помещенные в конце каждой главы.

Наряду с традиционными разделами электродинамики (от электростатики до специальной теории относительности) в книге рассматриваются наиболее интересные ее приложения, например в радиотехнике (теория волноводов и резонаторов, теория излучения) и в ядерной физике (соударения заряженных частиц, излучение движущихся частиц).

Книга рассчитана на научных работников — физиков, инженеров, а также аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся по теоретической физике, ядерной физике, физике плазмы и электронике (в особенности в области СВЧ).

Предлагаемая книга посвящена разделу физики, давно уже ставшему классическим,— электродинамике. Только за последние годы советскими издательствами издан и переиздан целый ряд курсов электродинамики¹⁾. Однако это отнюдь не исключает необходимости издания новых курсов, отличающихся от прежних объемом материала, уровнем и методикой изложения.

Книга Джексона рассчитана прежде всего на студентов и аспирантов физических и технических специальностей, желающих не только получить ясные физические представления и конкретные знания природы электромагнитных явлений, но и приобрести навыки самостоятельного решения прикладных задач в этой области. Автор уделяет довольно много места описанию различных методов решения электродинамических проблем, от простейшего метода зеркальных изображений до метода парных интегральных уравнений. К каждой главе подобраны поучительные упражнения и задачи, являющиеся ценным дополнением к основному тексту и иллюстрирующие приложения описываемых методов. Более полно, чем в других руководствах по электродинамике, здесь представлены метод функций Грина и метод разложения полей по мультиполям.

Другой особенностью является актуальность материала, включенного в книгу. Наряду с традиционными разделами (электростатика, магнитостатика, переменные поля, уравнения Максвелла, электромагнитные волны) здесь рассматривается целый ряд вопросов, которые в последние годы приобрели важное значение с прикладной точки зрения. Сюда относятся, с одной стороны, разделы,

¹⁾ Тамм И. Е., Основы теории электричества, 3-е переработанное издание, М., 1946 (то же, 7-е издание, М., 1957); Иваненко Д. Д., Соколов А. А., Классическая теория поля, М., 1951; Власов А. А., Макроскопическая электродинамика, М., 1955; Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, М., 1957; Зоммерфельд А., Электродинамика, ИЛ, 1958; Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., 1960; Тоннела М. А., Основы электромагнетизма и теории относительности, ИЛ, 1962; Новаку В., Введение в электродинамику, ИЛ, 1963; Пановский В., Филипс М., Классическая электродинамика, М., 1964.

посвященные волноводам, резонаторам, излучающим системам и различным методам расчета излучения. Помимо общезначимого интереса, эти разделы особенно полезны всем специализирующимся по технике сверхвысоких частот, по антенной технике и в других смежных областях. С другой стороны, ряд глав книги представляет особый интерес для физиков-теоретиков и экспериментаторов, занимающихся изучением частиц высоких энергий. Помимо ставшего уже традиционным для курсов электродинамики рассмотрения основ релятивистской механики, здесь имеются специальные главы, посвященные анализу соударения заряженных частиц, излучения движущихся частиц, в том числе синхротронного, тормозного и черенковского излучения и обратной реакции излучения на движение частиц. Следует также упомянуть краткое, но ясное изложение основ магнитной гидродинамики и физики плазмы.

Наиболее близкой к настоящему курсу является упомянутая выше книга В. Пановского и М. Филипс, вышедшая недавно в русском переводе. Охватывая примерно тот же круг вопросов, она, однако, отличается конспективностью, рассчитана на хорошо подготовленного читателя и уступает книге Джексона в детальной разработке методов решения электродинамических задач.

Третьей характерной особенностью книги Джексона является педагогическое мастерство, с которым написана книга. Изложение доступно широкому кругу читателей, весьма ясно, в то же время достаточно строго и вполне современно. Всюду физическое содержание понятий выступает на передний план. В этом отношении показательны, например, разделы, посвященные соударениям заряженных частиц и излучению частиц. Для получения соответствующих квантовых соотношений из классических автор использует полуклассические соображения с учетом принципа неопределенности. При таком подходе читателю становится особенно ясно, какие явления относятся к существенно квантовым, а какие — к классическим.

В целом можно надеяться, что предлагаемый курс электродинамики, современный по содержанию, весьма полный и написанный с высоким педагогическим мастерством, будет ценным и полезным пособием для всех изучающих электродинамику.

Перевод книги выполнен Э. Л. Бурштейном (предисловие и гл. 1), Г. В. Воскресенским (гл. 4; гл. 5, § 1—7; гл. 13—17 и приложение) и Л. С. Соловьевым (гл. 2, 3; гл. 5, § 8—12; гл. 6—12).

Э. Л. Бурштейн

Предисловие

Классическая теория электромагнетизма наряду с классической и квантовой механикой является в настоящее время одной из основных теоретических дисциплин при подготовке физиков. Серьезное знание этих предметов — необходимое условие успешного изучения специальных дисциплин.

Типичная программа по электричеству и магнетизму для высшего учебного заведения рассчитана на два или три семестра после изучения курса элементарной физики. Преимущественное внимание уделяется в ней основным законам электродинамики, их лабораторному подтверждению и рассмотрению следствий из них, анализу цепей, простым волновым явлениям и излучению. Из математических средств используются векторное исчисление, обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, ряды Фурье, иногда преобразования Фурье и Лапласа, уравнения в частных производных, полиномы Лежандра и функции Бесселя.

Для аспирантов обычно дается двухсеместровый курс теории электромагнетизма. Именно такому курсу соответствует моя книга. При обучении аспирантов электродинамике я ставлю перед собой по крайней мере три цели. Во-первых, все содержание курса должно быть представлено как единое связанное целое. Особенно важно подчеркнуть единство электрических и магнитных явлений как с точки зрения их физической сущности, так и с точки зрения математической трактовки. Во-вторых, не менее важной задачей является изложение и применение различных методов математической физики, весьма полезных как в электродинамике, так и в квантовой механике. Сюда относятся теорема Грина и функции Грина, ортонормальные разложения, сферические гармоники, цилиндрические и сферические функции Бесселя. Наконец, третьей и, быть может, важнейшей задачей является изложение нового материала, в частности вопросов, касающихся взаимодействия релятивистских заряженных частиц с электромагнитным полем. Здесь, конечно,

в сильной степени сказываются личные вкусы автора. Выбор материала определяется тем, что, на мой взгляд, наиболее существенно и полезно для лиц, интересующихся теоретической физикой, экспериментальной ядерной физикой, физикой больших энергий и пока еще недостаточно определенной «физикой плазмы».

Книга начинается по традиции с электростатики. В первых шести главах последовательно излагается теория электромагнетизма Максвелла. По ходу изложения вводится необходимый математический аппарат, особенно в гл. 2 и 3, где детально рассмотрены граничные задачи. При этом мы исходим из напряженности электрического поля E и магнитной индукции B . Производные макроскопические характеристики D и H вводятся путем усреднения по ансамблю атомов и молекул. При рассмотрении диэлектриков даются простые классические модели поляризации атома, однако при описании магнитных свойств модельные представления не используются. Частично это обусловлено недостатком места, но в основном объясняется тем, что построить чисто классическую модель магнитной восприимчивости вообще невозможно. Кроме того, только для разъяснения такого интересного явления, как ферромагнетизм, потребовалась бы чуть ли не целая книга.

Следующие три главы (гл. 7—9) посвящены различным электромагнитным явлениям главным образом макроскопического характера. В гл. 7 рассматриваются плоские волны в различных средах, в том числе в плазме, а также дисперсия и распространение электромагнитных импульсов. В гл. 8 обсуждаются волноводы и резонаторы произвольного поперечного сечения. Вопрос о затухании волн в волноводах и о добротности резонаторов решается в весьма общем виде, что позволяет подчеркнуть физическую суть процессов. Гл. 9 посвящена элементарной теории мультипольного излучения ограниченных источников и теории дифракции. Поскольку простая скалярная теория дифракции излагается во многих учебниках по оптике и в учебниках по электричеству и магнетизму для высших учебных заведений, в этой главе дается более строгое, хотя также приближенное, изложение теории дифракции на основе не скалярных, а векторных теорем Грина.

В последнее время проблемы магнитной гидродинамики и динамики плазмы все больше привлекают внимание физиков и астрофизиков. В гл. 10 дается обзор этого весьма сложного раздела и излагаются относящиеся сюда основные физические понятия.

Первые девять или десять глав образуют основу классической теории электричества и магнетизма. Предполагается, что аспиранты уже знакомы с большей частью этих вопросов, может быть, в более элементарном изложении. Но изучив эти же вопросы при более строгом подходе, принятом в настоящей книге, читатель приобретет более полное представление о предмете, глубже поймет отдельные

вопросы и в значительной степени овладеет техникой применения различных аналитических методов решения задач. После этого он сможет воспринять более сложные проблемы, рассматриваемые в последующих главах. Сюда относятся главным образом вопросы взаимодействия заряженных частиц друг с другом и с электромагнитным полем (в частности, частиц, движущихся с релятивистскими скоростями).

Специальная теория относительности ведет свое происхождение от классической электродинамики. И сейчас, через 60 лет, классическая электродинамика по-прежнему служит блестящим примером ковариантности законов природы при преобразовании Лоренца. Специальной теории относительности посвящена гл. 11. В ней описывается весь необходимый формальный аппарат, исследуются различные кинематические следствия и устанавливается ковариантность законов электродинамики. Следующая глава посвящена кинематике и динамике релятивистской частицы. Динамику заряженных частиц в электромагнитных полях, конечно, можно отнести к электродинамике. Читатель может, однако, усомниться в том, насколько правомерно относить к электродинамике, скажем, кинематические преобразования при соударении. На это следует ответить, что коль скоро установлен четырехмерный характер импульса и энергии частицы, использование таких примеров вполне оправдано, поскольку при этом у читателя вырабатываются полезные навыки обращения с преобразованиями Лоренца, а получаемые результаты весьма полезны и мало где приводятся.

В гл. 13, где обсуждаются соударения заряженных частиц и их рассеяние, особое внимание уделяется энергетическим потерям и вводятся понятия, необходимые для последующих глав. Здесь в первый раз в этой книге я использую полуклассические соображения, связанные с принципом неопределенности, чтобы получить из классического рассмотрения приближенные квантовомеханические выражения для энергетических потерь и т. п. Такой подход, оказавшийся столь плодотворным в руках Нильса Бора и Вильямса, позволяет ясно понять, где и каким образом квантовомеханические эффекты видоизменяют классические представления.

Важному вопросу об излучении движущегося с ускорением точечного заряда посвящены гл. 14 и 15, причем особое внимание уделено релятивистским эффектам. Выражения для спектрального и углового распределения излучения выводятся достаточно общим путем, а их применение иллюстрируется на столь различных примерах, как синхротронное и тормозное излучение и излучение при β -распаде. Обсуждается также излучение Черенкова — Вавилова и метод виртуальных фотонов Вейцзекера — Вильямса. При рассмотрении процессов атомных и ядерных соударений для получения приближенных квантовомеханических соотношений вновь приме-

няются полуклассические соображения. Я специально подчеркиваю это, так как считаю весьма существенным, чтобы читатель понимал, что такие радиационные эффекты, как, например, тормозное излучение, являются по своему характеру почти полностью классическими, хотя мы здесь и имеем дело с соударениями на малых расстояниях. Если же читатель встретится с тормозным излучением впервые в курсе квантовой теории, он не поймет его физической сущности.

Предметом гл. 16 являются мультипольные поля. Разложение скалярного и векторного полей по сферическим волнам производится на основе самых общих предпосылок, при этом не накладывается никаких ограничений на соотношения между размером области, занимаемой источниками, и длиной волны. Затем рассматриваются свойства электрических и магнитных мультипольных полей излучения и устанавливается их связь с мультипольными моментами источника. После этого в качестве примеров обсуждается атомное и ядерное мультипольное излучение, а также макроскопический источник, размеры которого сравнимы с длиной волны. Для иллюстрации граничной задачи с векторными сферическими волнами довольно подробно исследована задача о рассеянии плоской электромагнитной волны на сферическом препятствии.

В последней главе рассмотрен сложный вопрос о реакции излучения. Рассмотрение здесь скорее физическое, чем математическое. Особое внимание уделяется определению областей применимости приближенных выражений для радиационных поправок и выявлению случаев, когда существующие теории неприменимы. Здесь излагается как первоначальная теория Абрагама — Лоренца, так и более поздний классический подход.

Книга заканчивается приложением, в котором рассматривается вопрос об единицах и размерностях физических величин, и библиографией. В приложении я старался показать логику построения системы единиц, не пытаясь убедить читателя в особых преимуществах выбранной нами системы единиц. Здесь приведены две таблицы, которые, как можно надеяться, окажутся полезными. Первая служит для перевода формул из одной системы в другую, вторая — для перевода численных значений физических величин из гауссовой системы в систему МКС и обратно. В библиографию включены книги, которые могут, на наш взгляд, пригодиться читателю для справок или для дальнейшего изучения предмета. Ссылки на них даются в тексте в квадратных скобках.

Эта книга возникла на основе лекционного курса по классической электродинамике, который я читал для аспирантов последние одиннадцать лет в Иллинойском университете и в университете Мак-Гилла. Я хочу поблагодарить моих коллег и слушателей в обоих университетах за бесчисленные полезные замечания. Особо

следует упомянуть профессора Уоллеса (университет Мак-Гилла), который предоставил мне возможность вести этот весьма неортодоксальный по тем временам курс, и профессоров Уальда и Асколи (Иллинойсский университет), которым я обязан многими ценными предложениями по методике изложения различных вопросов. Я благодарен также д-ру Кауфману, прочитавшему первоначальный вариант рукописи и сделавшему ряд замечаний, и м-ру Кэйну за помощь при составлении предметного указателя.

Дж. Джексон

Урбана, Иллинойс
Январь 1962

ВВЕДЕНИЕ В ЭЛЕКТРОСТАТИКУ

Хотя янтарь и магнитный железняк были известны еще в древней Греции, электродинамика как количественная наука возникла и развилась за какие-нибудь последние восемьдесят лет. Наблюдения Кулона над силами взаимодействия заряженных тел относятся к 1785 г. Примерно через пятьдесят лет Фарадей исследовал действие токов и магнитных полей. В 1864 г. Максвелл опубликовал свою знаменитую работу о динамической теории электромагнитного поля.

Мы начнем наше изложение с электростатики, т. е. с описания электрических полей, не зависящих от времени. Изложение будет большей частью весьма кратким, поскольку оно, по существу, носит обзорный характер. Электростатика послужит нам пробным камнем для развития и приложения общих математических методов.

§ 1. Закон Кулона

Вся электростатика по существу основана на законе Кулона, определяющем силу, с которой взаимодействуют заряженные тела, находящиеся в покое относительно друг друга. Кулон (а еще раньше Кэвендиш) экспериментально показал, что сила взаимодействия двух небольших заряженных тел, расстояние между которыми велико по сравнению с их размерами,

- 1) пропорциональна величине каждого заряда,
- 2) обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними,
- 3) направлена вдоль прямой, соединяющей заряды,
- 4) представляет собой притяжение, если тела заряжены противоположно, и отталкивание в случае одноименных зарядов.

Кроме того, было показано экспериментально, что полная сила, с которой совокупность малых заряженных тел действует на какое-либо одно малое заряженное тело, представляет собой *векторную* сумму сил Кулона, соответствующих действию каждого заряда в отдельности.

§ 2. Напряженность электрического поля

Хотя непосредственно измеряемой величиной является сила, целесообразно ввести понятие, несколько отличающееся от силы, а именно понятие о напряженности электрического поля, обусловленного совокупностью заряженных тел. Мы можем пока определить электрическое поле, или, точнее, напряженность электрического поля, как силу, действующую на единицу заряда, помещенного в данной точке пространства. Она является вектором, зависящем от координат, и обозначается через \mathbf{E} . Однако применять это определение следует с осторожностью. Напряженность электрического поля не всегда совпадает с силой, которая действует на шарик, заряженный единичным зарядом и внесенный в исследуемую точку пространства. Дело в том, что единичный заряд (скажем, заряд, получающийся после того, как сто раз провести кошачьей шкуркой по янтарной палочке) может оказаться столь большим, что он заметно изменит конфигурацию поля. Поэтому следует рассматривать предельный процесс, т. е. измерять отношение силы, действующей на малый пробный заряд, к величине заряда при все меньшей и меньшей величине заряда. При достаточно малой величине заряда величина этого отношения и направление силы становятся практически постоянными. Эти предельные значения величины отношения и его направления и определяют величину и направление напряженности электрического поля в рассматриваемой точке. Математически это соотношение запишется в виде

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{F} — сила, \mathbf{E} — напряженность электрического поля, q — заряд. В этом соотношении предполагается, что заряд q точечный, а сила и напряженность электрического поля вычисляются для точки, в которой расположен заряд.

Аналогично можно записать и закон Кулона. Если обозначить через \mathbf{F} силу, с которой на точечный заряд q_1 , расположенный в точке \mathbf{x}_1 , действует другой точечный заряд q_2 , расположенный в \mathbf{x}_2 , то закон Кулона запишется следующим образом:

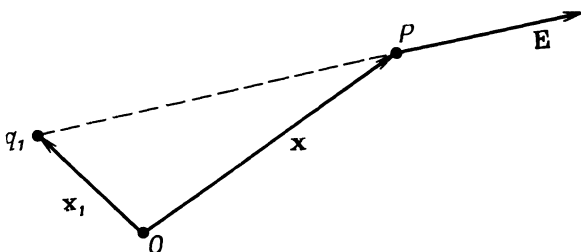
$$\mathbf{F} = kq_1q_2 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}. \quad (1.2)$$

Заметим, что q_1 и q_2 — алгебраические величины и могут быть как положительными, так и отрицательными. Множитель пропорциональности k зависит от используемой системы единиц.

Электрическое поле в точке \mathbf{x} , создаваемое точечным зарядом q_1 , расположенным в точке \mathbf{x}_1 (фиг. 1.1), равно

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = kq_1 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3}. \quad (1.3)$$

Постоянная k определяется выбранной единицей заряда. В электростатической системе единиц (СГСЭ) за единицу заряда принят заряд, который действует на равный ему заряд, находящийся на расстоянии 1 см, с силой 1 дин. Таким образом, в системе СГСЭ коэффициент k равен единице. В рационализованной системе



Ф и г. 1.1.

МКСА коэффициент k равен $1/4\pi\epsilon_0$, где $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ ф/м — проницаемость свободного пространства. Мы будем пользоваться системой единиц СГСЭ¹⁾.

Экспериментально установлено, что для сил, обусловленных различными зарядами, выполняется условие линейной суперпозиции; благодаря этому поле в точке \mathbf{x} , создаваемое системой точечных зарядов q_i , расположенных в точках \mathbf{x}_i ($i = 1, 2, \dots, n$), можно записать как векторную сумму

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}. \quad (1.4)$$

Если зарядов очень много и они весьма малы, то их можно описывать объемной плотностью заряда $\rho(\mathbf{x}')$; при этом $\Delta q = \rho(\mathbf{x}') \times \Delta x \Delta y \Delta z$ — заряд элементарного объема $\Delta x \Delta y \Delta z$ в точке \mathbf{x}' . В этом случае сумма (1.4) переходит в интеграл

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x', \quad (1.5)$$

где $d^3x' = dx' dy' dz'$ — трехмерный элемент объема в точке \mathbf{x}' .

Сейчас уместно ввести *дельта-функцию Дирака*. Одномерная дельта-функция, обозначаемая $\delta(x - a)$, представляет собой несобственную функцию²⁾, обладающую следующими свойствами:

$$1) \delta(x - a) = 0 \quad \text{для } x \neq a;$$

$$2) \int \delta(x - a) dx = \begin{cases} 1, & \text{если область интегрирования содержит точку } a, \\ 0, & \text{если область интегрирования не содержит точки } a. \end{cases}$$

¹⁾ Вопрос о системах единиц рассматривается в приложении.

²⁾ В математике функции типа δ -функции относятся к классу «обобщенных функций» (см. [124]).— Прим. ред.

Дельта-функции можно дать строгую интерпретацию, а именно рассматривать ее как предел, к которому стремится пикообразная кривая типа гауссовой, когда ее ширина уменьшается, а высота увеличивается, причем площадь, ограниченная кривой, остается постоянной. Строгое и всестороннее математическое рассмотрение δ -функций и действий с ними дано в теории распределений Шварца¹⁾.

Из приведенного определения следует, что для любой функции $f(x)$

$$3) \int f(x) \delta(x-a) dx = f(a),$$

$$4) \int f(x) \delta'(x-a) dx = -f'(a).$$

Здесь штрих означает производную по аргументу функции.

Дельта-функция, аргументом которой служит функция $f(x)$ от независимой переменной x , может быть преобразована по правилу

$$5) \delta[f(x)] = \frac{1}{\left| \frac{df}{dx} \right|} \delta(x-x_0),$$

где x_0 — значение x , для которого $f(x_0) = 0$. Это соотношение вытекает из равенства $\delta(f) df = \delta(x) dx$.

В случае нескольких измерений нужно просто взять произведение δ -функций от каждой координаты. Так, например, в трехмерном случае δ -функция равна

$$6) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) = \delta(x_1 - X_1) \delta(x_2 - X_2) \delta(x_3 - X_3).$$

Она равна нулю всюду, кроме точки $\mathbf{x} = \mathbf{X}$, и обладает тем свойством, что

$$7) \int_{\Delta V} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) d^3x = \begin{cases} 1, & \text{если объем } \Delta V \text{ содержит точку } \mathbf{x} = \mathbf{X}, \\ 0, & \text{если объем } \Delta V \text{ не содержит точки } \mathbf{x} = \mathbf{X}. \end{cases}$$

Заметим, что размерность δ -функции обратна размерности объема при любом числе измерений.

С помощью δ -функций дискретную совокупность точечных зарядов можно описать распределением плотности заряда.

Так, например, распределение

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (1.6)$$

¹⁾ Хорошее строгое описание δ -функций приведено в книге Лайтхилла [66]. (См. также прекрасную монографию [124].— Прим. ред.)

соответствует n точечным зарядам q_i , расположенным в точках x_i . Подставляя распределение плотности заряда (1.6) в (1.5) и интегрируя с учетом свойств δ -функций, мы приходим к выражению (1.4).

§ 3. Теорема Гаусса

Интегральное выражение (1.5) не очень удобно для расчета электрического поля. Существует другое интегральное соотношение, носящее название *теоремы Гаусса*, которое иногда значительно удобнее и которое, кроме того, позволяет найти дифференциальное уравнение для $\mathbf{E}(\mathbf{x})$. Чтобы получить теорему Гаусса, рассмотрим сначала отдельный точечный заряд q и *замкнутую* поверхность S (фиг. 1.2). Пусть r — расстояние от заряда до точки на поверхности S , \mathbf{n} — единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности S в этой точке, а da — элемент площади поверхности. Если создаваемое зарядом q электрическое поле \mathbf{E} в рассматриваемой точке поверхности образует угол θ с единичным вектором нормали \mathbf{n} , то произведение нормальной составляющей вектора \mathbf{E} на элемент площади равно

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = q \frac{\cos \theta}{r^2} da. \quad (1.7)$$

Поскольку вектор \mathbf{E} направлен по прямой, соединяющей заряд q с элементом поверхности da , то $\cos \theta da = r^2 d\Omega$, где $d\Omega$ — элемент телесного угла, под которым видна площадка da из точки нахождения заряда. Таким образом,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = q d\Omega \quad (1.8)$$

Если теперь проинтегрировать нормальную составляющую \mathbf{E} по всей поверхности, то легко видеть, что

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \begin{cases} 4\pi q, & \text{если } q \text{ внутри } S, \\ 0, & \text{если } q \text{ вне } S. \end{cases} \quad (1.9)$$

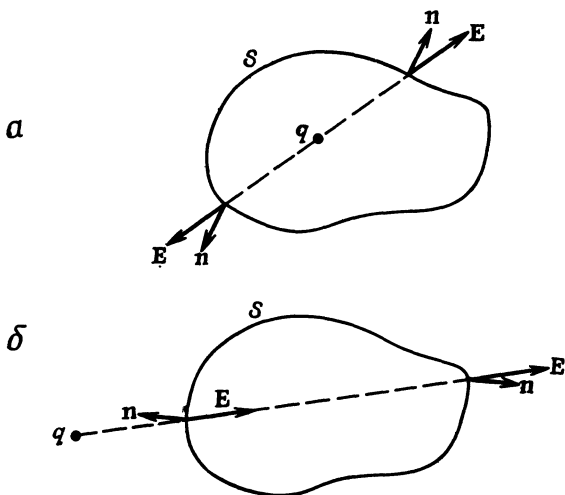
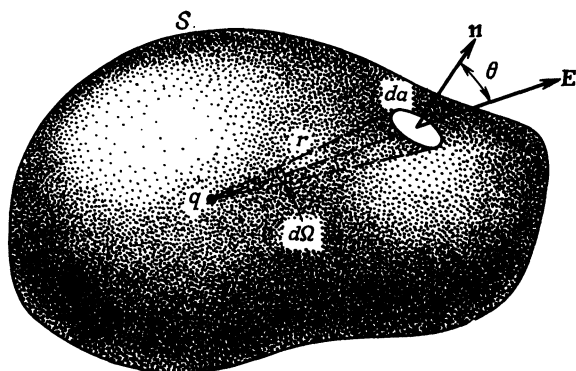
Это и есть теорема Гаусса для единичного точечного заряда. Очевидно, для системы дискретных точечных зарядов она запишется в виде

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = 4\pi \sum_i q_i, \quad (1.10)$$

где сумма берется лишь по тем зарядам, которые находятся *внутри* S . Для непрерывного распределения зарядов с плотностью $\varrho(\mathbf{x})$ теорема Гаусса имеет вид

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = 4\pi \int_V \varrho(\mathbf{x}) d^3x, \quad (1.11)$$

где V — объем, ограниченный поверхностью S .



Ф и г. 1.2. К выводу теоремы Гаусса.

Нормальная составляющая электрического поля интегрируется по замкнутой поверхности S . Если заряд находится внутри S (случай a), то E и n образуют всегда острый угол, если же заряд находится вне S (случай b), то угол между E и n иногда острый, а иногда тупой.

Уравнение (1.11) — одно из основных соотношений электростатики. Заметим, что его справедливость обусловлена следующими факторами:

- 1) обратной пропорциональностью силы взаимодействия зарядов квадрату расстояния между ними,
- 2) центральным характером сил взаимодействия,
- 3) линейной суперпозицией эффектов, обусловленных различными зарядами.

Очевидно, теорема Гаусса справедлива и для ньютоновских гравитационных сил, конечно, если плотность заряда заменить плотностью распределения материи.

Интересно заметить, что Кэвендиш еще до опытов Кулона, применив фактически непосредственно теорему Гаусса, поставил опыт с двумя концентрическими проводящими сферами и показал, что сила взаимодействия зарядов убывает обратно пропорционально r^n , где $n = 2,00 \pm 0,02$. Усовершенствовав технику эксперимента, Максвелл показал, что $n = 2,0 \pm 0,00005$ (см. книги Джинса [55] или Максвелла [73]).

§ 4. Дифференциальная форма теоремы Гаусса

Теорему Гаусса можно считать интегральной формулировкой закона электростатики. Применяя теорему Гаусса — Остроградского из векторного анализа, можно получить соответствующее дифференциальное соотношение, т. е. дифференциальное уравнение для поля. Теорема Гаусса — Остроградского («теорема о дивергенции») гласит, что для любого векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, определенного в объеме V , окруженном поверхностью S , справедливо следующее соотношение между объемным интегралом от дивергенции \mathbf{A} и поверхностным интегралом от составляющей \mathbf{A} по направлению внешней нормали к поверхности S :

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} d^3x.$$

По существу это соотношение может служить определением дивергенции (см., например, книгу Стрэттона¹ [106]).

Рассмотрим интегральную форму теоремы Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = 4\pi \int_V \rho(\mathbf{x}) d^3x.$$

Теорема о дивергенции позволяет записать его в виде

$$\int_V (\operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi\rho) d^3x = 0 \quad (1.12)$$

для любого объема V . Отсюда следует, что подынтегральное выражение равно нулю, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (1.13)$$

Это и есть дифференциальная форма теоремы Гаусса в электростатике. Это уравнение может само по себе применяться для решения электростатических задач. Однако часто оказывается проще иметь

дело не с векторной, а со скалярной функцией точки, а векторные величины в случае необходимости определять уже в конце решения по этой скалярной функции. Эту скалярную функцию мы рассмотрим ниже.

§ 5. Второе уравнение электростатики и скалярный потенциал

Одного уравнения (1.13) недостаточно для того, чтобы полностью определить три составляющие электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{x})$. Читателю, должно быть, известно, что векторное поле определено полностью, если во всем пространстве заданы его дивергенция и ротор. Таким образом, нам необходимо еще уравнение, определяющее ротор вектора \mathbf{E} в каждой точке. Это уравнение имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (1.14)$$

Оно вытекает непосредственно из общего выражения (1.5) для закона Кулона

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int \varrho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'.$$

Векторный множитель в подынтегральном выражении, рассматриваемый как функция от \mathbf{x} , равен взятому с обратным знаком градиенту от $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

Поскольку операция градиента относится к переменной \mathbf{x} , а не к переменной интегрирования \mathbf{x}' , ее можно вынести за знак интеграла. Таким образом, поле может быть записано в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad} \int \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (1.15)$$

Но ротор градиента *любой* скалярной функции равен нулю ($\operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = 0$ при любом ψ), так что из (1.15) сразу следует (1.14).

Заметим, что справедливость соотношения $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ обусловлена центральным характером сил взаимодействия зарядов и тем, что эти силы зависят лишь от расстояния между зарядами, но не связаны с законом обратных квадратов.

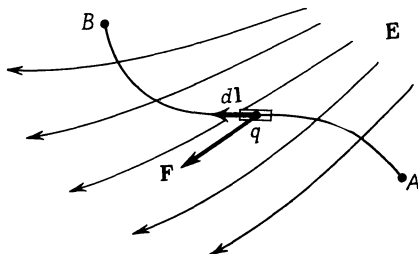
Соотношение (1.15) позволяет выразить с помощью операции градиента вектор электрического поля через скалярную функцию. Одной функцией пользоваться удобнее, чем тремя, поэтому введем *скалярный потенциал* $\Phi(\mathbf{x})$, определяемый соотношением

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi. \quad (1.16)$$

Тогда из (1.15) следует, что скалярный потенциал выражается через плотность распределения заряда следующим образом:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int \frac{q(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (1.17)$$

Здесь интегрирование производится по всему бесконечному пространству и величина Φ определяется с точностью до постоянной, которую можно добавить к правой части равенства (1.17).



Ф и г. 1.3.

Для пояснения физического смысла скалярного потенциала рассмотрим работу, совершаемую при перемещении пробного заряда q из точки A в точку B при наличии электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ (фиг. 1.3). Сила, с которой электрическое поле действует на заряд, в любой точке равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E},$$

так что работа по перемещению заряда из A в B равна

$$W = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.18)$$

Знак минус поставлен потому, что мы вычисляем работу, совершаемую при перемещении заряда против сил электрического поля. Согласно (1.16), эту работу можно записать в виде

$$W = q \int_A^B \text{grad } \Phi \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B d\Phi = q(\Phi_B - \Phi_A), \quad (1.19)$$

так что величину $q\Phi$ можно считать равной потенциальной энергии пробного заряда в электростатическом поле.

Из (1.18) и (1.19) следует, что линейный интеграл от электрического поля, взятый между двумя точками, не зависит от пути интегрирования и равен взятой с обратным знаком разности потенциалов

между этими точками:

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -(\Phi_B - \Phi_A). \quad (1.20)$$

Это следует, конечно, и непосредственно из определения (1.16). Если интегрирование производится по замкнутому пути, то линейный интеграл равен нулю

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (1.21)$$

что может быть непосредственно получено из закона Кулона. Согласно теореме Стокса, для векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ интеграл по замкнутому контуру C , ограничивающему незамкнутую поверхность S , равен

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da,$$

где $d\mathbf{l}$ — линейный элемент контура C , \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности S , а направление обхода контура C образует правовинтовую систему с направлением \mathbf{n} . По теореме Стокса можно из (1.21) вновь прийти к соотношению $\text{rot } \mathbf{E} = 0$.

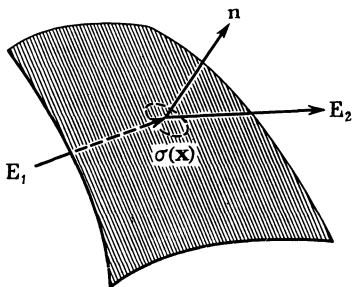
§ 6. Поверхностные распределения зарядов и диполей. Скачки электрического поля и потенциала

Одной из общих задач электростатики является определение электрического поля или потенциала для заданного поверхностного распределения зарядов. Теорема Гаусса (1.11) позволяет сразу написать некоторое частное соотношение для электрического поля. Если на поверхности S с единичной нормалью \mathbf{n} заряд распределен с поверхностной плотностью $\sigma(\mathbf{x})$, а электрическое поле по обе стороны поверхности равно соответственно \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 (фиг. 1.4), то, согласно теореме Гаусса,

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} = 4\pi\sigma. \quad (1.22)$$

Это соотношение еще не определяет самих полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 ; исключения составляют лишь те случаи, когда нет других источников поля, кроме поверхностных зарядов с плотностью $\sigma(\mathbf{x})$, а распределение $\sigma(\mathbf{x})$ имеет особо простой вид. Соотношение (1.22) показывает только, что при переходе с «внутренней» стороны поверхности, на которой расположен поверхностный заряд σ , на «внешнюю» сторону нормальная составляющая электрического поля испытывает скачок $4\pi\sigma$.

Используя соотношение (1.21) для линейного интеграла от \mathbf{E} по замкнутому контуру, можно показать, что тангенциальная составляющая электрического поля непрерывна при переходе через поверхность.



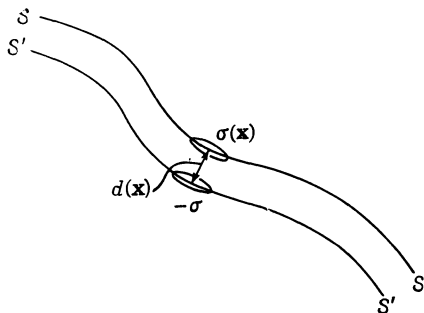
Ф и г. 1.4. Скачок нормальной составляющей электрического поля при пересечении поверхностного распределения зарядов.

Общее выражение для потенциала, создаваемого поверхностным распределением заряда в произвольной точке пространства (в том числе на самой поверхности S , на которой расположены заряды), можно найти из (1.17), заменяя ρd^3x на σda :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da'. \quad (1.23)$$

Выражение для электрического поля может быть получено отсюда дифференцированием.

Представляет интерес также задача о потенциале, создаваемом двойным слоем, т. е. распределением диполей по поверхности S .



Ф и г. 1.5. Предельный переход при образовании двойного слоя.

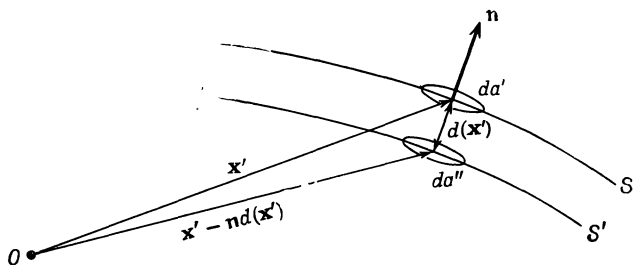
Двойной слой можно представить себе следующим образом: пусть на поверхности S заряд расположен с некоторой плотностью $\sigma(\mathbf{x})$, а на поверхности S' , близкой к S , поверхностная плотность в соответствующих (соседних) точках составляет $-\sigma$, т. е. равна по величине и противоположна по знаку (фиг. 1.5). Двойной слой, т. е. дипольное распределение с моментом единицы поверхности $D(\mathbf{x})$,

получится как предельный переход, при котором S' бесконечно близко приближается к S , а поверхностная плотность $\sigma(\mathbf{x})$ стремится к бесконечности так, что произведение $\sigma(\mathbf{x})$ на расстояние $d(\mathbf{x})$ между S и S' в соответствующей точке стремится к пределу

$$\lim_{d(\mathbf{x}) \rightarrow 0} \sigma(\mathbf{x}) d(\mathbf{x}) = D(\mathbf{x}). \quad (1.24)$$

Дипольный момент слоя перпендикулярен поверхности S и направлен от отрицательного заряда к положительному.

Чтобы найти потенциал, создаваемый двойным слоем, можно сначала рассмотреть отдельный диполь, а затем перейти к распределению диполей по поверхности. К тому же результату можно прийти, если исходить из потенциала (1.23) для поверхностного распределения заряда, а затем произвести описанный выше предельный переход. Первый способ расчета, пожалуй, проще, но зато второй является полезным упражнением в векторном анализе, так что мы предпочтем здесь именно второй.



Фиг. 1.6. Геометрия двойного слоя.

Пусть единичный вектор нормали \mathbf{n} направлен от S' к S (фиг. 1.6). Тогда потенциал, обусловленный двумя близкими поверхностями S и S' , равен

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da' - \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{x}'')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'' + \mathbf{n}d|} da''.$$

При малых d мы можем разложить выражение $|\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \mathbf{n}d|^{-1}$ в ряд. Рассмотрим общее выражение $|\mathbf{x} + \mathbf{a}|^{-1}$, в котором $|\mathbf{a}| \ll |\mathbf{x}|$. При этом

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}|} &\equiv \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{x^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{x} + \mathbf{a} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{x} \right) + \dots \end{aligned}$$

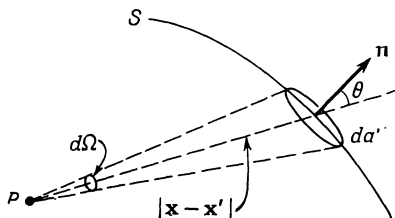
Очевидно, это просто разложение в ряд Тейлора в трехмерном случае. Таким образом, переходя к пределу (1.24), получаем для потенциала выражение

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_S D(\mathbf{x}') \mathbf{n} \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) da'. \quad (1.25)$$

Соотношение (1.25) может быть очень просто истолковано геометрически. Заметим, что

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) da' = -\frac{\cos \theta da'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} = -d\Omega,$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла, под которым из точки наблюдения виден элемент площади da' (фиг. 1.7). Величина $d\Omega$ положительна, если угол θ острый, т. е. из точки наблюдения видна



Ф и г. 1.7. К выводу потенциала двойного слоя.

Потенциал в точке P , создаваемый элементом площади da' двойного слоя с моментом единицы поверхности D , равен взятому с обратным знаком произведению момента D на телесный угол $d\Omega$, под которым виден элемент площади da' из точки P .

«внутренняя» сторона двойного слоя. Выражение для потенциала двойного слоя может быть записано в виде

$$\Phi(\mathbf{x}) = - \int_S D(\mathbf{x}') d\Omega. \quad (1.26)$$

Если поверхностная плотность дипольного момента D постоянна, то потенциал просто равен взятому с обратным знаком произведению дипольного момента на телесный угол, под которым из точки наблюдения видна вся поверхность независимо от ее формы.

При пересечении двойного слоя потенциал претерпевает скачок, равный поверхностной плотности дипольного момента, умноженной на 4π . В этом легко убедиться, если рассмотреть точку наблюдения, приближающуюся бесконечно близко к поверхности S с внутренней стороны. Тогда, согласно (1.26), потенциал на внутренней

стороне будет равен ¹⁾

$$\Phi_1 = -2\pi D,$$

так как почти весь телесный угол 2π опирается на малый участок поверхности S вблизи точки наблюдения. Аналогично если приближаться к поверхности S с внешней стороны, то потенциал становится равным

$$\Phi_2 = +2\pi D;$$

знак меняется на обратный из-за изменения знака телесного угла. Таким образом, скачок потенциала при пересечении двойного слоя равен

$$\Phi_2 - \Phi_1 = 4\pi D. \quad (1.27)$$

Это соотношение является аналогом формулы (1.22) для скачка нормальной составляющей электрического поля при пересечении «простого» слоя, т. е. поверхностного распределения заряда. Соотношение (1.27) можно физически интерпретировать как падение потенциала «внутри» двойного слоя. Это падение потенциала может быть вычислено (до перехода к пределу) как произведение напряженности поля между обоими слоями, несущими поверхностный заряд, на расстояние между ними.

§ 7. Уравнения Лапласа и Пуассона

В § 4 и 5 было показано, что электростатическое поле описывается двумя дифференциальными уравнениями:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.13)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (1.14)$$

Последнее уравнение эквивалентно утверждению о том, что \mathbf{E} является градиентом некоторой скалярной функции — скалярного потенциала Φ :

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi. \quad (1.16)$$

Уравнения (1.13) и (1.16) можно объединить в одно уравнение в частных производных для единственной функции $\Phi(\mathbf{x})$:

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho. \quad (1.28)$$

Это так называемое *уравнение Пуассона*. В тех областях пространства, где плотность заряда равна нулю, скалярный потенциал

¹⁾ Доказательство автора справедливо лишь для плоских двойных слоев, но сама формула (1.27) верна в общем случае произвольного двойного слоя. — *Прим. ред.*

удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (1.29)$$

Выше мы уже получили выражение (1.17) для скалярного потенциала

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (1.17)$$

Чтобы убедиться в том, что это выражение действительно удовлетворяет уравнению Пуассона (1.28), подействуем оператором Лапласа ∇^2 на обе части равенства (1.17):

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \int \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = \int \varrho(\mathbf{x}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x'. \quad (1.30)$$

Чтобы рассчитать $\nabla^2(1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$, перенесем начало координат в точку \mathbf{x}' (что вполне допустимо); тогда это выражение сведется к $\nabla^2(1/r)$, где r — абсолютная величина \mathbf{x} . Непосредственный расчет показывает, что $\nabla^2(1/r) = 0$ при $r \neq 0$:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left(r \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (1) = 0.$$

Однако при $r = 0$ это выражение остается неопределенным. Поэтому необходимо прибегнуть к предельному переходу. Поскольку мы можем предполагать, что $\nabla^2(1/r)$ ведет себя подобно δ -функции, проинтегрируем это выражение по небольшому объему V , содержащему начало координат. Применяя теорему о дивергенции, мы можем преобразовать этот интеграл к поверхностному

$$\begin{aligned} \int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d^3x &\equiv \int_V \operatorname{div} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) d^3x = \\ &= \int_S \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) da = \int_S \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) r^2 d\Omega = -4\pi. \end{aligned}$$

Таким образом, $\nabla^2(1/r) = 0$ при $r \neq 0$, а объемный интеграл от $\nabla^2(1/r)$ равен -4π . Следовательно, мы можем положить, что $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\mathbf{x})$, или в более общем случае

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (1.31)$$

Установив таким образом значение лапласиана от $1/r$, мы можем закончить доказательство того, что (1.17) удовлетворяет уравнению Пуассона. Действительно, согласно (1.30),

$$\nabla^2 \Phi = \int \varrho(\mathbf{x}') [-4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] d^3x' = -4\pi\varrho(\mathbf{x}),$$

что и требовалось доказать.

§ 8. Теорема Грина

Если бы в электростатических задачах мы всегда имели дело с дискретным или непрерывным распределением заряда без всяких граничных поверхностей, то общее решение (1.17) было бы самой удобной и непосредственной формой решения таких задач и не нужны были бы ни уравнение Лапласа, ни уравнение Пуассона. Однако в действительности в целом ряде, если не в большинстве, задач электростатики мы имеем дело с конечными областями пространства (содержащими или не содержащими заряд), на граничных поверхностях которых заданы определенные граничные («краевые») условия. Эти граничные условия могут быть заменены некоторым соответственно подобранным распределением зарядов вне рассматриваемой области (в частности, в бесконечности), однако соотношение (1.17) в этом случае уже непригодно для расчета потенциала, за исключением некоторых частных случаев (например, в методе изображений).

Для рассмотрения задач с граничными условиями необходимо расширить используемый нами математический аппарат, а именно вывести так называемые *формулы*, или *теоремы Грина* (1824 г.). Они получаются непосредственно из теоремы о дивергенции

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} d^3x = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} da,$$

которая справедлива для любого векторного поля \mathbf{A} , определенного в объеме V , ограниченном замкнутой поверхностью S . Пусть $\mathbf{A} = \varphi \operatorname{grad} \psi$, где φ и ψ — произвольные скалярные функции. Тогда

$$\operatorname{div} (\varphi \operatorname{grad} \psi) = \varphi \nabla^2 \psi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi \quad (1.32)$$

и

$$\varphi \operatorname{grad} \psi \cdot \mathbf{n} = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad (1.33)$$

где $\partial/\partial n$ — нормальная производная на поверхности S (по направлению внешней нормали по отношению к объему V). Подставляя (1.32) и (1.33) в теорему о дивергенции, мы приходим к *первой формуле Грина*

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi) d^3x = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} da. \quad (1.34)$$

Напишем такую же формулу, поменяв в ней местами φ и ψ , и вычтем ее из (1.34). Тогда члены с произведением $\operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi$ сократятся и мы получим *вторую формулу Грина*, называемую

иначе теоремой Грина:

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) d^3x = \oint_S \left[\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] da. \quad (1.35)$$

С помощью теоремы Грина можно представить дифференциальное уравнение Пуассона в виде интегрального уравнения. Для этого рассмотрим какой-либо определенный вид функции ψ , например положим ее равной $1/R \equiv 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, где \mathbf{x} — точка наблюдения, а \mathbf{x}' — переменная интегрирования. Далее функцию φ положим равной скалярному потенциалу Φ , который, как мы видели, удовлетворяет уравнению Пуассона $\nabla^2 \Phi = -4\pi \varrho$. Согласно (1.31), $\nabla^2(1/R) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, так что (1.35) дает

$$\begin{aligned} \int_V \left[-4\pi \Phi(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \frac{4\pi}{R} \varrho(\mathbf{x}') \right] d^3x' = \\ = \oint_S \left[\Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right] da'. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для точки \mathbf{x} , находящейся внутри объема V

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{R} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) \right] da'. \quad (1.36)$$

Для точки \mathbf{x} , находящейся вне поверхности S , правая часть соотношения (1.36) равна нулю. Заметим, что это согласуется с интерпретацией поверхностного интеграла как потенциала простого слоя зарядов с плотностью $\sigma = (1/4\pi) (\partial \Phi / \partial n')$ и двойного (дипольного) слоя с плотностью момента $D = -(1/4\pi) \Phi$. Скачки электрического поля и потенциала (1.22) и (1.27) на граничной поверхности как раз обеспечивают равенство нулю потенциала и поля вне объема V .

По поводу формулы (1.36) следует сделать два замечания. Во-первых, если поверхность S удаляется в бесконечность и электрическое поле убывает на ней быстрее, чем R^{-1} , то поверхностный интеграл обращается в нуль и (1.36) переходит в известное выражение (1.17). Во-вторых, для объема, не содержащего зарядов, потенциал в любой точке внутри объема (дающий решение уравнения Лапласа), согласно (1.36), выражается только через значение потенциала и его нормальной производной на поверхности, ограничивающей объем. Этот довольно неожиданный результат не является, однако, решением граничной задачи, а представляет собой лишь интегральное уравнение, поставив Φ , и $\partial \Phi / \partial n$ (*граничные условия Коши*), мы переопределили задачу. Мы обсудим этот вопрос более подробно в следующих параграфах, в которых будут рассмотрены методы нахождения решений с помощью теоремы Грина (1.35) при соответствующих граничных условиях.

§ 9. Единственность решения при граничных условиях Дирихле или Неймана

Представляет интерес вопрос о том, при каких граничных условиях внутри ограниченного объема существует единственное и физически разумное решение задачи Пуассона (или Лапласа). На основе данных физического опыта можно полагать, что задание потенциала на замкнутой поверхности единственным образом определяет распределение потенциалов (примером может служить система проводников, на которых поддерживаются различные потенциалы). Это так называемая *задача Дирихле*, или *граничные условия Дирихле*. Аналогично можно ожидать, что задание электрического поля (т. е. нормальной производной от потенциала) на граничной поверхности (что соответствует заданию распределения поверхностного заряда) также однозначно определяет решение. Такие граничные условия носят название *граничных условий Неймана*. Докажем теперь справедливость этих предположений с помощью первой формулы Грина (1.34).

Нам нужно доказать единственность решения уравнения Пуассона $\nabla^2\Phi = -4\pi\rho$ в объеме V при граничных условиях Дирихле или Неймана на поверхности S , ограничивающей этот объем. Предположим, наоборот, что существуют два решения Φ_1 и Φ_2 , удовлетворяющие одним и тем же граничным условиям, и положим

$$U = \Phi_2 - \Phi_1. \quad (1.37)$$

Тогда $\nabla^2 U = 0$ внутри V и $U = 0$ или $\partial U/\partial n = 0$ на границе S объема V соответственно для граничных условий Дирихле или Неймана. Полагая $\phi = \psi = U$, из первой формулы Грина (1.34) получаем

$$\int_V (U\nabla^2 U + \text{grad } U \cdot \text{grad } U) d^3x = \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n} da. \quad (1.38)$$

Учитывая свойства функции U , мы приходим для обоих граничных условий к соотношению

$$\int_V |\text{grad } U|^2 d^3x = 0,$$

откуда следует, что $\text{grad } U = 0$. Таким образом, внутри объема V функция U постоянна. Для граничных условий Дирихле $U = 0$ на границе S , так что внутри V всюду $\Phi_1 = \Phi_2$ и решение единственно. Для граничных условий Неймана решение также единственно с точностью до несущественной аддитивной постоянной.

Из вида правой части соотношения (1.38) следует, что и смешанная граничная задача, когда на части граничной поверхности

задано условие Дирихле, а на остальной поверхности — условие Неймана, также имеет единственное решение.

Из сказанного следует, что уравнение Пуассона, вообще говоря, не имеет решения, принимающего заданные значения Φ и $\partial\Phi/\partial n$ на ограничивающей поверхности (граничные условия Коши), так как уже условия Дирихле или Неймана, взятые в отдельности, определяют единственным образом решение, и эти решения в общем

Вид граничного условия	Тип уравнения		
	эллиптический (уравнение Пуассона)	гиперболический (волновое уравнение)	параболический (уравнение теплопроводности)
<i>Условие Дирихле</i> на незамкнутой поверхности	Недостаточно	Недостаточно	Единственное устойчивое решение в одном направлении
на замкнутой поверхности	Единственное устойчивое решение	Избыточные условия	Избыточные условия
<i>Условие Неймана</i> на незамкнутой поверхности	Недостаточно	Недостаточно	Единственное устойчивое решение в одном направлении
на замкнутой поверхности	Единственное устойчивое решение в общем случае	Избыточные условия	Избыточные условия
<i>Условие Коши</i> на незамкнутой поверхности	Решение не имеет физического смысла	Единственное устойчивое решение	Избыточные условия
на замкнутой поверхности	Избыточные условия	Избыточные условия	Избыточные условия

Примечание. Устойчивым называется решение, которое при небольшом изменении граничных условий меняется заметным образом лишь в окрестности границы.

случае не совпадают. Вопрос о том, определяют ли граничные условия Коши на *незамкнутой* поверхности единственным образом решение электростатической задачи, требует более детального рассмотрения, выходящего за рамки настоящей книги. Читатель может найти детальное изложение этих вопросов в работах Морса и Фешбаха [77] или Зоммерфельда [103]. Морс и Фешбах заменяют уравнение в частных производных соответствующим уравнением в конечных разностях, которое затем решают методом итерации. Зоммерфельд же главным образом пользуется методом характеристик. Результаты исследований достаточности различных граничных условий сведены в таблице на стр. 31 (основанной на таблице, приведенной в книге Морса и Фешбаха [77]); в нее включены различные типы дифференциальных уравнений в частных производных и различные виды граничных условий.

Из таблицы следует, что электростатические задачи имеют однозначное решение лишь при задании граничных условий Дирихле и Неймана на замкнутой поверхности (которая частично или вся целиком может, конечно, находиться в бесконечности).

§ 10. Формальное решение граничных задач электростатики с помощью функции Грина

Решение уравнений Пуассона или Лапласа в конечном объеме V , если на ограничивающей поверхности S заданы граничные условия Дирихле или Неймана, можно получить с помощью теоремы Грина (1.35) и так называемых функций Грина.

При выводе соотношения (1.36) (которое не является решением граничной задачи) мы полагали функцию ψ равной $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, т. е. равной потенциалу единичного точечного заряда, удовлетворяющему уравнению

$$\nabla'^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (1.31)$$

Функция $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ — лишь одна из множества функций, зависящих от \mathbf{x} и \mathbf{x}' и удовлетворяющих (1.31) (так называемых *функций Грина*). В общем случае

$$\nabla'^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (1.39)$$

где

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (1.40)$$

Здесь F удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla'^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad (1.41)$$

внутри объема V .

При отыскании решения уравнения Пуассона, принимающего заданное значение Φ или $\partial\Phi/\partial n$ на границе, мы можем исходить из уравнения (1.36). Как мы уже указывали, это соотношение не является решением, удовлетворяющим корректным граничным условиям, поскольку в поверхностный интеграл входят и Φ , и $\partial\Phi/\partial n$. В лучшем случае это всего лишь интегральное уравнение для Φ . Однако, если исходить из общего понятия функции Грина и воспользоваться свободой в определении этой функции [поскольку функция $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ не определена однозначно], можно в теореме Грина принять функцию ψ равной $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ и выбрать $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ так, чтобы один из двух поверхностных интегралов в формуле Грина обращался в нуль. Тогда формула Грина будет содержать лишь граничные условия Дирихле и Неймана. Конечно, если бы вид необходимой функции $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ очень сложно зависел от граничных условий, то этот метод нельзя было бы считать общим. Однако мы сейчас покажем, что это не так: $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ удовлетворяет довольно простым граничным условиям на S .

Исходя из теоремы Грина (1.35), полагая $\varphi = \Phi$ и $\psi = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ и учитывая соотношение (1.39) для функции Грина, мы придем к соотношению

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_V \varrho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right] da', \quad (1.42)$$

являющемуся обобщением (1.36). Пользуясь свободой в определении функции Грина, мы можем оставить в поверхностном интеграле лишь желательные граничные значения. Так, при задании *граничных условий Дирихле* мы потребуем, чтобы выполнялось условие

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad \text{для } \mathbf{x}' \text{ на } S. \quad (1.43)$$

Тогда первый член в поверхностном интеграле в (1.42) обратится в нуль и мы получим решение

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_V \varrho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_D}{\partial n'} da'. \quad (1.44)$$

Если заданы *граничные условия Неймана*, то мы должны быть более осторожны. На первый взгляд может показаться, что условие, налагаемое на функцию Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, должно иметь вид

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad \text{для } \mathbf{x}' \text{ на } S,$$

поскольку при этом второй член в поверхностном интеграле в (1.42) обращается в нуль. Однако, применяя теорему Гаусса к (1.39), можно убедиться, что

$$\oint_S \frac{\partial G}{\partial n'} da' = -4\pi.$$

Поэтому простейшее допустимое граничное условие для G_N имеет вид

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{4\pi}{S} \quad \text{для } \mathbf{x}' \text{ на } S, \quad (1.45)$$

где S — полная площадь граничной поверхности. Тогда решение запишется следующим образом:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \langle \Phi \rangle_S + \int_V \rho(\mathbf{x}') G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial \Phi}{\partial n'} G_N da', \quad (1.46)$$

где $\langle \Phi \rangle_S$ — среднее значение потенциала на поверхности S .

Обычно задача Неймана представляет собой так называемую «внешнюю задачу», когда объем V ограничен двумя поверхностями, одна из которых замкнута и конечна, а вторая находится в бесконечности. В этом случае площадь поверхности S бесконечна, граничное условие (1.45) становится однородным и среднее значение $\langle \Phi \rangle_S$ обращается в нуль.

Заметим, что функции Грина удовлетворяют простым граничным условиям (1.43) или (1.45), не зависящим от граничных условий Дирихле (или Неймана). Тем не менее отыскание функции $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ представляет собой подчас весьма сложную, а иногда и невыполнимую задачу из-за зависимости этой функции от формы поверхности S . С задачами подобного рода мы встретимся в гл. 2 и 3.

Функции Грина, удовлетворяющие граничным условиям (1.43) или (1.45), обладают свойством симметрии $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G(\mathbf{x}', \mathbf{x})$; это можно доказать, пользуясь теоремой Грина и полагая $\varphi = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\psi = G(\mathbf{x}', \mathbf{y})$, где \mathbf{y} — переменная интегрирования. Поскольку функция Грина, если рассматривать ее как функцию одной из переменных, описывает потенциал единичного точечного заряда, свойство симметрии отражает физический факт возможности перестановки источника и точки наблюдения. Из соотношения (1.40) для $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ следует, что $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ также является симметричной функцией аргументов.

В заключение сделаем важное замечание относительно физического смысла функции $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Эта функция представляет собой решение уравнения Лапласа внутри области V и, следовательно, описывает потенциал системы зарядов, расположенных вне объема V . Функцию $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ можно представлять себе как потенциал

такого внешнего распределения зарядов, которое в сочетании с точечным единичным зарядом, находящимся в точке x' , удовлетворяет на поверхности S однородному граничному условию равенства нулю потенциала (или его нормальной производной). Поскольку потенциал в точке x на поверхности S , создаваемый точечным зарядом, зависит от положения x' этого заряда, потенциал внешнего распределения зарядов $F(x, x')$ также должен зависеть от «параметра» x' . С этой точки зрения метод изображений, который мы будем рассматривать ниже, в гл. 2, физически эквивалентен некоторому способу определения соответствующей функции $F(x, x')$, удовлетворяющей граничным условиям (1.43) или (1.45). Для граничных условий Дирихле на поверхности проводников функцию $F(x, x')$ можно также интерпретировать как потенциал, создаваемый поверхностным распределением зарядов, индуцируемым на проводниках единичным зарядом, находящимся в точке x' .

§ 11. Потенциальная энергия и плотность энергии электростатического поля

В § 5 было показано, что произведение скалярного потенциала на величину точечного заряда можно интерпретировать как потенциальную энергию этого заряда. Более точно, если точечный заряд q_i внести из бесконечности в точку x_i , находящуюся в области, где имеется электрическое поле, описываемое скалярным потенциалом Φ (обращающимся в нуль на бесконечности), то работа, совершаемая при перемещении заряда (а следовательно, и потенциальная энергия заряда), равна

$$W_i = q_i \Phi(x_i). \quad (1.47)$$

Считая, что потенциал Φ создается системой $(n - 1)$ зарядов q_j ($j = 1, 2, \dots, n - 1$), находящихся в точках x_j , получаем

$$\Phi(x_i) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|x_i - x_j|}, \quad (1.48)$$

так что потенциальная энергия заряда q_i равна

$$W_i = q_i \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|x_i - x_j|}. \quad (1.49)$$

Очевидно, *полная* потенциальная энергия всей системы зарядов, обусловленная силами их взаимодействия, равна

$$W = \sum_{i=1}^n \sum_{j<i}^n \frac{q_i q_j}{|x_i - x_j|}, \quad (1.50)$$

в чем можно убедиться последовательным добавлением по одному заряду к системе. Это выражение можно записать в более симметричной форме, сняв ограничение $j < i$ при суммировании и поделив сумму на 2:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}; \quad (1.51)$$

при этом подразумевается, что члены с $i = j$ в двойной сумме (соответствующие бесконечной «собственной» энергии точечных зарядов) опускаются.

Для непрерывного распределения зарядов потенциальная энергия принимает вид

$$W = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x d^3x'. \quad (1.52)$$

Это выражение можно считать справедливым и в общем случае, если воспользоваться δ -функцией Дирака (1.6) ¹⁾. Другое выражение, эквивалентное (1.52), можно получить, если учесть, что внутренний интеграл в (1.52) как раз равен скалярному потенциалу (1.17). Следовательно, мы можем написать

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d^3x. \quad (1.53)$$

В выражениях (1.51) — (1.53) электростатическая потенциальная энергия представлена как функция положения зарядов; это подчеркивает, что взаимодействие зарядов описывается законом Кулона. Возможен иной подход, при котором энергия выражается через электрическое поле; тем самым подчеркивается идея о локализации энергии в пространстве, окружающем заряды. Чтобы получить такое выражение для энергии, исключим с помощью уравнения Пуассона плотность зарядов из (1.53)

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int \Phi \nabla^2 \Phi d^3x.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$W = \frac{1}{8\pi} \int |\text{grad } \Phi|^2 d^3x = \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{E}|^2 d^3x, \quad (1.54)$$

где интегрирование производится по всему пространству. В (1.54) распределение зарядов явно не входит; энергия выражается через интеграл от квадрата электрического поля по всему пространству.

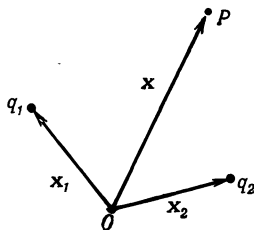
¹⁾ Выражение (1.52) в применении к δ -распределениям дает бесконечные слагаемые, соответствующие «собственной» энергии точечных зарядов, так что, строго говоря, для δ -распределений интеграл (1.52) расходится. При определении взаимной энергии системы зарядов эти бесконечные слагаемые следует опускать, что соответствует опущению членов с $i = j$ в (1.51). — *Прим. ред.*

Поэтому естественно отождествить подынтегральное выражение с плотностью энергии

$$\omega = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{E}|^2. \quad (1.55)$$

Это выражение для плотности энергии согласуется с интуитивным представлением о том, что в областях с большим полем энергия «должна» быть больше.

Выражение (1.55) для плотности энергии может показаться странным в одном отношении. Оно всегда положительно определено, так что и объемный интеграл (1.54) всегда будет неотрицателен.



Ф и г. 1.8.

Это, казалось бы, противоречит тому факту, что, согласно (1.51), потенциальная энергия системы двух зарядов противоположного знака отрицательна. Причина этого кажущегося противоречия заключается в том, что выражения (1.54) и (1.55) включают и «собственную» энергию зарядов, тогда как (1.51) не включает ее. Рассмотрим, например, два точечных заряда q_1 и q_2 , находящихся в точках \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 (фиг. 1.8). Электрическое поле в точке P с радиусом-вектором \mathbf{x} равно

$$\mathbf{E} = \frac{q_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} + \frac{q_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3},$$

так что плотность энергии составляет

$$\omega = \frac{q_1^2}{8\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^4} + \frac{q_2^2}{8\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^4} + \frac{q_1q_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3}. \quad (1.56)$$

Два первых слагаемых соответствуют, очевидно, собственной энергии зарядов q_1 и q_2 . Чтобы убедиться, что третье слагаемое дает правильное выражение для потенциальной энергии взаимодействия, проинтегрируем его по всему пространству:

$$W_{\text{взаим}} = \frac{q_1q_2}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3} d^3x. \quad (1.57)$$

Переходя к переменной $\mathbf{q} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)/|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$, получаем

$$W_{\text{взаим}} = \frac{q_1q_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{n})}{q^3|\mathbf{q} + \mathbf{n}|^3} d^3q, \quad (1.58)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Непосредственным интегрированием можно убедиться, что входящий в последнее выражение безразмерный интеграл равен 4π , так что мы получаем ожидаемое выражение для энергии взаимодействия.

Силы взаимодействия заряженных тел можно найти, определив изменение полной электростатической энергии системы при малых виртуальных перемещениях. Несколько примеров такого рода расчетов приведено ниже (см. задачи к гл. 1). При этом энергию нужно представить в таком виде, чтобы было видно, какие члены меняются при изменении конфигурации и какие остаются постоянными.

В качестве простейшего примера рассчитаем силу, действующую на единицу поверхности проводника с поверхностной плотностью заряда $\sigma(\mathbf{x})$. Вблизи поверхности проводника плотность энергии

$$\omega = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{E}|^2 = 2\pi\sigma^2. \quad (1.59)$$

Пусть теперь элемент поверхности проводника Δa смещается на величину Δx наружу. Тогда электростатическая энергия уменьшается на величину, равную произведению плотности энергии ω на исключаемый объем $\Delta x \Delta a$:

$$\Delta W = -2\pi\sigma^2 \Delta a \Delta x. \quad (1.60)$$

Это означает, что на единичную площадку на поверхности проводника действует сила, равная $2\pi\sigma^2 = \omega$, направленная из проводника наружу. Обычно это выражение для силы находят как произведение поверхностной плотности заряда σ на электрическое поле, причем при нахождении последнего следует исключить поле, создаваемое самим рассматриваемым элементом поверхности.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

В книге Лайтхилла [66] с математической точки зрения просто и достаточно строго рассмотрены δ -функции.

Различные типы дифференциальных уравнений в частных производных и соответствующие граничные условия рассмотрены в книгах Морса и Фешбаха [77], гл. 6, Зоммерфельда [103], гл. 2, и Куранта и Гильберта [32], гл. 3—6.

Общая теория функций Грина подробно изложена в книгах Фридмана [42], гл. 3, и Морса и Фешбаха [77], гл. 7.

Общие вопросы электростатики рассмотрены во многих старых руководствах по электростатике, из которых, несмотря на устаревшие обозначения, стоит упомянуть монографии Максвелла [73], т. 1, гл. 2 и 4, и Джинса [55], гл. 2, 6, 7. Из более поздних работ упомянем обширную монографию Стрэттона [106], гл. 3, и отдельные части из гл. 2.

Дополнение редактора. Общая математическая теория обобщенных функций, частным случаем которых является δ -функция, изложена в монографии Гельфанда и Шилова [124]. Краткое изложение свойств δ -функций

и их применения можно найти в книге Иваненко и Соколова [53]. Прекрасное изложение физических основ электростатики дано в учебнике Тамма [130].

ЗАДАЧИ

1.1. С помощью теоремы Гаусса доказать следующие утверждения:

а) Любой заряд, вносимый на проводник, может располагаться лишь на его поверхности. (По определению, в проводнике заряды могут свободно перемещаться под действием электрического поля.)

б) Замкнутый полый проводник экранирует внутренний объем от действия зарядов, расположенных снаружи, но не экранирует внешнего объема от действия зарядов, расположенных внутри.

в) Электрическое поле на поверхности проводника всегда нормально этой поверхности и равно $4\pi\sigma$, где σ — поверхностная плотность заряда.

1.2. Две бесконечные проводящие плоские пластины постоянной толщины t_1 и t_2 помещены параллельно друг другу на расстоянии L (между соседними поверхностями). Полный заряд на единицу площади (т. е. сумма зарядов на обеих сторонах пластины) равен q_1 для первой пластины и q_2 для второй. Используя симметрию задачи¹⁾ и теорему Гаусса, показать, что

а) поверхностные плотности зарядов на внутренних поверхностях пластин равны между собой по величине и противоположны по знаку;

б) поверхностные плотности на внешних поверхностях пластин одинаковы;

в) значения плотностей зарядов и обуславливаемых ими полей не зависят от t_1 , t_2 и L . Найти явное выражение поверхностных плотностей и полей через q_1 и q_2 и рассмотреть частный случай $q_1 = -q_2 = Q$.

1.3. Даны три заряженные сферы радиусом a . Одна из них проводящая, другая однородно заряжена по всему объему, а на третьей заряд распределен сферически симметрично, причем плотность заряда меняется как r^n ($n > -3$). Полный заряд каждой сферы равен Q . Пользуясь теоремой Гаусса, найти электрическое поле внутри и вне каждой сферы. Построить графики зависимости поля от радиуса для первых двух случаев и для третьего случая при $n = -2$ и $n = +2$.

1.4. Усредненное (по времени) значение потенциала для нейтрального атома водорода описывается формулой

$$\Phi = e \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2} \right),$$

где e — заряд электрона, а $\alpha^{-1} = a_0/2$ (2). Найти распределение зарядов (непрерывное и дискретное), обеспечивающее такой вид потенциала, и пояснить его физический смысл.

1.5. Простейший конденсатор представляет собой два рядом расположенных изолированных проводника. Если на проводники поместить равные, но противоположные по знаку заряды, то между ними устанавливается определенная разность потенциалов. Отношение величины заряда на одном из проводников к величине разности потенциалов называется емкостью конденсатора (в электростатической системе единиц емкость измеряется в сантиметрах). Используя теорему Гаусса, рассчитать емкость для случаев, когда имеются следующие системы проводников:

¹⁾ В этом примере в условия симметрии следует включить и условия одинаковости полей вдали от пластин (во внешних областях).— *Прим. ред.*

²⁾ Здесь a_0 — так называемый радиус электрона, равный e^2/mc^2 (e — заряд, m — масса электрона, c — скорость света).— *Прим. ред.*

- а) две большие плоские пластины площадью A на небольшом расстоянии d друг от друга;
 б) две концентрические проводящие сферы радиусами a и b ($b > a$);
 в) два концентрических проводящих цилиндра, длина которых L много больше их радиусов a и b ($b > a$).

1.6. Два длинных цилиндрических проводника радиусами a_1 и a_2 расположены параллельно друг другу на расстоянии d , которое много больше их радиуса. Показать, что емкость единицы длины приблизительно равна

$$C \approx \left(4 \ln \frac{d}{a} \right)^{-1},$$

где a — среднее геометрическое обоих радиусов.

Какого диаметра проволока потребуется для двухпроводной линии передачи с погонной емкостью $0,1$ пф/см, если расстояние между проводами равно $0,5$ см? $1,5$ см? $5,0$ см?

1.7. а) Для трех вариантов конденсатора, рассмотренных в задаче 1.5, рассчитать полную электростатическую энергию и выразить ее через заряды (Q и $-Q$) на проводниках и через разность потенциалов между ними.

б) Построить графики зависимости плотности энергии от соответствующей линейной координаты для всех трех случаев.

1.8. Рассчитать силу притяжения проводников в плоском конденсаторе (задача 1.5, п. «а») и цилиндрическом конденсаторе (задача 1.6) в случае:

а) заданных зарядов на обкладках конденсатора,

б) заданной разности потенциалов между обкладками.

1.9. Доказать теорему о среднем значении: значение электростатического потенциала в любой точке объема, не содержащего зарядов, равно среднему значению потенциала на поверхности любой сферы с центром в этой точке.

1.10. С помощью теоремы Гаусса доказать, что на искривленной поверхности заряженного проводника нормальная производная электрического поля удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial n} = - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности.

1.11. Доказать теорему взаимности Грина: если Φ — потенциал, обусловленный объемным распределением заряда ρ и поверхностным распределением σ , а Φ' — потенциал, обусловленный другим объемным распределением ρ' и поверхностным распределением σ' , то справедливо соотношение

$$\int_V \rho \Phi' d^3x + \int_S \sigma \Phi' da = \int_V \rho' \Phi d^3x + \int_S \sigma' \Phi da.$$

1.12. Доказать теорему Томсона: при фиксированном положении проводящих поверхностей и заданном полном заряде на каждой поверхности электростатическая энергия поля в области, ограниченной этими поверхностями, минимальна для такого расположения зарядов, при котором каждая поверхность является эквипотенциальной.

1.13. Доказать следующую теорему: при фиксированном положении проводящих поверхностей и заданном полном заряде на каждой из них внесение незаряженного изолированного проводника в область, ограниченную этими поверхностями, снижает электростатическую энергию системы.

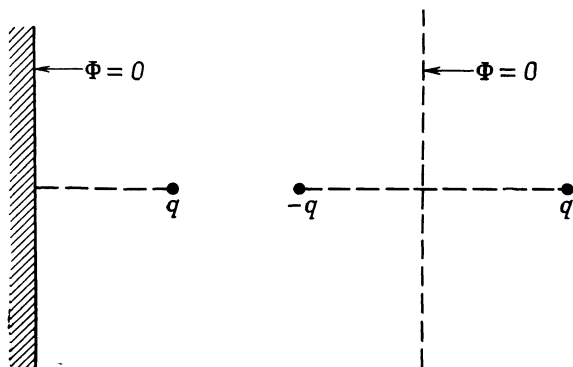
ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ. I

Во многих задачах электростатики рассматриваются граничные поверхности, на которых задан потенциал или плотность поверхностного заряда. В гл. 1, § 10, дано формальное решение задач такого типа с помощью функций Грина. В практически встречающихся случаях (даже при весьма сильной идеализации) определение соответствующей функции Грина подчас весьма затруднительно. В связи с этим был разработан ряд других методов решения граничных задач, причем некоторые из них довольно далеки от метода функций Грина. В этой главе мы познакомимся с двумя такими методами: 1) методом изображений, весьма тесно связанным с методом функций Грина, и 2) методом разложения по ортогональным функциям, в котором используется само дифференциальное уравнение, а непосредственное построение функции Грина не производится. Другие методы решения электростатических задач, как, например, метод конформных преобразований в двумерных задачах, рассматриваться не будут. Читатели, интересующиеся методом конформных преобразований, могут познакомиться с ним по литературе, приводимой в конце главы.

§ 1. Метод изображений

Метод изображений применим в тех задачах, где нужно найти поле одного или нескольких точечных зарядов при наличии граничных поверхностей, например заземленных или поддерживаемых при постоянных потенциалах проводников. При определенных условиях можно подобрать такую систему зарядов, имеющих надлежащую величину и надлежащим образом расположенных вне интересующей нас области, что действие этих зарядов обеспечивает требуемые граничные условия. Эти заряды называются *зарядами-изображениями*, а замена истинной задачи с граничными условиями

на эквивалентную задачу определения поля в расширенной области без граничных условий, но с учетом зарядов-изображений называется *методом изображений*. Заряды-изображения должны находиться вне интересующего нас объема, поскольку потенциал создаваемого ими поля должен удовлетворять уравнению Лапласа



Ф и г. 2.1. К решению задачи методом изображений.

Слева — исходная задача, справа — эквивалентная задача, полученная методом изображений.

в этом объеме; частное же решение уравнения Пуассона дается суммой потенциалов, соответствующих реальным зарядам, находящимся внутри объема.

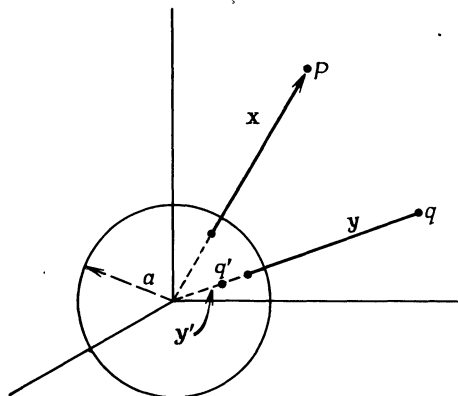
В качестве простейшего примера рассмотрим точечный заряд, расположенный у бесконечной проводящей плоскости, имеющей нулевой потенциал (фиг. 2.1). Очевидно, эта задача эквивалентна задаче об определении потенциала системы двух зарядов — первоначального заряда и равного ему по величине, но противоположного по знаку заряда, расположенного зеркально симметрично первому относительно поверхности проводника.

§ 2. Точечный заряд вблизи заземленного сферического проводника

Для иллюстрации метода изображений рассмотрим задачу о поле точечного заряда q , расположенного в точке y вблизи сферического заземленного ¹⁾ проводника радиусом a с центром в начале

¹⁾ Под *заземленным* мы понимаем проводник, на котором с помощью тонкого провода поддерживается тот же потенциал, что и на бесконечности. Предполагается, что этот связующий провод не искажает распределения потенциала. Однако он позволяет зарядам перемещаться из бесконечности на проводник и обратно так, чтобы обеспечить на проводнике потенциал «земли» (принимаемый обычно за нулевой). Аналогично следует понимать и проводник, поддерживаемый при постоянном потенциале, с той разницей, что в этом случае между землей и проводником включен источник напряжения.

координат (фиг. 2.2). Нужно найти потенциал $\Phi(\mathbf{x})$, удовлетворяющий условию $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ при $|\mathbf{x}| = a$. Из симметрии задачи ясно, что заряд-изображение q' (предполагается, что достаточно одного заряда-изображения) должен быть расположен на прямой, соединяющей начало координат с зарядом q . Если заряд q находится *вне*



Ф и г. 2.2. Заряд q вблизи сферического проводника радиусом a и изображение этого заряда q' .

сферы, то точка изображения y' должна быть внутри сферы. Потенциал поля, создаваемого зарядами q и q' , равен

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{q'}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|}. \quad (2.1)$$

Мы должны попытаться подобрать q' и $|y'|$ так, чтобы этот потенциал обращался в нуль при $|\mathbf{x}| = a$. Обозначив через \mathbf{n} единичный вектор в направлении \mathbf{x} , а через \mathbf{n}' единичный вектор в направлении \mathbf{y} , представим Φ в виде

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{|x\mathbf{n} - y\mathbf{n}'|} + \frac{q'}{|x\mathbf{n} - y'\mathbf{n}'|}. \quad (2.2)$$

Вынося за скобки в первом слагаемом x , а во втором y' и полагая $x = a$, получаем

$$\Phi(x = a) = \frac{a}{a|n - (y/a)n'|} + \frac{q'}{y'|n' - (a/y')n|}. \quad (2.3)$$

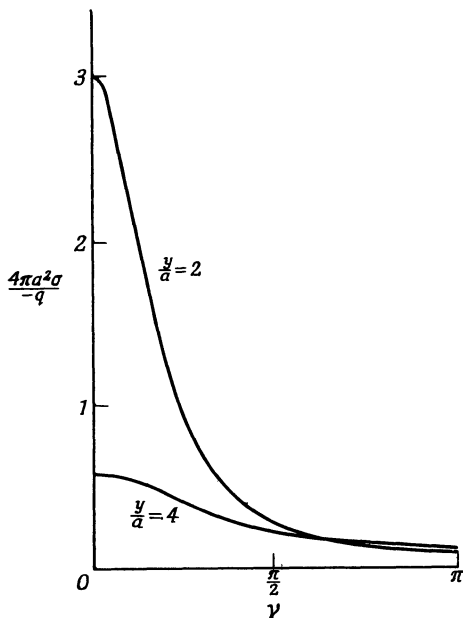
Из (2.3) следует, что если положить

$$\frac{q}{a} = -\frac{q'}{y'}, \quad \frac{y}{a} = \frac{a}{y'},$$

то при $x = a$ потенциал Φ равен нулю для всех значений $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$. Таким образом, величина и положение заряда-изображения определяются соотношениями

$$q' = -\frac{a}{y} q, \quad y' = \frac{a^2}{y}. \quad (2.4)$$

Заметим, что по мере приближения заряда q к поверхности сферы величина заряда-изображения становится все больше и он все больше удаляется от центра сферы навстречу заряду q . Когда заряд q находится у поверхности сферы, его изображение равно ему по величине и противоположно по знаку и расположено тоже у самой поверхности сферы.



Ф и г. 2.3. Распределение поверхностной плотности заряда σ на заземленной сфере радиусом a , индуцированном точечным зарядом q , расположенным на расстоянии y от центра сферы.

Приведены кривые для двух значений y . По оси абсцисс отложен угол γ между радиусами-векторами, проведенными из центра сферы к заряду и к точке наблюдения.

Найдя заряд-изображение, мы можем вернуться к первоначальной задаче о заряде q вне заземленной проводящей сферы. Истинную плотность зарядов на поверхности сферы можно найти по нормальной производной потенциала на поверхности

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=a} = -\frac{q}{4\pi a^2} \frac{a}{y} \frac{1 - a^2/y^2}{[1 + a^2/y^2 + 2(a/y) \cos \gamma]^{3/2}}; \quad (2.5)$$

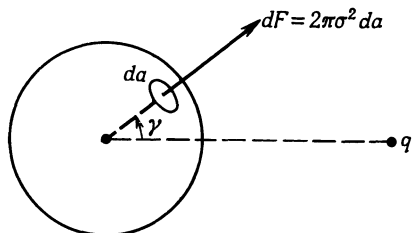
здесь γ — угол между x и y . Зависимость поверхностной плотности (отнесенной к $-q/4\pi a^2$) от γ для двух значений y/a приведена на фиг. 2.3. Как видно из кривых, заряд концентрируется вблизи направления на точечный заряд q , особенно в случае $y = 2a$. Непосредственным интегрированием легко убедиться, что полный индуцированный заряд на сфере равен по величине заряду-изображению, как и должно быть согласно теореме Гаусса.

Силу, действующую на заряд q , можно определять различными способами. Проще всего непосредственно найти силу взаимодей-

ствия заряда q с его изображением q' . Расстояние между ними равно $y - y' = y(1 - a^2/y^2)$, так что сила притяжения, согласно закону Кулона, равна

$$|\mathbf{F}| = \frac{q^2}{a^2} \left(\frac{a}{y}\right)^3 \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^{-2}. \quad (2.6)$$

На далеких расстояниях эта сила убывает обратно пропорционально кубу расстояния, но вблизи поверхности сферы она меняется обратно пропорционально квадрату расстояния от поверхности сферы.



Ф и г. 2.4.

Силу, действующую на заряд q , можно также найти, вычислив полную силу, действующую на поверхность сферы. На каждый элемент поверхности da действует сила $2\pi\sigma^2 da$ (фиг. 2.4), где σ определяется соотношением (2.5). Из симметрии ясно, что полная сила определяется лишь составляющей, параллельной радиусу-вектору, проведенному из центра сферы к заряду q . Таким образом, полная сила, действующая на сферу (равная по величине и противоположная по направлению силе, действующей на заряд q), равна интегралу

$$|\mathbf{F}| = \frac{q^2}{8\pi a^2} \left(\frac{a}{y}\right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^2 \int \frac{\cos \gamma}{[1 + a^2/y^2 - 2(a/y) \cos \gamma]^3} d\Omega. \quad (2.7)$$

Выполняя интегрирование, непосредственно получаем (2.6).

До сих пор мы предполагали, что точечный заряд q находится *вне* сферы. Однако все приведенные результаты справедливы и для случая, когда точечный заряд q находится *внутри* сферы. В этом случае нужно лишь изменить знак на обратный в выражении для поверхностной плотности заряда (2.5), поскольку внешняя нормаль к проводнику направлена теперь к центру сферы. Мы предоставляем читателю написать все формулы для этого случая с учетом того, что теперь $y \leq a$. Угловое распределение поверхностного заряда аналогично приведенному на фиг. 2.3, но полный наведенный заряд равен, конечно, $-q$ независимо от y .

§ 3. Точечный заряд вблизи заряженного изолированного сферического проводника

В предыдущем параграфе мы рассмотрели задачу о поле точечного заряда q вблизи заземленной сферы и нашли поверхностную плотность заряда, индуцируемого на сфере. Полный индуцируемый заряд, равный $q' = -aq/y$, распределен по поверхности сферы таким образом, что он находится в равновесии под действием электрического поля.

Переходя к задаче о точечном заряде q вблизи изолированной проводящей сферы с заданным полным зарядом Q , мы можем построить решение путем линейной суперпозиции потенциалов. Для удобства расчета представим себе, что сначала проводящая сфера заземлена (полный заряд ее поверхности при этом равен q'). Разомкнем теперь заземляющий провод и внесем на сферу дополнительный заряд $Q - q'$. Полный заряд на сфере станет при этом равным Q . Чтобы найти потенциал, достаточно заметить, что вносимый дополнительный заряд $Q - q'$ распределяется *равномерно* по поверхности сферы, поскольку электростатическое поле, обусловленное точечным зарядом q , уже уравновешено зарядом q' . Таким образом, вне сферы потенциал дополнительного заряда $Q - q'$ равен потенциалу точечного заряда той же величины, помещенного в центре сферы.

Полный потенциал представляет собой суперпозицию потенциала (2.1) и потенциала точечного заряда $Q - q'$, находящегося в начале координат (в центре сферы):

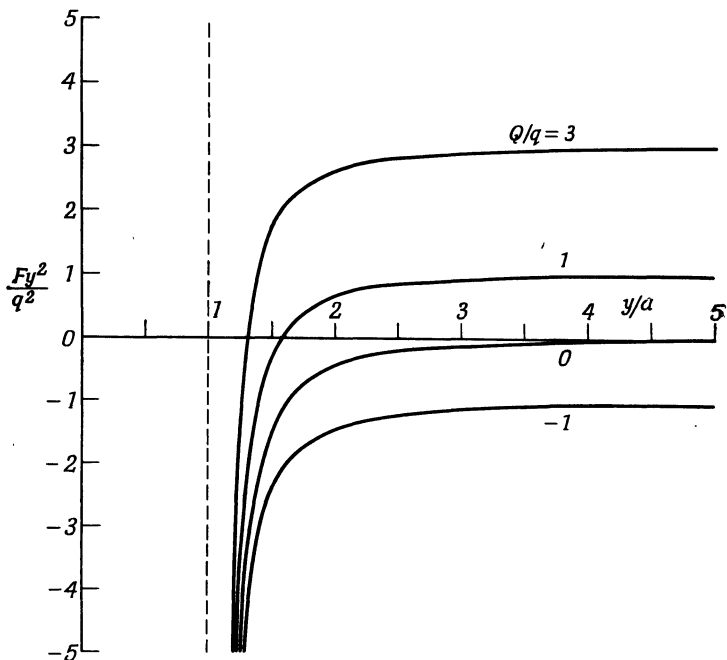
$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{aq}{y|\mathbf{x} - (a^2/y^2)\mathbf{y}|} + \frac{Q + (a/y)q}{|\mathbf{x}|}. \quad (2.8)$$

Силу, действующую на заряд q , можно найти непосредственно с помощью закона Кулона. Она направлена вдоль радиуса-вектора точки нахождения заряда q и равна

$$\mathbf{F} = \frac{q}{y^2} \left[Q - \frac{qa^3(2y^2 - a^2)}{y(y^2 - a^2)^2} \right] \frac{\mathbf{y}}{y}. \quad (2.9)$$

В предельном случае $y \gg a$ соотношение (2.9) переходит в обычный закон Кулона для силы взаимодействия двух малых заряженных тел. Если же точечный заряд находится вблизи сферы, то сказывается влияние заряда, индуцированного на поверхности сферы. На фиг. 2.5 показана зависимость силы от расстояния для различных значений Q/q . По оси ординат отложена сила, отнесенная к q^2/y^2 . Положительные значения соответствуют отталкиванию, отрицательные — притяжению. Если заряд сферы равен нулю или противоположен по знаку заряду q , то на всех расстояниях имеет

место притяжение. При одноименных зарядах Q и q на достаточно малых расстояниях также имеет место притяжение. В пределе при $Q \gg q$ точка неустойчивого равновесия, в которой сила, действующая на заряд, равна нулю, очень близка к поверхности сферы: $y \approx a [1 + 1/2 (q/Q)^{1/2}]$. Заметим, что асимптотическое значение



Ф и г. 2.5. Сила, действующая на точечный заряд q вблизи изолированной проводящей сферы радиусом a с полным зарядом Q .

Положительные значения силы соответствуют отталкиванию, отрицательные — притяжению. При любом значении Q на малых расстояниях всегда имеет место притяжение благодаря взаимодействию с индуцированным поверхностным зарядом.

силы достигается уже на расстоянии нескольких радиусов от поверхности сферы.

Этот пример поясняет, почему избыточный заряд на поверхности проводника не покидает тотчас эту поверхность вследствие взаимного отталкивания зарядов. При малейшем смещении элементарного заряда сила взаимодействия с его изображением стремится вернуть его назад. Конечно, совершив достаточно большую работу, можно удалить заряд с поверхности проводника. Работа выхода для металла в основном и есть работа, совершаемая против сил взаимодействия с изображением при удалении электрона с поверхности металла.

§ 4. Точечный заряд вблизи сферического проводника с заданным потенциалом

Столь же легко решается и задача о точечном заряде вблизи проводящей сферы, поддерживаемой при заданном потенциале V . Выражение для потенциала имеет тот же вид, что и в предыдущем случае, с той разницей, что заряд $Q = q'$ в центре сферы заменяется на Va . Действительно, как видно из (2.8), при $|x| = a$ первые два слагаемых компенсируют друг друга, а третье слагаемое дает как раз V , что и требуется. Таким образом, потенциал равен

$$\Phi(x) = \frac{q}{|x-y|} - \frac{aq}{y|x - (a^2/y^2)y|} + \frac{Va}{|x|}. \quad (2.10)$$

Сила взаимодействия точечного заряда со сферой с заданным потенциалом равна

$$F = \frac{q}{y^2} \left[Va - \frac{qay^3}{(y^2 - a^2)^2} \right] \frac{y}{y}. \quad (2.11)$$

Для соответствующих значений Va/q и Q/q характер зависимости этой силы от расстояния близок к приведенному на фиг. 2.5, хотя приближение к асимптотическому значению $(Va/q/y^2)$ происходит более медленно. При $Va \gg q$ точка неустойчивого равновесия определяется координатой $y \approx a [1 + 1/2 (q/Va)^{1/2}]$.

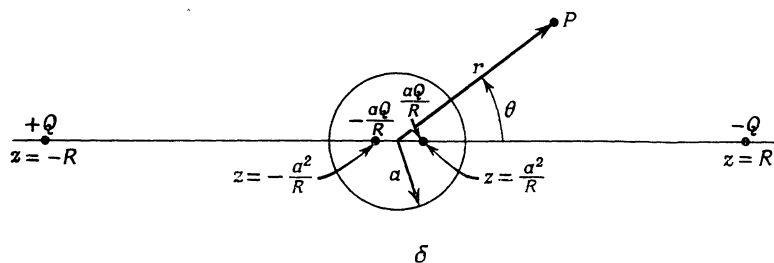
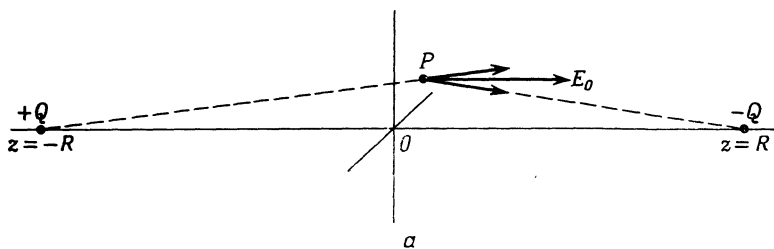
§ 5. Сферический проводник в однородном электрическом поле

В качестве последнего примера применения метода изображений рассмотрим проводящую сферу радиусом a в однородном электрическом поле E_0 . Можно считать, что однородное поле создано соответствующими положительным и отрицательным зарядами на бесконечности. Если, например, два заряда $+Q$ и $-Q$ находятся в точках $z = \mp R$, как показано на фиг. 2.6, а, то в близкой к началу координат области, размеры которой много меньше R , электрическое поле имеет почти постоянное значение $E_0 \approx 2Q/R^2$ и приблизительно параллельно оси z . В пределе, когда $R \rightarrow \infty$, $Q \rightarrow \infty$ при $Q/R^2 = \text{const}$, это приближение становится совершенно точным.

Пусть теперь в начало координат помещена проводящая сфера радиусом a (фиг. 2.6, б); при этом поле будет определяться реальными зарядами $\pm Q$, находящимися на расстоянии $\mp R$, и зарядами-изображениями, соответственно равными $\mp Qa/R$ и расположенными в точках $z = \mp a^2/R$. Полный потенциал равен

$$\Phi = \frac{Q}{(r^2 + R^2 + 2rR \cos \theta)^{1/2}} - \frac{Q}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{1/2}} - \frac{aQ}{R \left(r^2 + \frac{a^4}{R^2} + \frac{2a^2r}{R} \cos \theta \right)^{1/2}} + \frac{aQ}{R \left(r^2 + \frac{a^4}{R^2} - \frac{2a^2r}{R} \cos \theta \right)^{1/2}}, \quad (2.12)$$

где введены сферические координаты r , θ точки наблюдения. В первых двух слагаемых, учитывая, что, по предположению, R много больше r , можно разложить корень по степеням r/R ,



Ф и г. 2.6. Применение метода изображений к проводящей сфере в однородном электрическом поле.

вынеся предварительно за скобки R^2 . Аналогично в третьем и четвертом членах можно произвести разложение после вынесения r^2 . В результате получим

$$\Phi = \left[-\frac{2Q}{R^2} r \cos \theta + \frac{2Q}{R^2} \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \right] + \dots \quad (2.13)$$

Здесь не выписаны члены, обращающиеся в нуль при $R \rightarrow \infty$. В пределе при $R \rightarrow \infty$ отношение $2Q/R^2$ переходит в величину приложенного электрического поля E_0 , так что потенциал равен

$$\Phi = -E_0 \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (2.14)$$

Первое слагаемое ($-E_0 z$) равно, очевидно, просто потенциалу однородного поля E_0 , который можно было бы написать сразу вместо первых двух слагаемых в (2.12). Второе слагаемое описывает потенциал, создаваемый индуцированными поверхностными зарядами, или, что то же самое, потенциал, создаваемый зарядами-изображениями. Заметим, что заряды-изображения образуют

диполь с моментом $D = (Qa/R) (2a^2/R) = E_0 a^3$. Поверхностная плотность индуцируемого заряда равна

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \theta. \quad (2.15)$$

Заметим, что интеграл от поверхностной плотности равен нулю, так что безразлично, считаем ли мы сферу заземленной или изолированной.

§ 6. Метод инверсии

Изложенные в предыдущих параграфах примеры применения метода изображений к сфере наводят на мысль о том, что решения электростатических задач, связанных обратным преобразованием радиуса

$$r \rightarrow r' = \frac{a^2}{r}, \quad (2.16)$$

в каком-то смысле эквивалентны. Эта эквивалентность является основой так называемого метода инверсии, а преобразование (2.16) называется *преобразованием инверсии на сфере*. Радиус сферы называют *радиусом инверсии*, а ее центр — *центром инверсии*. Математический смысл эквивалентности ясен из следующей теоремы:

Пусть $\Phi(r, \theta, \varphi)$ — потенциал, обусловленный системой точечных зарядов q_i в точках $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$. Тогда функция

$$\Phi'(r, \theta, \varphi) = \frac{a}{r} \Phi\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \varphi\right) \quad (2.17)$$

является потенциалом системы зарядов

$$q'_i = \frac{a}{r_i} q_i, \quad (2.18)$$

расположенных в точках $(a^2/r_i, \theta_i, \varphi_i)$.

Докажем эту теорему. Потенциал $\Phi(r, \theta, \varphi)$ можно представить в виде

$$\Phi = \sum_i \frac{q_i}{(r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos \gamma_i)^{1/2}},$$

где γ_i — угол между радиусами-векторами \mathbf{x} и \mathbf{x}_i . При преобразовании (2.16) углы не меняются. Следовательно, новый потенциал Φ' имеет вид

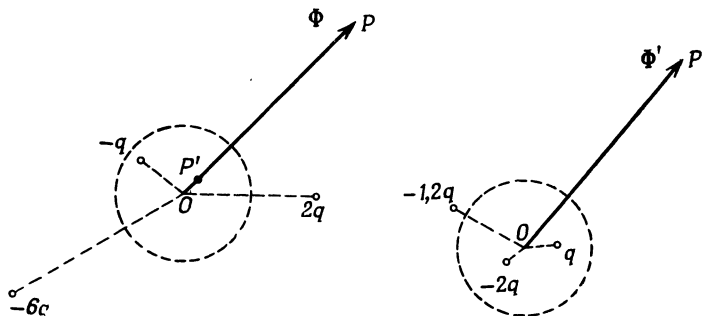
$$\Phi'(r, \theta, \varphi) = \frac{a}{r} \sum_i \frac{q_i}{\left(\frac{a^4}{r^2} + r_i^2 - \frac{2a^2}{r} r_i \cos \gamma_i\right)^{1/2}}.$$

Вынося r_i^2/r^2 за знак радикала, мы можем переписать Φ' в виде

$$\Phi'(r, \theta, \varphi) = \sum_i \frac{aq_i/r_i}{\left(r^2 + \frac{a^4}{r_i^2} - 2r \frac{a^2}{r_i} \cos \gamma_i\right)^{1/2}},$$

откуда и следует справедливость теоремы.

На фиг. 2.7 показана простая конфигурация зарядов до и после инверсии. Потенциал Φ' в точке P , обусловленный инвертированной системой зарядов, связан с потенциалом Φ исходной системы в точке P' зарядов соотношением (2.17).



Ф и г. 2.7.

Мы доказали теорему инверсии для системы точечных зарядов. Предоставляем читателю в качестве упражнения доказать, что если потенциал Φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho,$$

то новый потенциал Φ' , определяемый соотношением (2.17), также удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \Phi'(r, \theta, \varphi) = -4\pi\rho'(r, \theta, \varphi), \quad (2.19)$$

где новая объемная плотность зарядов равна

$$\rho'(r, \theta, \varphi) = \left(\frac{a}{r}\right)^5 \rho\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \varphi\right). \quad (2.20)$$

Связь между этим законом преобразования объемной плотности заряда и законом преобразования величины точечных зарядов (2.18) можно установить, представив плотность распределения для системы дискретных зарядов в виде суммы δ -функций:

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i).$$

В сферических координатах с началом координат в центре инверсии объемная плотность заряда запишется в виде

$$\varrho(r, \theta, \varphi) = \sum_i q_i \delta(\Omega - \Omega_i) \frac{1}{r_i^2} \delta(r - r_i),$$

где $\delta(\Omega - \Omega_i)$ — угловая δ -функция, интеграл от которой по телесному углу дает единицу, а $\delta(r - r_i)$ — радиальная δ -функция¹⁾. При инверсии угловая зависимость не меняется. Следовательно,

$$\varrho\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \varphi\right) = \sum_i q_i \delta(\Omega - \Omega_i) \frac{1}{r_i^2} \delta\left(\frac{a^2}{r} - r_i\right).$$

Как указано в гл. 1, § 2, радиальную δ -функцию можно преобразовать следующим образом:

$$\delta\left(\frac{a^2}{r} - r_i\right) = \frac{r^2}{a^2} \delta\left(r - \frac{a^2}{r_i}\right) = \frac{a^2}{r_i^2} \delta\left(r - \frac{a^2}{r_i}\right),$$

так что

$$\varrho\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \varphi\right) = \sum_i q_i \delta(\Omega - \Omega_i) \frac{a^6}{r_i^6} \frac{\delta(r - a^2/r_i)}{(a^2/r_i)^2},$$

а новая объемная плотность заряда принимает, согласно (2.20), вид

$$\varrho'(r, \theta, \varphi) = \frac{a^5}{r^5} \sum_i q_i \left(\frac{a}{r_i}\right)^6 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \sum_i q_i' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i),$$

где $\mathbf{x}_i' = (a^2/r_i, \theta, \varphi)$, а $q_i' = (a/r_i) q_i$, что совпадает с (2.18).

Для *поверхностной* плотности зарядов закон преобразования при инверсии имеет вид

$$\sigma'(r, \theta, \varphi) = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sigma\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \varphi\right); \quad (2.21)$$

такую зависимость и следовало ожидать из сопоставления соотношений (2.18) и (2.20).

Прежде чем перейти к примерам применения метода инверсии, следует остановиться на нескольких вопросах физического и геометрического характера.

В отношении физических свойств преобразования инверсии заметим сначала, что, если в первоначальной задаче на некоторых поверхностях был задан постоянный потенциал, после инверсии на инвертированных поверхностях потенциал не будет, вообще

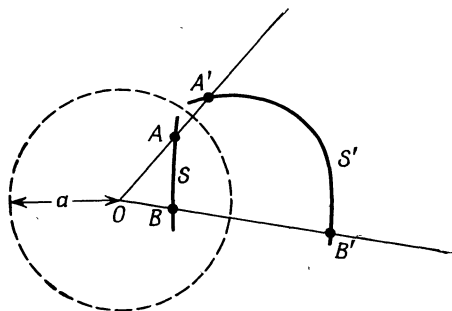
¹⁾ Множитель r_i^{-2} перед радиальной δ -функцией компенсирует множитель r^2 в элементе объема $d^3x = r^2 dr d\Omega$.

говоря, постоянным. Это видно из соотношения (2.17): из-за множителя a/r потенциал Φ' инвертированной поверхности не будет постоянным, даже если потенциал Φ первоначальной поверхности был постоянным. Единственным исключением является случай, когда потенциал Φ равен нулю на некоторой поверхности; тогда и потенциал Φ' равен нулю на инвертированной поверхности¹⁾.

Может показаться, что, поскольку потенциал Φ содержит произвольную аддитивную постоянную, мы можем приравнять

Ф и г. 2.8. Преобразование инверсии.

Поверхность S преобразуется в S' , и наоборот; O — центр инверсии, a — радиус инверсии.



нулю потенциал произвольной поверхности первоначальной конфигурации, обеспечив тем самым нулевой потенциал инвертированной поверхности. Однако тут мы сталкиваемся со вторым характерным физическим свойством преобразования инверсии. Оказывается, потенциалы, получающиеся по методу инверсии для двух задач, в которых потенциалы первоначальных систем различаются лишь на постоянную Φ_0 , соответствуют физически различным системам зарядов, а именно распределение зарядов отличается на точечный заряд $a\Phi_0$, расположенный в центре инверсии. Это легко видеть из (2.17): добавление постоянного слагаемого Φ_0 к Φ приводит к увеличению Φ' на $a\Phi_0/r$. Соответственно при применении метода инверсии следует иметь в виду, что при отображении бесконечно удаленной точки в начало координат там может появиться точечный заряд. Если он не требуется по условиям задачи, то его следует убрать надлежащей линейной суперпозицией.

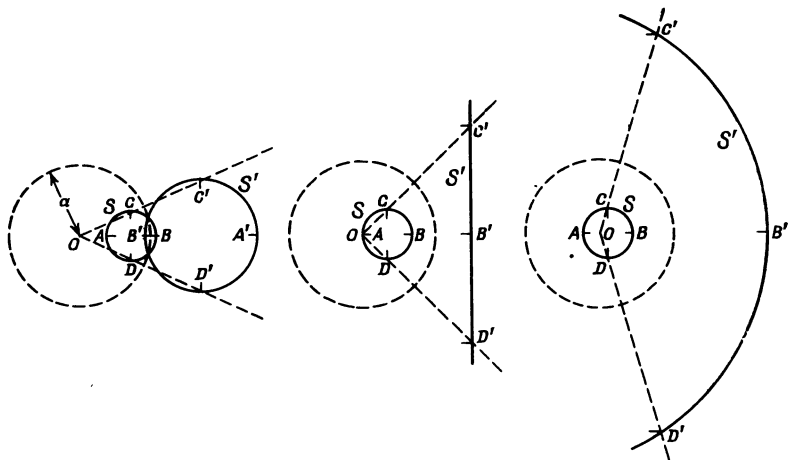
Приведем теперь несколько простых геометрических свойств преобразования инверсии, в справедливости которых легко убедиться. Пусть O — центр инверсии, a — радиус инверсии (фиг. 2.8). Пересечение сферы инверсии с плоскостью чертежа показано на фиг. 2.8 пунктиром. Пусть кривая AB — след пересечения

¹⁾ Исключением является также мало интересный случай, когда инвертируемая поверхность представляет собой сферу с центром в центре инверсии: в этом случае $a/r = \text{const}$ на поверхности.— *Прим. ред.*

поверхности S с плоскостью чертежа. Инвертированная поверхность S' , определяемая преобразованием (2.16), пересекается с плоскостью чертежа по кривой $A'B'$. При инверсии справедливы следующие положения, доказательства которых мы приводить не будем:

а) углы пересечения не меняются;

б) величина элементарной площадки da на поверхности S связана с величиной соответствующей площадки da' на инвертированной поверхности S' соотношением $da/da' = r^2/r'^2$;



Ф и г. 2.9. Различные варианты инверсии сферы.

Если центр O инверсии расположен на поверхности S сферы, то инвертированная поверхность S' представляет собой плоскость, в остальных случаях — сферу. Сфера инверсии показана пунктиром.

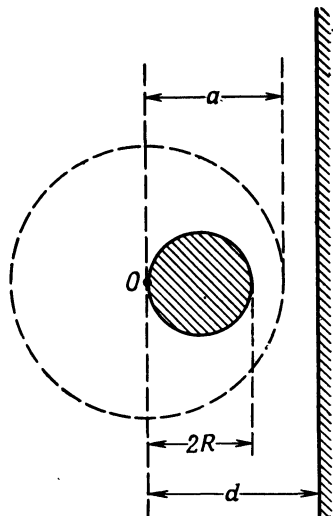
в) сфера переходит в сферу (в частности, бесконечного радиуса, см. п. «г»);

г) плоскость переходит в сферу, проходящую через центр инверсии, и наоборот.

На фиг. 2.9 показаны различные варианты инверсии сферы, соответствующие п. «в» и «г» для случаев, когда центр инверсии расположен вне сферы, на ее поверхности и внутри сферы.

В качестве простейшего примера решения электростатической задачи методом инверсии рассмотрим проводящую сферу радиусом R , несущую заряд Q . Внутри этой сферы потенциал постоянен и равен Q/R , а вне сферы убывает обратно пропорционально расстоянию от ее центра. Надлежащим выбором центра инверсии и соответствующих параметров мы можем с помощью метода инверсии найти потенциал точечного заряда q , расположенного на расстоянии d от бесконечной проводящей заземленной плоскости. Очевидно, если поместить центр инверсии O на поверхности сферы

радиусом R , то в результате преобразования она перейдет в плоскость (фиг. 2.10). Далее, если принять произвольную постоянную Φ_0 в потенциале равной $-Q/R$, то сфера и получающаяся при ее преобразовании плоскость будут иметь нулевой потенциал, а в центре инверсии появится точечный заряд $-aQ/R$. Чтобы получить точечный заряд q на расстоянии d от плоскости, следует положить радиус инверсии a равным $(2Rd)^{1/2}$, а начальный заряд Q



Ф и г. 2.10. Нахождение потенциала точечного заряда методом инверсии.

Потенциал изолированной заряженной проводящей сферы переходит при преобразовании инверсии в потенциал точечного заряда, находящегося на расстоянии d от бесконечной проводящей плоскости.

равным $-(R/2d)^{1/2}q$. Поверхностная плотность заряда, индуцируемая на плоскости, легко находится с помощью соотношения (2.21). Поскольку на поверхности сферы поверхностная плотность постоянна, на плоскости она меняется обратно пропорционально кубу расстояния от начала координат (это легко проверить методом изображений; см. задачу 2.1).

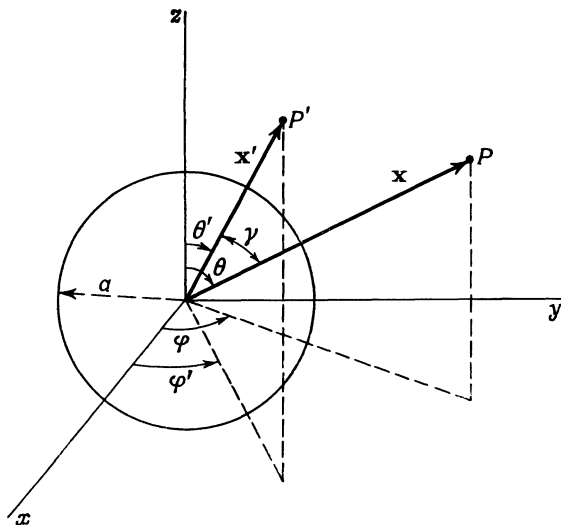
Если центр инверсии находится вне изолированной проводящей сферы, то, как видно из фиг. 2.9, преобразованием инверсии можно решить задачу о поле точечного заряда вблизи заземленной проводящей сферы (в § 2 она была решена методом изображений). Предоставляем читателю убедиться в этом (см. задачу 2.9).

Весьма интересно применил метод инверсии лорд Кельвин в 1847 г. Он рассчитал распределение плотности заряда на внутренней и внешней сторонах тонкой заряженной проводящей «чаши», получающейся срезанием верхушки у сферической поверхности. В качестве исходного потенциала, подвергавшегося инверсии, был принят потенциал тонкого плоского заряженного круглого диска (см. гл. 3, § 12). По мере изменения формы поверхности от мелкой

чаши типа часового стекла до почти замкнутой сферы с небольшим отверстием распределение заряда также изменяется: сначала оно близко к распределению на диске, а затем переходит в распределение на сфере. В первом предельном случае плотность заряда внутри и снаружи почти одинакова, причем заряды сосредоточены в основном у краев, во втором случае на внутренней стороне плотность заряда почти нулевая, а на наружной заряд распределен почти равномерно. Численные данные приведены в трудах Кельвина [58] и в книге Джинса [55].

§ 7. Функция Грина для сферы. Общее выражение для потенциала

Выше задача о точечном заряде вблизи проводящей сферы была рассмотрена методом изображений. Как указывалось в гл. 1, § 10, потенциал единичного заряда и его изображения (или изображений), удовлетворяющий соответствующим однородным граничным условиям, как раз является функцией Грина [см. (1.43)



Ф и г. 2.11.

или (1.45)] для граничных условий Дирихле или Неймана. В функции $G(x, x')$ переменная x' определяет точку P' , в которой находится единичный заряд, а переменная x — точку P , для которой вычисляется потенциал (фиг. 2.11). Для граничных условий Дирихле на сфере радиусом a потенциал единичного заряда и его изображения дается соотношениями (2.1) и (2.4), в которых следует поло-

жить $q = 1$. Изменив соответственно обозначения, получим функцию Грина в виде

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{a}{x' \left| \mathbf{x} - \frac{a^2}{x'^2} \mathbf{x}' \right|}, \quad (2.22)$$

или в сферических координатах

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \gamma)^{1/2}} - \frac{1}{\left(\frac{x^2 x'^2}{a^2} + a^2 - 2xx' \cos \gamma \right)^{1/2}}; \quad (2.23)$$

здесь γ — угол между \mathbf{x} и \mathbf{x}' . Из формы соотношения (2.23) непосредственно видно, что функция Грина симметрична по отношению к переменным \mathbf{x} и \mathbf{x}' и равна нулю в случае, если \mathbf{x} или \mathbf{x}' находится на поверхности сферы.

Чтобы записать решение (1.44) уравнения Пуассона, нужно знать не только G , но и значение $\partial G / \partial n'$ на сфере. Учитывая, что \mathbf{n}' означает внешнюю нормаль по отношению к интересующему нас объему, т. е. нормаль, направленную к центру сферы, найдем

$$\frac{\partial G}{\partial n'} \Big|_{x'=a} = - \frac{x^2 - a^2}{a(x^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma)^{3/2}}. \quad (2.24)$$

Заметим, что $\partial G / \partial n'$ фактически представляет собой распределение плотности заряда (2.5). Отсюда следует, что решение уравнения Лапласа *вне* сферы при заданном потенциале на сфере дается, согласно (1.44), выражением

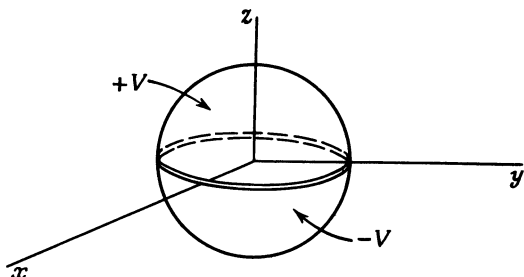
$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \Phi(a, \theta', \varphi') \frac{a(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma)^{3/2}} d\Omega', \quad (2.25)$$

где $d\Omega'$ — элемент телесного угла в точке (a, θ', φ') , а $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$. Для *внутренней* задачи вектор нормали направлен наружу, так что знак $\partial G / \partial n'$ обратен (2.24). Это эквивалентно замене множителя $(x^2 - a^2)$ на $(a^2 - x^2)$ в (2.25). Если, кроме того, задано некоторое распределение объемного заряда, то к (2.25) следует прибавить соответствующий интеграл, согласно (1.44), с функцией Грина (2.23).

§ 8. Две примыкающие проводящие полусферы, имеющие различный потенциал

В качестве примера применения общего метода нахождения потенциала вне сферы при заданном потенциале на ее поверхности рассмотрим задачу о проводящей сфере радиусом a , составленной из двух полусфер, разделенных тонкой изолирующей прокладкой.

Потенциалы полусфер различны. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда потенциалы равны соответственно V и $-V$, поскольку, добавляя к результату решение для сферы, находящейся под постоянным потенциалом, можно получить решение для



Ф и г. 2.12.

произвольных потенциалов полусфер. Изолирующая прокладка расположена в плоскости $z = 0$ (фиг. 2.12), потенциал верхней полусферы V , нижней $-V$.

Согласно (2.25), решение $\Phi(x, \theta, \varphi)$ представляется интегралом

$$\Phi(x, \theta, \varphi) = \frac{V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \left\{ \int_0^1 d(\cos \theta') - \int_{-1}^0 d(\cos \theta') \right\} \frac{a(x^2 - a^2)}{(a^2 + x^2 - 2ax \cos \gamma)^{3/2}}. \quad (2.26)$$

Соответствующей заменой переменных во втором интеграле ($\theta' \rightarrow \pi - \theta'$, $\varphi' \rightarrow \varphi' + \pi$) это выражение можно представить в виде

$$\Phi(x, \theta, \varphi) = \frac{Va(x^2 - a^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d(\cos \theta') [(a^2 + x^2 - 2ax \cos \gamma)^{-3/2} - (a^2 + x^2 + 2ax \cos \gamma)^{-3/2}]. \quad (2.27)$$

Из-за сложной зависимости $\cos \gamma$ от углов (θ', φ') и (θ, φ) интегралы в выражении (2.27) в общем случае не удается вычислить в замкнутом виде.

В качестве частного случая рассмотрим потенциал на положительной полуоси z . В этом случае $\cos \gamma = \cos \theta'$, поскольку $\theta = 0$. После элементарного интегрирования получим для потенциала выражение

$$\Phi(z) = V \left[1 - \frac{z^2 - a^2}{z(z^2 + a^2)^{1/2}} \right]. \quad (2.28)$$

При $z = a$, как и следовало ожидать, потенциал Φ равен V , а на больших расстояниях он примерно равен $3Va^2/2z^2$.

В общем случае (2.27), когда интегрирование в замкнутом виде не производится, можно разложить подынтегральное выражение в ряд и проинтегрировать каждый член ряда. Вынося за скобки множитель $(a^2 + x^2)$, получаем

$$\Phi(x, \theta, \varphi) = \frac{Va(x^2 - a^2)}{4\pi(x^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d(\cos \theta') [(1 - 2\alpha \cos \gamma)^{-3/2} - (1 + 2\alpha \cos \gamma)^{-3/2}], \quad (2.29)$$

где $\alpha = ax/(a^2 + x^2)$. Заметим, что в разложении разности радикалов останутся лишь нечетные степени $\alpha \cos \gamma$:

$$[(1 - 2\alpha \cos \gamma)^{-3/2} - (1 + 2\alpha \cos \gamma)^{-3/2}] = 6\alpha \cos \gamma + 35\alpha^3 \cos^3 \gamma + \dots \quad (2.30)$$

Интегралы от нечетных степеней $\cos \gamma$ по $d\varphi' d(\cos \theta')$ равны

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d(\cos \theta') \cos \gamma = \pi \cos \theta, \quad (2.31)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d(\cos \theta') \cos^3 \gamma = \frac{\pi}{4} \cos \theta (3 - \cos^2 \theta).$$

Подставляя (2.30) и (2.31) в (2.29), найдем потенциал

$$\Phi(x, \theta, \varphi) = \frac{3Va^2}{2x^2} \left[\frac{x^3(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^{5/2}} \right] \cos \theta \times$$

$$\times \left[1 + \frac{35}{24} \frac{a^2 x^2}{(a^2 + x^2)^2} (3 - \cos^2 \theta) + \dots \right]. \quad (2.32)$$

Заметим, что в (2.32) входят лишь нечетные степени $\cos \theta$, как и следует из симметрии задачи. Если принять за параметр разложения не a^2 , а a^2/x^2 , то ряд будет иметь следующий вид:

$$\Phi(x, \theta, \varphi) = \frac{3Va^2}{2x^2} \left[\cos \theta - \frac{7a^2}{12x^2} \left(\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \right) + \dots \right]. \quad (2.33)$$

Для больших значений x/a это разложение быстро сходится, так что им очень удобно пользоваться для вычисления потенциала. Уже при $x/a = 5$ второй член ряда составляет всего 2% от первого. Легко убедиться, что для $\cos \theta = 1$ выражение (2.33) представляет собой разложение в ряд потенциала (2.28) на оси. Угловые множители в выражении (2.33) совпадают с полиномами Лежандра. Первый множитель — полином $P_1(\cos \theta)$, второй — $P_3(\cos \theta)$, а весь ряд в целом представляет собой разложение потенциала в ряд по полиномам Лежандра нечетного порядка. Мы рассмотрим этот вопрос более последовательно в гл. 3, § 3.

§ 9. Разложение по ортогональным функциям

Разложение решения электростатических задач (или других задач математической физики) в ряд по ортогональным функциям — один из наиболее эффективных методов, пригодный для решения широкого класса задач. Конкретный выбор ортогональной системы функций зависит от симметрии, которой обладает (точно или приближенно) рассматриваемая система. Чтобы напомнить общие свойства ортогональных функций и разложений по ним, рассмотрим интервал (a, b) изменения переменной ξ и совокупность действительных или комплексных функций $U_n(\xi)$, $n = 1, 2, \dots$, ортогональных на интервале (a, b) . Условие ортогональности функций $U_n(\xi)$ выражается соотношением

$$\int_a^b U_n^*(\xi) U_m(\xi) d\xi = 0 \quad \text{при } m \neq n. \quad (2.34)$$

При $n = m$ интеграл конечен. Мы будем предполагать, что функции нормированы, так что интеграл равен единице. В этом случае систему функций $U_n(\xi)$ называют *ортонормированной*; она удовлетворяет условию

$$\int_a^b U_n^*(\xi) U_m(\xi) d\xi = \delta_{nm}. \quad (2.35)$$

Произвольная функция $f(\xi)$ с интегрируемым квадратом в интервале (a, b) может быть разложена в ряд по ортонормированным функциями $U_n(\xi)$. Если число членов суммы конечно (скажем, равно N), т. е.

$$f(\xi) \leftrightarrow \sum_{n=1}^N a_n U_n(\xi), \quad (2.36)$$

то можно поставить вопрос о «наилучшем» выборе коэффициентов a_n так, чтобы ряд «наилучшим» образом воспроизводил функцию $f(\xi)$. Если считать наилучшим приближением такое, при котором среднеквадратичная ошибка

$$M_N = \int_a^b \left| f(\xi) - \sum_{n=1}^N a_n U_n(\xi) \right|^2 d\xi \quad (2.37)$$

минимальна, то, как легко видеть, для коэффициентов a_n с учетом условия (2.35) получается выражение

$$a_n = \int_a^b U_n^*(\xi) f(\xi) d\xi. \quad (2.38)$$

Это — известное выражение для коэффициентов разложения по ортонормированной системе функций.

Если увеличивать число членов в сумме (2.36), то естественно ожидать, что представление функции $f(\xi)$ с помощью ряда будет становиться все более точным. Это действительно имеет место, если система ортонормированных функций является *полной*, т. е. для любого сколь угодно малого положительного числа существует такое конечное число N_0 , что при $N > N_0$ среднеквадратичная ошибка M_N может быть сделана меньше этого числа. В этом случае пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(\xi) = f(\xi), \quad (2.39)$$

где a_n определяется соотношением (2.38), и говорят, что ряд *сходится в среднем* к $f(\xi)$. Физики обычно предоставляют математикам проводить весьма кропотливые доказательства полноты системы функций. В математических работах доказано, что все системы ортонормированных функций, которыми обычно пользуются в математической физике, представляют собой полные системы функций.

Ряд (2.39) можно переписать, подставив явное выражение (2.38) для коэффициентов a_n :

$$f(\xi) = \int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(\xi') U_n(\xi) \right\} f(\xi') d\xi'. \quad (2.40)$$

Поскольку это справедливо для любой функции $f(\xi)$ на интервале (a, b) , то, очевидно, сумма в фигурных скобках должна быть отлична от нуля лишь в бесконечно малой окрестности точки $\xi' = \xi$, т. е. должно выполняться соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(\xi') U_n(\xi) = \delta(\xi' - \xi). \quad (2.41)$$

Это так называемое *условие полноты*, или *замкнутости*. Оно аналогично условию ортонормальности (2.35), но непрерывная переменная ξ и дискретный индекс n здесь обменялись ролями.

Наиболее известная система ортогональных функций — это тригонометрические функции синус и косинус; разложение по этим функциям носит название ряда Фурье. Для интервала $(-a/2, a/2)$ изменения переменной x система ортонормированных функций имеет вид

$$\left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right), \quad \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right),$$

где m — целое число. Ряд, соответствующий ряду (2.39), обычно записывают в этом случае в виде

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) + B_m \sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) \right], \quad (2.42)$$

где

$$A_m = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) dx, \quad (2.43)$$

$$B_m = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) dx.$$

Обобщение формул (2.34) — (2.39) на случай нескольких переменных очевидно. Пусть пространство двумерно, переменная ξ меняется в интервале (a, b) , а переменная η — в интервале (c, d) . Пусть $U_n(\xi)$ и $V_m(\eta)$ представляют собой системы ортонормированных функций для этих интервалов. Тогда разложение произвольной функции $f(\xi, \eta)$ имеет вид

$$f(\xi, \eta) = \sum_n \sum_m a_{nm} U_n(\xi) V_m(\eta), \quad (2.44)$$

где

$$a_{nm} = \int_a^b d\xi \int_c^d d\eta U_n^*(\xi) V_m^*(\eta) f(\xi, \eta). \quad (2.45)$$

Если интервал (a, b) становится бесконечно большим, то множество функций $U_n(\xi)$ становится уже несчетным, а символ Кронекера δ_{nm} в (2.35) переходит в δ -функцию Дирака. Важным примером является интеграл Фурье. Начнем с ортонормированной на интервале $(-a/2, a/2)$ системы комплексных экспоненциальных функций

$$U_m(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i(2\pi mx/a)}, \quad (2.46)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Разложение в ряд имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{i(2\pi mx/a)}, \quad (2.47)$$

где

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i(2\pi mx'/a)} f(x') dx'. \quad (2.48)$$

Примем теперь, что величина интервала неограниченно увеличивается ($a \rightarrow \infty$), и произведем замену

$$\begin{aligned} \frac{2\pi m}{a} &\rightarrow k, \\ \sum_m &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dm = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk, \\ A_m &\rightarrow \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/2} A(k). \end{aligned} \quad (2.49)$$

В пределе (2.47) переходит в интегральное разложение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikh} dk, \quad (2.50)$$

где

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikh} f(x) dx. \quad (2.51)$$

Условие ортогональности имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx = \delta(k-k'), \quad (2.52)$$

а условие полноты есть

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk = \delta(x-x'). \quad (2.53)$$

Последние интегралы являются удобными представлениями δ -функции. Заметим, что в (2.50) — (2.53) непрерывные переменные x и k совершенно равноправны.

§ 10. Разделение переменных.

Уравнение Лапласа в декартовых координатах

Одним из наиболее удобных и употребительных методов решения уравнений в частных производных математической физики является *метод разделения переменных*. Использование этого метода часто приводит к построению систем ортогональных функций, имеющих

самостоятельное значение. Как известно, уравнения, содержащие трехмерный оператор Лапласа, разделяются в одиннадцати различных системах координат (см. книгу Морса и Фешбаха [77]). Мы рассмотрим подробно лишь три из них — декартову (прямоугольную), сферическую и цилиндрическую, причем начнем с простейшей — декартовой.

Уравнение Лапласа в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.54)$$

Решение этого уравнения в *частных производных* может быть выражено через решения трех *обыкновенных* дифференциальных уравнений, имеющих одинаковый вид ¹⁾, если представить потенциал как произведение трех функций, каждая из которых зависит лишь от одной координаты:

$$\Phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z). \quad (2.55)$$

Подставляя (2.55) в (2.54) и деля на Φ , получаем

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0. \quad (2.56)$$

Здесь частные производные заменены полными, поскольку каждая функция зависит лишь от одной переменной. Чтобы соотношение (2.56) было справедливо для произвольных значений аргументов, каждое слагаемое должно быть в отдельности постоянным:

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -\alpha^2, \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -\beta^2, \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= \gamma^2, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$.

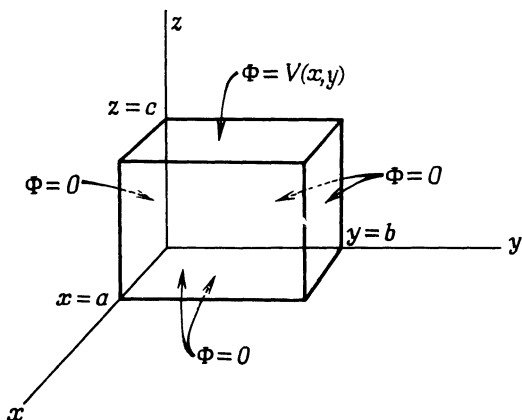
Считая совершенно произвольно α^2 и β^2 положительными, мы получаем в качестве решений трех дифференциальных уравнений (2.57) функции $\exp(\pm i\alpha x)$, $\exp(\pm i\beta y)$ и $\exp(\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z)$. Потенциал (2.55) получается как произведение этих функций

$$\Phi = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm i\beta y} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}. \quad (2.58)$$

Пока числа α и β здесь совершенно произвольны, так что линейной суперпозицией решений типа (2.58) можно получить весьма широкий класс решений уравнения Лапласа.

¹⁾ Последнее обстоятельство свойственно только декартовой системе и обусловлено тем, что все три координаты здесь равноправны. — *Прим. ред.*

Чтобы определить α и β , на потенциал нужно наложить определенные граничные условия. Рассмотрим для примера прямоугольный параллелепипед, расположенный, как показано на фиг. 2.13, с размерами (a, b, c) по осям (x, y, z) . Пусть на всех гранях параллелепипеда потенциал равен нулю, за исключением



Ф и г. 2.13. Полный прямоугольный параллелепипед, на пяти гранях которого потенциал нулевой, а на шестой ($z = c$) принимает заданные значения $\Phi = V(x, y)$.

грани $z = c$, на которой задано значение потенциала $V(x, y)$. Требуется найти значение потенциала всюду внутри параллелепипеда. Исходя из требования $\Phi = 0$ при $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$, легко убедиться, что искомые функции X, Y, Z имеют вид

$$\begin{aligned} X &= \sin \alpha x, \\ Y &= \sin \beta y, \\ Z &= \text{sh}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Из условия $\Phi = 0$ при $x = a$ и $y = b$ следует, что $\alpha a = n\pi$ и $\beta b = m\pi$. Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{n\pi}{a}, \\ \beta_m &= \frac{m\pi}{b}, \\ \gamma_{nm} &= \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

мы можем записать частное решение

$$\Phi_{nm} = \sin \alpha_n x \cdot \sin \beta_m y \cdot \text{sh} \gamma_{nm} z, \quad (2.61)$$

которое удовлетворяет граничным условиям на всех гранях, кроме одной. Искомый потенциал можно разложить в ряд по функциям Φ_{nm} с первоначально произвольными коэффициентами

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n, m=1}^{\infty} A_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \operatorname{sh} \gamma_{nm} z; \quad (2.62)$$

коэффициенты должны определяться из последнего граничного условия. Остается использовать условие $\Phi = V(x, y)$ при $z = c$:

$$V(x, y) = \sum_{n, m=1}^{\infty} A_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \operatorname{sh} \gamma_{nm} c. \quad (2.63)$$

Полученное соотношение представляет собой разложение функции $V(x, y)$ в двойной ряд Фурье. Следовательно, коэффициенты этого ряда равны

$$A_{nm} = \frac{4}{ab \operatorname{sh} \gamma_{nm} c} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin \alpha_n x \sin \beta_m y. \quad (2.64)$$

Если потенциал отличен от нуля на всех шести гранях параллелепипеда, то искомое решение можно получить как линейную суперпозицию шести решений типа (2.62) и (2.64), соответствующих каждой грани. Чтобы решить уравнение Пуассона, т. е. найти потенциал внутри параллелепипеда при заданных распределениях зарядов внутри него и заданных граничных условиях на его поверхности, нужно, согласно (1.43) и (1.44), построить соответствующую функцию Грина. Мы вернемся к этому вопросу после рассмотрения уравнения Лапласа в сферической и цилиндрической системах координат. Здесь же мы заметим лишь, что решение, определяемое соотношениями (2.62) и (2.64), эквивалентно поверхностному интегралу в (1.44).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Метод изображений и инверсии рассмотрен во многих книгах. Лучше или подробнее других он рассмотрен Джинсом [55], гл. 8, Максвеллом [73], т. 1, гл. 11, и Смайтом [100], гл. 4 и 5. Поистине энциклопедическим источником примеров с многочисленными графиками может служить книга Дюрана [37], особенно гл. 3 и 4.

Применение метода конформных отображений для решения двумерных электростатических задач рассмотрено в книгах Дюрана [37], гл. 10, Джинса [55], гл. 8, § 306—337, Максвелла [73], т. 1, гл. 12, и Смайта [100], гл. 4, § 9—29. Этому же вопросу посвящено большое число руководств для инженеров, как, например, монография Роте, Оллендорфа и Польхаузена [88].

Элементарное, но ясное изложение теории рядов и интегралов Фурье и разложений по ортогональным функциям можно найти в книгах Чер-

чилла [28] и Хильдебранда [51], гл. 5. Несколько устаревшее изложение теории рядов и интегралов Фурье, но зато с большим числом примеров и задач дано у Байерли [25].

Дополнение редактора. Довольно подробное рассмотрение различных методов решения электростатических задач, в том числе метода инверсии, можно найти в книге Гринберга [127].

ЗАДАЧИ

2.1. Точечный заряд q помещен на расстоянии d от бесконечного плоского проводника, имеющего нулевой потенциал. С помощью метода изображений найти:

- поверхностную плотность зарядов (построить график);
- силу взаимодействия заряда с плоскостью (использовать закон Кулона для силы взаимодействия заряда с его изображением);
- полную силу, действующую на плоскость (определить ее интегрированием величины $2\pi\sigma^2$ по всей плоскости);
- работу, которую необходимо совершить, чтобы удалить заряд q в бесконечность;
- потенциальную энергию взаимодействия заряда q с его изображением (сравнить результат с п. «г» и проанализировать);
- выразить результат п. «г» в электрон-вольтах для случая, когда электрон находился первоначально на расстоянии 1 \AA от поверхности.

2.2. С помощью метода изображений рассмотреть задачу о точечном заряде q , находящемся *внутри* полой заземленной проводящей сферы с внутренним радиусом a . Найти:

- потенциал внутри сферы;
 - поверхностную плотность индуцированных зарядов;
 - величину и направление силы, действующей на заряд.
- Меняется ли как-либо решение в случае, когда задан потенциал сферы V ? Когда задан ее полный заряд Q ?

2.3. Две бесконечные заземленные проводящие плоскости расположены при $x = a/2$ и $x = -a/2$. Точечный заряд q расположен между плоскостями в точке (x', y', z') , причем $-a/2 < x' < a/2$.

- Найти расположение и величину всех зарядов-изображений, необходимых для того, чтобы удовлетворялись граничные условия для потенциала, и написать функцию Грина $G(x, x')$.
- Для заряда q , расположенного в точке $(x', 0, 0)$, найти распределение поверхностной плотности зарядов, индуцируемых на каждой плоскости, и показать, что сумма зарядов, индуцируемых на обеих плоскостях, равна $-q$.

2.4. Рассмотреть задачу об определении потенциала в полупространстве $z \geq 0$ по условиям Дирихле в плоскости $z = 0$ (и по условию в бесконечности).

- Написать соответствующую функцию Грина $G(x, x')$.
- Найти интегральное выражение для потенциала в произвольной точке P с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) , если в плоскости $z = 0$ потенциал Φ равен константе V внутри окружности радиусом a с центром в начале координат и нулю вне этой окружности.
- Показать, что на оси окружности ($\rho = 0$) потенциал равен

$$\Phi = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right).$$

г) Показать, что на больших расстояниях ($Q^2 + z^2 \gg a^2$) потенциал может быть разложен в степенной ряд по $(Q^2 + z^2)^{-1}$ и что первые члены ряда равны

$$\Phi = \frac{Va^2}{2} \frac{z}{(Q^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3a^2}{4(Q^2 + z^2)} + \frac{5(3Q^2a^2 + a^4)}{8(Q^2 + z^2)^2} + \dots \right].$$

Показать, что результаты п. «в» и «г» согласуются друг с другом в общей области их применимости.

2.5. Изолированная сферическая проводящая оболочка радиусом a помещена в однородное электрическое поле E_0 . Пусть оболочка разрезана на две полусферы плоскостью, перпендикулярной электрическому полю. Найти силу, необходимую для предотвращения разделения полусфер в случае:

- когда сфера незаряжена;
- когда полный заряд сферы равен Q .

2.6. Большой плоскопараллельный конденсатор состоит из двух плоских проводящих пластин, на внутренней поверхности одной из которых имеется маленький полусферический выступ. Проводник с выступом радиусом a находится под нулевым потенциалом, потенциал второго проводника таков, что вдали от выступа электрическое поле между пластинами равно E_0 .

а) Найти плотность поверхностного заряда в произвольной точке на плоскости и на выступе и построить график изменения плотности в зависимости от расстояния (или от угла).

б) Показать, что полная величина заряда на выступе равна $3E_0a^2/4$.

в) Показать, что если вместо другой проводящей пластины поместить заряд q как раз над выступом на расстоянии d от его центра, то заряд, индуцируемый на выступе, будет равен

$$q' = -q \left[1 - \frac{d^2 - a^2}{d \sqrt{d^2 + a^2}} \right].$$

2.7. Заряженная нить с линейной плотностью заряда τ помещена параллельно оси проводящего цилиндра радиусом b на расстоянии R от оси. Считая потенциал цилиндра нулевым, найти методом изображений:

- величину и положение зарядов-изображений;
- потенциал в произвольной точке (в полярных координатах; прямую, соединяющую ось цилиндра с заряженной нитью, принять за ось x), в том числе его асимптотическое представление вдали от цилиндра;
- плотность индуцированного поверхностного заряда (построить график плотности, отнесенной к $\tau/2\pi b$ для $R/b = 2$ и 4);
- силу, действующую на заряженную нить.

2.8. а) Найти функцию Грина для двумерной электростатической задачи, если задан потенциал на поверхности цилиндра радиусом b , и показать, что решение внутри цилиндра дается интегралом Пуассона

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(b, \theta') \frac{b^2 - r^2}{b^2 + r^2 - 2br \cos(\theta' - \theta)} d\theta'.$$

б) Длинная проводящая цилиндрическая оболочка радиусом b разделена узким продольным зазором на две половины, находящиеся соответственно под потенциалом V_1 и V_2 . Показать, что потенциал внутри цилиндра равен

$$\Phi(r, \theta) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{\pi} \arctg \left(\frac{2br}{b^2 - r^2} \cos \theta \right),$$

где θ отсчитывается от плоскости, перпендикулярной плоскости зазора.

в) Рассчитать распределение поверхностной плотности заряда на обеих половинах цилиндра.

г) Какие изменения следует внести в решение, приведенное в п. «а», если требуется найти потенциал в области пространства, внешней по отношению к цилиндру?

2.9. а) Изолированная проводящая сфера находится под потенциалом V . Написать (тривиальное) выражение для потенциала электростатического поля во всем пространстве.

б) Применить теорему инверсии, взяв центр инверсии *вне* проводящей сферы. Убедиться *непосредственно*, что полученное решение описывает потенциал заземленной сферы в присутствии точечного заряда $-VR$, где R — радиус инверсии.

в) Каков физический смысл инвертированного решения в случае, когда центр инверсии находится внутри проводящей сферы?

2.10. Зная, что емкость тонкого плоского кругового проводящего диска радиусом a равна $2a/\pi$ и что поверхностная плотность заряда на изолированном диске, находящемся под определенным потенциалом, пропорциональна $(a^2 - r^2)^{-1/2}$, где r — расстояние от центра диска,

а) показать, что методом инверсии можно найти потенциал бесконечной заземленной проводящей плоскости с круглым отверстием, в произвольной точке которого находится точечный заряд;

б) показать, что для случая единичного точечного заряда, расположенного в центре отверстия, индуцированный заряд на плоскости равен

$$\sigma(r, \theta, \varphi) = -\frac{a}{\pi^2 r^2 \sqrt{r^2 - a^2}};$$

в) показать, что «а» и «б» являются частными случаями более общей задачи о нахождении потенциала заземленной проводящей сферической чаши в присутствии заряда, расположенного в некоторой точке срезанной ее части, которая также решается методом инверсии потенциала диска.

2.11. Полый куб ограничен проводящими гранями, определяемыми шестью плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x = a, y = a, z = a$. Грани $z = 0$ и $z = a$ находятся под потенциалом V , остальные — под нулевым потенциалом.

а) Найти потенциал $\Phi(x, y, z)$ в произвольной точке внутри куба.

б) Рассчитать численно потенциал в центре куба с точностью до трех значащих цифр. Сколько членов ряда нужно удержать, чтобы получить требуемую точность? Сопоставить полученное численное значение со средним значением потенциала на гранях.

в) Найти распределение поверхностной плотности заряда на грани $z = a$.

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ. II

В этой главе мы продолжим рассмотрение граничных задач электростатики. Сначала обсудим задачи со сферической и цилиндрической симметриями и представим решение уравнения Лапласа в виде разложений по соответствующим ортонормированным функциям. Мы лишь кратко остановимся на методах решения различных обыкновенных уравнений, получающихся при разделении переменных в уравнении Лапласа, однако дадим достаточно полное описание свойств получающихся функций.

Проблема представления функции Грина в виде разложения в ряд по ортонормированным функциям, естественно, возникает при попытке решить уравнение Пуассона с учетом граничных условий. Ниже будет приведено несколько примеров нахождения разложения функции Грина и его применения в различных задачах. В частности, будет рассмотрен вопрос об эквивалентности различных методов решения задач электростатики.

§ 1. Уравнение Лапласа в сферических координатах

В сферических координатах (фиг. 3.1) уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3.1)$$

Представим потенциал в виде произведения, т. е. положим

$$\Phi = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi). \quad (3.2)$$

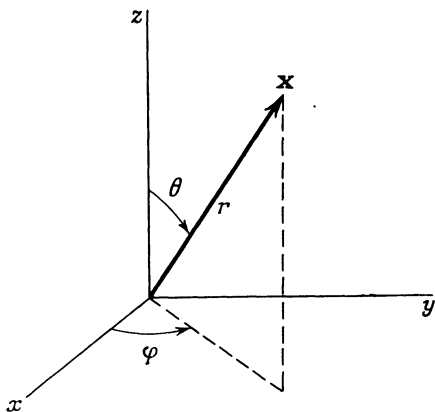
Подставляя (3.2) в (3.1), получаем

$$PQ \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{UP}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0$$

или, после умножения на $r^2 \sin^2 \theta / UPQ$,

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta P} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0. \quad (3.3)$$

От φ зависит здесь только последнее слагаемое. Очевидно, это слагаемое должно быть постоянным; обозначая постоянную через



Ф и г. 3.1.

— m^2 , мы приходем к дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2, \quad (3.4)$$

решение которого имеет вид

$$Q = e^{\pm im\varphi}. \quad (3.5)$$

Для того чтобы функция Q была однозначной, величина m должна быть целой. Аналогично можно получить отдельные уравнения для $P(\theta)$ и $U(r)$:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0, \quad (3.7)$$

где $l(l+1)$ — другая действительная постоянная разделения.

Из вида уравнения для радиальной функции ясно, что его решением является простая степенная функция от r (а не ряд по r). Решение имеет вид

$$U = Ar^{l+1} + Br^{-l}, \quad (3.8)$$

где l пока не определено.

§ 2. Уравнение Лежандра и полиномы Лежандра

В уравнении для $P(\theta)$ обычно переходят от переменной θ к переменной $x = \cos \theta$. Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0. \quad (3.9)$$

Это уравнение называется обобщенным уравнением Лежандра, а его решения — присоединенными функциями Лежандра. Прежде чем анализировать уравнение (3.9), найдем решение в виде степенного ряда для обыкновенного дифференциального уравнения Лежандра, соответствующего $m^2 = 0$:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + l(l+1)P = 0. \quad (3.10)$$

Для того чтобы искомое решение имело физический смысл электростатического потенциала, оно должно быть однозначно, конечно и непрерывно в интервале $-1 \leq x \leq 1$. Будем искать решение в виде ряда

$$P(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, \quad (3.11)$$

где α — пока не определенный параметр. Подставляя это разложение в (3.10), получаем ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} \{ (\alpha+j)(\alpha+j-1) a_j x^{\alpha+j-2} - [(\alpha+j)(\alpha+j+1) - l(l+1)] a_j x^{\alpha+j} \} = 0. \quad (3.12)$$

В этом разложении коэффициенты перед всеми степенями x должны в отдельности обращаться в нуль. Для $j=0$ и $j=1$ отсюда следует, что:

$$\begin{aligned} \text{если } a_0 \neq 0, \quad & \text{то } \alpha(\alpha-1) = 0, \\ \text{если } a_1 \neq 0, \quad & \text{то } \alpha(\alpha+1) = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для остальных j получаем соотношение

$$a_{j+2} = \left[\frac{(\alpha+j)(\alpha+j+1) - l(l+1)}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)} \right] a_j. \quad (3.14)$$

Как легко видеть, оба соотношения (3.13) эквивалентны, и достаточно считать, что лишь один из коэффициентов a_0 и a_1 отличен от нуля. Считая $a_0 = 0$, мы получаем для α два значения: $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. Из (3.14) следует, что разложение в ряд содержит только четные степени x (при $\alpha = 0$) или только нечетные степени x (при $\alpha = 1$).

Можно показать, что оба полученных ряда (соответствующие $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$) обладают следующими свойствами:

а) ряд сходится при $x^2 < 1$ при всех значениях l ;

б) ряд расходится при $x = \pm 1$, если только он не обрывается.

Поскольку мы ищем решение, которое конечно при $x = \pm 1$, так же как и при $x^2 < 1$, необходимо потребовать, чтобы ряд обрывался. Так как α и j — целые неотрицательные числа или нуль, то из рекуррентной формулы (3.14) следует, что ряд обрывается лишь в том случае, когда l равно нулю или положительному целому числу. Но и в этом случае лишь один из двух рядов будет конечен при $x = \pm 1$. Если l четно, то конечен ряд для $\alpha = 0$, если l нечетно, то конечен ряд для $\alpha = 1$ ¹⁾. В обоих случаях старший член пропорционален x^l , следующий x^{l-2} и т. д. до x^0 при четном l или до x при нечетном l . Эти многочлены принято нормировать так, чтобы при $x = +1$ они обращались в единицу. Они называются *полиномами Лежандра* $P_l(x)$ порядка l . Приведем несколько первых полиномов Лежандра:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Исходя из формул (3.11) и (3.14), полиномы Лежандра, представляемые в виде разложения по степеням x , можно преобразовать к весьма компактному виду, известному под названием *формулы Родрига*:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \quad (3.16)$$

Эта формула может быть получена и другим, более изящным путем, в частности с помощью l -кратного интегрирования уравнения (3.10).

Полиномы Лежандра образуют полную систему функций, ортогональных на интервале $-1 \leq x \leq 1$. Для доказательства ортого-

¹⁾ Например, при $l = 0$ в ряде для $\alpha = 1$ общее выражение для коэффициентов имеет вид $a_j = a_0/(j+1)$ при $j = 0, 2, 4, \dots$, так что ряд записывается как $a_0(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots)$. Это разложение в степенной ряд функции $Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x)/(1-x)$, которая, очевидно, обращается в бесконечность при $x = \pm 1$. Для каждого значения l наряду с ограниченным решением — полиномом Лежандра — можно построить аналогичное решение $Q_l(x)$ с логарифмической расходимостью на концах интервала (см. книгу Магнуса и Оберхеттингера [70]).

нальности можно использовать непосредственно дифференциальное уравнение (3.10). Напишем дифференциальное уравнение для $P_l(x)$, умножим его на $P_{l'}(x)$ и проинтегрируем по интервалу $(-1, +1)$:

$$\int_{-1}^1 P_{l'}(x) \left[\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right) + l(l+1)P_l(x) \right] dx = 0. \quad (3.17)$$

Интегрируя первый член по частям, находим

$$\int_{-1}^1 \left[(x^2-1) \frac{dP_l}{dx} \frac{dP_{l'}}{dx} + l(l+1)P_{l'}(x)P_l(x) \right] dx = 0. \quad (3.18)$$

Вычитая из (3.18) такое же равенство с заменой l на l' , и наоборот, приходим к условию ортогональности

$$[l(l+1) - l'(l'+1)] \int_{-1}^1 P_{l'}(x)P_l(x) dx = 0. \quad (3.19)$$

При $l \neq l'$ входящий в (3.19) интеграл должен быть равен нулю, а при $l = l'$ он будет конечным. Чтобы вычислить значение этого интеграла, нужно воспользоваться явным представлением полиномов Лежандра, например формулой Родрига. При этом интеграл принимает вид

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l dx.$$

Интегрируя l раз по частям, получаем

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{(-1)^l}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^l \frac{d^{2l}}{dx^{2l}} (x^2-1)^l dx.$$

В результате $2l$ -кратного дифференцирования величины $(x^2-1)^l$ получим константу $(2l)!$, так что

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^l dx. \quad (3.20)$$

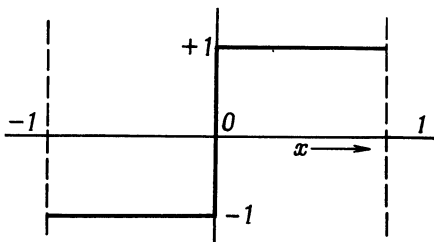
Легко показать, что интеграл в (3.20) равен $2^{2l+1}(l!)/(2l+1)!$; следовательно, условие ортогональности можно записать так:

$$\int_{-1}^1 P_{l'}(x)P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l}, \quad (3.21)$$

а ортонормированные функции (см. гл. 2, § 9) имеют вид

$$U_l(x) = \left(\frac{2l+1}{2} \right)^{1/2} P_l(x). \quad (3.22)$$

Поскольку полиномы Лежандра образуют полную систему ортогональных функций, любая функция $f(x)$ может быть разло-



Ф и г. 3.2.

жена в ряд по полиномам Лежандра на интервале $-1 \leq x \leq 1$. Это разложение имеет вид

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x), \quad (3.23)$$

где

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx. \quad (3.24)$$

Рассмотрим для примера функцию, изображенную на фиг. 3.2:

$$\begin{aligned} f(x) &= +1 && \text{при } x > 0, \\ f(x) &= -1 && \text{при } x < 0. \end{aligned}$$

В этом случае

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \left[\int_0^1 P_l(x) dx - \int_{-1}^0 P_l(x) dx \right].$$

Поскольку при нечетных l полином $P_l(x)$ нечетен относительно $x=0$, а при четных l четен, отличны от нуля только коэффициенты с нечетным l . Таким образом, для нечетных l имеем

$$A_l = (2l+1) \int_0^1 P_l(x) dx. \quad (3.25)$$

Вычисляя последний интеграл с помощью формулы Родрига, найдем

$$A_l = \left(-\frac{1}{2}\right)^{(l-1)/2} \frac{(2l+1)(l-2)!!}{2\left(\frac{l+1}{2}\right)!}, \quad (3.26)$$

где $(2n+1)!! \equiv (2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots 5\cdot 3\cdot 1$. Таким образом, ряд для $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{3}{2}P_1(x) - \frac{7}{8}P_3(x) + \frac{11}{16}P_5(x) - \dots \quad (3.27)$$

Полиномы Лежандра различного порядка связаны определенными рекуррентными соотношениями, которые оказываются весьма полезными при вычислении интегралов, нахождении полиномов высокого порядка по полиномам низкого порядка и т. п. Из формулы Родрига легко вывести соотношение

$$\frac{dP_{l+1}}{dx} - \frac{dP_{l-1}}{dx} - (2l+1)P_l = 0. \quad (3.28)$$

Комбинируя это соотношение с дифференциальным уравнением (3.10), можно получить целый ряд рекуррентных формул, например:

$$\begin{aligned} (l+1)P_{l+1} - (2l+1)xP_l + lP_{l-1} &= 0, \\ \frac{dP_{l+1}}{dx} - x\frac{dP_l}{dx} - (l+1)P_l &= 0, \\ (x^2-1)\frac{dP_l}{dx} - lxP_l + lP_{l-1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Для иллюстрации применения этих рекуррентных соотношений вычислим интеграл

$$I_1 = \int_{-1}^1 xP_l(x)P_{l'}(x)dx. \quad (3.30)$$

Из первой формулы (3.29) найдем выражение для $xP(x)$. Подставляя его в (3.30), приведем интеграл к виду

$$I_1 = \frac{1}{2l+1} \int_{-1}^1 P_{l'}(x)[(l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)]dx.$$

Из условия ортогональности (3.21) следует, что интеграл отличен от нуля лишь при $l' = l \pm 1$ и равен при этом

$$\int_{-1}^1 xP_l(x)P_{l'}(x)dx = \begin{cases} \frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)} & \text{при } l' = l+1, \\ \frac{2l}{(2l-1)(2l+1)} & \text{при } l' = l-1. \end{cases} \quad (3.31)$$

Правые части в (3.31) фактически одинаковы, отличаясь лишь заменой l на l' . Аналогично можно показать, что

$$\int_{-1}^1 x^2 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \begin{cases} \frac{2(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} & \text{при } l' = l+2, \\ \frac{2(2l^2+2l-1)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} & \text{при } l' = l, \end{cases} \quad (3.32)$$

где предполагается, что $l' \geq l$.

§ 3. Граничные задачи с азимутальной симметрией

Из общего вида (3.2) решения уравнения Лапласа в сферических координатах следует, что для задач, обладающих азимутальной симметрией, нужно в (3.5) положить $m = 0$. Поэтому общее решение задачи имеет вид

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta). \quad (3.33)$$

Коэффициенты A_l и B_l определяются из граничных условий. Допустим, что задано значение потенциала $V(\theta)$ на поверхности сферы радиусом a и требуется найти значение потенциала внутри сферы. Если в начале координат нет заряда, то потенциал должен быть конечен в этой точке, так что $B_l = 0$ для всех l . Коэффициенты A_l можно найти, вычисляя значения ряда (3.33) на поверхности сферы:

$$V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \theta). \quad (3.34)$$

Соотношение (3.34) представляет собой разложение по полиномам Лежандра типа (3.23), так что коэффициенты A_l определяются следующим образом:

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^{\pi} V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (3.35)$$

Рассмотрим опять пример, обсуждавшийся в гл. 2, § 8, т. е. две полусферы, имеющие потенциал V и $-V$:

$$V(\theta) = \begin{cases} V & \text{при } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \\ -V & \text{при } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi; \end{cases} \quad (3.36)$$

в этом случае коэффициенты будут пропорциональны коэффициентам ряда (3.27). Таким образом, для потенциала внутри сферы

получается выражение

$$\Phi(r, \theta) = V \left[\frac{3}{2} \frac{r}{a} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{8} \left(\frac{r}{a} \right)^3 P_3(\cos \theta) + \right. \\ \left. + \frac{11}{16} \left(\frac{r}{a} \right)^5 P_5(\cos \theta) - \dots \right]. \quad (3.37)$$

Чтобы найти потенциал вне сферы, достаточно просто заменить $(r/a)^l$ на $(a/r)^{l+1}$. Легко видеть, что получающееся при этом решение совпадает с выражением (2.33), найденным другим методом.

Потенциал может быть единственным образом представлен в виде ряда (3.33), коэффициенты которого определяются граничными условиями. Эта однозначность позволяет иногда найти значение потенциала во всей области по его значению в какой-либо ее части, например на оси симметрии. На оси симметрии соотношение (3.33) принимает вид (при положительных $z = r$)

$$\Phi(z = r) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}]. \quad (3.38)$$

Для отрицательных z каждый член следует умножить на коэффициент $(-1)^l$. Допустим, что мы каким-либо способом можем найти потенциал $\Phi(z)$ для некоторой произвольной точки z на оси симметрии z . Если эта функция может быть разложена в ряд по z вида (3.38) с известными коэффициентами, то решение для произвольной точки пространства находится умножением каждого члена вида r^l или $r^{-(l+1)}$ на $P_l(\cos \theta)$.

Рискуя надоесть читателю, вернемся еще раз к задаче о двух полусферах, находящихся под потенциалами, равными по величине и противоположными по знаку. Мы уже получили решение этой задачи двумя способами [см. (2.33) и (3.37)]. Изложенный выше метод дает третий способ решения этой же задачи. Для точек на оси симметрии ранее было получено выражение (2.28) для потенциала

$$\Phi(z = r) = V \left[1 - \frac{r^2 - a^2}{r \sqrt{r^2 + a^2}} \right].$$

Разлагая по степеням a^2/r^2 , получаем

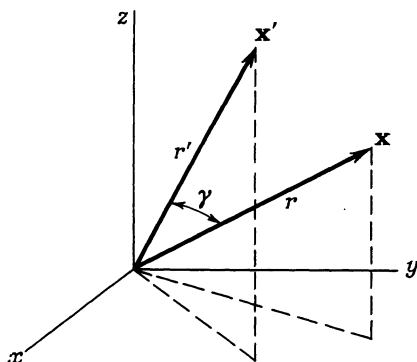
$$\Phi(z = r) = \frac{V}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{(2j-1/2) \Gamma(j-1/2)}{j!} \left(\frac{a}{r} \right)^{2j}. \quad (3.39)$$

Сопоставляя это разложение с (3.38), мы видим, что в нем содержатся лишь нечетные значения l ($l = 2j - 1$). Решение, справед-

ливое для всех точек вне сферы, имеет, очевидно, следующий вид:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{V}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{(2j-1/2)\Gamma(j-1/2)}{j!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2j} P_{2j-1}(\cos \theta). \quad (3.40)$$

Это выражение, конечно, совпадает с ранее полученными разложениями (2.33) и (3.37).



Ф и г. 3.3.

Важную роль играет разложение потенциала в точке x , создаваемого единичным точечным зарядом в точке x' :

$$\frac{1}{|x-x'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma). \quad (3.41)$$

Здесь $r_{<}$ и $r_{>}$ — соответственно меньшая и большая из величин $|x|$ и $|x'|$, а γ — угол между x и x' (фиг. 3.3). Чтобы доказать соотношение (3.41), повернем оси координат так, чтобы вектор x' был расположен вдоль оси z . Тогда потенциал, удовлетворяя уравнению Лапласа, будет обладать азимутальной симметрией, т. е. его всюду, кроме точки $x = x'$, можно представить в виде (3.33):

$$\frac{1}{|x-x'|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \gamma). \quad (3.42)$$

Для точек x на оси z правая часть принимает вид (3.38), тогда как левая часть равна

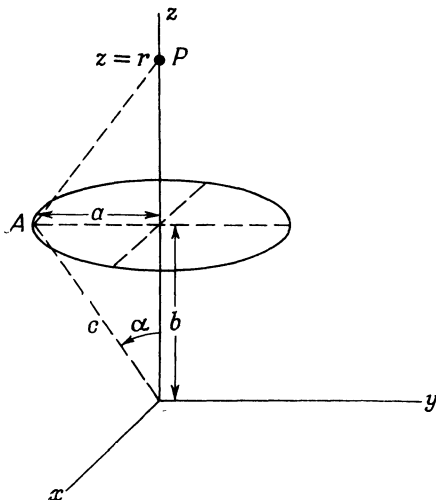
$$\frac{1}{|x-x'|} \equiv \frac{1}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma)^{1/2}} \rightarrow \frac{1}{|r-r'|}. \quad (3.43)$$

Разлагая последнее выражение в ряд, получаем

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l. \quad (3.44)$$

Для точек вне оси достаточно, согласно (3.33) и (3.38), умножить каждое слагаемое в (3.44) на $P_l(\cos \gamma)$. В результате получим требуемое соотношение (3.41).

В качестве второго примера рассмотрим потенциал кругового кольца радиусом a с равномерно распределенным по нему зарядом q .



Фиг. 3.4. Заряженное кольцо радиусом a с полным зарядом q .

Ось кольца совпадает с осью z , а его центр находится в точке $z=b$.

Пусть ось кольца совпадает с осью z , а его центр находится в точке $z=b$ (фиг. 3.4). Потенциал в точке P , находящейся на оси симметрии и имеющей координату $z=r$, равен просто заряду q , деленному на расстояние AP :

$$\Phi(z=r) = \frac{q}{(r^2+c^2-2cr \cos \alpha)^{1/2}}, \quad (3.45)$$

где $c^2 = a^2 + b^2$, а $\alpha = \arctg(a/b)$. Правая часть может быть разложена согласно (3.41). Так, при $r > c$

$$\Phi(z=r) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \alpha), \quad (3.46)$$

а при $r < c$

$$\Phi(z=r) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{c^{l+1}} P_l(\cos \alpha). \quad (3.47)$$

Потенциал в любой точке пространства получается умножением каждого члена этого ряда на $P_l(\cos \theta)$:

$$\Phi(r, \theta) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \alpha). \quad (3.48)$$

Здесь $r_{>}$ и $r_{<}$ — соответственно большая и меньшая из величин r и c .

§ 4. Присоединенные функции Лежандра и сферические гармоники $Y_{lm}(\theta, \varphi)$

До сих пор мы рассматривали задачи с азимутальной симметрией, так что решение имело вид (3.33) и содержало лишь обычные полиномы Лежандра. Однако в общем случае может, конечно, иметь место зависимость потенциала от азимута, так что в (3.5) и (3.9) $m \neq 0$. В этом случае нам необходимо получить решение уравнения (3.9) при произвольных l и m , являющееся обобщением функции $P_l(\cos \theta)$. Точно так же, как и для обычных функций Лежандра, можно показать, что, для того чтобы решение было конечным на интервале $-1 \leq x \leq 1$, параметр l должен быть нулем или положительным целым числом и что целое число m может принимать лишь значения $-l, -(l-1), \dots, 0, \dots, l-1, l$. Обладая этими свойствами решение называется *присоединенной функцией Лежандра* и обозначается $P_l^m(x)$. Для положительных m справедлива формула ¹⁾

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x). \quad (3.49)$$

Если $P_l(x)$ представить с помощью формулы Родрига, то можно прийти к соотношению

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l, \quad (3.50)$$

справедливого как при положительных, так и при отрицательных m . Функции $P_l^{-m}(x)$ и $P_l^m(x)$ пропорциональны друг другу, поскольку дифференциальное уравнение содержит лишь m^2 , а m — целое число. Можно показать, что

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \quad (3.51)$$

¹⁾ Фазу $P_l^m(x)$ мы выбираем так же, как Кондон и Шортли [29]. Явные выражения для $P_l^m(x)$ и рекуррентные формулы см. в книге Магнуса и Оберхеттингера [70].

При фиксированном m функции $P_l^m(x)$ образуют ортогональную систему по индексу l на интервале $-1 \leq x \leq 1$. Условие ортогональности может быть получено тем же методом, что и для полиномов Лежандра, и имеет вид

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2l}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l,l}. \quad (3.52)$$

Решение уравнения Лапласа представляется как произведение трех множителей, зависящих соответственно от r , θ и φ . Удобно объединить вместе угловые множители и построить систему ортонормированных функций на сфере. Мы будем называть эти функции *сферическими гармониками*, хотя так иногда называют общее решение обобщенного уравнения Лежандра (3.9). В более старых руководствах сферические гармоники называют иногда тессеральными функциями. Функции $Q_m(\varphi) = e^{im\varphi}$ образуют полную систему ортогональных функций по индексу m на интервале $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Точно так же функции $P_l^m(\cos \theta)$ образуют полную ортогональную систему по индексу l для каждого m на интервале $-1 \leq \cos \theta \leq 1$. Поэтому их произведение $P_l^m Q_m$ образует полную ортогональную систему на поверхности единичной сферы по двум индексам l и m . Из условия нормировки (3.52) видно, что нормированные функции, которые мы обозначим через $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, имеют вид

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (3.53)$$

Из (3.51) следует, что

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \varphi). \quad (3.54)$$

Условие нормировки и ортогональности имеет вид

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}. \quad (3.55)$$

Условие полноты, эквивалентное (2.41), записывается следующим образом:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta'). \quad (3.56)$$

Ниже приводятся сферические гармоники $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ для нескольких первых значений l и для $m \geq 0$. Для отрицательных значений m можно воспользоваться соотношением (3.54).

Сферические гармоники $Y_{lm}(\theta, \varphi)$

$$\begin{aligned}
 l=0 & \quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \\
 l=1 & \quad \begin{cases} Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}, \\ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta; \end{cases} \\
 l=2 & \quad \begin{cases} Y_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}, \\ Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}, \\ Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right); \end{cases} \\
 l=3 & \quad \begin{cases} Y_{33} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{35}{4\pi}} \sin^3 \theta e^{3i\varphi}, \\ Y_{32} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{105}{4\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{2i\varphi}, \\ Y_{31} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{21}{4\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{i\varphi}, \\ Y_{30} = \sqrt{\frac{7}{4\pi}} \left(\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \right). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что при $m = 0$

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta). \quad (3.57)$$

Произвольную функцию $g(\theta, \varphi)$ можно разложить в ряд по сферическим гармоникам:

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.58)$$

Коэффициенты ряда равны

$$A_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi). \quad (3.58')$$

В § 5 нам понадобится разложение для $\theta = 0$. В соответствии с (3.57) имеем, очевидно:

$$[g(\theta, \varphi)]_{\theta=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} A_{l0}, \quad (3.59)$$

где

$$A_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int d\Omega P_l(\cos \theta) g(\theta, \varphi). \quad (3.60)$$

Все члены ряда с $m \neq 0$ обращаются в нуль при $\theta = 0$.

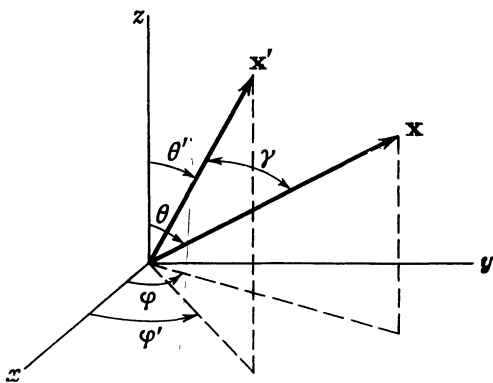
Общее решение граничной задачи в сферических координатах имеет вид суммы произведений сферических гармоник на соответствующие степени r :

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}] Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.61)$$

Это выражение является обобщением соотношения (3.33). Если значение потенциала задано на некоторой сферической поверхности, то коэффициенты разложения можно найти, вычисляя значение потенциала (3.61) на поверхности [см. (3.58)].

§ 5. Теорема сложения для сферических гармоник

Весьма интересное и часто используемое математическое свойство сферических гармоник характеризуется так называемой *теоремой*



Ф и г. 3.5.

сложения. Пусть даны две точки x и x' со сферическими координатами соответственно (r, θ, φ) и (r', θ', φ') и пусть γ — угол между радиусами-векторами этих точек (фиг. 3.5). Теорема сложения выражает полином Лежандра l -го порядка, зависящий от угла γ , через

произведения сферических гармоник, зависящих от θ , φ и θ' , φ' :

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.62)$$

Здесь $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$. Для доказательства этого соотношения будем считать вектор x' фиксированным в пространстве. Тогда полином $P_l(\cos \gamma)$ будет функцией углов θ , φ , в которую углы θ' , φ' входят как параметры. Следовательно, $P_l(\cos \gamma)$ можно разложить в ряд типа (3.58):

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m=-l'}^{l'} A_{l'm}(\theta', \varphi') Y_{l'm}(\theta, \varphi). \quad (3.63)$$

Сопоставляя это выражение с (3.62), мы видим, что в (3.63) должны входить лишь члены с $l' = l$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что если выбрать оси координат так, чтобы вектор x' был направлен вдоль оси z , то угол γ станет обычным полярным углом и $P_l(\cos \gamma)$ будет удовлетворять уравнению

$$\nabla'^2 P_l(\cos \gamma) + \frac{l(l+1)}{r^2} P_l(\cos \gamma) = 0, \quad (3.64)$$

где ∇'^2 — оператор Лапласа в новых осях. Если теперь повернуть оси назад в положение, указанное на фиг. 3.5, то оператор Лапласа не изменится¹⁾, $\nabla'^2 = \nabla^2$, и r тоже останется неизменным. Таким образом, $P_l(\cos \gamma)$ по-прежнему удовлетворяет уравнению типа (3.64), т. е. является сферической гармоникой порядка l . Иными словами, это значит, что $P_l(\cos \gamma)$ представляет собой линейную комбинацию функций Y_{lm} порядка l :

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l A_m(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.65)$$

Коэффициенты $A_m(\theta', \varphi')$ определяются соотношением

$$A_m(\theta', \varphi') = \int Y_{lm}^*(\theta, \varphi) P_l(\cos \gamma) d\Omega. \quad (3.66)$$

Чтобы определить коэффициент $A_m(\theta', \varphi')$, заметим, что его можно рассматривать, согласно (3.60), как соответствующий $m' = 0$ коэффициент разложения функции $\sqrt{4\pi/(2l+1)} Y_{lm}^*(\theta, \varphi)$ в ряд по $Y_{lm'}$ (γ, β), где γ, β — угловые координаты в штрихованной

¹⁾ Инвариантность оператора Лапласа при преобразовании вращения проще всего доказать, исходя из того, что $\nabla^2 \psi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi$ представляет собой операторное скалярное произведение, а скалярное произведение инвариантно при преобразовании вращения.

системе, в которой получено уравнение (3.64). Тогда, согласно (3.59), учитывая, что l принимает лишь одно значение, получаем

$$A_m(\theta', \varphi') = \frac{4\pi}{2l+1} \{Y_{lm}^*[\theta(\gamma, \beta), \varphi(\gamma, \beta)]\}_{\gamma=0}. \quad (3.67)$$

В пределе $\gamma \rightarrow 0$ углы (θ, φ) , являющиеся функциями (γ, β) , переходят в (θ', φ') , что и доказывает теорему сложения (3.62). Иногда эту теорему записывают не в функциях Y_{lm} , а в функциях $P_l^m(\cos \theta)$. В этом случае она имеет следующий вид:

$$P_l(\cos \gamma) = P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') \cos [m(\varphi - \varphi')]. \quad (3.68)$$

В пределе $\gamma \rightarrow 0$ (3.62) дает «правило суммирования» квадратов функции Y_{lm} :

$$\sum_{m=-l}^l |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}. \quad (3.69)$$

С помощью теоремы сложения можно записать разложение (3.41) потенциала в точке x , обусловленного единичным зарядом в точке x' , в более общем виде. Подставляя в (3.41) выражение (3.62) для $P_l(\cos \gamma)$, получаем

$$\frac{1}{|x-x'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.70)$$

Соотношение (3.70) представляет потенциал в виде суммы произведений в координатах x и x' . Такое представление удобно, когда приходится, например, интегрировать по плотности зарядов и т. п., т. е. когда одна из переменных является переменной интегрирования, а вторая — координатой точки наблюдения. Правда, это удобство достигается ценой замены простой суммы на двойную.

§ 6. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах. Функции Бесселя

В цилиндрических координатах (ρ, φ, z) , показанных на фиг. 3.6, уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.71)$$

Для разделения переменных произведем подстановку

$$\Phi(\varrho, \varphi, z) = R(\varrho) Q(\varphi) Z(z). \quad (3.72)$$

Путем обычных преобразований получаем три обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0, \quad (3.73)$$

$$\frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + \nu^2 Q = 0, \quad (3.74)$$

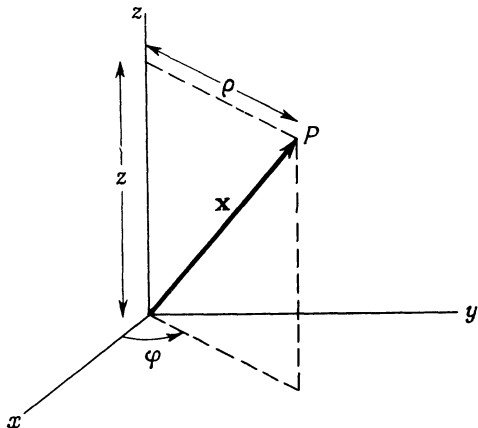
$$\frac{d^2 R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dR}{d\varrho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\varrho^2} \right) R = 0. \quad (3.75)$$

Первые два уравнения решаются элементарно:

$$Z(z) = e^{\pm kz},$$

$$Q(\varphi) = e^{\pm i\nu\varphi}. \quad (3.76)$$

Для того чтобы потенциал был однозначным, параметр разделения ν должен быть целым. Параметр k , пока не наложены граничные



Ф и г. 3.6.

условия в направлении z , остается произвольным. Мы будем сначала предполагать k действительным.

Радиальное уравнение приводится к стандартной форме заменой переменных $x = k\varrho$. Оно принимает при этом вид

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0. \quad (3.77)$$

Это уравнение называется уравнением Бесселя, а его решения — функциями Бесселя порядка ν . Представляя решение в виде сте-

пенного ряда типа

$$R(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, \quad (3.78)$$

находим, что

$$\alpha = \pm \nu \quad (3.79)$$

и

$$a_{2j} = -\frac{1}{4j(j+\alpha)} a_{2j-2} \quad (3.80)$$

при $j = 0, 1, 2, \dots$. Коэффициенты при всех нечетных степенях x^j равны нулю. Итерация рекуррентной формулы дает

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha+1)}{2^{2j} j! \Gamma(j+\alpha+1)} a_0. \quad (3.81)$$

Постоянную a_0 обычно принимают равной $a_0 = [2^\alpha \Gamma(\alpha+1)]^{-1}$. При этом два решения уравнения записываются в виде

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}, \quad (3.82)$$

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}. \quad (3.83)$$

Эти решения называются функциями Бесселя первого рода порядка ν и $-\nu$. Если ν не целое число, то функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ образуют пару линейно независимых решений дифференциального уравнения Бесселя второго порядка. Однако при целых ν эти решения, как известно, линейно зависимы. Действительно, при $\nu = m$, как видно из представления функций Бесселя в виде ряда, имеет место соотношение

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x). \quad (3.84)$$

Поэтому при целых ν нужно знать еще другое решение, линейно независимое от $J_\nu(x)$. Даже при нецелых ν принято вместо пары функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ рассматривать другую пару, а именно $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$, где $N_\nu(x)$ — так называемая функция Неймана (функция Бесселя второго рода), определяемая соотношением

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}. \quad (3.85)$$

Для нецелых ν , очевидно, функция $N_\nu(x)$ линейно независима от $J_\nu(x)$. Можно показать, что в пределе, когда ν стремится к целому значению, функция $N_\nu(x)$ остается линейно независимой от

$J_\nu(x)$. Представления функций $N_\nu(x)$ в виде ряда можно найти в математических справочниках.

Функциями Бесселя третьего рода, или *функциями Ханкеля*, называются следующие линейные комбинации функций $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \quad (3.86)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x).$$

Так же как и пара функций $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$, пара функций Ханкеля образует фундаментальную систему решений уравнения Бесселя.

Все эти функции (J_ν , N_ν , $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$) удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\Omega_{\nu-1}(x) + \Omega_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} \Omega_\nu(x), \quad (3.87)$$

$$\Omega_{\nu-1}(x) - \Omega_{\nu+1}(x) = 2 \frac{d\Omega_\nu(x)}{dx}, \quad (3.88)$$

где $\Omega_\nu(x)$ — любая из цилиндрических функций порядка ν . В справедливости этих соотношений легко убедиться, исходя из представления решений в виде ряда (3.82).

Для удобства мы приведем здесь предельные представления бесселевых функций различного рода для малых и больших значений аргумента. Для простоты выпишем лишь первые члены разложения:

При $x \ll 1$

$$J_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \quad (3.89)$$

$$N_\nu(x) \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + 0,5772\dots\right) & \text{при } \nu = 0, \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu & \text{при } \nu \neq 0. \end{cases} \quad (3.90)$$

Здесь ν считается действительным и неотрицательным.

При $x \gg 1$, ν

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ N_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Переход от области «малых» значений x , описываемых выражениями (3.89) и (3.90), к области больших значений, где справедливы асимптотические формулы, имеет место при $x \sim \nu$.

Из асимптотического разложения (3.91) видно, что каждая функция Бесселя имеет бесконечное количество корней¹⁾. Нас будут главным образом интересовать корни функции Бесселя $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x_{\nu n}) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad (3.92)$$

здесь через $x_{\nu n}$ обозначен n -й корень функции $J_\nu(x)$. Ниже приводятся первые три корня для трех значений ν :

$$\nu = 0 \quad x_{0n} = 2,405; \quad 5,520; \quad 8,654 \dots;$$

$$\nu = 1 \quad x_{1n} = 3,832; \quad 7,016; \quad 10,173 \dots;$$

$$\nu = 2 \quad x_{2n} = 5,136; \quad 8,417; \quad 11,620 \dots$$

Для больших n значения корней (по крайней мере до трех значащих цифр) можно находить по довольно точной асимптотической формуле

$$x_{\nu n} \approx n\pi + \left(\nu - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2}.$$

Значения корней приведены, например, в таблицах Янке и Эмде [54].

После того как мы нашли решение радиального уравнения, выразив его через функции Бесселя, естественно, возникает вопрос о том, в каком смысле можно считать функции Бесселя ортогональной полной системой. Будем рассматривать лишь функции Бесселя первого рода и покажем, что система функций $\sqrt{\rho} J_\nu(x_{\nu n}\rho/a)$ с фиксированным $\nu \geq 0$ и $n = 1, 2, \dots$ представляет собой ортогональную систему на интервале $0 \leq \rho \leq a$. Для доказательства рассмотрим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $J_\nu(x_{\nu n}\rho/a)$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dJ_\nu(x_{\nu n}\rho/a)}{d\rho} \right] + \left(\frac{x_{\nu n}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) = 0. \quad (3.93)$$

Умножив его на $\rho J_\nu(x_{\nu n'}\rho/a)$ и проинтегрировав от 0 до a , получим

$$\int_0^a J_\nu \left(x_{\nu n'} \frac{\rho}{a} \right) \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dJ_\nu(x_{\nu n}\rho/a)}{d\rho} \right] d\rho + \\ + \int_0^a \left(\frac{x_{\nu n}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) \rho J_\nu \left(x_{\nu n'} \frac{\rho}{a} \right) J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) d\rho = 0.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что произведение $\rho J_\nu J_\nu'$ равно

¹⁾ Имеются в виду функции Бесселя первого и второго родов. Функции Ханкеля корней не имеют, так как их вещественная и мнимая части не обращаются в нуль одновременно.— *Прим. ред.*

нулю (для $\nu \geq 0$) при $\varrho = 0$ и $\varrho = a$, получаем

$$-\int_0^a \varrho \frac{dJ_\nu(x_{\nu n'} \varrho/a)}{d\varrho} \frac{dJ_\nu(x_{\nu n} \varrho/a)}{d\varrho} d\varrho + \\ + \int_0^a \left(\frac{x_{\nu n}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\varrho^2} \right) \varrho J_\nu \left(x_{\nu n'} \frac{\varrho}{a} \right) J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\varrho}{a} \right) d\varrho = 0.$$

Написав такое же выражение с заменой n на n' и вычтя его из предыдущего, придем к соотношению ортогональности

$$(x_{\nu n}^2 - x_{\nu n'}^2) \int_0^a \varrho J_\nu \left(x_{\nu n'} \frac{\varrho}{a} \right) J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\varrho}{a} \right) d\varrho = 0. \quad (3.94)$$

С помощью рекуррентных соотношений (3.87) и (3.88) и дифференциального уравнения для функции Бесселя можно показать, что

$$\int_0^a \varrho J_\nu \left(x_{\nu n'} \frac{\varrho}{a} \right) J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\varrho}{a} \right) d\varrho = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2 \delta_{n'n}. \quad (3.95)$$

Предполагая, что система функций Бесселя является полной, мы можем разложить произвольную функцию от ϱ на интервале $0 \leq \varrho \leq a$ в ряд Фурье — Бесселя

$$f(\varrho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\nu n} J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\varrho}{a} \right), \quad (3.96)$$

где

$$A_{\nu n} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})} \int_0^a \varrho f(\varrho) J_\nu \left(\frac{x_{\nu n} \varrho}{a} \right) d\varrho. \quad (3.97)$$

При выводе соотношения (3.96) мы предполагали, что $\nu \geq 0$. Можно, однако, показать, что (3.96) справедливо для всех $\nu \geq -1$.

Разложение (3.96) и (3.97) — обычное разложение в ряд Фурье — Бесселя, особенно удобное для функций, обращающихся в нуль при $\varrho = a$, т. е. удовлетворяющих однородным условиям Дирихле на цилиндре (см. § 7). Следует, однако, заметить, что возможно также представление в виде ряда иного типа, а именно ряда по функциям $\sqrt{\varrho} J_\nu(y_{\nu n} \varrho/a)$, где $y_{\nu n}$ представляет собой n -й корень уравнения $dJ_\nu(x)/dx = 0$. Это связано с тем, что при доказательстве ортогональности системы функций требуется, собственно говоря, лишь обращение в нуль величины $\varrho J_\nu(\lambda \varrho) (d/d\varrho) J_\nu(\lambda' \varrho)$ в конечных точках $\varrho = 0$ и $\varrho = a$. Это условие удовлетворяется как при

$\lambda = x_{\nu n}/a$, так и при $\lambda = y_{\nu n}/a$, где $J_{\nu}(x_{\nu n}) = 0$ и $J'_{\nu}(y_{\nu n}) = 0$. Разложение по функциям $V/\varrho J_{\nu}(y_{\nu n}\varrho/a)$ особенно удобно для функций, имеющих нулевую производную при $\varrho = a$ (см. задачу 3.8).

Ряд Фурье — Бесселя — лишь один из типов возможных разложений по функциям Бесселя. В качестве других примеров упомянем ряды Неймана $\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}(z)$, Каптейна $\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}[(\nu+n)z]$

и Шлёмилха $\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_{\nu}(nx)$. Детальное описание свойств этих рядов можно найти в книге Ватсона [114] (гл. 16—19). Ряды Каптейна встречаются при исследовании кеплеровского движения планет и излучения быстро движущихся зарядов (см. задачи 14.7 и 14.8).

В заключение рассмотрения свойств функций Бесселя следует заметить, что если бы при разделении переменных в уравнении Лапласа мы положили постоянную разделения в (3.73) равной $-k^2$, то функция $Z(z)$ имела бы вид $\sin kz$ или $\cos kz$, а для $R(\varrho)$ мы получили бы уравнение

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dR}{d\varrho} - \left(k^2 + \frac{\nu^2}{\varrho^2}\right) R = 0. \quad (3.98)$$

Подстановка $k\varrho = x$ дает

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0. \quad (3.99)$$

Решения этого уравнения называются *модифицированными функциями Бесселя*. Они, очевидно, представляют собой просто функции Бесселя от чисто мнимого аргумента. Обычно в качестве двух линейно независимых решений выбирают функции $I_{\nu}(x)$ и $K_{\nu}(x)$, определяемые следующим образом:

$$I_{\nu}(x) = i^{-\nu} J_{\nu}(ix), \quad (3.100)$$

$$K_{\nu}(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_{\nu}^{(1)}(ix). \quad (3.101)$$

Эти функции действительны при действительных значениях аргументов. В пределе для малых и больших значений аргумента справедливы следующие представления (при действительном $\nu \geq 0$):

При $x \ll 1$

$$I_{\nu}(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}, \quad (3.102)$$

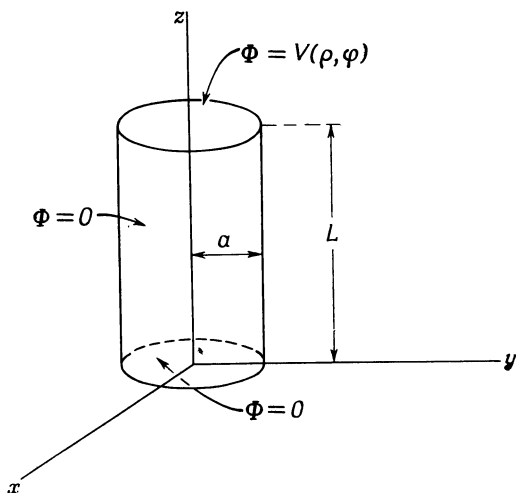
$$K_{\nu}(x) \rightarrow \begin{cases} -\left(\ln \frac{x}{2} + 0,5772 \dots\right) & \text{при } \nu = 0, \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} & \text{при } \nu \neq 0. \end{cases} \quad (3.103)$$

При $x \gg 1, \nu$

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right], \\ K_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.104)$$

§ 7. Граничные задачи в цилиндрических координатах

Решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид: $\Phi = R(\rho) Q(\varphi) Z(z)$, где каждый множитель определен в предыдущем параграфе. Перейдем теперь к конкретной граничной



Ф и г. 3.7.

задаче. Пусть рассматриваемая область имеет вид цилиндра радиусом a и высотой L (фиг. 3.7); нижняя и верхняя поверхности цилиндра задаются уравнениями $z = 0$ и $z = L$. Пусть потенциал на боковой и нижней поверхностях цилиндра равен нулю, а на верхней поверхности $\Phi = V(\rho, \varphi)$. Нас интересует потенциал в произвольной точке внутри цилиндра. Из условия однозначности потенциала Φ и его обращения в нуль при $z = 0$ следует, что

$$\begin{aligned} Q(\varphi) &= A \sin m\varphi + B \cos m\varphi, \\ Z(z) &= \text{sh } kz, \end{aligned} \quad (3.105)$$

где $\nu = m$ — целое, а k — постоянная, подлежащая определению.

Радиальный множитель имеет вид

$$R(\varrho) = C J_m(k\varrho) + D N_m(k\varrho). \quad (3.106)$$

Чтобы потенциал был конечным при $\varrho = 0$, коэффициент D должен быть равен нулю. Из условия обращения потенциала в нуль при $\varrho = a$ следует, что k может принимать лишь значения

$$k_{mn} = \frac{x_{mn}}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.107)$$

где x_{mn} — корни уравнения $J_m(x_{mn}) = 0$.

Учитывая все эти ограничения, мы получаем общее решение в виде

$$\Phi(\varrho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\varrho) \operatorname{sh}(k_{mn}z) [A_{mn} \sin m\varphi + B_{mn} \cos m\varphi] \quad (3.108)$$

При $z = L$ оно должно принимать заданное значение $V(\varrho, \varphi)$, так что

$$V(\varrho, \varphi) = \sum_{m,n} \operatorname{sh}(k_{mn}L) J_m(k_{mn}\varrho) [A_{mn} \sin m\varphi + B_{mn} \cos m\varphi].$$

Мы получили ряд Фурье по φ и ряд Фурье — Бесселя по ϱ . Согласно (2.43) и (3.97), коэффициенты ряда равны

$$A_{mn} = \frac{2 \operatorname{csch}(k_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\varrho \varrho V(\varrho, \varphi) J_m(k_{mn}\varrho) \sin m\varphi, \quad (3.109)$$

$$B_{mn} = \frac{2 \operatorname{csch}(k_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\varrho \varrho V(\varrho, \varphi) J_m(k_{mn}\varrho) \cos m\varphi$$

с той оговоркой, что для $m = 0$ в ряд входит $1/2 B_{0n}$.

Частный вид разложения (3.108) определяется тем условием, что потенциал обращается в нуль при $z = 0$ для всех ϱ и при $\varrho = a$ для всех z . При других граничных условиях форма ряда будет иной. В задаче 3.6 рассмотрен пример, когда потенциал равен нулю на торцовых поверхностях и принимает заданное значение $V(\varphi, z)$ на боковой поверхности.

Ряды Фурье — Бесселя типа (3.108) пригодны при рассмотрении конечных интервалов изменения ϱ ($0 \leq \varrho \leq a$). Если же $a \rightarrow \infty$, то ряд переходит в интеграл подобно тому, как тригонометрический ряд Фурье переходит в интеграл Фурье. Так, например, если потенциал в области, свободной от зарядов, конечен при $z \geq 0$ и стремится

ся к нулю при $z \rightarrow \infty$, то общее решение для $z \geq 0$ имеет вид

$$\Phi(\varrho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{-kz} J_m(k\varrho) [A_m(k) \sin m\varphi + B_m(k) \cos m\varphi]. \quad (3.110)$$

Если потенциал должен быть равен $V(\varrho, \varphi)$ на всей плоскости $z = 0$, то коэффициенты определяются из соотношения

$$V(\varrho, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk J_m(k\varrho) [A_m(k) \sin m\varphi + B_m(k) \cos m\varphi].$$

Зависимость от φ по-прежнему описывается рядом Фурье. Следовательно, коэффициенты $A_m(k)$ и $B_m(k)$ определяются интегральными соотношениями

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(\varrho, \varphi) \begin{cases} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{cases} d\varphi = \int_0^{\infty} J_m(k'\varrho) \begin{cases} A_m(k') \\ B_m(k') \end{cases} dk'. \quad (3.111)$$

Эти радиальные интегральные уравнения первого рода легко решаются, поскольку они представляют собой *преобразования Ханкеля*. Для обращения уравнений (3.111) удобно использовать интегральное соотношение

$$\int_0^{\infty} x J_m(kx) J_m(k'x) dx = \frac{1}{k} \delta(k' - k). \quad (3.112)$$

Умножая обе части равенства (3.111) на $\varrho J_m(k\varrho)$, интегрируя по ϱ и учитывая (3.112), мы получаем интегральные выражения для коэффициентов на всей плоскости $z = 0$

$$\begin{cases} A_m(k) \\ B_m(k) \end{cases} = \frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} d\varrho \varrho \int_0^{2\pi} d\varphi V(\varrho, \varphi) J_m(k\varrho) \begin{cases} \sin m\varphi, \\ \cos m\varphi. \end{cases} \quad (3.113)$$

Как обычно, для $m = 0$ в ряд (3.110) следует подставить $1/2 B_0(k)$.

§ 8. Разложение функций Грина в сферических координатах

Для нахождения потенциала при заданном распределении зарядов и при заданных граничных условиях (т. е. для решения уравнения Пуассона) нужно знать функцию Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, удовлетворяющую соответствующим граничным условиям. Часто эти условия задаются на координатных поверхностях какой-либо системы координат, в которой переменные разделяются, например на сферической или цилиндрической границе. В этом случае удобно представить функцию Грина в виде разложения по функциям, соответ-

вующим рассматриваемой системе координат. Проиллюстрируем сначала характер применяемых разложений на примере сферических координат.

Для случая, когда граничных поверхностей нет (т. е. граница находится «в бесконечности»), мы уже получили раньше разложение функции Грина [см. (3.70)]:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Предположим, нам нужно найти аналогичное выражение для функции Грина, соответствующей «внешней» задаче для сферы радиусом a . Это выражение легко находится, если исходить из выражения (2.22) для функции Грина, получающегося методом изображений. Используя разложение (3.70) для обоих слагаемых в (2.22), получаем

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l, m} \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.114)$$

Чтобы более ясно представить себе структуру разложения (3.114) и убедиться в выполнении граничных условий, выпишем радиальные множители отдельно для $r < r'$ и $r > r'$:

$$\left[\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] = \begin{cases} \frac{1}{r'^{l+1}} \left[r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right] & \text{при } r < r', \\ \left[r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right] \frac{1}{r^{l+1}} & \text{при } r > r'. \end{cases} \quad (3.115)$$

Прежде всего мы видим, что при $r = a$ или $r' = a$ радиальный множитель обращается в нуль, как и должно быть. Далее при $r \rightarrow \infty$ или $r' \rightarrow \infty$ радиальный множитель тоже стремится к нулю. Он симметричен относительно r и r' . Как функция от r (при фиксированном r') радиальный множитель представляет собой линейную комбинацию решений r^l и $r^{-(l+1)}$ радиальной части (3.7) уравнения Лапласа. Правда, эти линейные комбинации различны при $r < r'$ и при $r > r'$. Причина этого станет нам ясна ниже; она связана с тем, что функция Грина является решением уравнения Пуассона с неоднородностью типа δ -функции.

Теперь, получив общее представление о разложении функции Грина в разделяющихся координатах, перейдем к систематическому нахождению таких разложений из общих соотношений. Функция Грина для задачи о потенциале удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.116)$$

и граничным условиям $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ при \mathbf{x} или \mathbf{x}' , лежащих на граничной поверхности S . Для сферической граничной поверхности будем искать разложение типа (3.114). В соответствии с этим воспользуемся представлением δ -функции в виде ¹⁾

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta').$$

Используя условие полноты (3.56) для представления угловой части δ -функции, найдем

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.117)$$

Рассматривая функцию Грина как функцию от \mathbf{x} , мы можем представить ее в виде разложения

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}(\theta', \varphi') g_l(r, r') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.118)$$

Подставляя разложения (3.117) и (3.118) в уравнение (3.116), найдем

$$A_{lm}(\theta', \varphi') = Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \quad (3.119)$$

и

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r g_l(r, r')] - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r'). \quad (3.120)$$

Мы видим, что радиальные множители в функции Грина удовлетворяют при $r \neq r'$ однородному уравнению (3.7) для радиальных функций. Поэтому мы можем написать

$$g_l(r, r') = \begin{cases} Ar^l + Br^{-(l+1)} & \text{при } r < r', \\ A'r^l + B'r^{-(l+1)} & \text{при } r > r'. \end{cases}$$

Коэффициенты A, B, A', B' являются функциями от r' ; они определяются граничными условиями, требованием, налагаемым соотношением (3.120) с δ -функцией в правой части, и условием симметрии функции $g_l(r, r')$ по r и r' . Пусть граничные поверхности представляют собой концентрические сферы радиусами $r = a$ и $r = b$. Чтобы функция $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ обращалась в нуль для точек \mathbf{x} на этих сферах, функция $g_l(r, r')$ должна быть равна нулю при $r = a$

¹⁾ Чтобы выразить $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3)$ через координаты (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , связанные с (x_1, x_2, x_3) якобианом $J(x_i, \xi_i)$, заметим, что физический смысл имеет величина $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3x$. Отсюда следует, что

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{|J(x_i, \xi_i)|} \delta(\xi_1 - \xi'_1) \delta(\xi_2 - \xi'_2) \delta(\xi_3 - \xi'_3).$$

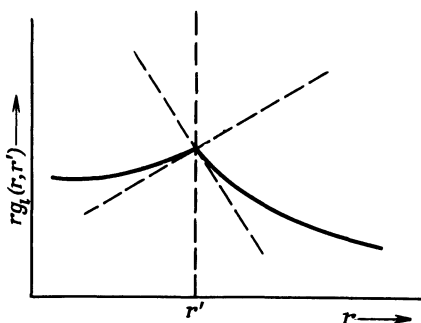
и $r = b$. Таким образом, $g_l(r, r')$ представляется в виде

$$g_l(r, r') = \begin{cases} A \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) & \text{при } r < r', \\ B' \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) & \text{при } r > r'. \end{cases} \quad (3.121)$$

Из условия симметрии по r и r' следует, что коэффициенты $A(r')$ и $B'(r')$ должны быть таковы, чтобы функцию $g_l(r, r')$ можно было записать следующим образом:

$$g_l(r, r') = C \left(r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right), \quad (3.122)$$

где $r_{<}$ и $r_{>}$ — соответственно меньшая и большая из величин r и r' . Чтобы найти значение постоянной C , мы должны учесть δ -функцию



Ф и г. 3.8. График радиальной функции Грина.
В точке r' наклон кривой претерпевает скачок.

в (3.120). Если обе части (3.120) умножить на r и проинтегрировать по интервалу от $r = r' - \varepsilon$ до $r = r' + \varepsilon$, где ε очень мало, то получим

$$\left\{ \frac{d}{dr} [r g_l(r, r')] \right\}_{r'+\varepsilon} - \left\{ \frac{d}{dr} [r g_l(r, r')] \right\}_{r'-\varepsilon} = -\frac{4\pi}{r'}. \quad (3.123)$$

Таким образом, наклон кривой $r g_l(r, r')$ претерпевает скачок в точке $r = r'$ (фиг. 3.8).

Если $r = r' + \varepsilon$, то $r_{>} = r$, а $r_{<} = r'$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d}{dr} [r g_l(r, r')] \right\}_{r'+\varepsilon} &= C \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^l} - \frac{r^{l+1}}{b^{2l+1}} \right) \right]_{r=r'} = \\ &= -\frac{C}{r'} \left[1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[l + (l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right]. \end{aligned}$$

Аналогично найдем

$$\left\{ \frac{d}{dr} [r g_l(r, r')] \right\}_{r'-\varepsilon} = \frac{C}{r'} \left[l + 1 + l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[1 - \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right].$$

Подставляя эти производные в (3.123), получаем

$$C = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]}. \quad (3.124)$$

Соотношения (3.124), (3.122), (3.119) и (3.118) позволяют записать функцию Грина для сферического слоя, ограниченного поверхностями $r = a$ и $r = b$:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} \times \\ \times \left(r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right). \quad (3.125)$$

В двух частных случаях, когда $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$ и когда $b \rightarrow \infty$, мы опять приходим к (3.70) или (3.114). Чтобы найти функцию Грина для «внутренней» задачи для сферы радиусом b , достаточно положить $a = 0$ в (3.125). Для простой сферы разложение функции Грина проще всего получить, исходя из решения, полученного методом изображений. Однако общую формулу (3.125) для сферического слоя довольно трудно получить методом изображений, так как в этом случае требуется бесконечная совокупность зарядов-изображений.

§ 9. Нахождение потенциала с помощью разложений для сферических функций Грина

Общее решение уравнения Пуассона при заданных значениях потенциала на границе области (см. гл. 1, § 10) представляется в виде

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n'} da'. \quad (3.126)$$

Рассмотрим для примера потенциал *внутри* сферы радиусом b . Прежде всего мы установим эквивалентность поверхностного интеграла в (3.126) с выражением, полученным приведенным ранее методом в § 4 [см. (3.61) и (3.58)]. Положив $a = 0$ в (3.125), найдем нормальную производную при $r' = b$

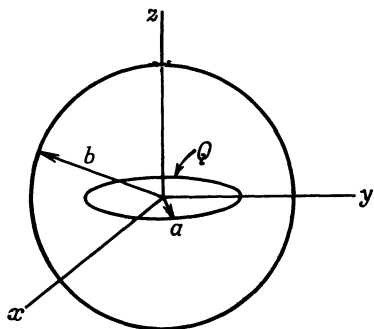
$$\frac{\partial G}{\partial n'} = \frac{\partial G}{\partial r'} \Big|_{r'=b} = -\frac{4\pi}{b^2} \sum_{l, m} \left(\frac{r}{b} \right)^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.127)$$

Отсюда следует, что решение уравнения Лапласа внутри сферы радиусом $r = b$, на поверхности которой потенциал $\Phi = V(\theta', \varphi')$, представляется, согласно (3.126), в виде

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{l, m} \left[\int V(\theta', \varphi') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') d\Omega' \right] \left(\frac{r}{b} \right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.128)$$

Это решение фактически представляет собой разложение (3.61) с учетом (3.58') для рассматриваемого случая.

Существует еще *третья* форма представления решения для сферы, так называемый интеграл Пуассона (2.25). Эквивалентность



Фиг. 3.9. Заряженное кольцо радиусом a с зарядом Q внутри заземленной проводящей сферы радиусом b .

этого решения и решения, получаемого при использовании разложения функции Грина, следует из того, что оба эти решения вытекают из общего соотношения (3.126) с функцией Грина, найденной методом изображений. Прямое доказательство эквивалентности решений (2.25) и (3.61) предоставляется провести читателю.

Обратимся теперь к задаче о потенциале заряда, распределенного по объему, т. е. к рассмотрению объемного интеграла в (3.126). Достаточно рассмотреть случай нулевого потенциала на граничной поверхности. Общий случай может быть получен линейной суперпозицией решения уравнения Лапласа с этим частным решением. В качестве первого примера рассмотрим поле заряженного кольца радиусом a с полным зарядом Q , окруженного концентричной ему полый заземленной сферой радиусом b . Пусть заряженное кольцо расположено в плоскости xy , как показано на фиг. 3.9. Плотность заряда кольца можно записать с помощью δ -функций от угла и радиуса:

$$\varrho(\mathbf{x}') = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(r' - a) \delta(\cos \theta'). \quad (3.129)$$

Вследствие азимутальной симметрии в объемном интеграле от функции Грина (3.125) останутся лишь члены с $m = 0$. Полагая

$a = 0$ в (3.125) и учитывая (3.57), найдем

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \int \varrho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' = \\ &= Q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(0) r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) P_l(\cos \theta), \end{aligned} \quad (3.130)$$

где $r_{<}$ и $r_{>}$ — соответственно меньшая и большая из величин r и a . Учитывая, что $P_{2n+1}(0) = 0$ и

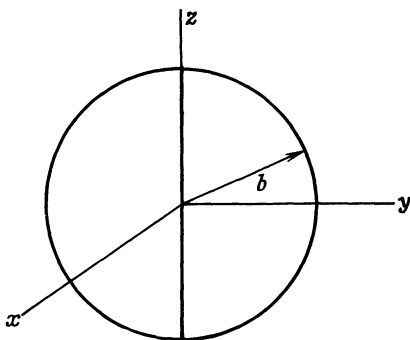
$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!},$$

придем к разложению

$$\Phi(\mathbf{x}) = Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} r_{<}^{2n} \left(\frac{1}{r_{>}^{2n+1}} - \frac{r_{>}^{2n}}{b^{4n+1}} \right) P_{2n}(\cos \theta). \quad (3.131)$$

Легко видеть, что при $b \rightarrow \infty$ выражение (3.130) или (3.131) переходит в потенциал (3.48) кольца в свободном пространстве. Эти выражения можно было бы получить из (3.48) с помощью метода изображений.

В качестве второго примера рассмотрим полую проводящую сферу, по диаметру которой равномерно распределен заряд Q



Фиг. 3.10. Однородно заряженная нить длиной $2b$ с полным зарядом Q внутри заземленной проводящей сферы радиусом b .

Заряженная нить расположена вдоль оси z .
Плотность заряда равна $Q/2b$

(фиг. 3.10). Пусть ось z совпадает с заряженной нитью. Распределение заряда запишется с помощью δ -функций следующим образом:

$$\varrho(\mathbf{x}') = \frac{Q}{2b} \frac{1}{2\pi r^2} [\delta(\cos \theta' - 1) + \delta(\cos \theta' + 1)]. \quad (3.132)$$

Две δ -функции от $\cos \theta$ соответствуют двум половинам заряженной нити — верхней (над плоскостью xy) и нижней. Множитель $2\pi r^2$ в знаменателе обеспечивает постоянную *линейную* плотность $Q/2b$.

Подставляя это распределение плотности заряда в (3.126), получаем

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{2b} \sum_{l=0}^{\infty} [P_l(1) + P_l(-1)] P_l(\cos \theta) \int_0^b r'^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) dr'. \quad (3.133)$$

Беря интеграл отдельно по интервалам $0 \leq r' < r$ и $r \leq r' \leq b$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^b &= \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) \int_0^r r'^l dr' + r^l \int_r^b \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right) dr' = \\ &= \frac{2l+1}{l(l+1)} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^l \right]. \end{aligned} \quad (3.134)$$

При $l = 0$ это выражение становится неопределенным. Раскрывая его по правилу Лопиталья, получаем для $l = 0$

$$\int_0^b = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{(d/dl)[1 - (r/b)^l]}{d(l)/dl} = \lim_{l \rightarrow 0} \left[-\frac{d}{dl} e^{l \ln(r/b)} \right] = \ln \frac{b}{r}. \quad (3.135)$$

В справедливости этого соотношения можно убедиться и непосредственным интегрированием соотношения (3.133) при $l = 0$. Учтывая, что $P_l(-1) = (-1)^l$, мы можем представить потенциал (3.133) в виде

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{b} \left\{ \ln \frac{b}{r} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4j+1}{2j(2j+1)} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^{2j} \right] P_{2j}(\cos \theta) \right\}. \quad (3.136)$$

Член $\ln(b/r)$ показывает, что при $l = 0$ потенциал обращается в бесконечность на оси z . Это видно и из того, что ряд (3.136) также расходится при $\cos \theta = \pm 1$, за исключением крайних точек $r = b$.

Поверхностную плотность заряда на заземленной сфере легко найти из (3.136) дифференцированием:

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=b} = -\frac{Q}{4\pi b^2} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4j+1}{2j+1} P_{2j}(\cos \theta) \right]. \quad (3.137)$$

Первое слагаемое определяет полный заряд на сфере, равный $-Q$, поскольку интеграл от остальных слагаемых по поверхности сферы равен нулю.

§ 10. Разложение функций Грина в цилиндрических координатах

Другим полезным примером разложения функции Грина является представление потенциала единичного точечного заряда в цилиндрических координатах. Сначала рассуждения будут проводиться

в достаточно общем виде, чтобы можно было применить полученные соотношения для нахождения функций Грина в различных задачах с цилиндрической граничной поверхностью. Начнем с уравнения для функции Грина

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{4\pi}{\varrho} \delta(\varrho - \varrho') \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z'). \quad (3.138)$$

Здесь δ -функция выражена в цилиндрической системе координат. Дельта-функции от φ и z можно выразить через систему ортонормированных функций:

$$\begin{aligned} \delta(z - z') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(z-z')} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cos[k(z-z')], \\ \delta(\varphi - \varphi') &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')}. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Разложим аналогичным образом и функцию Грина

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\varphi-\varphi')} \cos[k(z-z')] g_m(\varrho, \varrho'). \quad (3.140)$$

Подставляя эти разложения в (3.138), получаем уравнение для радиальной функции Грина $g_m(\varrho, \varrho')$:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dg_m}{d\varrho} \right) - \left(k^2 + \frac{m^2}{\varrho^2} \right) g_m = -\frac{4\pi}{\varrho} \delta(\varrho - \varrho'). \quad (3.141)$$

При $\varrho \neq \varrho'$ это уравнение совпадает с уравнением (3.98) для модифицированных функций Бесселя $I_m(k\varrho)$ и $K_m(k\varrho)$. Пусть $\psi_1(k\varrho)$ — некоторая линейная комбинация функций I_m и K_m , удовлетворяющая требуемым граничным условиям при $\varrho < \varrho'$, а $\psi_2(k\varrho)$ — другая, линейно независимая комбинация, удовлетворяющая требуемым граничным условиям при $\varrho > \varrho'$. Из условия симметрии функции Грина относительно ϱ и ϱ' следует, что

$$g_m(\varrho, \varrho') = \psi_1(k\varrho_{<}) \psi_2(k\varrho_{>}). \quad (3.142)$$

Нормировка произведения $\psi_1\psi_2$ определяется скачком производной в точке $\varrho = \varrho'$, обусловленным δ -функцией в (3.141):

$$\left. \frac{dg_m}{d\varrho} \right|_+ - \left. \frac{dg_m}{d\varrho} \right|_- = -\frac{4\pi}{\varrho'}. \quad (3.143)$$

Здесь индексы \pm соответствуют $\varrho = \varrho' \pm \varepsilon$. Из (3.142) следует, что

$$\left[\left. \frac{dg_m}{d\varrho} \right|_+ - \left. \frac{dg_m}{d\varrho} \right|_- \right] = k(\psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1') = kW[\psi_1, \psi_2], \quad (3.144)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по аргументу, а $W [\psi_1, \psi_2]$ — определитель Вронского (вронскиан) функций ψ_1 и ψ_2 . Уравнение (3.141) принадлежит к уравнениям Штурма — Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + g(x) y = 0. \quad (3.145)$$

Как известно, вронскиан двух линейно независимых решений этого уравнения пропорционален $1/p(x)$. Таким образом, условие (3.143) выполняется для всех значений ϱ' , если оно выполнено для какого-либо одного значения. Очевидно, мы должны нормировать функции ψ_1 и ψ_2 так, чтобы вронскиан был равен

$$W [\psi_1(x), \psi_2(x)] = -\frac{4\pi}{x}. \quad (3.146)$$

Если в задаче нет граничных поверхностей, то необходимо потребовать, чтобы функция $g_m(\varrho, \varrho')$ была конечна при $\varrho = 0$ и стремилась к нулю при $\varrho \rightarrow \infty$. Это значит, что $\psi_1(k\varrho) = AI_m(k\varrho)$, а $\psi_2(k\varrho) = K_m(k\varrho)$. Постоянная A должна определяться из условия (3.146) для вронскиана. Поскольку вронскиан пропорционален $1/x$ для всех x , не играет роли, при каком значении x мы его будем вычислять. Пользуясь предельными выражениями (3.102) и (3.103) для малых x или же выражениями (3.104) для больших x , найдем, что

$$W [I_m(x), K_m(x)] = -\frac{1}{x}, \quad (3.147)$$

так что $A = 4\pi$. Таким образом, разложение для $1/|x - x'|$ имеет вид

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\varphi - \varphi')} \cos [k(z - z')] I_m(k\varrho_{<}) K_m(k\varrho_{>}), \quad (3.148)$$

или, пользуясь только действительными функциями,

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cos [k(z - z')] \left\{ \frac{1}{2} I_0(k\varrho_{<}) K_0(k\varrho_{>}) + \sum_{m=1}^{\infty} \cos [m(\varphi - \varphi')] I_m(k\varrho_{<}) K_m(k\varrho_{>}) \right\}. \quad (3.149)$$

Это разложение позволяет получить целый ряд полезных математических соотношений. Если положить $x' = 0$, то останется

лишь член с $m = 0$ и мы придем к интегральному соотношению

$$\frac{1}{(\varrho^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos kz K_0(k\varrho) dk. \quad (3.150)$$

Если в (3.150) заменить ϱ^2 на $R^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\varphi - \varphi')$, то слева будет стоять обратное расстояние $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$ для $z' = 0$; оно должно равняться правой части (3.149) при $z' = 0$. Приравнивая правые части соотношений (3.149) и (3.150) и учитывая, что равенство должно выполняться для *всех* значений z , получаем тождество

$$\begin{aligned} K_0[k \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\varphi - \varphi')}] = \\ = I_0(k\varrho_{<}) K_0(k\varrho_{>}) + 2 \sum_{m=1}^\infty \cos[m(\varphi - \varphi')] I_m(k\varrho_{<}) K_m(k\varrho_{>}). \end{aligned} \quad (3.151)$$

Из последнего соотношения можно, переходя к пределу $k \rightarrow 0$, получить разложение двумерной функции Грина в полярных координатах

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\varphi - \varphi')}} = \\ = \ln \frac{1}{\varrho_{>}} + \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m} \left(\frac{\varrho_{<}}{\varrho_{>}}\right)^m \cos[m(\varphi - \varphi')]. \end{aligned} \quad (3.152)$$

К этому представлению двумерной функции Грина можно прийти и непосредственно из уравнения Пуассона, применяя тот же метод, которым было получено уравнение (3.148).

§ 11. Разложение функций Грина по собственным функциям

Для функций Грина применяются также разложения другого типа — по собственным функциям соответствующей задачи. Такой подход тесно связан с методами, изложенными в § 8 и 10.

Чтобы определить, что мы понимаем под собственными функциями, рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение вида

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}) + [f(\mathbf{x}) + \lambda] \psi(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.153)$$

Если потребовать, чтобы решение $\psi(\mathbf{x})$ удовлетворяло некоторым граничным условиям на поверхности S интересующего нас объема V , то уравнение (3.153) будет, вообще говоря, иметь регулярные (т. е. конечные и непрерывные) решения лишь при некоторых определенных значениях λ . Эти значения λ , обозначаемые через λ_n ,

называются *собственными*, или *характеристическими*, значениями задачи, а соответствующие им решения $\psi_n(\mathbf{x})$ называются *собственными функциями*¹⁾.

Дифференциальное уравнение для собственных функций имеет вид

$$\nabla^2 \psi_n(\mathbf{x}) + [f(\mathbf{x}) + \lambda_n] \psi_n(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.154)$$

Тем же методом, как и при доказательстве ортогональности функций Лежандра или Бесселя, можно показать, что собственные функции ортогональны:

$$\int_V \psi_m^*(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{x}) d^3x = \delta_{mn} \quad (3.155)$$

(предполагается, что собственные функции нормированы). Спектр собственных значений λ_n может быть дискретным или непрерывным или же содержать как дискретную, так и непрерывную части. Мы будем предполагать, что совокупность всех собственных функций образует полную систему функций.

Найдем теперь функцию Грина для уравнения

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + [f(\mathbf{x}) + \lambda] G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.156)$$

где λ , вообще говоря, не совпадает с собственным значением λ_n уравнения (3.154). Предположим, что функция Грина должна удовлетворять тем же граничным условиям, что и собственные функции уравнения (3.154). Тогда функцию Грина можно представить в виде ряда по собственным функциям:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_n a_n(\mathbf{x}') \psi_n(\mathbf{x}). \quad (3.157)$$

Подстановка этого ряда в дифференциальное уравнение для функции Грина дает

$$\sum_m a_m(\mathbf{x}') (\lambda - \lambda_m) \psi_m(\mathbf{x}) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (3.158)$$

Если умножить обе части равенства на $\psi_n^*(\mathbf{x})$ и проинтегрировать по объему V , то благодаря условию ортогональности (3.155) левая часть сведется к одному члену и мы получим

$$a_n(\mathbf{x}') = 4\pi \frac{\psi_n^*(\mathbf{x}')}{\lambda_n - \lambda}. \quad (3.159)$$

¹⁾ Читатель, знакомый с квантовой механикой, несомненно, узнает в уравнении (3.153) уравнение Шредингера для частицы в потенциальном поле.

Таким образом, разложение функции Грина имеет вид

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_n \frac{\psi_n^*(\mathbf{x}') \psi_n(\mathbf{x})}{\lambda_n - \lambda}. \quad (3.160)$$

Для непрерывного спектра сумма заменяется интегралом.

Переходя теперь к частному случаю уравнения Пуассона, положим $f(\mathbf{x}) = 0$ и $\lambda = 0$ в (3.156). В качестве первого, по существу тривиального, примера примем, что (3.154) представляет собой волновое уравнение в неограниченном пространстве:

$$(\nabla^2 + k^2) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.161)$$

с непрерывным спектром собственных значений k^2 и с собственными функциями вида

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (3.162)$$

Эти собственные функции нормированы к δ -функции

$$\int \psi_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) d^3x = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3.163)$$

Согласно (3.160), функция Грина для бесконечного пространства представляется в виде

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{k^2}. \quad (3.164)$$

Мы получили просто представление функции $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ в виде трехмерного интеграла Фурье.

В качестве второго примера рассмотрим функцию Грина для внутренней задачи Дирихле для прямоугольного параллелепипеда, ограниченного плоскостями $x = y = z = 0$, $x = a$, $y = b$, $z = c$. Разложение мы будем производить по собственным функциям волнового уравнения

$$(\nabla^2 + k_{lmn}^2) \psi_{lmn}(x, y, z) = 0. \quad (3.165)$$

Собственные функции, обращающиеся в нуль на всех границах области, имеют вид

$$\psi_{lmn}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right), \quad (3.166)$$

а собственные значения равны

$$k_{lmn}^2 = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right). \quad (3.166a)$$

Согласно (3.160), функция Грина представляется разложением

$$G(x, x') = \frac{32}{\pi abc} \times \sum_{l, m, n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{l\pi x'}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{m\pi y'}{b} \sin \frac{n\pi z}{c} \sin \frac{n\pi z'}{c}}{l^2/a^2 + m^2/b^2 + n^2/c^2}. \quad (3.167)$$

Чтобы связать разложение (3.167) с полученными ранее в § 8 и 10, т. е. с разложением (3.125) для сферических координат и разложением (3.148) для цилиндрических координат, напомним аналогичное разложение для прямоугольного параллелепипеда. Если повторить рассуждения § 8 и 10, рассматривая координаты x и y подобно координатам (θ, φ) или (φ, z) и выделяя особо координату z , то придем к функции Грина:

$$G(x, x') = \frac{16\pi}{ab} \sum_{l, m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi y'}{b}\right) \times \frac{\text{sh}(K_{lm}z_{<}) \text{sh}[K_{lm}(c-z_{>})]}{K_{lm} \text{sh}(K_{lm}c)}, \quad (3.168)$$

где

$$K_{lm} = \pi \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^{1/2}.$$

Чтобы выражения (3.167) и (3.168) совпадали, сумма по n в (3.167) должна представлять собой разложение в ряд Фурье на интервале $(0, c)$ одномерной функции Грина от z , входящей в (3.168), т. е. должно выполняться соотношение

$$\frac{\text{sh}(K_{lm}z_{<}) \text{sh}[K_{lm}(c-z_{>})]}{K_{lm} \text{sh}(K_{lm}c)} = \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi z'}{c}\right)}{K_{lm}^2 + (n\pi/c)^2} \sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right). \quad (3.169)$$

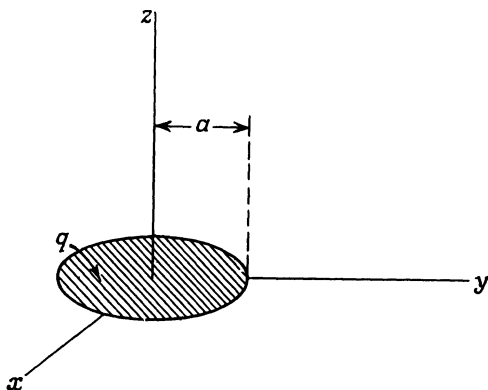
Предоставляем читателю в качестве упражнения провести доказательство справедливости этого фурье-разложения.

Дальнейшие примеры применения описанного метода приведены в задачах к настоящей главе.

§ 12. Смешанные граничные условия. Заряженный проводящий диск

Рассмотренные до сих пор задачи принадлежали к обычному виду: на всей граничной поверхности выполняются однотипные граничные условия (обычно условие Дирихле). Однако при дока-

зательстве теоремы единственности решения уравнений Лапласа и Пуассона (см. гл. 1, § 9) было показано, что и при *смешанных граничных условиях*, когда на одной части поверхности задан потенциал, а на другой — его нормальная производная, решение также является вполне определенным и единственным. Обычно в учебниках по электростатике, упомянув о возможности смешанных граничных задач при доказательстве теоремы единственности, больше к ним не возвращаются. Это объясняется тем, что,



Ф и г. 3.11.

как мы увидим ниже, задачи со смешанными граничными условиями значительно труднее задач с граничными условиями обычного типа.

Чтобы продемонстрировать трудности решения задач со смешанными граничными условиями, рассмотрим простую на первый взгляд задачу об изолированном бесконечно тонком плоском круглом проводящем диске радиусом a с полным зарядом q на нем (фиг. 3.11). Заряд распределяется по диску так, чтобы его поверхность стала эквипотенциальной. Необходимо найти потенциал во всем пространстве и распределение заряда на диске.

Из геометрии задачи следует, что потенциал должен быть симметричен относительно оси диска и относительно плоскости, в которой расположен диск. Выберем цилиндрическую систему координат с осью z по оси диска и с началом координат в центре диска. Тогда потенциал, согласно (3.110), представится в виде

$$\Phi(q, z) = \int_0^{\infty} dk f(k) e^{-k|z|} J_0(ka). \quad (3.170)$$

Неизвестная функция $f(k)$ должна быть определена из граничных условий при $z = 0$. Если бы потенциал был известен на всей пло-

скости $z = 0$, то функцию $f(k)$ можно было бы найти просто обратным преобразованием Ханкеля, как при переходе от (3.110) к (3.113). К сожалению, граничные условия при $z = 0$ носят более сложный характер. Известно, что при $0 \leq \varrho \leq a$ потенциал Φ постоянен и равен неизвестной константе: $\Phi = V = q/C$, где C — емкость диска. Значение потенциала при $a < \varrho < \infty$ неизвестно. Но из симметрии задачи ясно, что нормальная производная потенциала здесь равна нулю. Таким образом, граничные условия носят смешанный характер:

$$\Phi(\varrho, 0) = V \quad \text{при } 0 \leq \varrho \leq a, \quad (3.171)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(\varrho, 0) = 0 \quad \text{при } a < \varrho < \infty.$$

Потенциал диска V связан с полным зарядом q . Эту связь можно установить, рассматривая поведение потенциала на больших расстояниях (ϱ или $z \gg a$), где значения потенциала должны быть близки к $q/(\varrho^2 + z^2)^{1/2}$. Из сопоставления представления (3.170) и тождества, приведенного в задаче 3.12, п. «в», следует, что это сводится к требованию

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(k) = q. \quad (3.172)$$

Применяя граничные условия (3.171) к решению, записанному в виде (3.170), получаем два интегральных уравнения первого рода

$$\int_0^{\infty} dk f(k) J_0(k\varrho) = V \quad \text{при } 0 \leq \varrho \leq a, \quad (3.173)$$

$$\int_0^{\infty} dk k f(k) J_0(k\varrho) = 0 \quad \text{при } a < \varrho < \infty.$$

Такая система двух интегральных уравнений, одно из которых справедливо на одной части области изменения независимой переменной, а второе — на другой, называется системой *парных интегральных уравнений*. Общая теория парных интегральных уравнений весьма сложна и недостаточно еще развита. Но задача о заряженном диске в различных вариантах уже давно привлекает к себе внимание. Впервые решил эту задачу Вебер в 1873 г. с помощью некоторых разрывных интегралов, содержащих функции Бесселя. Титчмарш [110] для решения несколько более общей системы парных интегральных уравнений применяет преобразование Меллина. Копсон [30] свел задачу о заряженном диске к интегральному

уравнению абелевского типа для распределения поверхностной плотности заряда. Грантер [112] рассматривает несколько более общие уравнения, чем (3.173). Он вводит систематический метод определения наиболее общей формы решения одного из уравнений пары (однородного) и наложения на него дополнительных условий подстановкой во второе уравнение. Можно также пользоваться методикой Винера — Хопфа.

Для наших целей достаточно заметить, что система парных уравнений

$$\int_0^{\infty} dy g(y) J_n(yx) = x^n \quad \text{при } 0 \leq x < 1, \quad (3.174)$$

$$\int_0^{\infty} dy yg(y) J_n(yx) = 0 \quad \text{при } 1 < x < \infty$$

имеет решение

$$g(y) = \frac{2\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)} j_n(y) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} \left(\frac{2}{y}\right)^{1/2} J_{n+1/2}(y). \quad (3.175)$$

Здесь $j_n(y)$ — сферическая функция Бесселя порядка n (см. гл. 16, § 1). Для системы уравнений (3.173) следует положить $x = \varrho/a$, $y = ka$ и $n = 0$. Таким образом, мы приходим к решению

$$f(k) = \frac{2}{\pi} Va j_0(ka) = \frac{2}{\pi} Va \frac{\sin ka}{ka}. \quad (3.176)$$

Учитывая соотношение (3.172), устанавливающее связь потенциала V с зарядом q , получаем

$$V = \frac{\pi}{2} \frac{q}{a}.$$

Отсюда следует, что емкость диска радиусом a равна

$$C = \frac{2}{\pi} a.$$

Это значение емкости было экспериментально с большой степенью точности установлено Кэвендишем (около 1780 г.) путем сравнения заряда на диске и на сфере при одинаковом потенциале.

Потенциал в произвольной точке пространства находится по (3.170) и (3.176):

$$\Phi(\varrho, z) = q \int_0^{\infty} dk \frac{\sin ka}{ka} e^{-k|z|} J_0(k\varrho). \quad (3.177)$$

Легко вычислить значения потенциала на оси диска и в плоскости диска, положив соответственно $\varrho = 0$ и $z = 0$ в (3.177):

$$\Phi(0, z) = \frac{q}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{z},$$

$$\Phi(\varrho, 0) = \begin{cases} \frac{q}{a} \operatorname{arcsin} \frac{a}{\varrho} & \text{при } \varrho \geq a, \\ \frac{\pi}{2} \frac{q}{a} & \text{при } 0 \leq \varrho \leq a. \end{cases}$$

Для произвольных ϱ и z интеграл может быть преобразован к виду

$$\Phi(\varrho, z) = q \operatorname{arcsin} \left[\frac{2a}{\sqrt{(\varrho-a)^2 + z^2} + \sqrt{(\varrho+a)^2 + z^2}} \right] \quad (3.178)$$

(веберовская форма решения).

Поверхностная плотность распределения заряда на диске определяется соотношением

$$\sigma(\varrho) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\varrho, 0) = \frac{q}{2\pi a} \int_0^{\infty} dk \sin ka J_0(k\varrho).$$

Это известный разрывный интеграл, тождественно равный нулю при $\varrho > a$. При $\varrho < a$ плотность заряда равна

$$\sigma(\varrho) = \frac{q}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \varrho^2}}. \quad (3.179)$$

Интегрируемая особенность в $\sigma(\varrho)$ при $\varrho \rightarrow a$ обусловлена предположением о бесконечно малой толщине диска. Практически заряды вследствие взаимного расталкивания около периферии диска действительно распределяются примерно в соответствии с (3.179), но у самого края диска устанавливается конечное, хотя и большое, значение плотности, зависящее от конкретных особенностей данного диска.

Мы рассмотрели задачу о распределении заряда на диске в цилиндрических координатах, чтобы проиллюстрировать сложность задач со смешанными граничными условиями. В данном частном случае можно избежать смешанных граничных условий, производя разделение переменных в уравнении Лапласа в эллиптических координатах. Диск можно при этом рассматривать как предельную форму сплюснутого эллипсоида вращения (см., например, книги Смайта [100] или Джинса [55]).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Математические методы и специальные функции, применяемые при нахождении потенциала в сферической, цилиндрической, сфероидальной и других системах координат, рассмотрены в книге Морса и Фешбаха [77],

гл. 10. Более элементарное рассмотрение с хорошо подобранными примерами и задачами можно найти в книге Хильдебранда [51], гл. 4, 5 и 8. Несколько старомодным руководством по теории и применению полиномов Лежандра и сферических гармоник является монография Байерли [25], изобилующая примерами и задачами.

Чисто математическое описание свойств сферических функций читатель найдет в весьма полезном однотомном справочнике Магнуса и Оберхеттингера [70]. Более детальное описание математических свойств этих функций дано в книге Ватсона [114] (функции Бесселя), а также в книге [9] (различные специальные функции).

Решение электростатических задач в цилиндрической, сферической и других системах координат подробно описано в книгах Дюрана [37], гл. 11, Джинса [55], гл. 8, Смайта [100], гл. 5, и Стрэттона [106], гл. 3.

Дополнение редактора. Описание свойств цилиндрических и сферических функций можно найти также в монографиях Лебедева [129], Грея и Мэтьюза [126], Гобсона [125] и Гринберга [127] и в общих руководствах по методам математической физики [128, 131]. Применение аппарата специальных функций и метода разделения переменных имеется в книге Гринберга [127] и в работах [128, 131].

ЗАДАЧИ

3.1. Поверхность полой проводящей сферы с внутренним радиусом a разделена на *четное число* равных сегментов совокупностью плоскостей, проходящих через ось z и равноотстоящих по углу φ . (Сегменты подобны кожуре на дольках яблока или земной поверхности между двумя меридианами.) Любые два соседних сегмента имеют равный по величине, но противоположный по знаку потенциал $\pm V$.

а) Найти представление потенциала внутри сферы в виде ряда в общем случае $2n$ сегментов; определить, какие из коэффициентов ряда отличны от нуля. Для отличных от нуля членов выразить коэффициенты через интегралы по переменной $\cos \theta$.

б) Для частного случая $n = 1$ (две полусферы) найти потенциал вплоть до членов с $l = 3$ (включительно). Преобразованием координат убедиться, что полученное выражение сводится к (3.37) (см. § 3).

3.2. Две концентрические сферы, имеющие радиусы a и b ($b > a$), разделены на полусферы одной и той же горизонтальной плоскостью. Верхняя внутренняя и нижняя наружная полусферы находятся под потенциалом V . Две другие полусферы находятся под нулевым потенциалом.

Выразить потенциал в области $a \leq r \leq b$ в виде ряда по полиномам Лежандра, учитывая члены до $l = 4$. Проверить правильность решения, переходя к предельным случаям $b \rightarrow \infty$ и $a \rightarrow 0$.

3.3. Заряд равномерно распределен с плотностью $Q/4\pi a^2$ по всей поверхности сферы радиусом a , за исключением сегмента у полюса, ограниченного конусом $\theta = \alpha$.

а) Показать, что потенциал внутри сферической поверхности может быть представлен в виде

$$\Phi = \frac{Q}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)] \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta),$$

где $P_{l-1}(\cos \alpha) = -1$ при $l = 0$. Каков потенциал снаружи?

б) Найти величину и направление электрического поля в центре сферы.

в) Рассмотреть предельные значения потенциала и электрического поля в центре сферы в случаях, когда незаряженный и заряженный участки очень малы.

3.4. Тонкий плоский проводящий круглый диск радиусом R расположен в плоскости xy так, что его центр совпадает с началом координат, и находится под потенциалом V . Зная, что плотность заряда на диске с фиксированным потенциалом пропорциональна $(R^2 - \rho^2)^{-1/2}$, где ρ — расстояние от центра диска,

а) показать, что при $r > R$ потенциал равен

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{2V}{\pi} \frac{R}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l} P_{2l}(\cos \theta),$$

б) найти потенциал для $r < R$.

3.5. На внутренней поверхности полый сферы радиусом a задано распределение потенциала $\Phi = V(\theta, \varphi)$. Доказать эквивалентность следующих двух представлений для потенциала внутри сферы:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int \frac{V(\theta', \varphi')}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} d\Omega',$$

где $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$, и

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

где

$$A_{lm} = \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') V(\theta', \varphi').$$

3.6. Ось полого прямого кругового цилиндра радиусом b совпадает с осью z , а его торцы — с плоскостями $z = 0$ и $z = L$. На торцевых поверхностях потенциал равен нулю, а на цилиндрической поверхности равен $V(\varphi, z)$. С помощью метода разделения переменных найти (в виде ряда) потенциал в произвольной точке внутри цилиндра.

3.7. Пусть в цилиндре, рассмотренном в задаче 3.6, цилиндрическая поверхность состоит из двух равных полуцилиндров, находящихся под потенциалами V и $-V$, так что

$$V(\varphi, z) = \begin{cases} V & \text{при } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ -V & \text{при } \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

а) Найти потенциал внутри цилиндра.

б) Предполагая $L \gg b$, рассмотреть потенциал в плоскости $z = L/2$ как функцию ρ и φ . Сравнить его с решением двумерной задачи 2.8.

3.8. Показать, что произвольная функция $f_i(x)$ может быть представлена на интервале $0 \leq x \leq a$ модифицированным рядом Фурье — Бесселя

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_\nu \left(y_{\nu n} \frac{x}{a} \right),$$

где $y_{\nu n}$ есть n -й корень уравнения $dJ_{\nu}(x)/dx = 0$, а коэффициенты A_n равны

$$A_n = \frac{2}{a^2 (1 - \nu^2/y_{\nu n}^2) J_{\nu}^2(y_{\nu n})} \int_0^a f(x) x J_{\nu} \left(y_{\nu n} \frac{x}{a} \right) dx.$$

3.9. В бесконечном тонком плоском проводящем листе имеется отверстие радиусом a . Тонкий плоский проводящий диск чуть меньшего радиуса расположен в этой же плоскости, почти закрывая отверстие; он отделен от остальной плоскости очень тонким изолирующим кольцом. Диск находится под потенциалом V , а бесконечный лист — под нулевым потенциалом.

а) Применяя соответствующую систему координат, найти интегральное представление через функции Бесселя для потенциала в произвольной точке над плоскостью.

б) Показать, что потенциал *на оси* диска на расстоянии z от него равен

$$\Phi_0(z) = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right).$$

в) Показать, что потенциал на расстоянии z от плоскости диска над его *краем* равен

$$\Phi_a(z) = \frac{V}{\pi} [E(k) - (1 - k^2) K(k)],$$

где $k = 2a/(z^2 + 4a^2)^{1/2}$, а $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго родов.

3.10. Решить задачу 3.2 с помощью надлежащей функции Грина, приведенной в тексте, и показать, что полученное решение совпадает с найденным путем непосредственного решения дифференциального уравнения.

3.11. На отрезке прямой, имеющем длину $2d$, распределен заряд Q , причем линейная плотность пропорциональна $d^2 - z^2$, где z — расстояние от середины отрезка. Этот отрезок окружен сферической оболочкой с внутренним радиусом b ($b > d$) с центром в середине отрезка.

а) Найти потенциал всюду внутри сферы в виде разложения по полиномам Лежандра.

б) Рассчитать поверхностную плотность заряда, индуцированного на сфере.

в) Рассмотреть потенциал и поверхностную плотность в предельном случае $d \ll b$.

3.12. а) Показать справедливость соотношения

$$\frac{1}{\varrho} \delta(\varrho - \varrho') = \int_0^{\infty} k J_m(k\varrho) J_m(k\varrho') dk.$$

б) Доказать, что

$$\frac{1}{|x - x'|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\varphi - \varphi')} J_m(k\varrho) J_m(k\varrho') e^{-k(z > -z <)}. .$$

в) С помощью надлежащего предельного перехода доказать справедливость следующих разложений:

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}} = \int_0^{\infty} e^{-k|z|} J_0(k\varrho) dk,$$

$$J_0(k\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos \varphi}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} J_m(k\varrho) J_m(k\varrho'),$$

$$e^{ik\varrho \cos \varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{im\varphi} J_m(k\varrho).$$

г) Из последних формул вывести интегральное представление для функции Бесселя:

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \varphi - im\varphi} d\varphi.$$

Сравнить его с обычным интегральным представлением.

3.13. Единичный точечный заряд расположен в точке (ϱ', φ', z') внутри заземленного полого цилиндра, ограниченного поверхностями $z = 0$, $z = L$, $\varrho = a$. Показать, что потенциал внутри цилиндра можно представить любым из следующих выражений:

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{4}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{im(\varphi-\varphi')} J_m(x_{mn}\varrho/a) J_m(x_{mn}\varrho'/a)}{x_{mn} J_{m+1}^2(x_{mn}) \operatorname{sh}(x_{mn}L/a)} \times$$

$$\times \operatorname{sh} \left[\frac{x_{mn}}{a} z_{<} \right] \operatorname{sh} \left[\frac{x_{mn}}{a} (L - z_{>}) \right],$$

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{4}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \sin \left(\frac{n\pi z}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi z'}{L} \right) \frac{I_m(n\pi \varrho_{<}/L)}{I_m(n\pi a/L)} \times$$

$$\times \left[I_m \left(\frac{n\pi a}{L} \right) K_m \left(\frac{n\pi \varrho_{>}}{L} \right) - K_m \left(\frac{n\pi a}{L} \right) I_m \left(\frac{n\pi \varrho_{>}}{L} \right) \right],$$

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{8}{La^2} \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{im(\varphi-\varphi')} \sin \left(\frac{k\pi z}{L} \right) \sin \left(\frac{k\pi z'}{L} \right) J_m \left(\frac{x_{mn}\varrho}{a} \right) J_m \left(\frac{x_{mn}\varrho'}{a} \right)}{[(x_{mn}/a)^2 + (k\pi/L)^2] J_{m+1}^2(x_{mn})}.$$

Проанализировать связь последнего разложения (с тройной суммой) с первыми двумя.

3.14. Пусть все границы цилиндра, определенного в предыдущей задаче, находятся под нулевым потенциалом, за исключением находящегося под потенциалом V диска радиусом $\rho = b$ на верхнем торце.

а) С помощью различных представлений функции Грина, полученных в предыдущей задаче, найти три представления потенциала внутри цилиндра.

б) Для каждого ряда определить численно отношение потенциала в точке $\rho = 0$, $z = L/2$ к потенциалу диска, считая $b = L/4 = a/2$. Попробуйте получить по крайней мере две верные значащие цифры. Одинаково ли быстро сходятся все три ряда? Почему? (Таблицы функций J_0 , J_1 , I_0 , I_1 , $(2/\pi)K_0$ и $(2/\pi)K_1$ приведены в книге Янке и Эмде [54]. Различные таблицы цилиндрических функций имеются также в книге Ватсона [114].)

**МУЛЬТИПОЛИ.
МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОСТАТИКА
МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕД.
ДИЭЛЕКТРИКИ**

В этой главе основное внимание уделяется рассмотрению потенциала, обусловленного ограниченным распределением заряда, и дается его представление в виде разложения по мультиполям. В основном разложение проводится по сферическим гармоникам, но для нескольких первых мультиполей обсуждается их представление и в декартовых координатах. Затем вычисляется энергия мультиполя во внешнем электрическом поле. Путем рассмотрения поведения атомов в приложенном внешнем поле в сочетании с подходящей процедурой усреднения выводятся макроскопические уравнения электростатики. Затем описываются свойства диэлектриков, устанавливаются граничные условия для них и решаются некоторые типичные краевые задачи при наличии диэлектриков. На простых классических моделях иллюстрируются основные свойства диэлектриков: поляризуемость и диэлектрическая восприимчивость. В заключение рассматривается вопрос об электростатической энергии при наличии диэлектриков.

§ 1. Разложение по мультиполям

Ограниченное распределение заряда описывается плотностью заряда $\rho(\mathbf{x}')$, отличной от нуля лишь внутри сферы радиусом R с центром в начале отсчета ¹⁾.

Потенциал вне сферы можно представить в виде разложения по сферическим гармоникам:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}, \quad (4.1)$$

¹⁾ Введение сферы радиусом R —произвольная вспомогательная операция, позволяющая разделить пространство на две области: с зарядами и без них.

где вид постоянных коэффициентов выбран из соображения удобства при дальнейшем рассмотрении. Выражение (4.1) называют обычно разложением по мультиполям; член, соответствующий $l = 0$, называется монополю, член с $l = 1$ — дипольным моментом и т. д. Смысл этих терминов станет ясным из дальнейшего. Задача состоит в том, чтобы выразить постоянные q_{lm} через функцию распределения плотности заряда $\rho(\mathbf{x}')$. Искомое решение легко получается с помощью интегрального представления (1.17) для потенциала

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

и разложения (3.70) для $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Так как в данном случае нас интересует потенциал вне области, занятой распределением заряда, то следует положить $r_< = r'$ и $r_> = r$. При этом получаем

$$\Phi(\mathbf{x}) = 4\pi \sum_{l, m} \frac{1}{2l+1} \left[\int Y_{lm}^*(\theta', \varphi') r'^l \rho(\mathbf{x}') d^3x' \right] \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}. \quad (4.2)$$

Таким образом, коэффициенты в (4.1) оказываются равными

$$q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\theta', \varphi') r'^l \rho(\mathbf{x}') d^3x'. \quad (4.3)$$

Эти коэффициенты называют *мультипольными моментами*. Для их физического истолкования выпишем в явном виде выражения нескольких первых моментов в декартовых координатах:

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') d^3x' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} q, \quad (4.4)$$

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int (x' - iy') \rho(\mathbf{x}') d^3x' = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y), \quad (4.5)$$

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int z' \rho(\mathbf{x}') d^3x' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z,$$

$$q_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int (x' - iy')^2 \rho(\mathbf{x}') d^3x' = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22}),$$

$$q_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int z' (x' - iy') \rho(\mathbf{x}') d^3x' = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{13} - iQ_{23}), \quad (4.6)$$

$$q_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int (3z'^2 - r'^2) \rho(\mathbf{x}') d^3x' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33}.$$

Здесь выписаны моменты лишь для $m \geq 0$, так как согласно (3.54) при действительной плотности заряда моменты с $m < 0$ можно найти из соотношений

$$q_{l, -m} = (-1)^m q_{lm}^*. \quad (4.7)$$

В выражениях (4.4)—(4.6) скаляр q определяет полный заряд, или момент нулевого порядка (монополь), вектор \mathbf{p} есть электрический дипольный момент:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d^3x', \quad (4.8)$$

а Q_{ij} — составляющие тензора квадрупольного момента:

$$Q_{ij} = \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{x}') d^3x'. \quad (4.9)$$

Мы видим, что l -е мультипольные коэффициенты (число которых равно $2l + 1$) представляются линейной комбинацией декартовых составляющих соответствующих мультиполей. Предоставляем читателю в качестве упражнения провести вывод разложения для потенциала $\Phi(\mathbf{x})$ в декартовых координатах:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots, \quad (4.10)$$

которое можно получить непосредственно из разложения $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ в ряд Тейлора. Получение членов разложения (4.10) выше квадрупольного оказывается гораздо более сложной задачей.

Составляющие вектора напряженности электрического поля, обусловленного данным мультиполем, легче всего выразить в сферических координатах. Взятый со знаком минус градиент члена суммы (4.1), соответствующего фиксированным l и m , имеет следующие составляющие в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{4\pi(l+1)}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+2}}, \\ E_\theta &= -\frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{1}{r^{l+2}} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ E_\varphi &= -\frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{1}{r^{l+2}} \frac{im}{\sin \theta} Y_{lm}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Функции $\partial Y_{lm}/\partial \theta$ и $Y_{lm}/\sin \theta$ можно представить как линейные комбинации других функций Y_{lm} , однако соответствующие выражения не обладают достаточной наглядностью, и поэтому мы их не будем приводить. Векторное мультипольное поле лучше всего представлять с помощью *векторных* сферических гармоник, как это рассмотрено в гл. 16.

Для диполя \mathbf{p} , ориентированного вдоль оси z , составляющие поля (4.11) принимают простой вид:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{2p \cos \theta}{r^3}, \\ E_\theta &= \frac{p \sin \theta}{r^3}, \\ E_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Это поле можно записать в векторной форме, либо исходя из выражений (4.12), либо непосредственно вычисляя градиент от дипольного члена разложения в (4.10). Поле в точке \mathbf{x} , обусловленное диполем \mathbf{p} , расположенным в точке \mathbf{x}' , оказывается равным

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{p}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \quad (4.13)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, направленный из точки \mathbf{x}' в точку \mathbf{x} .

§ 2. Разложение по мультиполям энергии распределения зарядов во внешнем поле

Если ограниченное распределение заряда с плотностью $\rho(\mathbf{x})$ находится во внешнем поле с потенциалом $\Phi(\mathbf{x})$, то электростатическая энергия системы равна

$$W = \int \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d^3x. \quad (4.14)$$

При медленном изменении потенциала Φ в области, где плотность $\rho(\mathbf{x})$ отлична от нуля, его можно представить в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности некоторого соответствующим образом выбранного начала отсчета:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) + \mathbf{x} \cdot \text{grad } \Phi(0) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j x_i x_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(0) + \dots \quad (4.15)$$

Воспользовавшись определением напряженности электрического поля $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$, два последних члена можно переписать в иной форме. При этом (4.15) примет вид

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j x_i x_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \dots$$

Так как $\text{div } \mathbf{E} = 0$ для внешнего поля, то можно вычесть из последнего слагаемого величину

$$\frac{1}{6} r^2 \text{div } \mathbf{E}(0),$$

в результате чего получим разложение

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_i \sum_j (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \dots \quad (4.16)$$

Подставляя полученное разложение в (4.14) и используя определения полного заряда, дипольного момента (4.8) и квадрупольного момента (4.9), можно представить выражение для энергии в виде

$$W = q\Phi(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_i \sum_j Q_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \dots \quad (4.17)$$

Из этого разложения ясен характер взаимодействия различных мультиполей с внешним полем: энергия заряда определяется потенциалом, диполя — электрическим полем, квадруполья — градиентом поля и т. д.

В ядерной физике особый интерес представляет квадрупольное взаимодействие. Атомные ядра могут обладать электрическим квадрупольным моментом, причем величина и знак момента связаны с силами взаимодействия нейтронов и протонов и формой самого ядра. Энергетические уровни, или состояния, ядер описываются квантовыми числами полного момента количества движения J , его составляющей M вдоль оси z и другими величинами, которые мы обозначим общим индексом α . Данному состоянию ядра соответствует квантовомеханическая плотность заряда ¹⁾ $Q_{JM\alpha}(\mathbf{x})$, зависящая от квантовых чисел (J, M, α) и обладающая цилиндрической симметрией относительно оси z . Таким образом, единственным отличным от нуля квадрупольным моментом является q_{20} в (4.6) или Q_{33} в (4.9) ²⁾. Квадрупольный момент ядерного состояния определяется величиной $(1/e) Q_{33}$ (e — заряд протона), вычисленной для плотности заряда $Q_{JM\alpha}(\mathbf{x})$:

$$Q_{JM\alpha} = \frac{1}{e} \int (3z^2 - r^2) Q_{JM\alpha}(\mathbf{x}) d^3x. \quad (4.18)$$

Величина $Q_{JM\alpha}$ имеет, следовательно, размерность квадрата длины.

Если не рассматривать каких-либо особых исключительных случаев (например, ядра в атомах с полностью заполненными электронными оболочками), то ядра оказываются подверженными действию внутренних полей, градиент которых в окрестности ядра отличен от нуля. Следовательно, согласно (4.17), квадрупольное взаимодействие дает вклад в энергию ядра. Состояния, характеризующиеся различными значениями M при одинаковом J , имеют разные квадрупольные моменты $Q_{JM\alpha}$, и, следовательно, вырождение по M , если оно имело место, снимается из-за квадрупольной связи с «внешним» электрическим полем (молекулярным или полем кристаллической решетки). Обнаружение этих малых различий в уровнях энергии, проводимое радиотехническими методами, позволяет определить квадрупольные моменты ядер ³⁾.

Энергию взаимодействия двух диполей \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 можно определить непосредственно из (4.17), используя выражение для поля

¹⁾ Элементарное рассмотрение квантовых аспектов проблемы можно найти в книге Блатта и Вайскопфа [13].

²⁾ В действительности моменты Q_{11} и Q_{22} отличны от нуля, но зависят от Q_{33} и определяются соотношениями $Q_{11} = Q_{22} = -1/2 Q_{33}$.

³⁾ «Квадрупольным моментом ядра», обозначаемым Q , принято называть величину $Q_{JM\alpha}$ в состоянии $M = J$; см. Блатт и Вайскопф [13].

диполя (4.13). Взаимная потенциальная энергия оказывается равной

$$W_{12} = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}, \quad (4.19)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$. В зависимости от взаимной ориентации диполей они могут притягиваться или отталкиваться.

При заданных ориентации диполей и расстоянии между ними величина энергии взаимодействия, усредненная по всем относительным положениям диполей, равна нулю. Если моменты параллельны друг другу и ориентированы примерно параллельно линии, соединяющей их центры, то диполи притягиваются, если же они ориентированы приблизительно перпендикулярно соединяющей их линии, то диполи отталкиваются. Для антипараллельных моментов имеет место обратное соотношение. По абсолютной величине экстремальные значения потенциальной энергии равны между собой.

§ 3. Макроскопическая электростатика. Эффекты совокупного действия атомов

Все многообразие электростатических явлений можно описать уравнениями

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\varepsilon} &= 4\pi q', \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon} &= 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где «микроскопическое» электростатическое поле $\boldsymbol{\varepsilon}$ обусловлено полной «микроскопической» плотностью заряда q' . При небольшом числе идеализированных точечных зарядов, расположенных вблизи математически определенных граничных поверхностей, вполне достаточно уравнений (4.20). Однако в очень многих физических задачах полностью невозможно задать распределения отдельных индивидуальных зарядов. Любая задача о полях в присутствии материальной среды относится к указанному классу. В макроскопических объемах вещества содержится порядка $10^{23 \pm 3}$ зарядов, причем каждый из них в большей или меньшей степени подвижен вследствие теплового возбуждения или нулевых колебаний.

Не касаясь пока вопроса о правомерности применения электростатики для описания явлений, в которых заряды находятся в непрерывном движении, обратимся к задаче исследования макроскопических проблем, когда число атомов или молекул велико. Очевидно, интегральное представление электрического поля в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} q'(\mathbf{x}') d^3x' \quad (4.21)$$

мало пригодно, так как: а) оно содержит плотность распределения зарядов $\rho'(\mathbf{x}')$, для определения которой нужно знать точное положение огромного числа зарядов, и б) это выражение весьма сильно флуктуирует при перемещении точки наблюдения даже на очень малые расстояния (порядка размеров атома). Но, к счастью, в макроскопической электростатике нам не нужна такая подробная информация, которая содержится в (4.21). Вполне достаточно знать среднюю напряженность электрического поля по областям с размерами порядка 10^{-6} см³ (т. е. с линейными размерами порядка 10^{-2} см) или даже больше. Так как объем атома по порядку величины равен 10^{-24} см³, то в указанном макроскопическом объеме содержится порядка 10^{18} или более атомов. Это означает, что микроскопические флуктуации полностью усредняются. Таким образом, следует иметь дело со средними значениями $\mathbf{\epsilon}(\mathbf{x})$ и $\rho'(\mathbf{x})$. Усреднение проводится по макроскопически малому объему ΔV , содержащему, однако, очень много атомов или молекул:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{\epsilon}(\mathbf{x}) \rangle &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{\epsilon}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) d^3\xi, \\ \langle \rho'(\mathbf{x}) \rangle &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \rho'(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) d^3\xi.\end{aligned}\tag{4.22}$$

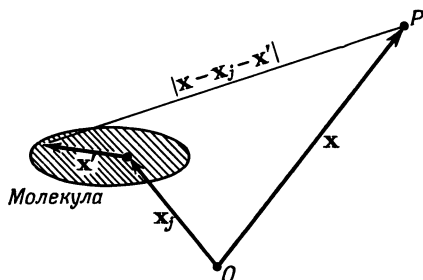
Усреднение мы обозначаем ломаными скобками; переменная $\boldsymbol{\xi}$ изменяется в пределах объема ΔV .

Применение усреднения позволяет ответить на вопрос о законности рассмотрения статического решения при наличии теплового движения в материальной среде. В любой момент времени в объеме ΔV находится очень большое число зарядов во всех возможных состояниях движения. Усреднение по этим состояниям в рассматриваемый момент даст такой же результат, как и усреднение в какой-либо более поздний момент времени. Следовательно, по отношению к усредненным величинам вполне законно говорить о статических полях и зарядах¹⁾. Более того, при усреднении можно считать распределение атомных зарядов фиксированным в пространстве (т. е. не меняющимся во времени) и совпадающим с реальным распределением в какой-то произвольный момент времени. Поэтому при вычислениях можно рассматривать задачу как электростатическую даже на микроскопическом уровне.

В макроскопической электростатике удобно разбить усредненную плотность заряда $\langle \rho'(\mathbf{x}) \rangle$ на две части, одна из которых — средний заряд атомных или молекулярных ионов, т. е. избыток

¹⁾ Такое рассмотрение не учитывает весьма малые (при комнатной температуре) поля индукции и поля излучения, обусловленные ускорением зарядов при их тепловом движении.

свободных зарядов, расположенных внутри или на поверхности макроскопического тела, а вторая — наведенный, или связанный заряд. В отсутствие внешних полей электрические моменты атомов или молекул могут быть как равными, так и не равными нулю, но даже если моменты отличны от нуля, они ориентированы совершенно хаотически. При наличии поля атомы поляризуются (или их постоянные моменты стремятся ориентироваться по полю).



Ф и г. 4.1. К расчету потенциала, создаваемого в точке наблюдения P с радиусом-вектором \mathbf{x} молекулой с центром масс в точке x_j .

Локальная координата x' отсчитывается от центра масс.

и появляется средний дипольный момент. Эти дипольные моменты могут вносить вклад в усредненную плотность заряда $\langle \rho'(\mathbf{x}) \rangle$. Поскольку наводимые дипольные моменты обычно пропорциональны приложенному полю, то, как мы увидим ниже, макроскопический аналог уравнений (4.20) должен содержать лишь одну постоянную, характеризующую среднюю поляризуемость исследуемой среды.

Чтобы понять, как появляется зависимость от наведенных дипольных моментов, рассмотрим сначала микроскопическое поле в точке наблюдения \mathbf{x} , создаваемое одной молекулой с центром масс в точке x_j (фиг. 4.1). Пусть плотность заряда молекулы равна $\rho_j(\mathbf{x}')$, где \mathbf{x}' отсчитывается от центра масс молекулы. Следует заметить, что ρ_j в общем случае зависит от положения молекулы x_j , так как искажение распределения заряда в молекуле определяется локальным полем. Микроскопическое электрическое поле молекулы с номером j имеет вид

$$\mathbf{e}_j(\mathbf{x}) = -\text{grad} \int_{\text{мол}} \rho_j(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (4.23)$$

Для точек наблюдения, лежащих вне молекулы, можно использовать разложение по мультиполям в окрестности центра масс

молекулы. При этом, согласно (4.10), получим

$$\epsilon_j(\mathbf{x}) = -\text{grad} \left[\frac{e_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} + \text{grad}_j \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} \right) \cdot \mathbf{p}_j + \dots \right], \quad (4.24)$$

где

$$\begin{aligned} e_j &= \int_{\text{МОЛ}} \varrho'_j(\mathbf{x}') d^3x', \\ \mathbf{p}_j &= \int_{\text{МОЛ}} \mathbf{x}' \varrho'_j(\mathbf{x}') d^3x' \end{aligned} \quad (4.25)$$

— соответственно полный заряд и дипольный момент молекулы. В разложении (4.10) можно было бы удерживать и квадрупольный момент, но так как макроскопические изменения поля происходят на расстояниях, больших по сравнению с молекулярными размерами, относительный вклад этого момента в среднее поле пренебрежимо мал по сравнению с дипольным членом. Величины e_j и \mathbf{p}_j являются функциями положения молекулы.

Микроскопическое поле всех молекул определяется суммированием по j :

$$\epsilon(\mathbf{x}) = -\text{grad} \sum_j \left[\frac{e_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} + \mathbf{p}_j \cdot \text{grad}_j \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} \right) \right]. \quad (4.26)$$

Для получения макроскопического поля следует произвести усреднение согласно (4.22). Чтобы облегчить процедуру усреднения, заменим дискретную сумму по молекулам интегралом, введя распределение плотности заряда и поляризации:

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{МОЛ}}(\mathbf{x}) &= \sum_j e_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \\ \boldsymbol{\pi}_{\text{МОЛ}}(\mathbf{x}) &= \sum_j \mathbf{p}_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Выражение (4.26) при этом можно формально переписать в виде

$$\epsilon(\mathbf{x}) = -\text{grad} \int d^3x'' \left[\frac{\varrho_{\text{МОЛ}}(\mathbf{x}'')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} + \boldsymbol{\pi}_{\text{МОЛ}}(\mathbf{x}'') \cdot \text{grad}'' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} \right) \right]. \quad (4.28)$$

Проиллюстрируем процесс усреднения на первом слагаемом в (4.28). Усредненное значение, согласно (4.22), равно

$$\langle \epsilon_1(\mathbf{x}) \rangle = -\text{grad} \left[\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3\xi \int d^3x'' \frac{\varrho_{\text{МОЛ}}(\mathbf{x}'')}{|\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}''|} \right], \quad (4.29)$$

где учтено, что порядок операций дифференцирования и усреднения может быть изменен. Заменим переменную интегрирования

\mathbf{x}'' на $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' + \boldsymbol{\xi}$:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x}) \rangle = -\text{grad} \left[\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3 \boldsymbol{\xi} \int d^3 x' \frac{q_{\text{МОЛ}}(\mathbf{x}' + \boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]. \quad (4.30)$$

Сопоставление выражений (4.29) и (4.30) показывает очевидную эквивалентность усреднения путем перемещения точки наблюдения в объеме ΔV с центром в точке \mathbf{x} и усреднения путем перемещения точки интегрирования в объеме ΔV с центром в \mathbf{x}' . Как ясно из определения (4.27), интеграл от $q_{\text{МОЛ}}$ по объему ΔV в окрестности \mathbf{x}' сводится к сумме зарядов e_j всех молекул в объеме ΔV :

$$\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3 \boldsymbol{\xi} q_{\text{МОЛ}}(\mathbf{x}' + \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\Delta V} \sum e_j.$$

Пусть макроскопическая плотность распределения молекул (число молекул в единице объема) в точке \mathbf{x}' равна $N(\mathbf{x}')$, а $\langle e_{\text{МОЛ}}(\mathbf{x}') \rangle$ — средний заряд молекулы в объеме ΔV в точке \mathbf{x}' ; тогда

$$\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3 \boldsymbol{\xi} q_{\text{МОЛ}}(\mathbf{x}' + \boldsymbol{\xi}) = N(\mathbf{x}') \langle e_{\text{МОЛ}}(\mathbf{x}') \rangle. \quad (4.31)$$

В результате выражение (4.30) принимает вид

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x}) \rangle = -\text{grad} \int \frac{N(\mathbf{x}') \langle e_{\text{МОЛ}}(\mathbf{x}') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'.$$

Совершенно аналогично можно исследовать второе слагаемое в (4.28). Пользуясь тем же определением усреднения, получаем

$$\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3 \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\pi}_{\text{МОЛ}}(\mathbf{x}' + \boldsymbol{\xi}) = N(\mathbf{x}') \langle \boldsymbol{p}_{\text{МОЛ}}(\mathbf{x}') \rangle. \quad (4.32)$$

Усредненное поле (4.28) определяется, таким образом, формулой

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle = -\text{grad} \int N(\mathbf{x}') \left\{ \frac{\langle e_{\text{МОЛ}}(\mathbf{x}') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \langle \boldsymbol{p}_{\text{МОЛ}}(\mathbf{x}') \rangle \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right\} d^3 x'. \quad (4.33)$$

Для получения макроскопического эквивалента первого из уравнений (4.20) вычислим дивергенцию от обеих частей выражения (4.33).

Учитывая равенство

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

находим

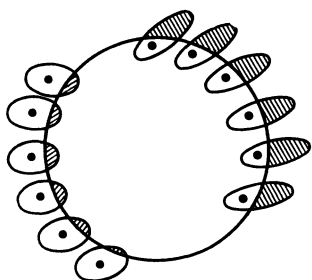
$$\begin{aligned} \text{div} \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle &= 4\pi \int N(\mathbf{x}') \{ \langle e_{\text{МОЛ}}(\mathbf{x}') \rangle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \\ &+ \langle \boldsymbol{p}_{\text{МОЛ}}(\mathbf{x}') \rangle \cdot \text{grad}' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \} d^3 x'. \end{aligned}$$

Используя свойства δ -функции (см. гл. 1, § 2), получаем

$$\operatorname{div} \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle = 4\pi N(\mathbf{x}) \langle e_{\text{мол}}(\mathbf{x}) \rangle - 4\pi \operatorname{div} [N(\mathbf{x}) \langle \mathbf{p}_{\text{мол}}(\mathbf{x}) \rangle]. \quad (4.34)$$

Такой вид принимает первое из уравнений (4.20). Плотность заряда q' , входящая в (4.20), заменена здесь двумя слагаемыми: первое — средний заряд молекул в единице объема, второе — связанный заряд в единице объема. Появление дивергенции плотности поляризации представляется весьма естественным, если вспомнить, как возникает эта часть плотности заряда.

Рассмотрим малый объем в среде. Часть полного заряда внутри объема обусловлена свободными зарядами молекул. Кроме этого,



Ф и г. 4.2. К объяснению возникновения связанного заряда.

Из-за пространственного изменения поляризации может оказаться, что молекулярный заряд, вышедший из данного малого объема, больше заряда, вошедшего в объем.

определенный вклад в полный заряд может быть обусловлен поляризацией молекулы во внешнем поле. Так, например, для молекул, у которых область, занятая зарядом, раньше находилась полностью внутри объема, часть заряда может выйти за пределы рассматриваемого объема. Если поляризация однородна в пределах нашего малого объема, то за счет поляризации в рассматриваемый объем через его поверхность вводится такой же заряд, как и выводится из него, и суммарное изменение заряда за счет поляризации равно нулю. Если же поляризация объема неоднородна, то может произойти увеличение или уменьшение заряда в объеме, как схематически показано на фиг. 4.2. Такова физическая причина возникновения связанного заряда.

В уравнении (4.34) можно объединить члены с дивергенцией и переписать его в виде

$$\operatorname{div} [\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + 4\pi N \langle \mathbf{p}_{\text{мол}} \rangle] = 4\pi N \langle e_{\text{мол}} \rangle. \quad (4.35)$$

Обычно принято вводить следующие макроскопические величины: напряженность электрического поля \mathbf{E} , поляризацию \mathbf{P} (электри-

ческий дипольный момент единицы объема), плотность заряда ϱ и электрическую индукцию \mathbf{D} , определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \langle \mathbf{e} \rangle, \\ \mathbf{P} &= N \langle \mathbf{p}_{\text{мол}} \rangle, \\ \varrho &= N \langle e_{\text{мол}} \rangle, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Если в среде имеется несколько различных видов атомов или молекул и, кроме того, могут быть избыточные свободные заряды, то приведенные определения можно очевидным образом обобщить:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_i N_i \langle \mathbf{p}_i \rangle, \\ \varrho &= \sum_i N_i \langle e_i \rangle + \varrho_{\text{св}}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

где N_i — число молекул i -го типа в единице объема, $\langle e_i \rangle$ — их средний заряд, $\langle \mathbf{p}_i \rangle$ — их средний дипольный момент, $\varrho_{\text{св}}$ — плотность избыточного (свободного) заряда. Обычно молекулы электронейтральны и полная плотность заряда совпадает с плотностью свободного заряда.

Используя определения (4.36) и (4.37), макроскопическое уравнение для дивергенции поля можно записать в виде

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi \varrho. \quad (4.38)$$

Макроскопический эквивалент второго уравнения из (4.20) можно получить, взяв ротор от обеих частей равенства (4.33). Это, очевидно, дает

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (4.39)$$

Таким образом, в макроскопической электростатике диэлектрических сред микроскопические уравнения (4.20) заменяются уравнениями (4.38) и (4.39).

Выражение (4.33) для напряженности электрического поля записывается в макроскопических переменных следующим образом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad} \int d^3x' \left[\frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right]. \quad (4.40)$$

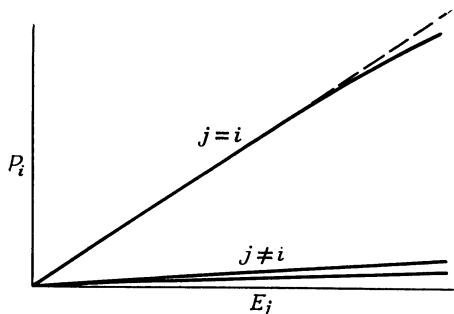
Второе слагаемое, описывающее поле диполя, уже было исследовано в гл. 1, § 6.

§ 4. Изотропные диэлектрики и граничные условия

Как уже упоминалось выше, поляризация молекул зависит от локального электрического поля вблизи молекулы. При отсутствии внешнего поля средняя поляризация равна нулю¹⁾. Поэтому вектор поляризации \mathbf{P} , являющийся в общем случае некоторой функцией от \mathbf{E} , может быть представлен в виде ряда по степеням поля, по крайней мере в случае малых полей. Любая составляющая P_i будет при этом представляться разложением вида

$$P_i = \sum_j a_{ij} E_j + \sum_{j,k} b_{ijk} E_j E_k + \dots$$

Заранее не ясно, насколько практически существенны высшие члены разложения. Но эксперименты показали, что зависимость поляризации от приложенного поля имеет вид, изображенный



Ф и г. 4.3. Зависимость составляющих вектора поляризации от приложенного электрического поля.

на фиг. 4.3. При нормальных температурах для полей, достижимых в лабораторных условиях, *линейного приближения совершенно достаточно*. Это и не удивительно, если вспомнить, что внутриатомные электрические поля по порядку величины равны 10^9 в/см. По сравнению с ними любое внешнее поле, обуславливающее поляризацию, является лишь малым возмущением.

В общем случае анизотропные среды (например, кристаллы кальцита или кварца) характеризуются шестью независимыми коэффициентами a_{ij} . Однако для простых веществ, называемых изотропными, вектор \mathbf{P} параллелен \mathbf{E} и линейно связан с полем, причем коэффициент пропорциональности χ_e не зависит от направления \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}. \quad (4.41)$$

Постоянная χ_e называется диэлектрической восприимчивостью среды. В этом случае электрическая индукция пропорциональна \mathbf{E} :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (4.42)$$

¹⁾ Это утверждение не относится к электретам, обладающим постоянной электрической поляризацией.

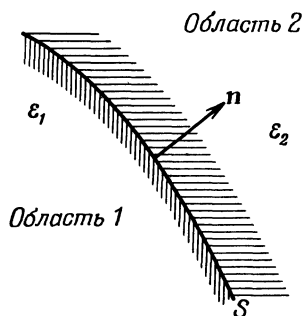
где диэлектрическая проницаемость ϵ (называемая также диэлектрической постоянной) равна

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e. \quad (4.43)$$

Если диэлектрик не только изотропен, но и однороден, то ϵ не зависит от координат. В этом случае уравнение (4.38) можно записать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho. \quad (4.44)$$

Все задачи для таких сред, очевидно, сводятся к уже рассмотренным в предыдущих главах с тем отличием, что электрические поля, возбуждаемые зарядами, уменьшены в ϵ раз. Это уменьшение поля



Ф и г. 4.4.

можно физически объяснить поляризацией атомов, приводящей к появлению поля, направленного противоположно полю заданных внешних зарядов. Прямым следствием указанного факта является увеличение в ϵ раз емкости конденсатора при заполнении зазора между его пластинами диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ (это справедливо лишь в случае, когда можно пренебречь полями рассеяния).

Весьма важны граничные условия для векторов \mathbf{E} и \mathbf{D} на поверхностях, где свойства диэлектрика изменяются скачком. Рассмотрим поверхность S , изображенную на фиг. 4.4. Единичный вектор \mathbf{n} нормален к поверхности и направлен из области 1 с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 в область 2 с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Совершенно так же, как описано в гл. 1, § 6, рассмотрим маленький параллелепипед, грани которого в областях 1 и 2 параллельны граничной поверхности S ; при этом находим

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = 4\pi\sigma, \quad (4.45)$$

где σ — плотность поверхностных зарядов (без учета связанных зарядов). Аналогично, применяя теорему Стокса к уравнению $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, находим

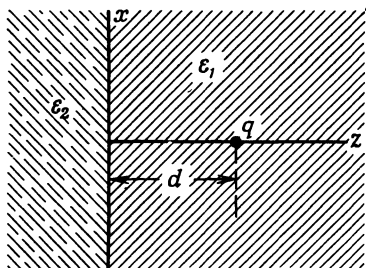
$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} = 0. \quad (4.46)$$

Полученные граничные условия для нормальной составляющей \mathbf{D} и тангенциальной составляющей \mathbf{E} заменяют микроскопические условия (1.22) и последующие, приведенные в гл. 1, § 6. Макроскопические граничные условия можно написать и в виде, эквивалентном (1.22), если включить в правую часть (4.45) плотность связанных зарядов.

§ 5. Граничные задачи при наличии диэлектриков

Методы решения граничных задач электростатики, развитые в предыдущих главах, легко можно обобщить и на случай диэлектрических тел. В этом параграфе мы рассмотрим несколько примеров различных методов решения задач в применении к диэлектрическим средам.

Для иллюстрации метода изображений для диэлектриков рассмотрим точечный заряд q , расположенный в полубесконечной



Ф и г. 4.5.

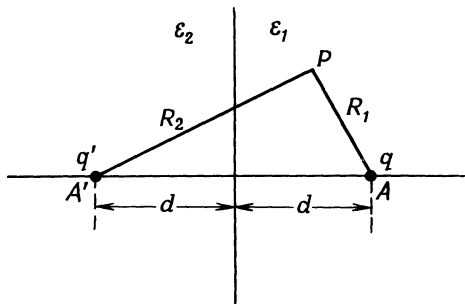
среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 на расстоянии d от плоской границы, отделяющей эту среду от другого полубесконечного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Примем граничную поверхность за плоскость $z = 0$, как показано на фиг. 4.5. Нас интересует решение уравнений

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi q & \text{при } z > 0, \\ \epsilon_2 \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 & \text{при } z < 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 & \text{везде,} \end{aligned} \quad (4.47)$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям при $z = 0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 E_z \\ E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \begin{Bmatrix} \epsilon_2 E_z \\ E_x \\ E_y \end{Bmatrix}. \quad (4.48)$$

Так как $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ во всем пространстве, то поле \mathbf{E} , как обычно, выражается через потенциал Φ . При использовании метода изображений естественно поместить заряд-изображение q' в точке A' ,



Ф и г. 4.6.

симметричной A (фиг. 4.6). Тогда для $z > 0$ потенциал в точке P , характеризуемой цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) , определяется выражением

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right), \quad z > 0, \quad (4.49)$$

где $R_1 = \sqrt{\rho^2 + (d - z)^2}$, $R_2 = \sqrt{\rho^2 + (d + z)^2}$. До сих пор ход решения задачи был совершенно таким же, как и в том случае, когда в области $z < 0$ вместо диэлектрика находилась проводящая среда. Теперь нужно определить потенциал при $z < 0$. Так как в области $z < 0$ заряды отсутствуют, решение уравнения Лапласа в этой области не должно иметь особенностей. Естественно предположить, что потенциал в области $z < 0$ эквивалентен потенциалу некоторого фиктивного заряда q'' , расположенного в точке A , где находится истинный заряд q :

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{q''}{R_1} \quad \text{при } z < 0. \quad (4.50)$$

При учете соотношений

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_1} \right) \right|_{z=0} = - \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_2} \right) \right|_{z=0} = \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

и

$$\left. \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{R_1} \right) \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{R_2} \right) \right|_{z=0} = - \frac{\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

из граничных условий (4.48) получаем требования

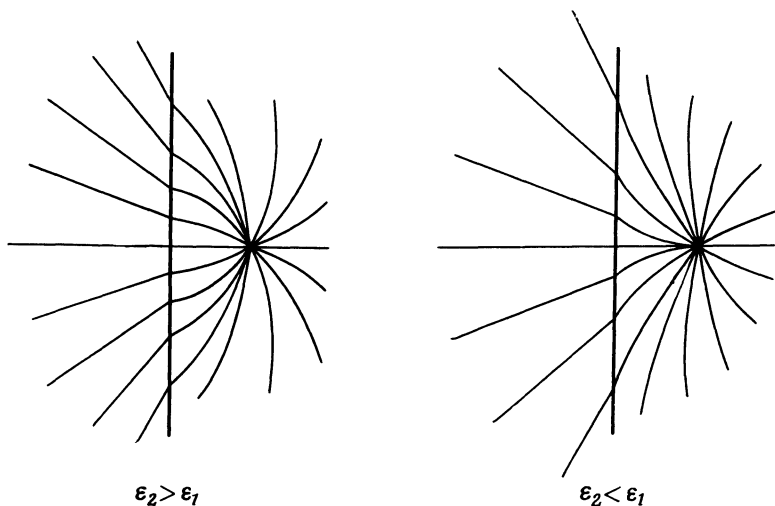
$$q - q' = q'',$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} (q + q') = \frac{1}{\varepsilon_2} q''.$$

Решая эти уравнения, находим величины зарядов-изображений q' и q'' :

$$\begin{aligned} q' &= -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} q, \\ q'' &= \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} q. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Характер силовых линий в случаях $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ и $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ качественно показан на фиг. 4.7.



Фиг. 4.7. Силовые линии поля точечного заряда, находящегося в диэлектрике с проницаемостью ε_1 вблизи плоской границы с полупространством, заполненным средой с диэлектрической проницаемостью ε_2 .

Плотность связанных зарядов равна $-\text{div } \mathbf{P}$. Во внутренних точках обеих диэлектрических сред $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$, так что $-\text{div } \mathbf{P} = -\chi_e \text{div } \mathbf{E} = 0$ везде, кроме точки нахождения заряда q . Но на граничной поверхности $z = 0$ величина χ_e претерпевает скачок $\Delta \chi_e = (1/4\pi)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$. Поэтому на плоскости $z = 0$ существует поверхностный связанный заряд с плотностью

$$\sigma_{\text{пол}} = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}, \quad (4.52)$$

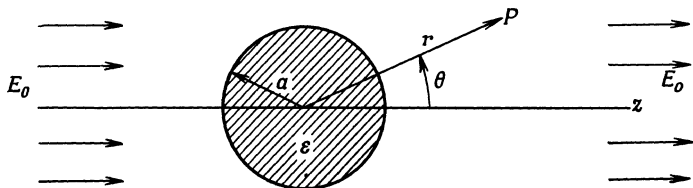
где \mathbf{n} — единичная нормаль, направленная из области 1 в область 2, а \mathbf{P}_i — поляризация i -го диэлектрика вблизи границы $z = 0$. Поскольку

$$\mathbf{P}_i = \left(\frac{\varepsilon_i - 1}{4\pi} \right) \mathbf{E} = - \left(\frac{\varepsilon_i - 1}{4\pi} \right) \text{grad } \Phi,$$

то, как легко убедиться, плотность связанных зарядов равна

$$\sigma_{\text{пол}} = -\frac{q}{2\pi} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \frac{d}{(d^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (4.53)$$

В предельном случае, когда $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$, диэлектрик 2 ведет себя подобно проводнику: поле внутри него становится весьма слабым, а плотность поверхностных зарядов (4.53) стремится к значению плотности зарядов на проводящей поверхности.



Ф и г. 4.8.

В качестве второго примера рассмотрим задачу о диэлектрической сфере радиусом a с диэлектрической проницаемостью ε , помещенной в первоначально однородное электрическое поле, которое на больших расстояниях от сферы направлено вдоль оси z и равно E_0 (фиг. 4.8). Как внутри, так и вне сферы свободных зарядов нет, поэтому следует решать уравнение Лапласа с соответствующими граничными условиями на поверхности $r = a$. Учитывая аксиальную симметрию задачи, можно искать решение в виде:

внутри сферы

$$\Phi_i = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad (4.54)$$

вне сферы

$$\Phi_e = \sum_{l=0}^{\infty} [B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta). \quad (4.55)$$

Из условия на бесконечности ($\Phi \rightarrow -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$) находим, что единственным отличным от нуля коэффициентом B_l является $B_1 = -E_0$. Остальные коэффициенты разложения определяются из граничных условий при $r = a$:

$$\begin{aligned} \text{тангенциальное } E: & \quad -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \Big|_{r=a}, \\ \text{нормальное } D: & \quad -\varepsilon \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{\partial \Phi_e}{\partial r} \Big|_{r=a}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Первое граничное условие приводит к соотношениям

$$A_1 = -E_0 + \frac{C_1}{a^3},$$

$$A_l = \frac{C_l}{a^{2l+1}} \quad \text{при } l \neq 1;$$
(4.57)

второе условие дает

$$\varepsilon A_1 = -E_0 - 2 \frac{C_1}{a^3},$$

$$\varepsilon l A_l = -(l+1) \frac{C_l}{a^{2l+1}} \quad \text{при } l \neq 1.$$
(4.58)

Вторые уравнения в (4.57) и (4.58) могут удовлетворяться одновременно лишь в том случае, если положить $A_l = C_l = 0$ для всех $l \neq 1$. Оставшиеся коэффициенты выражаются через значения приложенного электрического поля E_0

$$A_1 = -\left(\frac{3}{2+\varepsilon}\right) E_0,$$

$$C_1 = \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right) a^3 E_0.$$
(4.59)

В результате решение для потенциала имеет вид

$$\Phi_i = -\left(\frac{3}{\varepsilon+2}\right) E_0 r \cos \theta,$$

$$\Phi_e = -E_0 r \cos \theta + \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right) E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta.$$
(4.60)

Потенциал внутри диэлектрической сферы соответствует однородному электрическому полю, направленному параллельно приложенному и имеющему величину

$$E_i = \frac{3}{\varepsilon+2} E_0 < E_0.$$
(4.61)

Вне сферы поле равно сумме приложенного поля E_0 и поля расположенного в начале координат электрического диполя с моментом

$$p = \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right) a^3 E_0,$$
(4.62)

ориентированным в направлении приложенного внешнего поля. Дипольный момент равен интегралу от поляризации \mathbf{P} по объему сферы. Вектор поляризации равен

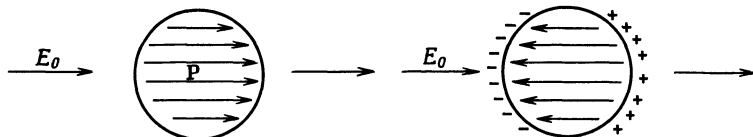
$$\mathbf{P} = \left(\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\right) \mathbf{E} = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right) \mathbf{E}_0.$$
(4.63)

Он постоянен внутри сферы; интеграл от него по объему дает (4.62). Плотность связанного поверхностного заряда, согласно (4.52),

равна $\sigma_{\text{пол}} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})/r$, т. е.

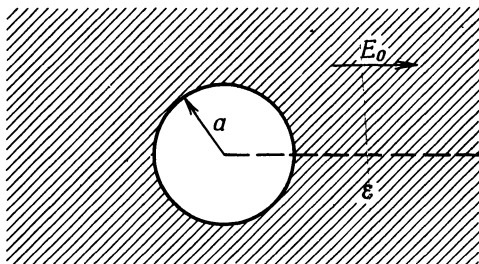
$$\sigma_{\text{пол}} = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) E_0 \cos \theta. \quad (4.64)$$

Можно считать, что поверхностные заряды создают внутреннее поле, противоположное внешнему и уменьшающее значение полного поля внутри сферы до величины (4.61), как схематически показано на фиг. 4.9.



Ф и г. 4.9. Диэлектрическая сфера в однородном электрическом поле E_0 . Слева показано распределение вектора поляризации, справа — наведенный заряд и соответствующее ему электрическое поле, противоположное внешнему.

Задача о сферической полости радиусом a в диэлектрической среде с проницаемостью ε при внешнем электрическом поле E_0 , параллельном оси z (фиг. 4.10), решается совершенно аналогично



Ф и г. 4.10. Сферическая полость в диэлектрике в однородном внешнем поле.

предыдущей. Фактически, как показывает анализ граничных условий (4.56), чтобы получить решение для полости, достаточно в решении для сферы заменить ε на $(1/\varepsilon)$. Так, в частности, поле в полости оказывается однородным, параллельным \mathbf{E}_0 и равным

$$E_i = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1} E_0 > E_0. \quad (4.65)$$

Аналогично поле вне полости равно сумме приложенного поля и поля диполя, расположенного в центре полости, ориентированного противоположно внешнему полю и имеющего дипольный момент

$$p = \left(\frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1} \right) a^3 E_0. \quad (4.66)$$

§ 6. Поляризуемость молекул и диэлектрическая восприимчивость

В этом и следующем параграфах мы рассмотрим связь между молекулярными свойствами и макроскопическим параметром — диэлектрической восприимчивостью χ_e . При анализе мы будем пользоваться простыми классическими моделями, описывающими свойства молекул, хотя, конечно, при строгом подходе к проблеме необходимо квантовомеханическое рассмотрение. К счастью, простейшие свойства диэлектриков поддаются классической интерпретации.

Прежде чем перейти к детальному обсуждению вопроса о связи свойств молекул с диэлектрической восприимчивостью, следует установить различие между внешним полем и полем, действующим на молекулу в среде.

Диэлектрическая восприимчивость определяется соотношением $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$, где \mathbf{E} — макроскопическое электрическое поле. В разреженных средах, где расстояния между молекулами велики, макроскопическое поле мало отличается от поля, действующего на любую молекулу или группу молекул. В плотных же средах с «тесной упаковкой молекул» поляризация соседних молекул приводит к появлению дополнительного внутреннего поля \mathbf{E}_i , действующего на каждую молекулу наряду с усредненным макроскопическим полем \mathbf{E} ; результирующее полное поле, действующее на молекулу, равно, таким образом, сумме $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i$. Внутреннее поле можно представить в виде

$$\mathbf{E}_i = \left(\frac{4\pi}{3} + s \right) \mathbf{P}, \quad (4.67)$$

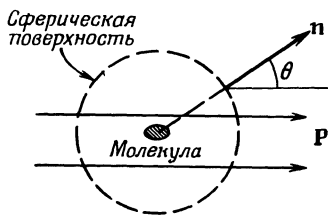
где $s\mathbf{P}$ — вклад молекул, расположенных вблизи рассматриваемой, а $(4\pi/3)\mathbf{P}$ — вклад более удаленных молекул. Обычно рассматривают оба слагаемых в отдельности, окружая исследуемую молекулу воображаемой сферой, размеры которой можно считать микроскопически большими, но макроскопически малыми (фиг. 4.11). Поле в центре сферы, обусловленное поляризацией молекул вне сферы, можно найти по плотности зарядов, наведенных на поверхности сферы. Она равна $-\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, где \mathbf{n} — внешняя нормаль к сферической поверхности. Результирующее поле в центре, очевидно, параллельно \mathbf{P} , а его величина равна

$$E_i^{(1)} = \int_{\text{сфера}} r^2 d\Omega \frac{(-P \cos \theta)}{r^2} \frac{(-\cos \theta)}{r^2} = \frac{4\pi}{3} P, \quad (4.68)$$

что совпадает с первым слагаемым в (4.67).

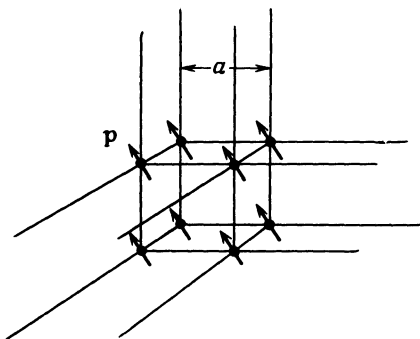
Поле $s\mathbf{P}$, обусловленное близкими молекулами, определить труднее. Как показал Лоренц [69], для атомов в простой кубиче-

ской решетке $s = 0$ в любой точке ячейки. Это вытекает из симметрии задачи, в чем можно убедиться из следующего рассуждения. Пусть внутри сферы расположена кубическая решетка диполей



Ф и г. 4.11. К вычислению влияния дальних молекул на внутреннее поле.

(фиг. 4.12) с равными по величине и одинаково ориентированными моментами (напомним, что сфера считается макроскопически малой). Положения диполей определяются радиусами-векторами x_{ijk} с составляющими (ia, ja, ka) вдоль координатных осей, где a —



Ф и г. 4.12. К вычислению влияния ближних молекул в простой кубической решетке на внутреннее поле.

постоянная решетки, а индексы i, j, k принимают положительные и отрицательные целые значения. Поле в начале координат, порождаемое всеми диполями, согласно (4.13), равно

$$E = \sum_{ijk} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_{ijk}) \mathbf{x}_{ijk} - x_{ijk}^2 \mathbf{p}}{x_{ijk}^5}. \quad (4.69)$$

Составляющую поля вдоль оси x можно представить в виде

$$E_1 = \sum_{ijk} \frac{3(i^2 p_1 + i j p_2 + i k p_3) - (i^2 + j^2 + k^2) p_1}{a^3 (i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}}. \quad (4.70)$$

Так как индексы пробегает и положительные, и отрицательные значения, то сумма перекрестных членов $(i j p_2 + i k p_3)$ обращается

в нуль. Из симметрии решетки следует равенство сумм

$$\sum_{ijk} \frac{i^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = \sum_{ijk} \frac{j^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = \sum_{ijk} \frac{k^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}}.$$

В результате получаем

$$E_1 = \sum_{ijk} \frac{[3i^2 - (i^2 + j^2 + k^2)] p_1}{a^3 (i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = 0. \quad (4.71)$$

Совершенно аналогично можно показать, что составляющие поля вдоль осей y и z также равны нулю. Следовательно, $s = 0$ для простой кубической решетки.

Поскольку $s = 0$ для системы с высокой степенью симметрии, представляется правдоподобным, что и для полностью хаотического расположения молекул также $s = 0$. Поэтому можно ожидать, что в аморфных веществах, подобных стеклу, внутреннее поле, обусловленное близлежащими молекулами, также не возникает. Хотя точный ответ может быть получен лишь при учете детального строения вещества, предположение, что $s \approx 0$, можно принять почти для всех материалов.

Согласно (4.36), вектор поляризации \mathbf{P} определяется равенством

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p}_{\text{МОЛ}} \rangle,$$

где $\langle \mathbf{p}_{\text{МОЛ}} \rangle$ — средний дипольный момент молекул. Дипольный момент приближенно пропорционален электрическому полю, действующему на молекулу. Чтобы отразить эту зависимость, определим *поляризуемость молекулы* $\gamma_{\text{МОЛ}}$ как отношение среднего дипольного момента молекулы к действующему на нее полю. Учитывая наличие внутреннего поля (4.67), получаем

$$\langle \mathbf{p}_{\text{МОЛ}} \rangle = \gamma_{\text{МОЛ}} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i). \quad (4.72)$$

Коэффициент $\gamma_{\text{МОЛ}}$ зависит, строго говоря, от величины электрического поля, но для широкой области значений напряженности поля он является постоянной, характеризующей реакцию молекул на приложенное поле (см. § 4). Комбинируя соотношение (4.72) с (4.36) и (4.67), получаем

$$\mathbf{P} = N \gamma_{\text{МОЛ}} \left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \right), \quad (4.73)$$

где принято, что $s = 0$. Выражая \mathbf{P} через \mathbf{E} и пользуясь равенством $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$, определяющим диэлектрическую восприимчивость вещества, находим

$$\chi_e = \frac{N \gamma_{\text{МОЛ}}}{1 - (4\pi/3) N \gamma_{\text{МОЛ}}}. \quad (4.74)$$

Это соотношение связывает восприимчивость (макроскопический параметр) и поляризуемость молекул (микроскопический параметр). Поскольку диэлектрическая проницаемость равна $\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$, ее также можно выразить через $\gamma_{\text{мол}}$. Наоборот, поляризуемость молекул может быть выражена через диэлектрическую проницаемость вещества:

$$\gamma_{\text{мол}} = \frac{3}{4\pi N} \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right). \quad (4.75)$$

Соотношение (4.75) называют *уравнением Клаузиуса — Моссотти*, так как Моссотти (в 1850 г.) и Клаузиус (в 1879 г.) независимо установили, что для данного вещества величина $(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2)$ пропорциональна плотности вещества¹⁾. Это соотношение лучше всего выполняется для веществ с малой плотностью, например для газов. Для жидкостей и твердых тел формула (4.75) справедлива лишь приближенно, особенно если диэлектрическая проницаемость велика. Дальнейшие подробности читатель может найти в книгах Бэтхера [18], Дебая [35] и Фрëлиха [43].

§ 7. Модели поляризуемости молекул

Существует два механизма возникновения поляризации системы атомов или молекул:

а) внешнее поле изменяет распределение заряда, индуцируя в каждой молекуле дипольный момент;

б) внешнее поле вызывает упорядочение первоначально хаотически ориентированных постоянных дипольных моментов молекул.

Для оценки индуцированных моментов рассмотрим простую модель упруго связанных зарядов (электронов). На каждый заряд e действует упругая удерживающая сила

$$\mathbf{F} = -m\omega_0^2\mathbf{x}, \quad (4.76)$$

где m — масса заряда, а ω_0 — частота колебаний вблизи положения равновесия. Под действием электрического поля \mathbf{E} заряд смещается из положения равновесия, причем величина смещения \mathbf{x} определяется соотношением

$$m\omega_0^2\mathbf{x} = e\mathbf{E}.$$

В результате наведенный дипольный момент оказывается равным

$$\mathbf{p}_{\text{мол}} = e\mathbf{x} = \frac{e^2}{m\omega_0^2} \mathbf{E}. \quad (4.77)$$

¹⁾ В области оптических частот $\epsilon = n^2$, где n — показатель преломления. Соотношение (4.75), в котором ϵ заменено на n^2 , называют иногда формулой Лорентц — Лоренца (1880 г.).

Отсюда для поляризуемости молекулы получаем $\gamma = e^2/m\omega_0^2$. Если молекула имеет Z электронов, причем для f_j -го электрона упругая сила равна $m\omega_j^2x$ ($\sum_j f_j = Z$), то поляризуемость молекулы, обусловленная электронами, оказывается равной

$$\gamma_{\text{эл}} = \frac{e^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2}. \quad (4.78)$$

Чтобы представить себе порядок величины $\gamma_{\text{эл}}$, проведем две различные оценки. Так как γ имеет размерность объема, ее величина должна быть порядка молекулярных размеров или меньше, т. е. $\gamma_{\text{эл}} \leq 10^{-23} \text{ см}^3$. С другой стороны, частоты связи для атомных электронов должны иметь порядок оптических частот. Приняв за типичную длину световой волны 3000 \AA , получаем $\omega \approx 6 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$. В результате $\gamma_{\text{эл}} \approx (e^2/m\omega^2) \approx 6 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3$, что согласуется с предыдущей оценкой, основанной на величине молекулярного объема.

Для газов, находящихся при нормальных температуре и давлении, число N молекул в 1 см^3 составляет $2,7 \cdot 10^{19}$, и, таким образом, диэлектрическая восприимчивость χ_e по порядку величины меньше или примерно равна 10^{-4} . Это значит, что диэлектрическая проницаемость отличается от единицы на несколько тысячных или еще меньше. В качестве типичных экспериментально найденных значений диэлектрической проницаемости можно привести значения ϵ для воздуха (1,00054), паров аммиака (1,0072), метилового спирта (1,0057), гелия (1,000068). Для твердых или жидких диэлектриков N составляет 10^{22} — 10^{23} молекул в 1 см^3 , так что диэлектрическая восприимчивость может быть порядка единицы (с точностью до множителя $\sim 10^{\pm 1}$), что и наблюдается на опыте¹⁾.

При выводе (4.78) мы не учитывали теплового движения молекул. Следует еще рассмотреть, не меняет ли учет теплового движения найденного значения наведенной дипольной поляризуемости. Согласно статистической механике, функция распределения частиц в фазовом пространстве (в пространстве \mathbf{p} , \mathbf{q}) пропорциональна множителю Больцмана

$$e^{-H/kT}, \quad (4.79)$$

где H — гамильтониан. Для гармонически связанного электрона при наличии поля, направленного по оси z , гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 \mathbf{x}^2 - eEz, \quad (4.80)$$

где \mathbf{p} — импульс электрона. Усредненное значение дипольного

¹⁾ Таблицы диэлектрических проницаемостей различных веществ можно найти в [5] или [49].

момента определяется выражением

$$\langle \rho_{\text{мол}} \rangle = \frac{\int d^3p \int d^3x (ez) e^{-H/kT}}{\int d^3p \int d^3x e^{-H/kT}}. \quad (4.81)$$

Интегрирование по d^3p и $dx dy$ может быть проведено сразу и дает

$$\langle \rho_{\text{мол}} \rangle = \frac{e \int dz z \exp \left[-\frac{1}{kT} \left(\frac{m\omega_0^2}{2} z^2 - eEz \right) \right]}{\int dz \exp \left[-\frac{1}{kT} \left(\frac{m\omega_0^2}{2} z^2 - eEz \right) \right]}.$$

Интегрируя числитель по частям, окончательно получаем

$$\langle \rho_{\text{мол}} \rangle = \frac{e^2}{m\omega_0^2} E,$$

что совпадает с выражением (4.77), найденным ранее элементарным способом без учета теплового движения. Таким образом, выражение (4.78) для поляризуемости молекул справедливо и при наличии теплового движения.

Второй вид поляризуемости обусловлен частичной ориентацией постоянных дипольных моментов, первоначально ориентированных хаотически. Такая ориентационная поляризация, существенная для веществ с полярными молекулами типа HCl и H₂O, впервые была исследована Дебаем (1912 г.). Пусть все молекулы обладают постоянным дипольным моментом p_0 , который может быть ориентирован в любом направлении. Если внешнего поля нет, то вследствие теплового возбуждения молекулы ориентированы хаотически, так что результирующий дипольный момент равен нулю. Если же приложено электрическое поле, то диполи стремятся ориентироваться по полю, поскольку эта ориентация соответствует положению с наименьшей энергией. Поэтому средний дипольный момент становится отличным от нуля. Для его нахождения заметим, что гамильтониан молекулы определяется формулой

$$H = H_0 - p_0 \cdot E, \quad (4.82)$$

где H_0 — функция лишь «внутренних» координат молекулы.

Учитывая множитель Больцмана (4.79), можно найти средний дипольный момент:

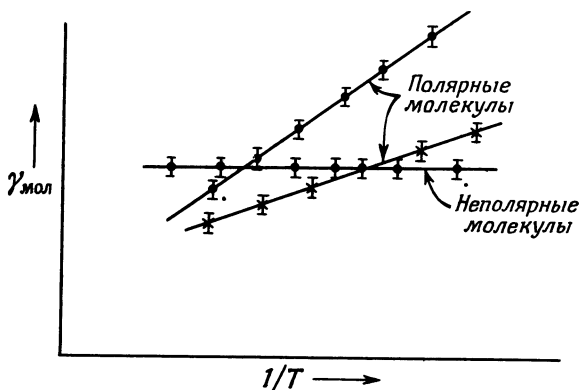
$$\langle \rho_{\text{мол}} \rangle = \frac{\int d\Omega p_0 \cos \theta \exp(p_0 E \cos \theta / kT)}{\int d\Omega \exp(p_0 E \cos \theta / kT)}, \quad (4.83)$$

где поле E выбрано вдоль оси z . Здесь уже проведено интегрирование по всем несущественным переменным и учтено, что лишь составляющая p_0 , параллельная направлению поля, отлична от нуля.

Величина $\rho_0 E / kT$ обычно весьма мала по сравнению с единицей, за исключением случая очень низких температур. Поэтому можно воспользоваться степенным разложением экспоненциальных функций, что приводит к соотношению

$$\langle \rho_{\text{мол}} \rangle \approx \frac{1}{3} \frac{\rho_0^2}{kT} E. \quad (4.84)$$

Из (4.84) видно, что ориентационная поляризация обратно пропорциональна температуре; этого и следовало ожидать, поскольку приложенное поле преодолевает разупорядочивающее влияние теплового движения.



Ф и г. 4.13. Температурная зависимость поляризуемости молекул $\gamma_{\text{мол}}$ для полярных и неполярных диэлектриков.

В общем случае существуют оба типа поляризации — индуцируемая (электронная) и ориентационная, так что общее выражение для поляризуемости молекул имеет вид

$$\gamma_{\text{мол}} \approx \gamma_{\text{эл}} + \frac{1}{3} \frac{\rho_0^2}{kT}. \quad (4.85)$$

При этом зависимость от температуры имеет вид $(a + b/T)$, так что экспериментально оба типа поляризации легко разделить (фиг. 4.13). Для полярных молекул, например HCl и H_2O , измеренное значение постоянного дипольного момента равно по порядку величины произведению заряда электрона на 10^{-8} см, что согласуется с молекулярными размерами.

§ 8. Энергия электрического поля в диэлектрике

В гл. 1, § 11, была исследована энергия системы зарядов в свободном пространстве. Полученное выражение для энергии системы

с распределением плотности заряда $\rho(\mathbf{x})$ и потенциалом $\Phi(\mathbf{x})$

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d^3x \quad (4.86)$$

не может быть, вообще говоря, принято без изменения при макроскопическом описании диэлектрических сред. Причина этого станет более ясной, если напомнить, как было получено выражение (4.86).

Данное распределение заряда мы представляли себе как результат постепенного накопления элементарных зарядов, которые вносятся из бесконечно удаленной точки, причем преодолевается противодействие электрического поля уже существующего заряда. При этом полная работа, совершенная при накоплении заряда, описывается соотношением (4.86). При наличии диэлектрической среды совершаемая работа тратится не только на перенос свободного (макроскопического) заряда в его окончательное положение, но и на увеличение поляризации диэлектрика. Поэтому если понимать под ρ и Φ в (4.86) макроскопические величины, то заранее не очевидно, что выражение (4.86) определяет полную затраченную работу, включающую и работу на поляризацию диэлектрика.

Для общности рассмотрения мы вначале не будем делать каких-либо допущений о линейности, однородности и тому подобных свойствах реакции диэлектрика на приложенное поле. Рассмотрим малое изменение энергии δW , обусловленное некоторым изменением $\delta\rho$ распределения плотности заряда ρ , существующего во всем пространстве.

Работа, требуемая для совершения этого изменения, равна

$$\delta W = \int \delta\rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d^3x, \quad (4.87)$$

где $\Phi(\mathbf{x})$ — потенциал, создаваемый уже существующим распределением заряда $\rho(\mathbf{x})$. Так как $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$, то $\delta\rho$ можно связать с изменением электрической индукции $\delta\mathbf{D}$

$$\delta\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div}(\delta\mathbf{D}). \quad (4.88)$$

В результате изменение энергии δW может быть представлено в виде

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} d^3x, \quad (4.89)$$

где мы воспользовались соотношением $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi$ и приняли, что $\rho(\mathbf{x})$ описывает ограниченное распределение заряда. Полную электростатическую энергию можно найти, по крайней мере формально, рассмотрев изменение \mathbf{D} от начального значения $\mathbf{D} = 0$

до некоторой конечной величины \mathbf{D} :

$$W = \frac{1}{4\pi} \int d^3x \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}. \quad (4.90)$$

Для *линейной* среды

$$\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} = \frac{1}{2} \delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \quad (4.91)$$

и полная электростатическая энергия оказывается равной

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d^3x. \quad (4.92)$$

Последний результат можно преобразовать к виду (4.86), воспользовавшись соотношениями $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$ и $\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho$ или же возвращаясь к (4.87) и принимая линейную связь между ρ и Φ . Таким образом, мы видим, что выражение (4.86) выполняется для макроскопических характеристик лишь в случае линейных сред. В противном случае энергия окончательной конфигурации зарядов должна вычисляться согласно (4.90) и может зависеть от предыстории системы (гистерезис).

Представляет интерес задача об изменении энергии при внесении диэлектрических тел в электрическое поле фиксированных источников. Пусть первоначально электрическое поле \mathbf{E}_0 создается некоторым распределением зарядов $\rho_0(\mathbf{x})$ в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 , которая может зависеть от координат. При этом начальная электростатическая энергия равна

$$W_0 = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0 d^3x,$$

где $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$. Пусть теперь при фиксированном положении источников в поле вносится диэлектрическое тело объемом V_1 , что приводит к изменению поля от \mathbf{E}_0 до \mathbf{E} . При наличии тела диэлектрическая проницаемость $\epsilon(\mathbf{x})$ равна ϵ_1 в объеме V_1 и ϵ_0 вне V_1 . Чтобы обойти математические трудности, будем считать функцию $\epsilon(\mathbf{x})$ достаточно плавной функцией координат, спадающей от ϵ_1 до ϵ_0 вблизи границы объема V_1 быстро, но непрерывно. При наличии тела величина энергии будет равна

$$W_1 = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d^3x,$$

где $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. Разность энергий можно записать в виде

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0) d^3x = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_0) d^3x + \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E} + \mathbf{E}_0) \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) d^3x. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Можно показать, что второй интеграл равен нулю. Действительно, так как $\operatorname{rot}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_0) = 0$, то

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_0 = -\operatorname{grad} \Phi,$$

так что второй интеграл может быть представлен в виде

$$I = -\frac{1}{8\pi} \int \operatorname{grad} \Phi \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) d^3x.$$

Интегрирование по частям дает

$$I = \frac{1}{8\pi} \int \Phi \operatorname{div}(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) d^3x = 0,$$

так как $\operatorname{div}(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) = 0$ в силу предположения о том, что распределение плотности заряда $\rho_0(\mathbf{x})$ не изменилось при внесении диэлектрического тела. Таким образом, изменение энергии определяется выражением

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_0) d^3x. \quad (4.94)$$

Интегрирование, которое, казалось бы, надо распространять на все пространство, в действительности следует проводить лишь по объему V_1 , занятому телом, так как вне этого объема $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$. Таким образом,

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\epsilon_1 - \epsilon_0) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0 d^3x. \quad (4.95)$$

Если диэлектрическое тело расположено в свободном пространстве, то $\epsilon_0 = 1$. Учитывая определение вектора поляризации \mathbf{P} , можно записать (4.95) в виде

$$W = -\frac{1}{2} \int_{V_1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 d^3x, \quad (4.96)$$

где \mathbf{P} — поляризация диэлектрика. Отсюда следует, что плотность энергии в диэлектрике, расположенном в поле \mathbf{E}_0 , источники которого фиксированы, описывается формулой

$$w = -\frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0. \quad (4.97)$$

Это выражение аналогично дипольному члену в разложении (4.17) для энергии распределения зарядов во внешнем поле. Наличие коэффициента $1/2$ связано с тем, что (4.97) представляет плотность энергии для поляризуемого диэлектрика во внешнем поле, а не для постоянного диполя. Этот коэффициент имеет то же происхождение, что и в формуле (4.91).

Из выражений (4.95) и (4.96) следует, что при $\epsilon_1 > \epsilon_0$ диэлектрическое тело стремится переместиться в область с большим значением поля E_0 . Для вычисления действующей на тело силы рассмотрим малое обобщенное смещение тела $\delta\xi$. Оно приведет к изменению энергии δW . Так как распределение зарядов фиксировано, то внешние источники энергии отсутствуют и изменение энергии поля должно компенсироваться изменением механической энергии тела. Это значит, что действующая на тело сила определяется выражением

$$F_{\xi} = - \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_Q, \quad (4.98)$$

где индекс Q у частной производной показывает, что источники поля остаются неизменными.

В практических задачах с перемещением диэлектриков электрическое поле часто создается заданной конфигурацией электродов, на которых с помощью внешнего источника, например батареи, поддерживается *постоянный потенциал*. При перемещении диэлектрика заряд будет течь к батарее или от нее так, чтобы потенциал оставался постоянным. Это означает, что внешний источник в данном случае затрачивает некоторую энергию. Интересно сравнить эту энергию с найденным выше изменением энергии для *фиксированных источников поля*. Будем рассматривать лишь линейные среды, для которых справедливо выражение (4.86). При этом достаточно рассмотреть лишь малые изменения первоначально существовавшей конфигурации. Как видно из (4.86), изменение энергии, соответствующее изменению плотности заряда $\delta\rho(\mathbf{x})$ и изменению потенциала $\delta\Phi(\mathbf{x})$, равно

$$\delta W = \frac{1}{2} \int [\rho\delta\Phi + \Phi\delta\rho] d^3x. \quad (4.99)$$

Сопоставление с выражением (4.87) показывает, что при неизменных свойствах диэлектрика оба слагаемых в (4.99) равны. Если, однако, свойства диэлектрика меняются:

$$\epsilon(\mathbf{x}) \rightarrow \epsilon(\mathbf{x}) + \delta\epsilon(\mathbf{x}), \quad (4.100)$$

то слагаемые (4.99) могут быть не равными.

Действительно, мы сейчас нашли изменение энергии, обусловленное введением диэлектрического тела в электрическое поле, создаваемое фиксированными источниками ($\delta\rho = 0$). Это изменение энергии объясняется появлением наведенных зарядов. Изменение свойств диэлектрика в соответствии с (4.100) вызывает изменение плотности связанного заряда. Поэтому если интерпретировать соотношение (4.99) как интеграл от плотности и свободной, и связанного зарядов (т. е. как микроскопическое уравнение), то оба

слагаемых оказываются всегда равными. Однако часто удобно иметь дело с макроскопическими величинами. При этом указанное равенство обоих слагаемых имеет место лишь при неизменных свойствах диэлектрика.

Можно считать, что любой процесс изменения свойств диэлектрика (перемещением диэлектрических тел, изменением их восприимчивостей и т. д.) при заданных потенциалах на электродах совершается в два этапа. На первом этапе электроды отсоединены от батарей и заряд на них поддерживается постоянным ($\delta q = 0$). Изменение энергии при изменении свойств диэлектрика (4.100) выражается формулой

$$\delta W_1 = \frac{1}{2} \int \rho \delta \Phi_1 d^3x, \quad (4.101)$$

где $\delta \Phi_1$ — изменение потенциала. Можно показать, что это соотношение приводится к (4.95). На втором этапе батареи подключаются к электродам и на электродах вновь восстанавливается первоначальный потенциал. Изменение потенциала ¹⁾ $\delta \Phi_2 = -\delta \Phi_1$ сопровождается потоком заряда δq_2 от батареи. Изменение энергии на втором этапе равно

$$\delta W_2 = \frac{1}{2} \int (\rho \delta \Phi_2 + \Phi \delta q_2) d^3x = -2\delta W_1, \quad (4.102)$$

так как оба слагаемых равны друг другу. Мы видим, что изменение энергии, обусловленное внешними источниками на втором этапе, вдвое больше, чем на первом, и имеет противоположный знак. В результате полное изменение энергии

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int \rho \delta \Phi_1 d^3x. \quad (4.103)$$

Символически можно записать

$$\delta W_V = -\delta W_Q, \quad (4.104)$$

где индекс соответствует фиксированному параметру.

Если диэлектрик с $\epsilon > 1$ вносится в область с большей напряженностью поля, то в случае фиксированных потенциалов энергия возрастает, а не убывает. При этом действующая на тело механическая сила, соответствующая обобщенному смещению $d\xi$, равна

$$F_\xi = + \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_V. \quad (4.105)$$

¹⁾ Заметим, что необходимо знать лишь изменение потенциала $\delta \Phi_2 = -\delta \Phi_1$ на электродах, так как это единственное место, где присутствуют свободные заряды.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Вывод макроскопических уравнений электростатики с помощью усреднения по совокупности атомов можно найти в книгах Розенфельда [86], гл. 2, Мэсона и Уивера [72], гл. 1, часть III, Ван Флека [113], гл. 1.

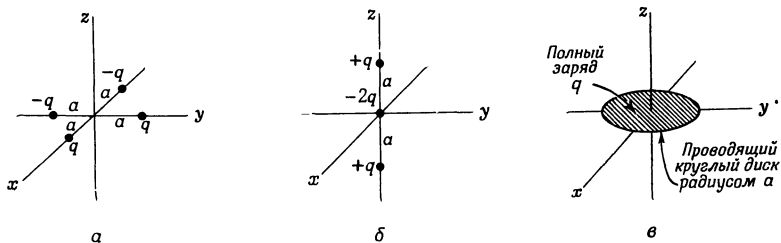
Розенфельд рассматривает также классическую электронную теорию диэлектриков. Книга Ван Флека посвящена исследованию диэлектрической и магнитной восприимчивости. Явлению поляризации диэлектриков специально посвящены работы Бётхера [18], Дебая [35], Фрелиха [43].

Граничные задачи при наличии диэлектриков рассматриваются во всех указанных в гл. 2 и 3 работах по электростатике.

Мы рассмотрели силы и энергии в диэлектрических средах весьма бегло. Более полное исследование этого круга вопросов, в том числе рассмотрение сил в жидких и твердых диэлектриках, исследование тензора электрических напряжений, электрострикции и термодинамических эффектов, можно найти в книгах Абрагама и Беккера [1], гл. 5, Дюрана [37], гл. 6 и 7, Ландау и Лифшица [64], Максвелла [73], т. 1, гл. 5, Пановского и Филипс [78], гл. 6, Стрэттона [106], гл. 2.

ЗАДАЧИ

4.1. а) Вычислить мультипольные моменты q_{lm} распределений заряда, изображенных на фиг. 4.14, а — в, попытаться получить значения отличных от нуля моментов, справедливые для всех l ; в каждом случае определить по крайней мере два первых отличных от нуля момента.



Фиг. 4.14.

б) Для распределения заряда, изображенного на фиг. 4.14, б, записать разложение потенциала по мультиполям. Удержав лишь низший член в разложении, начертить распределение потенциала в плоскости xu как функции расстояния от начала координат для расстояний, больших a .

в) Вычислить, исходя из закона Кулона, точное выражение для потенциала распределения, изображенного на фиг. 4.14, в, в плоскости xu . Построить кривые зависимости потенциала от расстояния и сравнить их с приближенным результатом, полученным в п. «б».

Чтобы более ясно представить себе характер решений, полученных в пп. «б» и «в», на больших расстояниях, определить асимптотику решений.

4.2. Ядро с квадрупольным моментом Q находится в цилиндрически симметричном электрическом поле, которое в точке расположения ядра имеет градиент $(\partial E_z / \partial z)_0$ вдоль оси z .

а) Показать, что энергия квадрупольного взаимодействия определяется выражением

$$W = -\frac{e}{4} Q \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_0.$$

б) Пусть $Q = 2 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, а $W/h = 10 \text{ Мгц}$, где h — постоянная Планка; вычислить $(\partial E_z / \partial z)_0$ в единицах e/a_0^3 , где $a_0 = \hbar^2/me^2 = 0,529 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ — борковский радиус атома водорода.

в) Распределение заряда в ядре может быть аппроксимировано постоянной плотностью заряда в объеме сфероида с главной полуосью a и второй полуосью b . Вычислить квадрупольный момент такого ядра, считая его полный заряд равным Ze . Приняв, что для Eu^{153} ($Z = 63$) квадрупольный момент равен $Q = 2,5 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, а средний радиус

$$R = \frac{a+b}{2} = 7 \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

определить относительную разность полуосей $(a - b)/R$.

4.3. Пусть плотность распределения заряда задается выражением

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2 \theta.$$

а) Провести разложение потенциала для данного распределения плотности по мультиполям и определить отличные от нуля мультипольные моменты. Записать потенциал на больших расстояниях в виде конечного разложения по полиномам Лежандра.

б) Найти явное выражение для потенциала в любой точке пространства и показать, что вблизи начала координат

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} P_2(\cos \theta).$$

в) Пусть в начале координат расположено ядро с квадрупольным моментом $Q = 10^{-24} \text{ см}^2$. Найти величину энергии взаимодействия ядра с полем в предположении, что за единицу заряда в приведенном выше распределении $\rho(\mathbf{r})$ принят заряд электрона, а за единицу длины — борковский радиус атома водорода $a_0 = \hbar^2/me^2 = 0,529 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Выразить результат в частотах, разделив его на постоянную Планка h .

Принятое в задаче распределение плотности заряда соответствует состояниям $2p$ -уровня для водорода с $m = \pm 1$, а квадрупольное взаимодействие по порядку величины совпадает с найденным для молекул водорода.

4.4. Очень длинный прямой круглый полый диэлектрический цилиндр из вещества с диэлектрической проницаемостью ϵ , имеющий внутренний радиус a и внешний радиус b , помещен в первоначально однородное электрическое поле E_0 , причем ось цилиндра перпендикулярна полю. Диэлектрическая проницаемость среды вне и внутри цилиндра равна единице.

а) Определить потенциал и электрическое поле во всех трех областях, пренебрегая краевыми эффектами.

б) Нарисовать распределение силовых линий для случая $b \approx 2a$.

в) Исследовать решения в предельных случаях, а именно для сплошного диэлектрического цилиндра в однородном поле и цилиндрической полости в однородном диэлектрике.

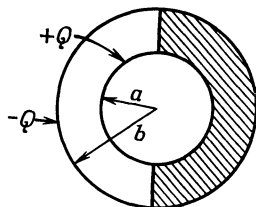
4.5. Точечный заряд q расположен в свободном пространстве на расстоянии d от центра диэлектрической сферы радиусом a ($a < d$) с диэлектрической проницаемостью ϵ .

а) Найти распределение потенциала во всем пространстве в виде разложения по сферическим гармоникам.

б) Вычислить декартовы составляющие электрического поля вблизи центра сферы.

в) Проверить, что в пределе $\epsilon \rightarrow \infty$ полученный результат совпадает с результатом для проводящей сферы.

4.6. Заряды на двух концентрических идеально проводящих сферических оболочках с внутренним и внешним радиусами a и b равны соответственно $\pm Q$. Пространство между сферами наполовину заполнено полусферическим слоем диэлектрика (с диэлектрической проницаемостью ϵ), как изображено на фиг. 4.15.



Ф и г. 4.15.

- а) Найти распределение электрического поля между сферами.
 б) Вычислить распределение поверхностного заряда на внутренней сфере.
 в) Вычислить плотность связанных зарядов на поверхности диэлектрика $r = a$.

4.7. Ниже приводятся данные об изменении диэлектрической проницаемости в зависимости от давления, взятые из [99].

Воздух при 292° К

Давление, атм	ϵ
20	1,0108
40	1,0218
60	1,0333
80	1,0439
100	1,0548

Пентан (C_5H_{12}) при 303° К

Давление, атм	Плотность, г/см ³	ϵ
1	0,613	1,82
10 ³	0,701	1,96
4 · 10 ³	0,796	2,12
8 · 10 ³	0,865	2,24
12 · 10 ³	0,907	2,33

Проверить соотношение Клаузиуса — Моссотти между диэлектрической проницаемостью и плотностью для воздуха и пентана для приведенных в таблице значений переменных. Выполняется ли оно точно? Приближенно? Если соотношение выполняется лишь приближенно, рассмотреть относительное изменение плотности и ($\epsilon - 1$). Для пентана сравнить соотношение Клаузиуса — Моссотти с более грубым законом пропорциональности ($\epsilon - 1$) плотности. (Данные об относительной плотности воздуха как функции давления можно найти в справочниках; см., например, [5].)

4.8. Водяные пары являются полярным газом, диэлектрическая проницаемость которого заметно зависит от температуры. Ниже приводится таблица, содержащая данные экспериментального исследования этого эффекта.

Считая водяные пары идеальным газом, вычислить зависимость поляризуемости молекул от температуры T и начертить график этой зависимости, откладывая по оси абсцисс $1/T$. По наклону кривой определить величину постоянного дипольного момента молекулы H_2O (дипольный момент выразить в электростатических единицах).

T°, K	Давление, <i>см рт.ст.</i>	$(\epsilon - 1) \cdot 10^5$
393	56,49	400,2
423	60,93	371,7
453	65,34	348,8
483	69,75	328,7

4.9. Два длинных коаксиальных проводящих цилиндра с радиусами a и b опущены вертикально в жидкий диэлектрик. Пусть жидкость поднимается на высоту h между электродами при разности потенциалов между ними V . Показать, что диэлектрическая восприимчивость жидкости определяется формулой

$$\chi_e = \frac{(b^2 - a^2) \rho g h \ln(b/a)}{V^2},$$

где ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, а диэлектрическая восприимчивость воздуха не учитывается.

МАГНИТОСТАТИКА

§ 1. Введение и основные определения

В предыдущих главах были рассмотрены основные вопросы электростатики (поля и взаимодействия стационарных зарядов и соответствующие граничные условия). Обратимся теперь к исследованию стационарных магнитных явлений. С исторической точки зрения магнитные явления были известны и изучались по крайней мере так же давно, как и электрические явления. Еще в древние времена был известен магнитный железняк; морской компас — очень старое изобретение; исследования Гильберта, в которых Земля рассматривается как гигантский магнит, появились еще до 1600 г. Основные законы магнитного поля в отличие от законов электростатики не выведены непосредственно из первоначального опыта обращения людей с магнитными материалами. Это объясняется рядом причин, но все они обусловлены коренным различием между магнитостатикой и электростатикой: *свободных магнитных зарядов не существует*. Поэтому магнитные явления существенно отличаются от электрических явлений, и связь между ними в течение долгого времени не была установлена. В магнитных исследованиях основным реально существующим объектом является, как мы его теперь называем, магнитный диполь. В присутствии магнитных материалов диполь стремится ориентироваться в определенном направлении. Это направление по определению считают направлением вектора плотности магнитного потока, обозначаемого \mathbf{B} (при условии, что диполь достаточно мал и настолько слаб, что он не искажает существующее поле). Величина плотности магнитного потока может быть определена по механическому вращающему моменту \mathbf{N} , действующему на магнитный диполь:

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}, \quad (5.1)$$

где μ — магнитный момент диполя, выраженный в выбранных единицах измерения ¹⁾.

Уже определение вектора плотности магнитного потока \mathbf{B} (часто называемого *магнитной индукцией*) существенно более сложно, чем определение характеристик электрического поля. Дальнейшее количественное исследование магнитных явлений началось лишь после установления связи между токами и магнитными полями. Ток представляет собой движение свободных зарядов и характеризуется вектором плотности тока \mathbf{J} , измеряемым количеством единиц положительного заряда, пересекающего единичную площадку в единицу времени; направление движения зарядов определяет направление вектора \mathbf{J} . В системе СГС плотность тока измеряется количеством электричества, проходящим через 1 см^2 в 1 сек ; в системе МКСА — в кулонах на 1 м^2 в 1 сек , или в амперах на 1 м^2 . Если ток течет по проводникам малого поперечного сечения, мы обычно интересуемся лишь интегралом от плотности тока по площади сечения и говорим о токе, текущем вдоль проводника и выражаемом в статамперах или амперах.

Условие сохранения заряда связывает плотность заряда в любой точке пространства с плотностью тока в ее окрестности так называемым уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (5.2)$$

Это уравнение выражает тот физический факт, что уменьшение заряда внутри малого объема обязательно должно сопровождаться потоком заряда из объема через его поверхность, так как полное число зарядов должно оставаться неизменным. Стационарные магнитные явления характеризуются постоянством плотности заряда во всех точках пространства. Поэтому в магнитостатике справедливо уравнение

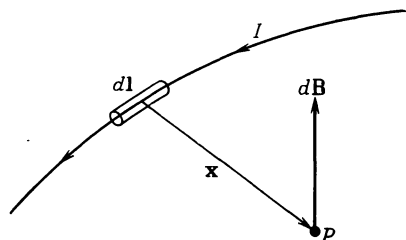
$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (5.3)$$

Теперь мы перейдем к рассмотрению экспериментально обнаруженной связи между электрическим током и плотностью магнитного потока и формулировке основных законов магнитостатики.

¹⁾ По аналогии с приведенным в гл. 1 определением единицы заряда в электростатике как заряда, образующегося при проведении равно 100 раз кошачьим мехом по янтарному стержню, можно было бы определить единственный дипольный момент как дипольный магнитный момент полудюймового стержня, по которому медленно провели 100 раз некоторым «стандартным» постоянным магнитом, ориентированным определенным стандартным образом. Подумав немного, можно было бы изобрести и более надежный и воспроизводимый стандарт!

§ 2. Закон Био и Савара

В 1819 г. Эрстед обнаружил, что провод, по которому течет электрический ток, вызывает отклонение постоянного магнитного диполя, помещенного вблизи него. Таким образом, токи являются источниками магнитной индукции. Впервые Био и Савар (1820 г.), а затем в гораздо более тщательных и совершенных опытах Ампер (1820—1825 гг.) установили основные экспериментальные законы, связывающие магнитную индукцию \mathbf{B} с токами, и нашли закон,



Ф и г. 5.1. Магнитная индукция $d\mathbf{B}$, обусловленная элементарным током $I dl$.

определяющий силу взаимодействия между токами. Основное соотношение, хотя и не совсем в том виде, в котором оно было выведено Ампером, можно сформулировать следующим образом. Пусть dl — элемент длины (ориентированный вдоль тока) бесконечно тонкого провода, несущего ток I , а \mathbf{x} — радиус-вектор, проведенный от этого элемента длины в точку наблюдения P , как показано на фиг. 5.1; тогда величина и направление магнитной индукции $d\mathbf{B}$, создаваемой элементом dl в точке P , определяется соотношением

$$d\mathbf{B} = kI \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}. \quad (5.4)$$

Следует заметить, что, так же как и закон Кулона в электростатике, соотношение (5.4) характеризуется обратной пропорциональностью силы квадрату расстояния. Однако векторный характер законов совершенно различен.

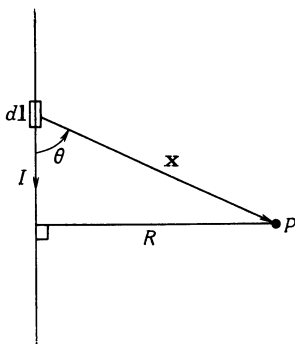
Если поле создается не током, а одиночным зарядом q , движущимся со скоростью \mathbf{v} , то магнитная индукция будет равна ¹⁾

$$\mathbf{B} = kq \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} = k\mathbf{v} \times \mathbf{E}, \quad (5.5)$$

где \mathbf{E} — электростатическое поле заряда q . В этом случае магнитная индукция оказывается зависящей от времени. В настоящей главе мы далее ограничимся рассмотрением лишь стационарных токов.

¹⁾ Это соотношение справедливо лишь для частиц, движущихся со скоростями, много меньшими скорости света.

Постоянная k в формулах (5.4) и (5.5) зависит от выбора системы единиц; этот вопрос подробно рассмотрен в приложении. При измерении тока в электростатических единицах, а магнитной индукции в электромагнитных единицах постоянная оказывается равной $k = 1/c$, где c , как было экспериментально установлено, совпадает со скоростью света в вакууме ($c = 2,998 \cdot 10^{10}$ см/сек). Такая система единиц называется гауссовой. Введение скорости света в уравнения



Ф и г. 5.2.

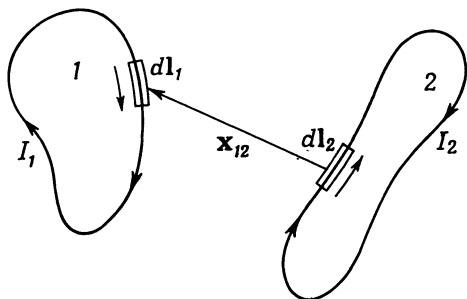
на данной стадии рассмотрения представляется довольно искусственным, однако имеет то преимущество, что единицы заряда и тока согласованы, благодаря чему уравнение непрерывности (5.2) записывается в простом виде, без коэффициента c . Далее мы будем пользоваться исключительно гауссовой системой единиц.

Предполагая, что справедлив принцип линейной суперпозиции полей, можно записать основной закон (5.4) в интегральном виде и найти магнитную индукцию для различных конфигураций токонесущих проводов. Например, вектор магнитной индукции \mathbf{B} длинного прямого провода (фиг. 5.2), по которому течет ток I , как легко видеть, направлен нормально плоскости, содержащей провод и точку наблюдения. Таким образом, силовые линии магнитной индукции представляют собой концентрические окружности, описанные вокруг провода. Величина вектора \mathbf{B} определяется формулой

$$|\mathbf{B}| = \frac{IR}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(R^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{2I}{cR}, \quad (5.6)$$

где R — расстояние от точки наблюдения до провода. Этот результат, впервые экспериментально найденный Био и Саваром, известен как закон Био и Савара. Заметим, что зависимость величины магнитной индукции \mathbf{B} от R имеет тот же вид, как и зависимость

напряженности электрического поля протяженного линейного заряда с однородной линейной плотностью. Эта аналогия показывает, что в некоторых отношениях можно установить соответствие между электростатическими и магнитостатическими задачами, несмотря на различный векторный характер полей. В последующих параграфах мы еще больше убедимся в этом. Эксперименты Ампера не ставили целью непосредственное установление связи между токами и магнитной индукцией, а касались скорее исследования



Ф и г. 5.3. К взаимодействию двух витков тока.

силы, действующей на токонесущий провод в присутствии другого тока. Но поскольку мы уже ввели понятие поля магнитной индукции, создаваемого элементом тока, закон сил можно выразить, определив силу, действующую на элемент тока $I_1 dl_1$ в поле магнитной индукции \mathbf{B} . Элементарная сила оказывается равной

$$d\mathbf{F} = \frac{I_1}{c} (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}), \quad (5.7)$$

где I_1 — ток в элементе $d\mathbf{l}_1$ (измеряемый в электростатических единицах), \mathbf{B} — магнитная индукция (в электромагнитных единицах), а c — скорость света. Если внешнее поле \mathbf{B} создается замкнутым контуром тока (витком) 2 с током I_2 , то полная сила, испытываемая витком 1 с током I_1 , согласно (5.4) и (5.7), выражается формулой

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_{12}|^3}. \quad (5.8)$$

Линейные интегралы берутся здесь вдоль контуров токов; \mathbf{x}_{12} — радиус-вектор, проведенный от элемента длины $d\mathbf{l}_2$ к $d\mathbf{l}_1$, как показано на фиг. 5.3. Приведенное соотношение является математической формулировкой результатов опытов Ампера по исследованию сил взаимодействия замкнутых витков тока. Преобразуя в (5.8) подынтегральное выражение, можно привести интеграл к виду, симметричному относительно $d\mathbf{l}_1$ и $d\mathbf{l}_2$, откуда явно следует

выполнение третьего закона Ньютона:

$$\frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_{12}|^3} = -(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \frac{\mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3} + d\mathbf{l}_2 \left(\frac{d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3} \right). \quad (5.9)$$

Второе слагаемое содержит полный дифференциал в интеграле по $d\mathbf{l}_1$. Следовательно, оно не дает вклада в интеграл (5.8), если путь интегрирования замкнут или уходит на бесконечность. В результате формула Ампера для силы взаимодействия между витками тока принимает вид

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint \oint \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3}. \quad (5.10)$$

Здесь очевидна симметрия относительно переменных интегрирования, а также требуемая векторная зависимость от радиуса-вектора \mathbf{x}_{12} ¹⁾.

На единицу длины каждого из двух находящихся на расстоянии d длинных параллельных прямых проводников с токами I_1 и I_2 действует сила, направленная по нормали ко второму проводу и равная по величине

$$F = \frac{2I_1 I_2}{c^2 d}. \quad (5.11)$$

Это — сила притяжения, если токи текут в одинаковых направлениях, и сила отталкивания при противоположных направлениях токов. Исходя из силы взаимодействия проводников с током, можно определить величину магнитной индукции, не используя представления о постоянных магнитных диполях²⁾. Ниже мы увидим, что выражения для вращающего момента (5.1) и для силы (5.7) тесно связаны между собой.

Если ток с плотностью $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ находится во внешнем магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, то полная сила, действующая на ток, в соответствии с выражением (5.7) для элементарной силы оказывается равной

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x. \quad (5.12)$$

Совершенно аналогично для полного вращающего момента имеем

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c} \int \mathbf{x} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3x. \quad (5.13)$$

В § 6 эти общие результаты будут применены к ограниченным распределениям тока.

¹⁾ Имеется в виду, что в этой формулировке сила взаимодействия элементов тока направлена по прямой, соединяющей эти элементы. — *Прим. ред.*

²⁾ Фактически выражение (5.11) и служит основой для принятого международного стандарта тока (см. приложение).

§ 3. Дифференциальные уравнения магнитостатики и закон Ампера

Основное соотношение (5.4) для вектора магнитной индукции можно переписать в общем виде для объемного распределения тока с плотностью $\mathbf{J}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'. \quad (5.14)$$

Это выражение для $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ является магнитным аналогом выражения для напряженности электрического поля через плотность заряда

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int \varrho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'. \quad (5.15)$$

Приведенное выражение для \mathbf{E} в некоторых случаях менее удобно, чем дифференциальные уравнения; точно так же соотношение (5.14) не очень удобно, хотя в принципе оно и содержит описание всех явлений магнитостатики.

Для получения дифференциальных уравнений, эквивалентных (5.14), преобразуем это выражение к виду

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (5.16)$$

Из (5.16) сразу следует, что дивергенция \mathbf{B} равна нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (5.17)$$

Это соотношение является первым уравнением магнитостатики и соответствует уравнению $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ электростатики. По аналогии с электростатикой вычислим ротор \mathbf{B} :

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (5.18)$$

С помощью векторного тождества $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$, справедливого для произвольного векторного поля \mathbf{A} , можно преобразовать выражение (5.18) к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \operatorname{grad} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x' - \\ - \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x'. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Используя соотношения

$$\operatorname{grad} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -\operatorname{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

и

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

можно переписать интегралы в (5.19) следующим образом:

$$\text{rot } \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \text{grad} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x' + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}). \quad (5.20)$$

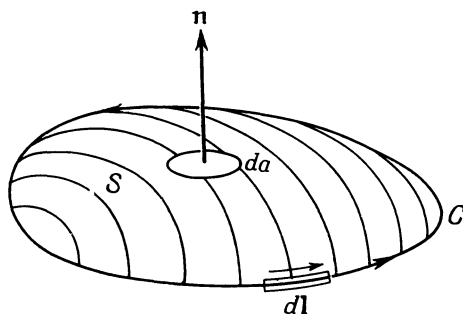
Интегрирование по частям дает

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \text{grad} \int \frac{\text{div}' \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (5.21)$$

Для стационарных магнитных явлений $\text{div } \mathbf{J} = 0$; таким образом, окончательно получаем

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (5.22)$$

Это — второе уравнение магнитостатики, соответствующее уравнению $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$ в электростатике.



Ф и г. 5.4.

В электростатике интегральной формой уравнения $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$ является теорема Гаусса (1.11). Интегральный эквивалент уравнения (5.22) называют *законом Ампера*. Его можно получить, применяя теорему Стокса к интегралу от нормальной составляющей (5.22) по поверхности S , ограниченной замкнутым контуром C (фиг. 5.4). При этом

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} da = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da \quad (5.23)$$

преобразуется к виду

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da. \quad (5.24)$$

Так как поверхностный интеграл от плотности тока равен полному току I , протекающему через поверхность, ограниченную замкнутым контуром C , закон Ампера может быть переписан в виде

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (5.25)$$

Теорема Гаусса позволяет вычислять электрические поля в задачах с высокой степенью симметрии; совершенно так же может быть использован в аналогичных магнитных задачах закон Ампера.

§ 4. Векторный потенциал

Основные законы магнитостатики в дифференциальной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Задача состоит в решении этих уравнений. Если плотность тока в исследуемой области равна нулю, то $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$ и мы можем записать вектор магнитной индукции \mathbf{B} как градиент магнитного скалярного потенциала: $\mathbf{B} = -\operatorname{grad} \Phi_M$. Уравнения (5.26) сводятся при этом к уравнению Лапласа для Φ_M , для решения которого могут быть использованы все методы, развитые при рассмотрении электростатических задач. Задач такого типа очень много, но мы пока отложим их рассмотрение до конца главы. Дело в том, что граничные условия в данном случае отличаются от принятых в электростатике, причем в магнитостатических задачах обычно приходится иметь дело с макроскопическими средами, магнитные свойства которых не совпадают с характеристиками свободного пространства с зарядами и токами.

В общем случае при решении системы (5.26) исходят из того, что, поскольку $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ во всех точках, индукция \mathbf{B} должна быть ротором некоторого вектора $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, называемого векторным потенциалом:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (5.27)$$

Фактически вектор \mathbf{B} уже представлен в такой форме в выражении (5.16). Как очевидно из (5.16), в общем виде вектор \mathbf{A} равен

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \operatorname{grad} \Psi(\mathbf{x}). \quad (5.28)$$

Наличие второго слагаемого — градиента произвольной скалярной функции Ψ — означает, что при заданной магнитной индук-

ции \mathbf{B} векторный потенциал можно всегда преобразовывать согласно соотношению

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \text{grad } \Psi. \quad (5.29)$$

Указанное преобразование называют обычно *калибровочным*. Такое преобразование вектора \mathbf{A} допустимо, потому что (5.27) определяет лишь ротор \mathbf{A} . Для полного же определения векторного поля необходимо знать как его ротор, так и дивергенцию. Возможность калибровочного преобразования позволяет произвольным образом задать $\text{div } \mathbf{A}$.

Подставляя (5.27) в первое из уравнений (5.26), получаем

$$\left. \begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\ \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

Воспользовавшись теперь свободой, допускаемой соотношением (5.29), удобно принять $\text{div } \mathbf{A} = 0$ ¹⁾. При этом каждая декартова составляющая векторного потенциала будет удовлетворять уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (5.31)$$

Учитывая полученные в электростатике результаты, легко видеть, что в неограниченном пространстве \mathbf{A} представляется соотношением (5.28) с $\Psi = 0$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (5.32)$$

Условие $\Psi = 0$ может быть объяснено следующим образом. Из принятого соотношения $\text{div } \mathbf{A} = 0$ следует, что $\nabla^2 \Psi = 0$, так как дивергенция от первого слагаемого в (5.28) равна нулю в силу уравнения $\text{div}' \mathbf{J} = 0$. Но если $\nabla^2 \Psi = 0$ во всем пространстве, то функция Ψ тождественно равна нулю.

§ 5. Векторный потенциал и магнитная индукция кругового витка тока

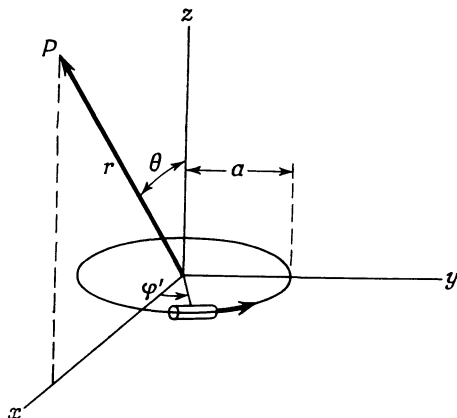
В качестве примера расчета магнитного поля данного распределения токов рассмотрим задачу о расположенном в плоскости xy круговом витке тока радиусом a с центром в начале координат, по которому течет полный ток I (фиг. 5.5). При этом вектор плот-

¹⁾ Указанный выбор называют обычно *кулоновской калибровкой* по причине, которая выяснится в гл. 6, § 5.

ности тока \mathbf{J} имеет единственную отличную от нуля составляющую

$$J_\varphi = I\delta(\cos\theta') \frac{\delta(r'-a)}{a}. \quad (5.33)$$

Наличие δ -функций соответствует распределению тока лишь вдоль окружности радиусом a . Если \mathbf{J} имеет лишь φ -составляющую,



Ф и г. 5.5.

то и векторный потенциал \mathbf{A} имеет лишь составляющую в направлении φ . Однако эту составляющую A_φ *нельзя* вычислить непосредственно, подставляя J_φ в (5.32). Соотношение (5.32) справедливо лишь для декартовых составляющих $A^{1,2}$.

Составляющие \mathbf{J} в прямоугольных координатах имеют вид

$$\begin{aligned} J_x &= -J_\varphi \sin\varphi', \\ J_y &= J_\varphi \cos\varphi'. \end{aligned} \quad (5.34)$$

В силу цилиндрической симметрии задачи можно при вычислениях выбрать точку наблюдения в плоскости xz ($\varphi = 0$). При этом, очевидно, x -составляющая векторного потенциала равна нулю

¹⁾ Причина этого состоит в том, что векторное уравнение Пуассона (5.31) сводится к трем независимым скалярным уравнениям $\nabla^2 A_i = -(4\pi/c)J_i$ лишь для декартовых составляющих A_i, J_i . При разложении вектора \mathbf{A} на ортогональные составляющие с единичными векторами, зависящими от координат, дифференциальный оператор в (5.31) связывает все составляющие, так что получается система связанных уравнений; см. книгу Морса и Фешбаха [77].

²⁾ Здесь автор выражается неточно. Векторное уравнение (5.32) справедливо при разложении \mathbf{A} и \mathbf{J} по любым ортогональным единичным векторам, но в декартовой (и только в декартовой) системе координат составляющие A_i и J_i связаны уравнением того же типа.— Прим. ред.

и остается лишь y -составляющая, равная A_φ . Таким образом,

$$A_\varphi(r, \theta) = \frac{I}{ca} \int r'^2 dr' d\Omega' \frac{\cos \varphi' \delta(\cos \theta') \delta(r' - a)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (5.35)$$

где

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = [r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi')]^{1/2}.$$

Найдем сначала A_φ , непосредственно вычислив интеграл (5.35). Используя свойства δ -функции, мы придем к следующему результату:

$$A_\varphi(r, \theta) = \frac{Ia}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{(a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \varphi')^{1/2}}. \quad (5.36)$$

Полученный интеграл можно выразить через полные эллиптические интегралы K и E :

$$A_\varphi(r, \theta) = \frac{4Ia}{c \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \sin \theta}} \left[\frac{(2 - k^2) K(k) - 2E(k)}{k^2} \right], \quad (5.37)$$

где аргумент эллиптических интегралов определяется выражением

$$k^2 = \frac{4ar \sin \theta}{a^2 + r^2 + 2ar \sin \theta}.$$

Составляющие вектора магнитной индукции, равные

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi), \\ B_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi), \\ B_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (5.38)$$

также могут быть выражены через эллиптические интегралы, однако получающиеся выражения не обладают достаточной наглядностью (хотя и полезны для вычислительных целей).

При малых k^2 , соответствующих $a \gg r$, $a \ll r$ или $\theta \ll 1$, выражение в квадратных скобках в (5.37) сводится к $\pi k^2/16$. Векторный потенциал оказывается при этом приближенно равным

$$A_\varphi(r, \theta) \approx \frac{I\pi a^2}{c} \frac{r \sin \theta}{(a^2 + r^2 + 2ar \sin \theta)^{3/2}}. \quad (5.39)$$

Соответствующие выражения для составляющих поля имеют вид

$$\begin{aligned} B_r &\approx \frac{I\pi a^2}{c} \cos \theta \frac{2a^2 + 2r^2 + ar \sin \theta}{(a^2 + r^2 + 2ar \sin \theta)^{5/2}}, \\ B_\theta &\approx -\frac{I\pi a^2}{c} \sin \theta \frac{2a^2 - r^2 + ar \sin \theta}{(a^2 + r^2 + 2ar \sin \theta)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Эти выражения легко упростить для трех областей: вблизи оси ($\theta \ll 1$), вблизи центра витка ($r \ll a$) и вдали от витка ($r \gg a$). Особенный интерес представляет поле вдали от витка:

$$\begin{aligned} B_r &= 2 \frac{I \pi a^2}{c} \frac{\cos \theta}{r^3}, \\ B_\theta &= \frac{I \pi a^2}{c} \frac{\sin \theta}{r^3}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Сравнение с электростатическим полем диполя (4.12) показывает, что магнитное поле вдали от кругового витка тока имеет дипольный характер. По аналогии с электростатикой определим магнитный дипольный момент витка выражением

$$m = \frac{I \pi a^2}{c}. \quad (5.42)$$

В следующем параграфе будет показано, что полученное соотношение является частным случаем общего результата: поле ограниченного распределения токов на больших расстояниях имеет дипольный характер; магнитный момент плоского замкнутого линейного тока равен произведению площади ограниченной током части плоскости на I/c .

Хотя мы нашли полное решение задачи, выразив поле через эллиптические интегралы, решим ту же задачу с помощью разложения по сферическим гармоникам, что позволит выявить сходство и различие магнитостатической и электростатической задач. Для этого обратимся снова к выражению (5.35) и подставим вместо величины $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$ ее разложение (3.70) по сферическим гармоникам

$$\begin{aligned} A_\varphi &= \frac{4\pi I}{ca} \operatorname{Re} \sum_{l, m} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{2l+1} \times \\ &\times \int r'^2 dr' d\Omega' \delta(\cos \theta') \delta(r' - a) e^{i\varphi'} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi'). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Наличие множителя $e^{i\varphi'}$ в подынтегральном выражении означает, что отличны от нуля лишь слагаемые с $m = 1$. Следовательно,

$$A_\varphi = \frac{8\pi^2 I a}{c} \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{Y_{l1}(\theta, \varphi)}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \left[Y_{l,1}^* \left(\theta' = \frac{\pi}{2}, \varphi' \right) e^{i\varphi'} \right], \quad (5.44)$$

где $r_{<}$ и $r_{>}$ — соответственно меньшая и большая из величин a и r .

Величина в квадратных скобках — это число, зависящее от номера l :

$$\begin{aligned}
 [l] &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} P_l^1(0) = \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{для четных } l, \\ \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} \left[\frac{(-1)^{n+1} \Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1) \Gamma(3/2)} \right] & \text{для } l = 2n+1. \end{cases} \quad (5.45)
 \end{aligned}$$

Таким образом, A_φ можно представить в виде

$$A_\varphi = -\frac{\pi I a}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n (n+1)!} \frac{r_{<}^{2n+1}}{r_{>}^{2n+2}} P_{2n+1}^1(\cos \theta), \quad (5.46)$$

где $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1$, а коэффициент члена суммы с $n=0$, по определению, равен единице. Для вычисления радиальной составляющей вектора \mathbf{B} согласно (5.38) воспользуемся равенством

$$\frac{d}{dx} [V\sqrt{1-x^2} P_l^1(x)] = l(l+1) P_l(x). \quad (5.47)$$

В результате получим

$$B_r = \frac{2\pi I a}{cr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!!}{2^n n!} \frac{r_{<}^{2n+1}}{r_{>}^{2n+2}} P_{2n+1}(\cos \theta). \quad (5.48)$$

Совершенно аналогично для составляющей B_θ найдем

$$\begin{aligned}
 B_\theta &= -\frac{\pi I a^2}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!!}{2^n (n+1)!} \times \\
 &\quad \times \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) \frac{1}{a^3} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \\ \frac{1}{r^3} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} \end{array} \right\} P_{2n+1}^1(\cos \theta), \quad (5.49)
 \end{aligned}$$

где верхнее выражение в фигурных скобках соответствует $r < a$, а нижнее $r > a$. При $r \gg a$ существен лишь член с $n=0$. При этом в силу равенства $P_1^1(\cos \theta) = -\sin \theta$ выражения (5.48) и (5.49) сводятся к (5.41). Для $r \ll a$ основной вклад в сумму также дает член с $n=0$. Магнитная индукция оказывается при этом равной $2\pi I / ac$ и направленной вдоль оси z ; этот результат можно было бы получить и элементарным расчетом.

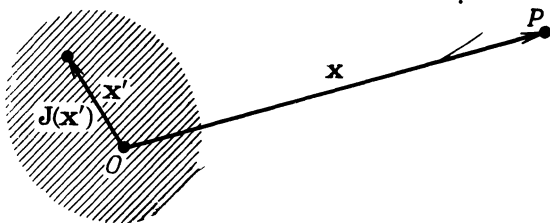
Укажем на характерное отличие рассмотренной проблемы от соответствующей электростатической задачи с цилиндрической симметрией. В проведенном анализе наряду с обычными полиномами Лежандра встречаются и присоединенные функции Лежандра. Это обусловлено векторным характером тока и векторного потен-

циала в противоположность скалярным свойствам заряда и электростатического потенциала.

Задачу о линейном круговом токе можно решать и с помощью разложения по цилиндрическим функциям. Тогда для $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$ вместо представления (3.70) следует использовать соответствующие разложения по цилиндрическим функциям (3.148) и (3.149). Применение этого метода к расчету поля кругового линейного тока мы отнесем к задачам. Применение цилиндрических функций вообще полезно при произвольном распределении тока, имеющего лишь φ -составляющую.

§ 6. Магнитное поле ограниченного распределения токов. Магнитный момент

Рассмотрим свойства произвольного распределения тока, локализованного в малой области пространства; при этом «малость»



Фиг. 5.6. К расчету магнитного поля в точке P с координатой \mathbf{x} , создаваемого ограниченным распределением тока $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$.

определяется сравнением с некоторой характерной длиной, интегрирующей наблюдателя. Адекватный анализ этой задачи, аналогичный разложению электростатического поля по мультиполям, требует применения *векторных* сферических гармоник. Соответствующее рассмотрение будет проведено в гл. 16 в связи с исследованием мультипольного излучения. Здесь же мы ограничимся лишь получением приближения низшего порядка. Разложим множитель $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ в выражении (5.32) по степеням радиуса-вектора \mathbf{x}' , отсчитываемого от начала координат, выбранного в области распределения токов (фиг. 5.6):

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^3} + \dots \quad (5.50)$$

В результате для декартовых составляющих векторного потенциала получаются разложения

$$A_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{c|\mathbf{x}|} \int J_i(\mathbf{x}') d^3x' + \frac{\mathbf{x}}{c|\mathbf{x}|^3} \cdot \int J_i(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d^3x' + \dots \quad (5.51)$$

Для ограниченного стационарного распределения тока интеграл от \mathbf{J} по объему равен нулю, так как $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Следовательно, первый член разложения, соответствующий полному заряду в электростатике, обращается в нуль.

Подынтегральное выражение во втором слагаемом можно, используя формулу для тройного векторного произведения, представить в более удобной форме:

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{x}' - \mathbf{x} \times (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}). \quad (5.52)$$

Можно показать, что интеграл по объему от первого слагаемого в правой части (5.52) равен взятому с обратным знаком интегралу от левой части. Действительно, рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int J_j x'_i d^3x' &= \int \operatorname{div}' (x'_j \mathbf{J}) x'_i d^3x' = \\ &= - \int x'_j (\mathbf{J} \cdot \operatorname{grad}') x'_i d^3x' = - \int x'_j J_i d^3x'. \end{aligned} \quad (5.53)$$

При переходе от первого интеграла ко второму учтено равенство $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$; последующие выражения получены интегрированием по частям. Таким образом, учитывая (5.53), можно представить интеграл от (5.52) в виде

$$\int (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' = - \frac{1}{2} \mathbf{x} \times \int [\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')] d^3x'. \quad (5.54)$$

Определим магнитный момент распределения тока \mathbf{J} выражением

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x'. \quad (5.55)$$

Иногда удобно интерпретировать подынтегральное выражение в (5.55) как плотность магнитного момента, или намагниченность. Обозначим намагниченность, обусловленную распределением тока \mathbf{J} , через

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2c} (\mathbf{x} \times \mathbf{J}). \quad (5.56)$$

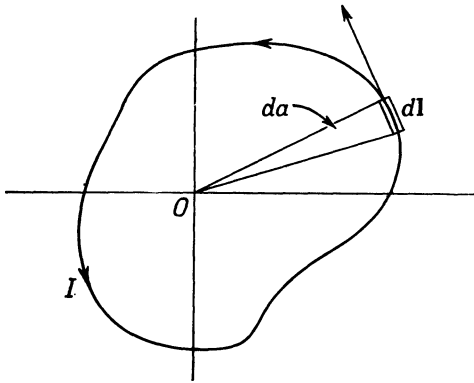
Векторный потенциал (5.51) может быть выражен через магнитный момент \mathbf{m} :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}. \quad (5.57)$$

Это — наименьший отличный от нуля член разложения векторного потенциала \mathbf{A} для ограниченного стационарного распределения тока. Вектор магнитной индукции \mathbf{B} может быть найден непосредственно вычислением ротора от (5.57):

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} + 4\pi \mathbf{m} \delta(\mathbf{x}), \quad (5.58)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{x} . Поскольку формулы (5.57) и (5.58) справедливы лишь вне распределения токов, член с δ -функцией можно опустить. Выражение для магнитной индукции (5.58) в точности совпадает с формулой (4.13) для поля электрического диполя. Полученное выражение является обобщением найденного в предыдущем параграфе выражения для поля кругового витка тока. Вдали от любого ограниченного распределения тока вектор магнитной индукции совпадает с магнитной индукцией диполя с магнитным моментом (5.55).



Ф и г. 5.7.

Если ток течет по плоскому витку произвольной формы, то магнитный момент можно представить в весьма простом виде. Для тока I , текущего по замкнутому контуру с элементом длины $d\mathbf{l}$, выражение (5.55) принимает вид

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2c} \oint \mathbf{x} \times d\mathbf{l}. \quad (5.59)$$

Для плоского витка (фиг. 5.7) магнитный момент нормален плоскости контура. Поскольку $\frac{1}{2}(\mathbf{x} \times d\mathbf{l}) = d\mathbf{a}$, где $d\mathbf{a}$ — площадь элементарного треугольника, образованного радиусами-векторами, проведенными из начала отсчета к обоим концам элемента длины $d\mathbf{l}$, то интеграл (5.59) вдоль контура равен полной площади, ограниченной контуром. В результате величина магнитного момента оказывается равной

$$|\mathbf{m}| = \frac{I}{c} \cdot (\text{Площадь}) \quad (5.60)$$

независимо от формы контура.

Если ток обусловлен движением системы заряженных частиц с зарядами q_i и массами M_i со скоростями \mathbf{v}_i , то магнитный момент

может быть выражен через момент количества движения частиц. Плотность тока равна

$$\mathbf{J} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad (5.61)$$

где \mathbf{x}_i — радиус-вектор i -й частицы. Магнитный момент (5.55) оказывается в этом случае равным

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_i q_i (\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i). \quad (5.62)$$

Векторное произведение $(\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i)$ пропорционально моменту количества движения i -й частицы $\mathbf{L}_i = M_i (\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i)$. Таким образом, выражение (5.62) принимает вид

$$\mathbf{m} = \sum_i \frac{q_i}{2M_i c} \mathbf{L}_i. \quad (5.63)$$

Если отношение заряда частицы к ее массе одинаково для всех движущихся частиц ($q_i/M_i = e/M$), то магнитный момент системы может быть выражен через *полный* момент количества движения \mathbf{L} :

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2Mc} \sum_i \mathbf{L}_i = \frac{e}{2Mc} \mathbf{L}. \quad (5.64)$$

Мы получили известное классическое соотношение, связывающее момент количества движения и магнитный момент, справедливое для орбитального движения даже в атомных масштабах. Однако это классическое соотношение перестает выполняться для собственного момента электронов и других элементарных частиц. Для электронов собственный магнитный момент несколько превышает удвоенное значение величины, определяемой соотношением (5.64), с заменой \mathbf{L} на спиновый момент количества движения \mathbf{S} . Мы говорим, что для электрона g -фактор равен $2 \cdot 1,00117$. Отличие магнитного момента электрона от его классического значения обусловлено релятивистскими и квантовомеханическими эффектами, которые мы здесь рассматривать не можем.

§ 7. Сила и момент, действующие на ограниченное распределение тока во внешнем магнитном поле

Ограниченное распределение тока, находящееся во внешнем магнитном поле с вектором индукции $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, испытывает действие сил и вращающих моментов, возникающих в соответствии с законами Ампера. Общие выражения для полной силы и момента даются соотношениями (5.12) и (5.13). Если в области, занятой токами,

внешнее магнитное поле медленно меняется от точки к точке, то основной вклад в силу и вращающий момент можно найти, используя разложение в ряд Тейлора. Составляющие \mathbf{B} могут быть представлены вблизи некоторого надлежащим образом выбранного начала отсчета в виде разложений

$$B_i(\mathbf{x}) = B_i(0) + \mathbf{x} \cdot \text{grad } B_i(0) + \dots \quad (5.65)$$

Выражение для силы (5.12) принимает при этом вид

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{c} \mathbf{B}(0) \times \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times [(\mathbf{x}' \cdot \text{grad}) \mathbf{B}(0)] d^3x' + \dots \quad (5.66)$$

Интеграл по объему от \mathbf{J} для стационарных токов равен нулю, поэтому наименьший порядок малости будет иметь член разложения с градиентом \mathbf{B} . Поскольку подынтегральное выражение, кроме $\text{grad } \mathbf{B}$, содержит еще \mathbf{J} и \mathbf{x} , можно ожидать, что интеграл удастся выразить через магнитный момент (5.55). Воспользуемся для этого равенствами

$$\mathbf{J} \times [(\mathbf{x}' \cdot \text{grad}) \mathbf{B}] = \mathbf{J} \times \text{grad}(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{B}) = -\text{rot}[\mathbf{J}(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{B})]. \quad (5.67)$$

Здесь учтено, что $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ для внешнего поля и что оператор градиента действует лишь на вектор \mathbf{B} . Таким образом, выражение силы можно переписать в виде

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{c} \text{rot} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{B}) d^3x' + \dots \quad (5.68)$$

Можно далее воспользоваться векторным тождеством (5.54), заменив в нем фиксированный вектор \mathbf{x} на \mathbf{B} . В результате получим

$$\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{m}) = (\mathbf{m} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} = \text{grad}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}), \quad (5.69)$$

где \mathbf{m} — магнитный момент, определяемый соотношением (5.55). Второе представление для силы в (5.69) получается при учете равенства $\text{div } \mathbf{B} = 0$, третье — при учете соотношения $\text{rot } \mathbf{B} = 0$.

Таким образом, на ограниченное распределение тока в неоднородном магнитном поле действует сила, пропорциональная магнитному моменту этого тока \mathbf{m} и определяемая выражением (5.69). В качестве простого приложения полученного результата можно определить среднее по времени значение силы, которая действует на заряженную частицу, движущуюся по спирали в неоднородном магнитном поле. Как известно, заряженная частица в *однородном* магнитном поле движется по окружности в плоскости, нормальной к полю, сохраняя постоянную скорость в направлении поля; траекторией движения частицы является, таким образом, спираль. В среднем по времени круговое движение эквивалентно линейному

круговому току с магнитным моментом, определяемым соотношением (5.60). Если же поле не однородно, а обладает малым градиентом (таким, что на одном витке спиральной траектории величина поля меняется незначительно), то можно считать, что движение частицы определяется силой, действующей на эквивалентный магнитный момент. Анализ знаков момента и силы показывает, что независимо от знака заряда заряженные частицы выталкиваются из области с более высокой плотностью магнитного потока. На этом эффекте основано действие так называемых магнитных зеркал, рассматриваемых с другой точки зрения в гл. 12, § 10.

Аналогичным образом, подставляя в (5.13) разложение (5.65), можно найти полный вращающий момент, действующий на ограниченное распределение тока. При этом уже нулевой член разложения оказывается отличным от нуля.

Удерживая лишь главный член разложения, получаем

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c} \int \mathbf{x}' \times [\mathbf{J} \times \mathbf{B}(0)] d^3x'. \quad (5.70)$$

Раскрывая тройное векторное произведение, находим

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c} \int [(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{B}) \mathbf{J} - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{J}) \mathbf{B}] d^3x'. \quad (5.71)$$

Первый интеграл совпадает с рассмотренным ранее [см. (5.68)], так что его значение можно написать сразу. Второй интеграл для стационарного ограниченного распределения тока обращается в нуль, что следует из векторного тождества

$$\operatorname{div}(\mathbf{x}^2 \mathbf{J}) = 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{J}) + \mathbf{x}^2 \operatorname{div} \mathbf{J}.$$

В результате главный член разложения для вращающего момента принимает вид

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}(0). \quad (5.72)$$

Это уже знакомое нам выражение для вращающего момента, действующего на диполь, введенное в § 1 при рассмотрении способов определения величины и направления вектора магнитной индукции.

Потенциальную энергию постоянного магнитного момента (или магнитного диполя) во внешнем магнитном поле можно найти, исходя как из выражения для силы (5.69), так и из выражения для вращающего момента (5.72). Рассматривая силу как взятый с обратным знаком градиент потенциальной энергии U , находим

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}. \quad (5.73)$$

Для магнитного диполя, находящегося в однородном поле, вращающий момент (5.72) можно интерпретировать как взятую с обратным знаком производную U по углу между векторами \mathbf{B} и \mathbf{m} . Этот известный результат отражает тот факт, что диполь стремится ориентироваться в направлении магнитного поля и принять положение с наименьшей потенциальной энергией.

В заключение заметим, что выражение (5.73) *не определяет* полную энергию магнитного момента во внешнем поле. При внесении диполя \mathbf{m} на занимаемое им место в магнитном поле следует еще совершить работу по поддержанию тока \mathbf{J} , обеспечивающего постоянство момента \mathbf{m} . Несмотря на то что конечное состояние стационарно, его установлению предшествует некоторый переходный процесс, в течение которого поля меняются во времени. Этот процесс лежит вне рамок настоящего исследования. Поэтому окончательное обсуждение вопроса об энергии магнитного поля следует отложить до гл. 6, § 2, когда уже будет рассмотрен закон индукции Фарадея.

§ 8. Макроскопические уравнения

Рассмотренные до сих пор соотношения (5.17) и (5.22) для стационарных магнитных полей следует понимать как микроскопические уравнения в том смысле, как это объяснено в гл. 4. Мы считали плотность тока \mathbf{J} известной функцией координат. В макроскопических задачах это часто оказывается несправедливым. Имеющиеся в атомах вещества электроны создают эффективные атомные токи, плотность которых очень быстро флуктуирует. Известными и имеющими смысл можно считать лишь их значения, усредненные по макроскопическому объему. Кроме того, электроны обладают собственными магнитными моментами, которые нельзя выразить через плотность электронного тока. Эти магнитные моменты могут создавать дипольные поля, также весьма быстро меняющиеся в пределах атома.

Чтобы учесть магнитные свойства атомов, мы поступим так же, как и в гл. 4, § 3. Вывод макроскопических уравнений мы изложим здесь вкратце. Несколько более полное изложение будет дано в гл. 6, § 10. Дело в том, что в переменных по времени полях часть атомного тока обусловлена временной производной от поляризации \mathbf{P} , так что для полного рассмотрения атомного тока необходимо перейти к общему случаю полей, зависящих от времени.

Полную плотность тока можно разделить на две части:

- а) плотность тока проводимости \mathbf{J} , обусловленную истинным перемещением зарядов;
- б) плотность атомных токов \mathbf{J}_a , характеризующую токи, циркулирующие внутри атомов и молекул.

Соответственно полный векторный потенциал складывается из двух членов:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}_a(\mathbf{x}') d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (5.74)$$

Мы используем здесь обозначение \mathbf{a} (вместо \mathbf{A}) для микроскопического векторного потенциала подобно тому, как в гл. 4 мы обозначали через \mathbf{e} микроскопическое электрическое поле.

Для определения вклада атомных токов рассмотрим сначала отдельную молекулу, а затем произведем усреднение по всем молекулам. Рассмотрение проводится в точности так же, как и в § 6 этой главы для ограниченного распределения тока. Для молекулы с центром в точке \mathbf{x}_j векторный потенциал в точке \mathbf{x} приближенно равен

$$\mathbf{a}_{\text{мол}}(\mathbf{x}) = \frac{[\mathbf{m}_{\text{мол}} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^3}. \quad (5.75)$$

Чтобы наряду с орбитальными моментами учесть и собственные магнитные моменты электронов, будем считать $\mathbf{m}_{\text{мол}}$ общим молекулярным магнитным моментом. Если теперь просуммировать по всем молекулам и усреднить, как в гл. 4, § 3, то получим следующее выражение для макроскопического векторного потенциала:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'; \quad (5.76)$$

здесь $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ — макроскопическая намагниченность (т. е. магнитный момент единицы объема), определяемая соотношением

$$\mathbf{M} = N \langle \mathbf{m}_{\text{мол}} \rangle, \quad (5.77)$$

где N — число молекул в единичном объеме.

Вклад намагниченности в векторный потенциал \mathbf{A} можно представить в более удобной форме

$$\int \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' = \int \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \text{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x'. \quad (5.78)$$

Используя далее тождество $\text{rot}(\varphi \mathbf{M}) = [\text{grad} \varphi \times \mathbf{M}] + \varphi \text{rot} \mathbf{M}$, мы получаем

$$\int \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' = \int \frac{\text{rot}' \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' - \int \text{rot}' \left(\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x'. \quad (5.79)$$

Последний интеграл может быть преобразован в поверхностный интеграл от $(\mathbf{n} \times \mathbf{M})/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ и обращается в нуль при достаточно хорошем математическом поведении \mathbf{M} , если токи локализованы внутри конечного объема. Заменяя последний член соотношения

(5.76) первым членом правой части соотношения (5.79), мы можем записать векторный потенциал в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') + c \operatorname{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (5.80)$$

Мы видим, что намагниченность вносит в векторный потенциал такой же вклад, как и ток с эффективной плотностью:

$$\mathbf{J}_M = c \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (5.81)$$

При выводе соотношения (5.80) был сделан один шаг, который требует разъяснения. Он заключается в использовании дипольного векторного потенциала (5.75) для всех молекул, включая и расположенные в окрестности точки \mathbf{x} . Для молекул, находящихся внутри сферы с центром в точке \mathbf{x} и радиусом порядка несколько молекулярных диаметров d , векторный потенциал существенно отличается от дипольного выражения (5.75) и имеет гораздо менее резко выраженную особенность. Таким образом, в (5.80) влияние молекул, находящихся внутри этой сферы, вычислено неправильно. Чтобы оценить влияние этих молекул, заметим, что величина векторного потенциала, создаваемого единицей объема вблизи точки \mathbf{x} , равна $|\operatorname{rot} \mathbf{M}|/R$, в то время как объем шарового слоя, ограниченного поверхностями с радиусами R и $R + dR$, равен $4\pi R^2 dR$. Следовательно, ошибка в оценке влияния непосредственной окрестности точки \mathbf{x} на вектор \mathbf{A} имеет величину порядка $d^2 |\operatorname{rot} \mathbf{M}| \sim \sim (d^2/L) \langle M \rangle$, где L — характерный макроскопический масштаб изменения \mathbf{M} . Поскольку полный векторный потенциал имеет величину порядка $\langle M \rangle L$, то относительная ошибка при использовании дипольного приближения для всех точек по порядку величины равна d^2/L^2 . Она пренебрежимо мала, пока макроскопическая длина L не становится микроскопической. Однако в последнем случае весь вывод теряет силу.

Для получения макроскопического эквивалента уравнения (5.22) запишем \mathbf{V} , пользуясь соотношением (5.80), или, что то же самое, заменим в (5.22) \mathbf{J} на полный ток ($\mathbf{J} + \mathbf{J}_M$):

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (5.82)$$

Член с $\operatorname{rot} \mathbf{M}$ можно объединить с \mathbf{V} . При этом мы получим новую макроскопическую характеристику \mathbf{H} , называемую *магнитным полем*¹⁾:

$$\mathbf{H} = \mathbf{V} - 4\pi \mathbf{M}. \quad (5.83)$$

¹⁾ В дальнейшем, там где это не внесет путаницы, мы часто будем называть магнитным полем также и индукцию \mathbf{V} . — Прим. ред.

При этом макроскопические уравнения, заменяющие (5.26), запишутся в виде

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\tag{5.84}$$

Введение \mathbf{H} в качестве макроскопического поля полностью эквивалентно введению \mathbf{D} для электрического поля. Электростатическим аналогом уравнений (5.84) являются уравнения

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi q, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}\tag{5.85}$$

Подчеркнем, что основными полями являются \mathbf{E} и \mathbf{B} . Они удовлетворяют однородным уравнениям систем (5.84) и (5.85). Производные поля \mathbf{D} и \mathbf{H} введены для удобства и учитывают в среднем вклад в q и \mathbf{J} атомных зарядов и токов.

По аналогии с диэлектриком следует ожидать, что свойства магнитной среды также можно описать с помощью небольшого числа констант, характеризующих данное вещество. В простейшем случае мы можем предположить, что \mathbf{B} и \mathbf{H} пропорциональны друг другу:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.\tag{5.86}$$

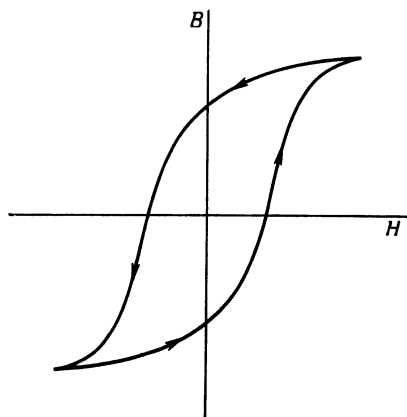
Характеризующая вещество постоянная μ называется *магнитной проницаемостью*¹⁾. Такое простое соотношение справедливо только для неферромагнитных материалов. Однако для этих немагнитных веществ μ обычно отличается от единицы лишь на величину порядка 10^{-5} ($\mu > 1$ для парамагнитных и $\mu < 1$ для диамагнитных веществ). Для ферромагнитных материалов вместо (5.86) имеет место нелинейная функциональная связь

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}(\mathbf{H}).\tag{5.87}$$

Явление гистерезиса показывает, что \mathbf{B} является неоднозначной функцией \mathbf{H} , как это видно из фиг. 5.8. Фактически значение функции $\mathbf{F}(\mathbf{H})$ зависит от предыстории вещества. В связи с этим вводится дифференциальная магнитная проницаемость $\mu(\mathbf{H})$, которая определяется как производная от \mathbf{B} по \mathbf{H} , в предположении, что

¹⁾ Аналогом электростатического соотношения $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, выражающим производную величину \mathbf{D} через основную величину \mathbf{E} , было бы соотношение $\mathbf{H} = \mu' \mathbf{B}$. Однако по традиции используется соотношение (5.86). Некоторым основанием для этого является то, что для большинства веществ μ больше единицы, что, возможно, более удобно, чем использование величины μ' , которая меньше единицы.

B и **H** параллельны. Для веществ, обладающих высокой магнитной проницаемостью, $\mu(\mathbf{H})$ может достигать величин порядка 10^6 . У большинства необработанных ферромагнитных материалов в очень малых полях наблюдается линейная зависимость (5.86) между **B** и **H**. Обычные величины начальной магнитной проницаемости лежат в интервале от 10 до 10^4 .



Ф и г. 5.8. Петля гистерезиса, характеризующая зависимость **B** от **H** в ферромагнетике.

Сложная связь между **B** и **H** в ферромагнитных материалах приводит к специфическим трудностям при решении граничных задач магнитного поля по сравнению с аналогичными задачами электростатики. Однако в ряде случаев благодаря очень большой величине магнитной проницаемости можно ввести упрощающие предположения в граничные условия. В § 9 мы непосредственно займемся этими вопросами.

§ 9. Граничные условия для магнитной индукции и поля

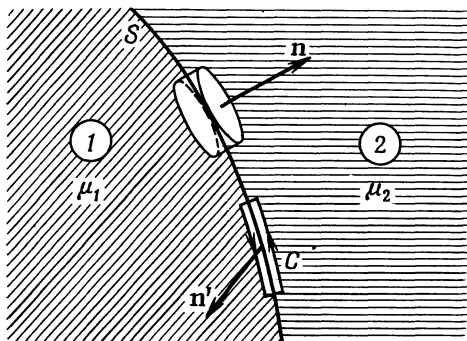
Для решения граничных задач магнитостатики необходимо прежде всего установить граничные условия, которым удовлетворяют **B** и **H** на поверхности раздела двух сред с различными магнитными свойствами. Расположим на граничной поверхности элементарный цилиндрический объем таким образом, чтобы торцовые плоскости находились в областях 1 и 2 и были параллельны граничной поверхности *S*, как показано на фиг. 5.9.

Применяя теорему Гаусса и соотношение $\text{div } \mathbf{B} = 0$, получаем

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (5.88)$$

где \mathbf{n} — единичная нормаль к поверхности раздела, направленная из области 1 в область 2, а индексы означают, что данная величина берется на поверхности S в одной из двух сред.

Рассмотрим теперь элементарный (также изображенный на фиг. 5.9) контур C площадью S , нормаль \mathbf{n}' к которому параллельна



Ф и г. 5.9.

поверхности раздела. Применяя теорему Стокса к первому из уравнений (5.84), получаем

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}' da. \quad (5.89)$$

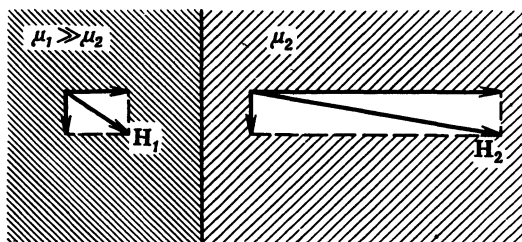
При ширине контура, стремящейся к нулю, линейный интеграл дает разность тангенциальных составляющих \mathbf{H} в обеих средах, а поверхностный интеграл пропорционален плотности поверхностного тока \mathbf{K} [заряд/(длина \times время)]. Таким образом, из (5.89) получаем соотношения

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{n}) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{n}' \cdot \mathbf{K}, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}. \end{aligned} \right\} \quad (5.90)$$

Выразим эти граничные условия через \mathbf{H} и магнитную проницаемость μ . Предполагая для простоты, что поверхностные токи отсутствуют, получаем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n} &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}, \\ \mathbf{H}_2 \times \mathbf{n} &= \mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}. \end{aligned} \right\} \quad (5.91)$$

Если $\mu_1 \gg \mu_2$, то нормальная составляющая H_2 много больше нормальной составляющей H_1 , как показано на фиг. 5.10. В пределе $(\mu_1/\mu_2) \rightarrow \infty$ магнитное поле H_2 становится перпендикулярным граничной поверхности независимо от направления H_1 (кроме особого случая, когда поле H_1 строго параллельно поверхности раздела). Таким образом, граничные условия для H на поверхности материальных тел с очень большой магнитной проницаемостью совпадают с граничными условиями для электрического поля



Ф и г. 5.10.

на поверхности проводников. Это позволяет использовать теорию электростатического потенциала и для магнитного поля. Поверхности тел из вещества с большой магнитной проницаемостью являются приближенно «эквипотенциальными», а силовые линии H перпендикулярны этим эквипотенциальным поверхностям. Указанная аналогия часто используется при проектировании магнитов. Задается конфигурация поля, а профиль полюсных наконечников магнита выбирается так, чтобы он совпадал с эквипотенциальной поверхностью.

§ 10. Однородно намагниченный шар

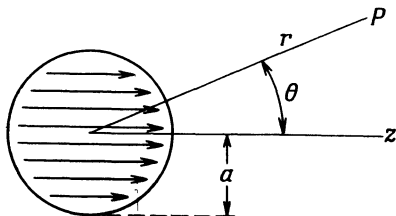
Для иллюстрации различных методов, которые применяются при решении граничных задач магнитостатики, рассмотрим простую задачу о помещенном в немагнитную среду шаре радиусом a (фиг. 5.11) с однородной постоянной намагниченностью M , равной M_0 по величине и направленной вдоль оси z ($M = M_0 e_z$). Вне шара $\text{div } B = \text{rot } B = 0$. Следовательно, при $r > a$ вектор $B = H$ можно записать как взятый с обратным знаком градиент скалярного магнитного потенциала, удовлетворяющего уравнению Лапласа:

$$\begin{aligned} B_e &= -\text{grad } \Phi_M, \\ \nabla^2 \Phi_M &= 0. \end{aligned} \tag{5.92}$$

Общее решение для потенциала, удовлетворяющее условию $\mathbf{V} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\Phi_M(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \frac{P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}}. \quad (5.93)$$

На предыдущих примерах мы уже убедились, что в этом разложении часто отличны от нуля только несколько первых членов, иногда даже лишь один член с $l = 1$.



Ф и г. 5.11.

Внутри намагниченного тела уравнения (5.92), вообще говоря, неприменимы, так как $\text{rot } \mathbf{V} \neq 0$. Для рассматриваемой простой задачи это не приводит к трудностям, поскольку, согласно (5.83), \mathbf{V} , \mathbf{H} и \mathbf{M} в отсутствие приложенных полей параллельны.

Следовательно, мы можем положить

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i &= B_0 \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{H}_i &= (B_0 - 4\pi M_0) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Граничные условия на поверхности сферы требуют непрерывности B_r и H_θ . Поэтому, согласно (5.92) — (5.94), получаем

$$\begin{aligned} B_0 \cos \theta &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1) \alpha_l P_l(\cos \theta)}{a^{l+2}}, \\ -(B_0 - 4\pi M_0) \sin \theta &= - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_l}{a^{l+2}} \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta}. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Очевидно, в этих разложениях не равны нулю только члены с $l = 1$. Находим неизвестные постоянные α_1 и B_0 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{4\pi}{3} M_0 a^3, \\ B_0 &= \frac{8\pi}{3} M_0. \end{aligned} \quad (5.96)$$

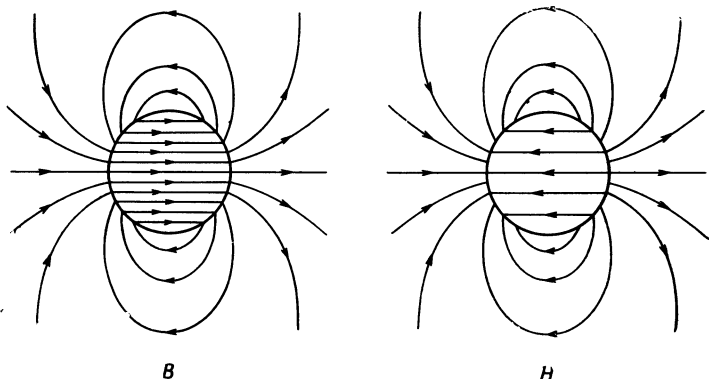
Итак, поле вне сферы совпадает с полем диполя (5.41) с дипольным моментом

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} a^3 \mathbf{M}, \quad (5.97)$$

а внутренние поля выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i &= \frac{8\pi}{3} \mathbf{M}, \\ \mathbf{H}_i &= -\frac{4\pi}{3} \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Заметим, что индукция \mathbf{B}_i параллельна намагниченности \mathbf{M} , в то время как поле \mathbf{H}_i антипараллельно \mathbf{M} . Силовые линии \mathbf{B} и \mathbf{H}



Ф и г. 5.12. Линии \mathbf{B} и \mathbf{H} для однородно намагниченного шара. Линии \mathbf{B} являются замкнутыми кривыми, а линии \mathbf{H} начинаются на поверхности шара, где расположены «магнитные заряды» $-\text{div } \mathbf{M}$.

изображены на фиг. 5.12. Линии \mathbf{B} образуют непрерывные замкнутые петли, а линии \mathbf{H} оканчиваются на поверхности шара. Таким образом, на поверхности как бы сосредоточены «магнитные заряды». Эти фиктивные заряды связаны с дивергенцией намагниченности шара (см. ниже).

Решение как внутри, так и вне сферы можно получить также и из теории электростатического потенциала, если рассматривать не \mathbf{B} , а \mathbf{H} . При этом следует исходить из уравнений

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{H} &= -4\pi \text{div } \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Эти уравнения показывают, что \mathbf{H} — потенциальный вектор, а $-\text{div } \mathbf{M}$ можно рассматривать как плотность магнитных зарядов.

Полагая $\mathbf{H} = -\text{grad } \Phi_M$, находим

$$\nabla^2 \Phi_M = 4\pi \text{div } \mathbf{M}. \quad (5.100)$$

Так как намагниченность \mathbf{M} постоянна по величине и направлению, ее дивергенция внутри сферы равна нулю. Однако следует учесть скачок \mathbf{M} на границе сферы, поскольку вне сферы \mathbf{M} обращается в нуль. Запишем решение уравнения (5.100) внутри и вне сферы в виде

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = - \int \frac{\text{div}' \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (5.101)$$

Отсюда, используя векторное тождество $\text{div}(\varphi \mathbf{M}) = \mathbf{M} \cdot \text{grad } \varphi + \varphi \text{div } \mathbf{M}$, получаем

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = - \int \text{div}' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \int \mathbf{M}(\mathbf{x}') \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x'. \quad (5.102)$$

Первый интеграл обращается в нуль при интегрировании по произвольному объему, содержащему шар. Заменяя производную по \mathbf{x}' производной по \mathbf{x} в соответствии с правилом $\text{grad}' \rightarrow -\text{grad}$, справедливым для любой функции от $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, мы можем записать скалярный потенциал в виде

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = -\text{div} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = -\text{div} \left[M_0 \mathbf{e}_3 \int_0^a r'^2 dr' \int d\Omega' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]. \quad (5.103)$$

Вклад в интеграл дает только первый член разложения $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$, соответствующий $l = 0$; поэтому

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = -4\pi M_0 \text{div} \left[\mathbf{e}_3 \int_0^a \frac{r'^2 dr'}{r_{>}} \right]. \quad (5.104)$$

Значение этого интеграла зависит от того, где находится точка наблюдения — внутри или вне сферы. Легко видеть, что

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = \frac{4\pi M_0 a^2}{3} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}^2} \right) \cos \theta, \quad (5.105)$$

где $r_{<}$ и $r_{>}$ — соответственно меньшая и большая из величин r и a . Потенциал (5.105) описывает вне шара поле магнитного диполя

с моментом (5.97), а внутри шара — постоянное поле \mathbf{H}_i [см. (5.98)] в согласии с первым методом решения задачи ¹⁾.

В заключение мы решим эту задачу, используя всегда применимый векторный потенциал. Согласно (5.80), векторный потенциал определяется соотношением

$$\oint \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int \frac{\text{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (5.106)$$

Поскольку \mathbf{M} внутри сферы имеет постоянную величину, ротор \mathbf{M} везде равен нулю. Однако аналогично предыдущему следует учесть влияние скачка \mathbf{M} на границе сферы. Воспользовавшись (5.79), мы видим, что \mathbf{A} можно представить поверхностным интегралом:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = - \int \text{rot}' \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] d^3x' = \oint \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da'. \quad (5.107)$$

Величину $c(\mathbf{M} \times \mathbf{n})$ можно рассматривать как поверхностную плотность тока. Отметим, что эквивалентность однородной намагниченности внутри некоторого объема поверхностному току с плотностью $c(\mathbf{M} \times \mathbf{n})$ на поверхности этого объема является общим результатом для объемов произвольной формы. Эта эквивалентность часто оказывается полезной при рассмотрении полей, создаваемых постоянными магнитами.

В случае сферы, когда вектор \mathbf{M} направлен вдоль оси z , вектор $(\mathbf{M} \times \mathbf{n})$ имеет только азимутальную составляющую

$$(\mathbf{M} \times \mathbf{n})_\varphi = M_0 \sin \theta'. \quad (5.108)$$

Для удобства расчета будем считать, что точка наблюдения лежит в плоскости xz (так же как в § 5). Отличной от нуля будет только y -составляющая вектора $-(\mathbf{n} \times \mathbf{M})$. Таким образом, азимутальная составляющая векторного потенциала равна

$$A_\varphi(\mathbf{x}) = M_0 a^2 \int d\Omega' \frac{\sin \theta' \cos \varphi'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (5.109)$$

где точка \mathbf{x}' имеет координаты (a, θ', φ') . Зависящий от углов множитель можно представить в виде

$$\sin \theta' \cos \varphi' = - \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \text{Re} [Y_{1,1}(\theta', \varphi')]. \quad (5.110)$$

¹⁾ Вывод соотношений (5.105) из (5.101) можно провести и более просто. Легко видеть, что для однородно намагниченного шара $\text{div} \mathbf{M} = -M_0 \cos \theta \delta(r - a)$. Подстановка этого выражения в (5.101) при использовании (3.70) прямо приводит к (5.105). Однако соотношение (5.103) представляется полезным для более сложных распределений намагниченности.

Соответственно в разложении (3.70) для $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ сохранятся только члены с $l = 1$, $m = 1$, и мы получим

$$A_{\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{4\pi}{3} M_0 a^2 \left(\frac{r_{<}}{r_{>}^2} \right) \sin \theta, \quad (5.111)$$

где $r_{<}$ и $r_{>}$ — меньшая и большая из величин r и a . Если векторный потенциал \mathbf{A} имеет только φ -составляющую, то магнитная индукция \mathbf{B} выражается формулами (5.38). Очевидно, в согласии с полученным выше результатом выражение (5.111) дает однородное поле \mathbf{B} внутри сферы и дипольное поле снаружи.

Примененные здесь различные методы иллюстрируют возможные подходы к решению задач магнитостатики, в частности, с заданным распределением намагниченности. Метод скалярного потенциала применим только в том случае, когда токи отсутствуют. Для решения же общих задач при наличии токов необходимо использовать векторный потенциал (за исключением некоторых случаев простой геометрии, где могут применяться различные специальные методы).

§ 11. Намагниченный шар во внешнем поле. Постоянные магниты

В § 10 мы рассмотрели поле, создаваемое однородно намагниченным шаром. Исходя из линейности уравнений поля, мы можем добавить к этому полю магнитную индукцию $\mathbf{B}_0 = \mathbf{H}_0$, однородную во всем пространстве. Тогда мы приходим к задаче об однородно намагниченном шаре во внешнем магнитном поле. Согласно (5.98), магнитная индукция \mathbf{B} и магнитное поле \mathbf{H} внутри шара оказываются в этом случае соответственно равными

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i &= \mathbf{B}_0 + \frac{8\pi}{3} \mathbf{M}, \\ \mathbf{H}_i &= \mathbf{B}_0 - \frac{4\pi}{3} \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (5.112)$$

Представим теперь, что шар не является постоянным магнитом, а представляет собой парамагнетик или диамагнетик с магнитной проницаемостью μ . Намагниченность \mathbf{M} возникает в нем в результате действия внешнего поля. Для нахождения \mathbf{M} используем соотношение

$$\mathbf{B}_i = \mu \mathbf{H}_i. \quad (5.113)$$

Отсюда

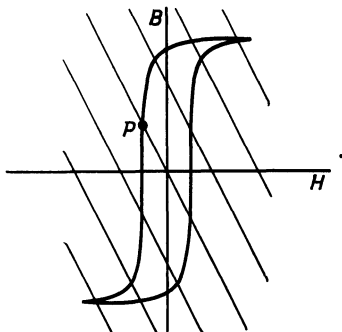
$$\mathbf{B}_0 + \frac{8\pi}{3} \mathbf{M} = \mu \left(\mathbf{B}_0 - \frac{4\pi}{3} \mathbf{M} \right) \quad (5.114)$$

и, следовательно, вектор намагниченности равен

$$\mathbf{M} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \mathbf{V}_0. \quad (5.115)$$

Отметим полную аналогию с выражением (4.63) для вектора поляризации \mathbf{P} диэлектрического шара в однородном электрическом поле.

Для ферромагнитных веществ приведенные выше результаты неприменимы. Действительно, из уравнения (5.115) следует, что при выключении внешнего поля намагниченность обращается в нуль. Однако этому выводу противоречит существование постоянных



Ф и г. 5.13.

магнитов. Возможность существования тел с постоянной намагниченностью связана с нелинейной зависимостью (5.87) и явлением гистерезиса. Исключив \mathbf{M} из (5.112), получим соотношение между \mathbf{H}_i и \mathbf{V}_i :

$$\mathbf{V}_i + 2\mathbf{H}_i = 3\mathbf{V}_0. \quad (5.116)$$

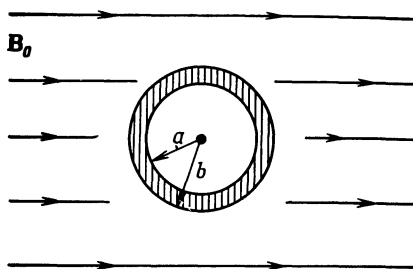
Другое соотношение между \mathbf{V}_i и \mathbf{H}_i дает гистерезисная кривая. Таким образом, для любого внешнего поля мы можем найти соответствующую величину внутреннего поля. Уравнение (5.116) изображается на гистерезисной диаграмме прямыми линиями, имеющими тангенс угла наклона, равный -2 , и пересекающими ось y в точке $3V_0$ (фиг. 5.13). Предположим, например, что внешнее поле возрастает до тех пор, пока ферромагнитный шар не будет намагничен до насыщения, а затем уменьшается до нуля. Внутренние поля \mathbf{V} и \mathbf{H} определяются при этом точкой P на фиг. 5.13, а намагниченность можно определить из (5.112) при $\mathbf{V}_0 = 0$.

Соотношение (5.116), устанавливающее связь между \mathbf{V}_i и \mathbf{H}_i , характерно только для шара. Для других геометрических фигур имеют место другие соотношения. Задача об эллипсоиде может быть

решена точно. В этом случае тангенс угла наклона линий (5.116) изменяется от нуля для случая плоского диска до $-\infty$ для тонкого иглообразного эллипсоида. Таким образом, в случае тонких стержней получается бóльшая остаточная намагниченность, чем для шара или сплюсненного эллипсоида.

§ 12. Магнитное экранирование. Сферическая оболочка из магнитного материала в однородном поле

Пусть в некоторой области свободного пространства задано некоторое начальное магнитное поле \mathbf{B}_0 . Если мы внесем в эту область магнитное тело, то силовые линии магнитной индукции



Ф и г. 5.14.

как-то изменятся. Как следует из соображений, приведенных в конце § 9 и касающихся веществ с очень высокой магнитной проницаемостью, можно предполагать, что силовые линии будут стремиться расположиться нормально к поверхности тела. Проводя дальше аналогию с проводниками в электростатике, мы можем ожидать, что в случае полого тела поле внутри полости будет меньше внешнего поля и при $\mu \rightarrow \infty$ будет стремиться к нулю. Такой способ уменьшения полей называется *магнитной экранировкой*. Магнитная экранировка имеет большое практическое значение, поскольку создание областей, свободных от поля, часто бывает необходимо как для экспериментальных целей, так и для обеспечения надежной работы электронных устройств.

Для выяснения сущности явления магнитной экранировки рассмотрим в качестве примера сферическую оболочку с внутренним радиусом a и внешним радиусом b из материала с магнитной проницаемостью μ , помещенную в однородное постоянное магнитное поле \mathbf{B}_0 , как показано на фиг. 5.14. Нашей целью является нахождение зависимости полей \mathbf{B} и \mathbf{H} от μ во всем пространстве, и в первую очередь внутри полости $r < a$. Так как токов нет, то магнитное поле \mathbf{H} можно описать скалярным потенциалом: $\mathbf{H} = -\text{grad } \Phi_M$.

Далее, поскольку $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, то из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ вытекает, что $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ во всех областях и, следовательно, потенциал Φ_M везде удовлетворяет уравнению Лапласа. Таким образом, задача сводится к определению подходящих решений уравнения Лапласа в различных областях, удовлетворяющих граничным условиям (5.88) и (5.90) при $r = a$ и $r = b$.

В области $r > b$ потенциал следует взять в виде

$$\Phi_M = -B_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (5.117)$$

поскольку это выражение приводит к однородному полю $\mathbf{H} = \mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ на больших расстояниях. Для внутренних областей общие выражения для потенциала имеют вид

$$\begin{aligned} a < r < b: \quad \Phi_M &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\beta_l r^l + \gamma_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta), \\ r < a: \quad \Phi_M &= \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l r^l P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (5.118)$$

Граничные условия при $r = a$ и $r = b$ требуют непрерывности H_θ и B_r . Выраженные через потенциал Φ_M , эти условия дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta}(b_+) &= \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta}(b_-), & \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta}(a_+) &= \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta}(a_-), \\ \frac{\partial \Phi_M}{\partial r}(b_+) &= \mu \frac{\partial \Phi_M}{\partial r}(b_-), & \mu \frac{\partial \Phi_M}{\partial r}(a_+) &= \frac{\partial \Phi_M}{\partial r}(a_-). \end{aligned} \quad (5.119)$$

Здесь аргумент b_\pm указывает, что значение функции берется соответственно при приближении r к b со стороны больших и меньших значений; аналогичный смысл имеет a_\pm . Четыре условия (5.119), которые должны выполняться для всех углов θ , достаточны для определения неизвестных постоянных в (5.117) и (5.118). Мы видим, что все коэффициенты с $l \neq 1$ равны нулю, а коэффициенты с $l = 1$ удовлетворяют системе четырех уравнений:

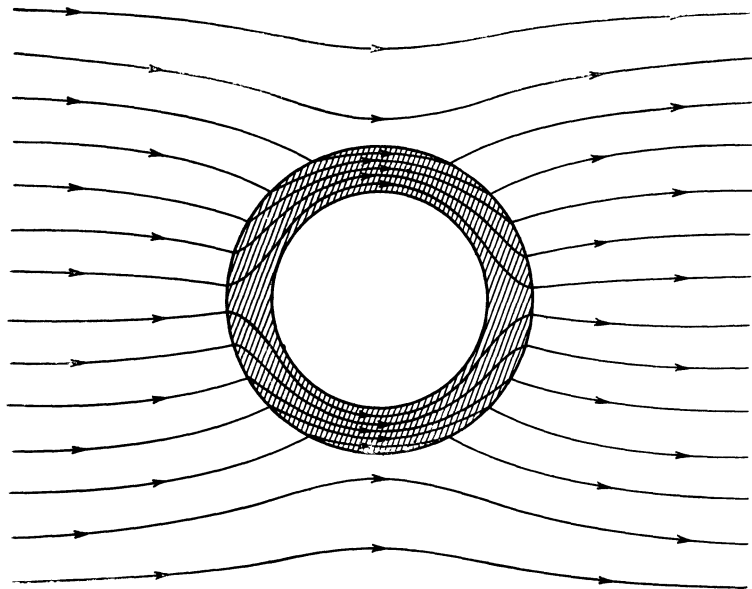
$$\begin{aligned} \alpha_1 - b^3 \beta_1 - \gamma_1 &= b^3 B_0, \\ 2\alpha_1 + \mu b^3 \beta_1 - 2\mu \gamma_1 &= -b^3 B_0, \\ a^3 \beta_1 + \gamma_1 - a^3 \delta_1 &= 0, \\ \mu a^3 \beta_1 - 2\mu \gamma_1 - a^3 \delta_1 &= 0. \end{aligned} \quad (5.120)$$

Разрешая эти уравнения относительно α_1 и δ_1 , получаем

$$\alpha_1 = \left[\frac{(2\mu + 1)(\mu - 1)}{(2\mu + 1)(\mu + 2) - 2 \frac{a^3}{b^3} (\mu - 1)^2} \right] (b^3 - a^3) B_0,$$

$$\delta_1 = - \left[\frac{9\mu}{(2\mu + 1)(\mu + 2) - 2 \frac{a^3}{b^3} (\mu - 1)^2} \right] B_0. \quad (5.121)$$

Потенциал вне сферической оболочки описывает суперпозицию однородного поля \mathbf{B}_0 и поля (5.41), создаваемого диполем с момен-



Ф и г. 5.15. Экранирующее действие оболочки из материала с большой магнитной проницаемостью.

том α_1 , ориентированным вдоль \mathbf{B}_0 . Внутри полости имеется однородное магнитное поле, параллельное \mathbf{B}_0 и равное по величине $-\delta_1$. При $\mu \gg 1$ дипольный момент α_1 и внутреннее поле $-\delta_1$ приближенно записываются следующим образом:

$$\alpha_1 \approx b^3 B_0,$$

$$-\delta_1 \approx \frac{9}{2\mu \left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right)} B_0. \quad (5.122)$$

Выражения (5.122) показывают, что внутреннее поле убывает пропорционально μ^{-1} . Следовательно, оболочка, сделанная из мате-

риала с большой магнитной проницаемостью $\mu \sim 10^3 - 10^6$, даже при сравнительно небольшой толщине значительно ослабляет поле внутри нее. На фиг. 5.15 показано поведение силовых линий \mathbf{B} . Мы видим, что силовые линии как бы стремятся по возможности идти через вещество с высокой магнитной проницаемостью.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Задачи о постоянных токах в среде с сопротивлением аналогичны потенциальным задачам электростатики с той лишь разницей, что электрическая индукция заменяется плотностью тока, а диэлектрическая проницаемость — проводимостью. Однако граничные условия, вообще говоря, различны. Постоянные токи рассматриваются в книгах Джинса [55], гл. 9, 10, и Смайта [100], гл. 6.

Магнитные поля, создаваемые различными распределениями токов, и граничные задачи магнитостатики с большим количеством примеров рассматриваются у Дюрана [37], гл. 14 и 15, и Смайта [100], гл. 7 и 12.

Атомная теория магнитных свойств вещества относится к области квантовой механики. Полуклассическое рассмотрение дано в книге Беккера [6], Дюрана [37], гл. 17, Ландау и Лифшица [64], Розенфельда [86], гл. 4.

Квантовомеханическое рассмотрение проводится в работах, посвященных электрическим и магнитным свойствам вещества, например в книге Ван Флека [113].

Дополнение редактора. Изложение физических основ магнитостатики можно найти в книге Тамма [130].

ЗАДАЧИ

5.1. Исходя из дифференциального выражения

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{x}}{x^3}$$

для магнитной индукции, создаваемой элементом тока $I d\mathbf{l}$, показать, что для замкнутого контура, несущего ток I , магнитная индукция в точке наблюдения P выражается формулой

$$\mathbf{B} = -\frac{I}{c} \text{grad } \Omega,$$

где Ω — телесный угол, под которым контур виден из точки P . (Это одна из возможных форм закона Ампера для контуров с током.)

5.2. а) Соленоид имеет N витков на единицу длины; ток через них равен I . Показать, что плотность магнитного потока на оси приближенно выражается формулой

$$B_z \approx \frac{2\pi N I}{c} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2),$$

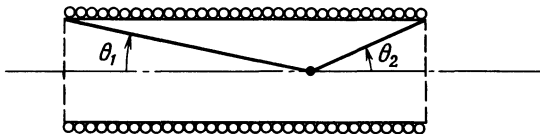
где углы θ_1 и θ_2 определены на фиг. 5.16.

б) Показать, что для длинного соленоида длиной L и радиусом a магнитное поле *вблизи оси* и *в окрестности центра соленоида* в основном парал-

лельно оси, но имеет малую радиальную компоненту, равную

$$B_{\rho} \approx \frac{96\pi NI}{c} \frac{a^2 z \varrho}{L^4}.$$

Это выражение справедливо с точностью до величин $\sim a^2/L^2$ при $z \ll L$, $\varrho \ll a$. Координата z отсчитывается от центра соленоида.



Ф и г. 5.16.

в) Показать, что на конце соленоида магнитное поле вблизи оси имеет составляющие

$$B_z \approx \frac{2\pi NI}{c}, \quad B_{\rho} \approx \frac{\pi NI}{c} \frac{\varrho}{a}.$$

5.3. В цилиндрическом проводнике радиусом a просверлен круглый канал радиусом b , ось которого параллельна оси цилиндра и расположена от нее на расстоянии d ($d + b < a$). По металлической части цилиндра течет однородный ток, направленный вдоль оси. Используя закон Ампера и принцип суперпозиции, найти величину и направление магнитного поля в канале.

5.4. Круглый виток с током I расположен в плоскости xy , а его центр совпадает с началом координат.

а) Показать, что магнитное поле можно описать векторным потенциалом, имеющим лишь одну составляющую

$$A_{\varphi}(\varrho, z) = \frac{4Ia}{c} \int_0^{\infty} dk \cos kz I_1(k\varrho_{<}) K_1(k\varrho_{>}),$$

где $\varrho_{<}$ и $\varrho_{>}$ — соответственно меньшая и большая из величин ϱ и a .

б) Показать, что векторный потенциал может быть также представлен в виде

$$A_{\varphi}(\varrho, z) = \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^{\infty} dk e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\varrho).$$

в) Написать интегральные выражения для составляющих магнитного поля, используя векторные потенциалы, приведенные в п. «а» и «б». Получить явное выражение для составляющих \mathbf{B} на оси путем вычисления соответствующих интегралов.

5.5. Два круглых витка с общим центром и радиусами a и b ($b < a$), по которым текут соответственно токи I и I' , расположены таким образом, что угол между их плоскостями равен α . Показать, что на каждый виток действует вращающий момент вокруг линии пересечения плоскостей вит-

ков, равный

$$N = \frac{2\pi^2 I' b^2}{ac^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \left[\frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+2)\Gamma(3/2)} \right]^2 \left(\frac{b}{a} \right)^{2n} P_{2n+1}^1(\cos \alpha),$$

где $P_l^m(\cos \alpha)$ — присоединенные функции Лежандра. Определить направление вращающего момента, считая угол α острым, а токи имеющими как одинаковое, так и противоположное направление.

5.6. Сфера с равномерно распределенным поверхностным зарядом вращается вокруг своего диаметра a с постоянной угловой скоростью ω . Найти векторный потенциал и магнитное поле внутри и вне сферы.

5.7. Длинный полый круглый цилиндр с внутренним радиусом a и внешним радиусом b , имеющий магнитную проницаемость μ , помещают в область с первоначально однородным полем \mathbf{B}_0 перпендикулярно этому полю. Определить магнитное поле во всем пространстве и построить график зависимости логарифма отношения величины \mathbf{B} на оси цилиндра к \mathbf{B}_0 от $\lg \mu$ для $a^2/b^2 = 0,5$ и $0,1$. Краевыми эффектами пренебречь.

5.8. В среде с магнитной проницаемостью, равной единице, примыкающей к полупространству $z < 0$ с магнитной проницаемостью μ , задано некоторое распределение токов $\mathbf{J}(x)$.

а) Показать, что магнитное поле в области $z > 0$ можно определить, заменяя магнитную среду в области $z < 0$ токами-изображениями \mathbf{J}^* , имеющими составляющие

$$\frac{\mu-1}{\mu+1} J_x(x, y, -z), \quad \frac{\mu-1}{\mu+1} J_y(x, y, -z), \quad -\frac{\mu-1}{\mu+1} J_z(x, y, -z).$$

б) Показать, что магнитная индукция в области $z < 0$ соответствует распределению токов $2\mu/(\mu+1) \mathbf{J}$ в среде с единичной магнитной проницаемостью.

5.9. Круглый виток радиусом a с током I расположен в свободном пространстве, а его центр находится на расстоянии d от границы полупространства с магнитной проницаемостью μ . Определить силы, действующие на виток в случаях, когда:

а) плоскость витка параллельна границе магнетика,

б) плоскость витка перпендикулярна границе магнетика,

в) найти предельные выражения для сил «а» и «б» при $d \gg a$. Можно ли получить эти предельные величины с помощью какого-либо простого прямого метода?

5.10. Прямой круглый цилиндр длиной L и радиусом a изготовлен из «магнитно твердого» материала. Он имеет постоянную намагниченность M_0 , однородную по объему и параллельную его оси.

а) Определить магнитное поле \mathbf{H} и магнитную индукцию \mathbf{B} во всех точках на оси цилиндра как внутри, так и вне него.

б) Построить график зависимости от z отношений $\mathbf{B}/4\pi M_0$ и $\mathbf{H}/4\pi M_0$ на оси для $L/a = 5$.

5.11. а) Исходя из выражения (5.12) и учитывая, что намагниченность \mathbf{M} эквивалентна распределению тока с плотностью $\mathbf{J}_M = \text{rot } \mathbf{M}$, показать, что в отсутствие макроскопических токов на тело с намагниченностью \mathbf{M} действует сила

$$\mathbf{F} = - \int (\text{div } \mathbf{M}) \mathbf{B}_e d^3x,$$

где \mathbf{B}_e — магнитная индукция, обусловленная всеми токами, кроме \mathbf{J}_M .

б) Показать, что выражение для силы можно представить также в виде

$$\mathbf{F} = - \int (\operatorname{div} \mathbf{M}) \mathbf{H} d^3x,$$

где \mathbf{H} — полное магнитное поле, включающее и поле, создаваемое самим намагниченным телом.

5.12. Пусть магнитостатическое поле создается только заданным распределением постоянной намагниченности.

а) Показать, что

$$\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d^3x = 0,$$

если интеграл берется по всему пространству.

б) Используя выражение (5.73) для потенциальной энергии диполя во внешнем поле, показать, что магнитостатическую энергию для непрерывного распределения постоянной намагниченности можно записать в виде

$$\mathcal{W} = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} d^3x = -\frac{1}{2} \int \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} d^3x.$$

Здесь опущена аддитивная постоянная, которая не зависит от ориентации и положения отдельных намагниченных тел.

5.13. Показать, что длинный прямой стержень с постоянным поперечным сечением A и однородной продольной намагниченностью M , приставленный торцом к плоской поверхности тела с бесконечной магнитной проницаемостью, притягивается к нему с силой, приближенно равной

$$F \approx 2\pi AM^2.$$

5.14. Прямой круглый цилиндр длиной L и радиусом a имеет однородную продольную намагниченность M .

а) Показать, что, будучи приставлен торцом к плоской поверхности с бесконечной магнитной проницаемостью, он притягивается к ней с силой

$$F = 8\pi aLM^2 \left[\frac{K(k) - E(k)}{k} - \frac{K(k_1) - E(k_1)}{k_1} \right],$$

где

$$k = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + L^2}}, \quad k_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + L^2}}.$$

б) Найти предельное выражение для этой силы при $L \gg a$.

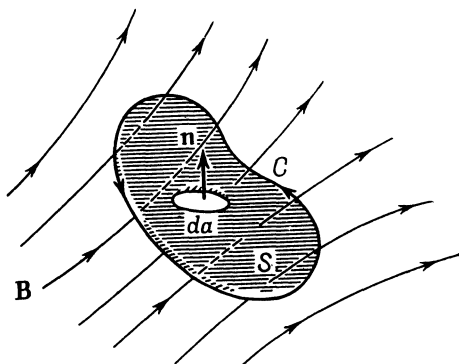
**ПЕРЕМЕННЫЕ ВО ВРЕМЕНИ ПОЛЯ.
УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА.
ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ**

Выше мы рассматривали задачи с не зависящими от времени электрическими и магнитными полями. В обоих случаях применялись аналогичные математические методы, но электрические и магнитные явления рассматривались как независимые. Единственным связующим звеном был тот факт, что токи, создающие магнитные поля, имеют, по существу, электрическую природу, поскольку они обуславливаются движением зарядов. При рассмотрении же переменных во времени полей независимость электрических и магнитных явлений исчезает. При изменении во времени магнитного поля возникает электрическое поле, а изменение электрического поля порождает магнитное поле. В случае переменных полей мы имеем не электрическое и не магнитное поля в отдельности, а общее *электромагнитное поле*. Полное значение взаимосвязи между электрическим и магнитным полями и их фактическая тождественность объясняются по-настоящему лишь в специальной теории относительности (см. гл. 11). Здесь мы ограничимся исследованием основных физических явлений и установим систему уравнений, описывающих поведение электромагнитных полей, которые известны под названием *уравнений Максвелла*. Мы рассмотрим основные следствия из этих уравнений, заложив тем самым фундамент электродинамики. В последующих главах будут рассмотрены многочисленные следствия этих основных соотношений.

Мы вынуждены будем опустить ряд разделов, представляющих самостоятельный интерес, но достаточно полно изложенных в других руководствах. Сюда относятся, в частности, теория квазистационарных полей, теория цепей, расчет индуктивностей, вопросы, связанные с токами Фуко и индукционным нагревом. При рассмотрении всех этих проблем ни в одном случае не используются какие-либо новые понятия, кроме введенных в этой главе или в предыдущих. Интересующийся читатель может найти соответствующие литературные ссылки в конце главы.

§ 1. Закон индукции Фарадея

Первые количественные исследования связи переменных электрического и магнитного полей были проведены в 1831 г. Фарадеем при опытах с контурами, помещенными в переменное магнитное поле. Фарадей заметил, что в контуре индуцируется ток в случаях, когда а) в соседнем контуре включается или выключается постоянный ток, б) соседний контур с постоянным током движется относительно первого контура, в) внутрь контура вносится (или



Ф и г. 6.1.

из него выносятся) постоянный магнит. Если ток в соседнем контуре не изменяется и не происходит относительного движения контуров, то никакого тока не возникает. Фарадей интерпретировал возникновение этих токов как следствие изменения магнитного потока, пронизывающего данный контур. Изменение потока индуцирует электрическое поле, линейный интеграл от которого, взятый вдоль контура, называется *электродвижущей силой* \mathcal{E} . Эта электродвижущая сила в соответствии с законом Ома и вызывает появление тока.

Представим наблюдения Фарадея в количественной математической форме. Рассмотрим поверхность S с единичной нормалью \mathbf{n} , ограниченную контуром C , как показано на фиг. 6.1. Пусть контур C помещен в магнитное поле \mathbf{B} . Тогда магнитный поток, пронизывающий контур, будет

$$F = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da. \quad (6.1)$$

Электродвижущая сила в контуре определяется выражением

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}, \quad (6.2)$$

где \mathbf{E}' — электрическое поле на элементе $d\mathbf{l}$ контура C . Наблюдения Фарадея можно выразить математически в виде

$$\mathcal{E} = -k \frac{dF}{dt}. \quad (6.3)$$

Электродвижущая сила индукции в контуре пропорциональна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего данный контур. Знак определяется законом Ленца, утверждающим, что индуцированный ток (и соответствующий ему магнитный поток) имеет такое направление, что препятствует изменению потока сквозь контур.

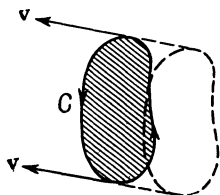
Коэффициент пропорциональности k зависит от выбора единиц измерения величин электрического и магнитного полей. Он не является, как это можно было бы предположить, независимой эмпирической постоянной, которую можно определить из эксперимента. Ниже мы увидим, что после выбора единиц и размерностей в законе Ампера величина и размерность k получаются из требования галилеевской инвариантности закона Фарадея. В гауссовых единицах $k = c^{-1}$, где c — скорость света.

До появления специальной теории относительности (да и после ее появления в случае, когда относительные скорости малы по сравнению со скоростью света) всегда подразумевалось, хотя подчас явно и не формулировалось, что все физические законы инвариантны относительно преобразований Галилея. Это означает, что физические явления протекают одинаково с точки зрения двух наблюдателей, движущихся с постоянной скоростью v относительно друг друга, если пространственные и временные координаты связаны преобразованием Галилея $x' = x + vt$, $t' = t$. Рассмотрим, в частности, опыты Фарадея. Как установлено экспериментально, в контуре возникают одинаковые токи независимо от того, движется ли этот контур относительно токонесящего контура или же он покоится, а движется токонесящий контур, лишь бы их относительное движение в обоих случаях было одинаковым.

Рассмотрим теперь закон Фарадея для движущегося контура и посмотрим, к каким следствиям приводит галилеевская инвариантность. Выражая (6.3) через интегралы от \mathbf{E}' и \mathbf{B} , мы получаем

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -k \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da. \quad (6.4)$$

Наведенная в контуре электродвижущая сила пропорциональна *полной* производной по времени от магнитного потока, который может изменяться как при изменении магнитного поля, так и при изменении формы, ориентации или положения контура. Уравнение (6.4) является обобщением закона Фарадея. В качестве контура C мы можем представлять себе любую замкнутую геометрическую линию в пространстве, не обязательно совпадающую с электрическим контуром. При этом (6.4) дает связь между самими



Ф и г. 6.2.

полями. Следует, однако, иметь в виду, что электрическое поле \mathbf{E}' представляет собой электрическое поле в элементе $d\mathbf{l}$ в системе координат, в которой $d\mathbf{l}$ покоится; именно это поле вызывает появление тока в случае наличия реального контура в этом месте.

Если контур C движется со скоростью \mathbf{v} в некотором направлении, как показано на фиг. 6.2, то при вычислении полной производной в (6.4) необходимо учесть это движение. Тогда поток через контур может изменяться вследствие изменения магнитного поля во времени, а также из-за того, что при перемещении контура изменяется положение его границы. Легко показать, что полная производная от потока через движущийся контур равна ¹⁾

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da + \oint_C (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.4) можно записать теперь в виде

$$\oint_C [\mathbf{E}' - k(\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \cdot d\mathbf{l} = -k \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da. \quad (6.6)$$

¹⁾ Для произвольного векторного поля в (6.5) должен входить добавочный член $\int_S (\operatorname{div} \mathbf{B}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da$, который дает вклад от источников векторного поля, проходимых движущимся контуром. Этот общий результат легче всего получить при использовании материальной производной:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}.$$

Это уравнение описывает закон Фарадея в применении к движущемуся контуру C . Но мы можем интерпретировать его и иначе. Мы можем считать, что контур C и поверхность S занимают некоторое мгновенное положение в пространстве в лабораторной системе координат. Применяя закон Фарадея (6.4) к этому фиксированному контуру, находим

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -k \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da, \quad (6.7)$$

где \mathbf{E} — электрическое поле в лабораторной системе координат. Условие галилеевской инвариантности приводит к требованию равенства левых частей уравнений (6.6) и (6.7). Это означает, что электрическое поле \mathbf{E}' в движущейся системе координат, связанной с контуром, равно

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + k(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6.8)$$

Для определения константы k рассмотрим смысл величины \mathbf{E}' . На заряженную частицу (например, один из электронов проводимости) в движущемся контуре действует сила $q\mathbf{E}'$. Но в лабораторной системе координат эта частица создает ток $\mathbf{J} = qv\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Соотношения (5.7) или (5.12) определяют силу, действующую на этот ток, которая совпадает с (6.8), если постоянная k равна c^{-1} .

Таким образом, закон Фарадея принимает вид

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da, \quad (6.9)$$

где \mathbf{E}' — электрическое поле на элементе $d\mathbf{l}$ в системе координат, в которой элемент $d\mathbf{l}$ покоится. Производная в правой части является полной производной по времени. Если контур C движется со скоростью \mathbf{v} , то электрическое поле в движущейся системе координат будет

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6.10)$$

Приведенные результаты справедливы только для нерелятивистских скоростей. Галилеевская инвариантность не является строгим законом и применима только для относительных скоростей, малых по сравнению со скоростью света. Выражение (6.10) справедливо только с точностью до членов *первого* порядка по v/c и имеет погрешность порядка v^2/c^2 (см. гл. 11, § 10). Однако очевидно, что для лабораторных экспериментов с макроскопическими контурами выражения (6.9) и (6.10) имеют вполне достаточную точность.

Закон Фарадея (6.9) можно записать также и в дифференциальной форме, если воспользоваться теоремой Стокса и считать контур

покоящимся в выбранной системе отсчета (для того чтобы \mathbf{E} и \mathbf{V} были определены в одной и той же системе отсчета). Преобразуя интеграл, выражающий электродвижущую силу, в поверхностный интеграл, приходим к соотношению

$$\int_S \left(\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} da = 0.$$

В силу произвольности поверхности S , опирающейся на произвольный контур C , подынтегральное выражение должно обращаться в нуль во всех точках пространства.

Таким образом, дифференциальная форма закона Фарадея имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (6.11)$$

Заметим, что (6.11) является обобщением уравнения для статического электрического поля $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ на случай переменных полей.

§ 2. Энергия магнитного поля

При рассмотрении постоянных магнитных полей в гл. 5 мы оставили в стороне вопрос об энергии поля и плотности энергии. Это объясняется тем, что для того, чтобы создать какую-либо конфигурацию постоянных токов и соответствующих им магнитных полей, требуется некоторый переходный период, в течение которого токи и поля изменяются от нуля до своих стационарных значений. Переменные во времени поля вызывают электродвижущие силы, вследствие чего источники тока совершают некоторую работу. Поскольку энергия поля, по определению, является полной работой, необходимой для создания поля, мы должны учесть и работу против электродвижущих сил.

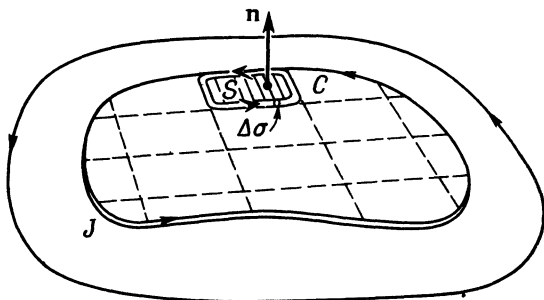
Предположим сначала, что мы имеем отдельный контур с постоянным током I . При изменении потока через контур в нем возникает электродвижущая сила \mathcal{E} . Для того чтобы ток остался постоянным, источники тока должны в единицу времени совершать работу

$$\frac{dW}{dt} = -I\mathcal{E} = \frac{1}{c} I \frac{dF}{dt}$$

(помимо работы, расходуемой на омические потери, которая не включается в магнитную энергию). Отсюда следует, что при изменении потока через контур с током I на величину δF работа, совершаемая источниками, равна

$$\delta W = \frac{1}{c} I \delta F.$$

Рассмотрим теперь работу, необходимую для создания произвольного распределения постоянных токов и полей. Мы можем предположить, что процесс создания полей происходит с бесконечно малой скоростью, так что с желаемой степенью точности соблюдается соотношение $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. При этом распределение токов можно разбить на совокупность элементарных замкнутых контуров. Одним из таких контуров является показанная на фиг. 6.3 элементарная



Фиг. 6.3. Разбиение распределенного тока на элементарные контуры.

трубка тока с поперечным сечением $\Delta\sigma$, замкнутая в контур C , окружающий поверхность S с нормалью \mathbf{n} .

Выразим дополнительную работу, совершаемую против наводимой э. д. с., через изменение магнитной индукции в этом элементарном контуре

$$\Delta(\delta W) = \frac{J\Delta\sigma}{c} \int_S \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{B} da.$$

Знак Δ показывает, что рассматривается только один элементарный контур. Выражая \mathbf{B} через векторный потенциал \mathbf{A} , мы получаем

$$\Delta(\delta W) = \frac{J\Delta\sigma}{c} \int_S (\operatorname{rot} \delta \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da,$$

или, применяя теорему Стокса,

$$\Delta(\delta W) = \frac{J\Delta\sigma}{c} \int_C \delta \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}.$$

Но $J\Delta\sigma d\mathbf{l}$ равно $\mathbf{J}d^3x$, так как элемент $d\mathbf{l}$ параллелен \mathbf{J} . Очевидно, суммирование по всем элементарным контурам приводит к объемному интегралу. Таким образом, полная работа, совершаемая внешними источниками при изменении векторного потенциала на величину $\delta \mathbf{A}$, запишется как

$$\delta W = \frac{1}{c} \int \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} d^3x. \quad (6.12)$$

Чтобы перейти от \mathbf{J} и $\delta\mathbf{A}$ к магнитным полям, воспользуемся законом Ампера

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}.$$

Отсюда

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \delta\mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} d^3x. \quad (6.13)$$

С помощью векторного тождества

$$\operatorname{div} (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \mathbf{Q} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{Q}$$

мы можем преобразовать выражение (6.13) к виду

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int [\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \delta\mathbf{A} + \operatorname{div} (\mathbf{H} \times \delta\mathbf{A})] d^3x. \quad (6.14)$$

Если распределение токов предполагается ограниченным, то второй интеграл обращается в нуль. Учитывая связь \mathbf{B} и \mathbf{A} , мы можем записать приращение энергии в виде

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B} d^3x. \quad (6.15)$$

Это соотношение является магнитным аналогом электростатического соотношения (4.89). В полученной здесь форме оно применимо к любым магнитным средам, включая ферромагнитные материалы. Если предположить, что среда пара- или диамагнитна, так что между \mathbf{H} и \mathbf{B} существует линейная связь, то

$$\mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B} = \frac{1}{2} \delta (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}).$$

При изменении полей от нуля до их конечной величины общая магнитная энергия будет в этом случае равна

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d^3x. \quad (6.16)$$

Это — магнитный аналог выражения (4.92).

Чтобы получить соотношение, эквивалентное соотношению (4.86), в котором электростатическая энергия выражена через плотность заряда и потенциал, следует в (6.12) предположить линейную связь между \mathbf{J} и \mathbf{A} . Тогда магнитная энергия представляется в виде

$$W = \frac{1}{2c} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} d^3x. \quad (6.17)$$

Задача об определении изменения магнитной энергии при внесении в магнитное поле некоторого тела с магнитной проницаемостью μ_1 при фиксированных источниках тока может быть рассмотрена

вполне аналогично соответствующей электростатической задаче (см. гл. 4, § 8). Роль \mathbf{E} здесь играет \mathbf{B} , а роль \mathbf{D} играет \mathbf{H} . Первоначально мы имеем среду с магнитной проницаемостью μ_0 , в которой существует магнитная индукция \mathbf{B}_0 . После внесения тела индукция и поле становятся равными \mathbf{B} и \mathbf{H} . В качестве упражнения читатель может проверить, что при фиксированных источниках поля изменение энергии будет описываться выражением

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}_0 - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_0) d^3x, \quad (6.18)$$

где интегрирование производится по объему внесенного тела. Это выражение можно переписать также в виде

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\mu_1 - \mu_0) \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_0 d^3x = \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_1} \right) \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0 d^3x. \quad (6.19)$$

Здесь μ_1 и μ_0 могут быть функциями координат, но они предполагаются не зависящими от напряженности поля.

Для тела, находящегося в свободном пространстве ($\mu_0 = 1$), изменение энергии можно выразить через намагниченность

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1} \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0 d^3x. \quad (6.20)$$

Следует отметить, что соотношение (6.20) с точностью до знака эквивалентно соответствующему электростатическому выражению (4.96). Изменение знака вызвано тем, что энергия W — это полное изменение энергии при внесении в поле намагничивающегося тела, включая и работу, совершаемую источниками против электродвижущих сил индукции. В этом смысле магнитная задача с фиксированными токами аналогична электростатической задаче с фиксированными потенциалами на проводниках. Рассуждения, аналогичные приведенным в гл. 4, § 8, показывают, что при малом смещении работа, совершаемая против индуцированных э. д. с., в 2 раза больше и противоположна по знаку изменению потенциальной энергии тела. Поэтому для нахождения силы, действующей на тело при обобщенном смещении ξ , мы должны вычислить *положительную* производную W по смещению ξ

$$F_\xi = \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_J. \quad (6.21)$$

Индекс J указывает на то, что производная берется при фиксированных токах.

Разница между (6.20) и потенциальной энергией (5.73) постоянного магнитного момента во внешнем поле (кроме множителя $1/2$, который является следствием предполагаемой линейной зависимо-

сти между \mathbf{M} и \mathbf{B}) связана с тем, что (6.20) выражает полную энергию, требуемую для создания данной конфигурации, тогда как (5.73) включает только работу совершаемую при внесении постоянного магнитного момента в поле, и не содержит работы по созданию магнитного момента и по поддержанию его постоянным.

§ 3. Максвелловский ток смещения. Уравнения Максвелла

Основные законы электричества и магнетизма, которые мы рассматривали до сих пор, можно представить в дифференциальной форме следующими четырьмя уравнениями:

закон Кулона

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi q,$$

закон Ампера

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J},$$

закон Фарадея

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

отсутствие свободных магнитных зарядов

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

(6.22)

Эти уравнения записаны в макроскопической форме в гауссовой системе единиц. Напомним, что все эти законы, кроме закона Фарадея, получены при изучении постоянных полей. С логической точки зрения априори ниоткуда не следует, что статические уравнения должны остаться неизменными в случае полей, зависящих от времени. И действительно, система уравнений (6.22) в той форме, как она здесь написана, неприменима для переменных полей.

Потребовался гений Джемса Кларка Максвелла, который, опираясь на результаты экспериментов Фарадея, сумел обнаружить некорректность уравнений (6.22) и надлежащим образом изменить их, что в итоге привело к открытию новых физических явлений, не известных в то время, но впоследствии подтвержденных экспериментально во всех деталях. Такая блестящим образом дополненная Максвеллом в 1865 г. система уравнений заслуженно известна под названием уравнений Максвелла.

Некорректным уравнением в системе (6.22) является закон Ампера, который выведен для постоянных токов, когда $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Это требование к дивергенции \mathbf{J} содержится непосредственно в уравнении Ампера. Действительно, беря дивергенцию от обеих

частей равенства, получаем

$$\frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{J} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} \equiv 0. \quad (6.23)$$

Однако уравнение $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ справедливо только для стационарных явлений; общее соотношение дается уравнением непрерывности для заряда и тока

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (6.24)$$

Максвелл заметил, что при учете закона Кулона [см. (6.22)] уравнение непрерывности можно представить в виде равенства нулю дивергенции некоторого вектора:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (6.25)$$

Соответственно Максвелл обобщил закон Ампера на случай переменных полей, произведя в нем замену

$$\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (6.26)$$

Обобщенный закон Ампера принимает при этом вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (6.27)$$

Для стационарных процессов это соотношение дает прежний, экспериментально проверенный закон, но теперь оно стало математически совместимым с уравнением непрерывности (6.24) для переменных полей. Максвелл назвал добавочный член в (6.26) *током смещения*. Введенная модификация закона Ампера имеет решающее значение для быстро меняющихся полей. Без нее не было бы электромагнитных волн, и, собственно, все последующие главы настоящей книги не были бы написаны. Максвелл пришел к заключению, что свет представляет собой электромагнитные волны, и показал возможность генерации электромагнитных волн различных частот. Это привлекло внимание всех физиков и стимулировало множество теоретических и экспериментальных исследований в конце девятнадцатого столетия.

Система четырех уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (6.28)$$

известных под названием уравнений Максвелла, составляет основу всей электродинамики. В сочетании с выражением для силы

Лоренца и вторым законом движения Ньютона эти уравнения дают полное описание динамики заряженных частиц, взаимодействующих с электромагнитными полями (см. § 9 настоящей главы и гл. 10 и 12). Для макроскопического описания динамических характеристик среды, состоящей из большого количества атомов, используются кроме того, *материальные уравнения*, связывающие \mathbf{D} и \mathbf{J} с \mathbf{E} , а \mathbf{H} с \mathbf{B} (например, $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ для изотропного магнитного диэлектрика с конечной проводимостью).

При написании уравнений Максвелла (6.28) использованы те же единицы, что и в предыдущих главах, а именно гауссова система единиц. Для читателя, привыкшего к другой системе единиц, например МКС, в табл. 2 в приложении приведены основные уравнения в наиболее употребительных системах. Табл. 3 в приложении позволяет перевести произвольное уравнение в гауссовых единицах в систему МКС, а табл. 4 дает соотношение между соответствующими единицами.

§ 4. Векторный и скалярный потенциалы

Уравнения Максвелла образуют систему взаимосвязанных уравнений первого порядка в частных производных, определяющих изменение составляющих электрического и магнитного полей. Для простых конфигураций они могут быть решены непосредственно. Однако часто удобно ввести потенциалы и свести систему к меньшему числу уравнений второго порядка. При этом некоторые из уравнений Максвелла удовлетворяются автоматически. Мы уже познакомились с этим методом в электростатике и магнитостатике, где использовались скалярный потенциал Φ и векторный потенциал \mathbf{A} .

Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, мы можем выразить \mathbf{B} через векторный потенциал:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (6.29)$$

Подставляя это выражение во второе однородное уравнение системы (6.28) (в закон Фарадея), получаем

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (6.30)$$

Величину в круглых скобках, ротор которой равен нулю, можно, очевидно, представить в виде градиента некоторой скалярной функции, а именно скалярного потенциала Φ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\operatorname{grad} \Phi, \\ \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

или

Поля \mathbf{B} и \mathbf{E} , определенные через потенциалы \mathbf{A} и Φ соотношениями (6.29) и (6.31), тождественно удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла. Динамическое поведение \mathbf{A} и Φ определяется двумя неоднородными уравнениями системы (6.28).

На данной стадии удобно ограничить наше рассмотрение микроскопической формой уравнений Максвелла. Тогда неоднородные уравнения системы (6.28) можно записать через потенциалы в виде

$$\nabla^2\Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = -4\pi\rho, \quad (6.32)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (6.33)$$

Таким образом, мы свели систему четырех уравнений Максвелла к двум уравнениям, которые, однако, остались взаимосвязанными. Для получения отдельных уравнений для Φ и \mathbf{A} можно воспользоваться свободой в определении потенциалов. Так как индукция \mathbf{B} связана с \mathbf{A} формулой (6.29), то векторный потенциал определен лишь с точностью до аддитивной векторной функции, являющейся градиентом произвольной скалярной функции Λ . Магнитное поле \mathbf{B} не меняется при преобразовании

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \Lambda. \quad (6.34)$$

Чтобы при этом осталось неизменным также и электрическое поле (6.31), следует одновременно преобразовать и скалярный потенциал

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial\Lambda}{\partial t}. \quad (6.35)$$

Соотношения (6.34) и (6.35) позволяют, в частности, выбрать такую систему потенциалов (\mathbf{A}, Φ) , чтобы выполнялось равенство

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0. \quad (6.36)$$

При этом уравнения (6.32) и (6.33) сводятся к двум отдельным неоднородным волновым уравнениям для Φ и \mathbf{A}

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (6.37)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (6.38)$$

Уравнения (6.37) и (6.38) в совокупности с (6.36) образуют систему уравнений, полностью эквивалентную уравнениям Максвелла.

§ 5. Калибровочные преобразования.

Лоренцовская калибровка. Кулоновская калибровка

Преобразования (6.34) и (6.35) называются *калибровочными преобразованиями*, а инвариантность полей относительно этих преобразований называется *калибровочной инвариантностью*. Соотношение (6.36) между \mathbf{A} и Φ называется *условием Лоренца*. Покажем, что всегда можно выбрать потенциалы так, чтобы они удовлетворяли условию Лоренца. Для этого предположим, что потенциалы \mathbf{A} , Φ , удовлетворяющие уравнениям (6.32) и (6.33), не удовлетворяют уравнению (6.36). Произведем калибровочное преобразование потенциалов \mathbf{A}' , Φ' и потребуем, чтобы \mathbf{A}' и Φ' удовлетворяли условию Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 = \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}. \quad (6.39)$$

Очевидно, если калибровочная функция Λ выбрана таким образом, что она удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = - \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right), \quad (6.40)$$

то новые потенциалы \mathbf{A}' и Φ' будут удовлетворять условию Лоренца и волновым уравнениям (6.37) и (6.38).

Потенциалы, удовлетворяющие условию Лоренца (6.36), все еще содержат некоторую неопределенность. Очевидно, группа *ограниченных калибровочных преобразований*

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \operatorname{grad} \Lambda, \\ \Phi &\rightarrow \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.41)$$

с функцией Λ , удовлетворяющей уравнению

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0, \quad (6.42)$$

сохраняет условие Лоренца, если первоначально \mathbf{A} и Φ удовлетворяли этому условию. Все потенциалы этого ограниченного класса потенциалов называют принадлежащими к *лоренцовской калибровке*. Лоренцовская калибровка является наиболее употребительной, поскольку, во-первых, при ее использовании Φ и \mathbf{A} входят эквивалентным образом в волновые уравнения (6.37) и (6.38) и, во-вторых, потому, что она не зависит от выбора координатной системы и поэтому очень удобна в специальной теории относительности (см. гл. 11, § 9).

Другой полезной калибровкой потенциалов является так называемая *кулоновская*, или *поперечная*, калибровка. При этой калиб-

ровке налагается дополнительное условие

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (6.43)$$

Из (6.32) следует, что скалярный потенциал удовлетворяет при этом уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho, \quad (6.44)$$

решение которого имеет вид

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (6.45)$$

Скалярный потенциал (6.45) является мгновенным кулоновским потенциалом, соответствующим плотности заряда $\rho(\mathbf{x}, t)$, чем и объясняется название «кулоновская калибровка».

Векторный потенциал удовлетворяет неоднородному волновому уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (6.46)$$

Слагаемое в правой части, содержащее скалярный потенциал, может быть в принципе вычислено согласно (6.45). Используя уравнение непрерывности, мы можем написать

$$\operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\operatorname{grad} \int \frac{\operatorname{div}' \mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (6.47)$$

Если представить ток в виде суммы «продольной» и «поперечной» составляющих

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_l + \mathbf{J}_t, \quad (6.48)$$

таких, что $\operatorname{rot} \mathbf{J}_l = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{J}_t = 0$, то эти составляющие запишутся следующим образом:

$$\mathbf{J}_l = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int \frac{\operatorname{div}' \mathbf{J}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (6.49)$$

$$\mathbf{J}_t = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (6.50)$$

что можно проверить, воспользовавшись векторным тождеством $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{J} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{J} - \nabla^2 \mathbf{J}$ и соотношением $\nabla^2 (1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Из сравнения (6.47) с (6.49) следует, что

$$\operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 4\pi \mathbf{J}_l. \quad (6.51)$$

Таким образом, источником в волновом уравнении для \mathbf{A} служит поперечный ток (6.50)

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_t, \quad (6.52)$$

чем и определяется название «поперечная калибровка».

Кулоновская (поперечная) калибровка часто используется для описания полей в отсутствие источников. В этом случае $\Phi = 0$, \mathbf{A} удовлетворяет однородному волновому уравнению, а поля определяются через \mathbf{A} соотношениями

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (6.53)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

§ 6. Функция Грина для волнового уравнения

Волновые уравнения (6.37), (6.38) и (6.52) имеют одинаковую структуру

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{x}, t), \quad (6.54)$$

где $f(\mathbf{x}, t)$ дает распределение источников, а c представляет собой скорость распространения волн в пространстве.

Для решения уравнения (6.54), так же как в электростатике, полезно найти сначала функцию Грина. Поскольку теперь поля зависят и от времени, функция Грина будет зависеть от переменных $(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t')$ и должна удовлетворять уравнению

$$\left(\nabla_{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'). \quad (6.55)$$

Решение уравнения (6.54) в неограниченном пространстве без граничных поверхностей выражается через G интегралом

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') f(\mathbf{x}', t') d^3x' dt'. \quad (6.56)$$

Нужно, конечно, потребовать, чтобы функция Грина удовлетворяла определенным граничным условиям, которые задаются физическими требованиями.

Основная функция Грина ¹⁾, удовлетворяющая уравнению (6.55), зависит только от разностей координат $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ и времен $(t - t')$. Для нахождения G представим обе части уравнения (6.55) в виде интегралов Фурье. Дельта-функцию в правой части можно представить следующим образом:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} e^{-i\omega(t - t')}. \quad (6.57)$$

Соответственно запишем функцию G в виде

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \int d^3k \int d\omega g(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} e^{-i\omega(t - t')}. \quad (6.58)$$

¹⁾ Под «основной» автор понимает функцию Грина для неограниченного пространства.— *Прим. ред.*

Функцию $g(\mathbf{k}, \omega)$ легко определить, подставляя (6.57) и (6.58) в уравнение (6.55). При этом получаем

$$g(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (6.59)$$

При подстановке $g(\mathbf{k}, \omega)$ в (6.58) и последующем интегрировании по \mathbf{k} и ω мы сталкиваемся с особенностью подынтегрального выражения при $k^2 = \omega^2/c^2$. Решение (6.59) имеет смысл только в том случае, если мы знаем правила обращения с этой особенностью. Математически мы не можем получить такие правила, мы должны прийти к ним из физических соображений.

Функция Грина, удовлетворяющая уравнению (6.55), представляет собой волновое возмущение, вызванное точечным источником, находящимся в точке \mathbf{x}' и излучающим только в течение бесконечно малого интервала времени при $t = t'$. Мы знаем, что такое волновое возмущение распространяется со скоростью c в виде расходящейся сферической волны. Следовательно, необходимо потребовать, чтобы наше решение для G обладало следующими свойствами:

- а) $G = 0$ везде при $t < t'$,
- б) G представляет собой расходящуюся волну при $t > t'$.

При выполнении интегрирования в выражении (6.58) по ω мы сталкиваемся с особенностью функции $g(\mathbf{k}, \omega)$ в точках $\omega = \pm ck$. Мы можем представить интеграл по ω в виде интеграла Коши по комплексной плоскости ω . Для $t > t'$ интеграл вдоль действительной оси в (6.58) эквивалентен контурному интегралу по изображенному на фиг. 6.4 контуру C , замкнутому в нижней полуплоскости, так как интеграл по полуокружности экспоненциально стремится к нулю. Аналогично при $t' > t$ контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости контуром C' (фиг. 6.4).

Чтобы функция G обращалась в нуль при $t < t'$, мы должны предположить, что полюса $\omega = \pm ck$ смещены вниз от действительной оси (фиг. 6.4). При этом интеграл по контуру C (для $t > t'$) будет отличен от нуля, в то время как интеграл по контуру C' (для $t < t'$) обратится в нуль. Смещение полюсов можно выразить математически, заменив в (6.59) ω величиной $\omega + i\varepsilon$. Тогда функция Грина принимает вид

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{1}{4\pi^3} \int d^3k \int d\omega \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - i\omega\tau}}{k^2 - \frac{1}{c^2} (\omega + i\varepsilon)^2}, \quad (6.60)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, $\tau = t - t'$, а ε — положительная бесконечно малая величина.

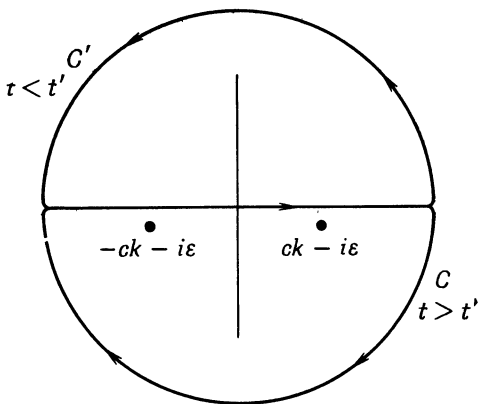
Интегрирование по ω при $\tau > 0$ производится с помощью теоремы Коши по контуру C (см. фиг. 6.4) и дает

$$G = \frac{c}{2\pi^2} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \frac{\sin c\tau k}{k}. \quad (6.61)$$

Интегрирование по d^3k произведем сначала по углам; это дает

$$G = \frac{2c}{\pi R} \int_0^\infty dk \sin kR \sin c\tau k. \quad (6.62)$$

Поскольку подынтегральное выражение является четной функцией



Фиг. 6.4. Комплексная плоскость ω с контуром C для $t > t'$ и контуром C' для $t < t'$.

k , интегрирование здесь можно распространить на весь интервал $-\infty < k < \infty$. Заменяя переменную k на $x = ck$, мы можем представить (6.62) в виде

$$G = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} dx [e^{i(\tau - R/c)x} - e^{i(\tau + R/c)x}]. \quad (6.63)$$

Согласно (2.52), эти интегралы выражаются через δ -функции Дирака. Аргумент второй δ -функции никогда не обращается в нуль (вспомним, что $\tau > 0$). Таким образом, вклад в G дает только первый интеграл, и функция Грина оказывается равной

$$G = \frac{1}{R} \delta\left(\tau - \frac{R}{c}\right),$$

или, более подробно,

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{\delta\left(t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (6.64)$$

Эта гриновская функция иногда называется *запаздывающей функцией Грина*, что отражает естественную причинную последовательность при распространении волнового возмущения: эффект, наблюдаемый в точке \mathbf{x} в момент времени t , вызывается возмущением, которое произошло в точке \mathbf{x}' в более раннее (так называемое *запаздывающее*) время $t' = t - (|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)$.

Решение волнового уравнения (6.54) в отсутствие границ имеет вид

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\delta\left(t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} f(\mathbf{x}', t') d^3x' dt'. \quad (6.65)$$

Производя интегрирование по dt' , мы получаем так называемое *запаздывающее решение*

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{[f(\mathbf{x}', t')]_{\text{запазд}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (6.66)$$

Квадратные скобки $[]_{\text{запазд}}$ означают, что в качестве t' должно быть взято запаздывающее время $t' = t - (|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)$.

§ 7. Задача с начальными условиями. Интегральное представление Кирхгофа

Решение (6.66) является частным интегралом неоднородного волнового уравнения (6.54). Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, к нему можно добавить произвольное решение однородного волнового уравнения. Согласно таблице, приведенной в гл. 1 (см. стр. 31), соответствующие граничные условия являются граничными условиями Коши (задаются ψ и $\partial\psi/\partial n$) на «открытой поверхности». Для трехмерного волнового уравнения открытой поверхностью является трехмерный объем, определяемый одной функциональной зависимостью между четырьмя координатами (x, y, z, t) . Обычно такой открытой поверхностью является обыкновенное трехмерное пространство в фиксированный момент времени $t = t_0$. При этом мы приходим к задаче с начальными условиями: заданы $\psi(\mathbf{x}, t_0)$ и $\partial\psi(\mathbf{x}, t_0)/\partial t$ для всех \mathbf{x} и нужно найти $\psi(\mathbf{x}, t)$ для всех моментов времени $t > t_0$.

Для анализа задачи с начальными условиями и для получения интегрального представления Кирхгофа для замкнутой граничной

поверхности воспользуемся теоремой Грина (1.35) и проинтегрируем это соотношение по времени от $t' = t_0$ до $t' = t_1 > t$

$$\int_{t_0}^{t_1} dt' \int_V d^3x' (\varphi \nabla'^2 \psi - \psi \nabla'^2 \varphi) = \int_{t_0}^{t_1} dt' \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right) da'. \quad (6.67)$$

Положим $\psi = \psi$ и $\varphi = G$. С учетом волновых уравнений (6.54) и (6.55) левая часть, которую мы обозначим через LH, принимает вид

$$\begin{aligned} \text{LH} = & \int_{t_0}^{t_1} dt' \int_V d^3x' \left[4\pi\psi(\mathbf{x}', t') \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \delta(t' - t) - \right. \\ & \left. - 4\pi f(\mathbf{x}', t') G + \frac{1}{c^2} \left(G \frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} - \psi \frac{\partial^2 G}{\partial t'^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Первый член в (6.68) дает $4\pi\psi(\mathbf{x}, t)$, второй представляет собой частное решение (6.66). После интегрирования по частям по времени оставшихся двух членов получим

$$\begin{aligned} \text{LH} = & 4\pi\psi(\mathbf{x}, t) - 4\pi \int_{t_0}^{t_1} dt' \int_V d^3x' f(\mathbf{x}', t') G + \\ & + \frac{1}{c^2} \int_V d^3x' \left(G \frac{\partial \psi}{\partial t'} - \psi \frac{\partial G}{\partial t'} \right) \Big|_{t'=t_0}^{t'=t_1}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Так как $G = 0$ при $t' = t_1 > t$, то при подстановке верхнего предела получаем нуль. Комбинируя (6.69) и (6.67), приходим к интегральному представлению для $\psi(\mathbf{x}, t)$ внутри объема V , ограниченного поверхностью S , для моментов времени $t > t_0$:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) = & \int_V d^3x' \frac{[f(\mathbf{x}', t')]_{\text{запазд}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{4\pi c^2} \int_V d^3x' \left(G \frac{\partial \psi}{\partial t'} - \psi \frac{\partial G}{\partial t'} \right) \Big|_{t'=t_0} + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} dt' \oint_S da' \left(G \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial G}{\partial n'} \right). \end{aligned} \quad (6.70)$$

Мы написали первый член в (6.70) в обычной форме (6.66), воспользовавшись явным выражением (6.64) для функции G . Далее мы преобразуем так же и остальные члены.

Рассмотрим сначала для простоты задачу с начальными условиями для бесконечной области, считая ψ и $\partial\psi/\partial t$ заданными функциями координат при $t = t_0 = 0$:

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = F(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = D(\mathbf{x}). \quad (6.71)$$

При этом поверхностный интеграл в (6.70) можно опустить. Для упрощения обозначений примем точку наблюдения за начало

координат и введем сферические координаты. Тогда

$$\begin{aligned} \psi(0, t) = & \int d\Omega' \int_0^{\infty} r' dr' f\left(r', \Omega', t' = t - \frac{r'}{c}\right) + \\ & + \frac{1}{4\pi c^2} \int d\Omega' \int_0^{\infty} r' dr' \left[D(r', \Omega') \delta\left(t - \frac{r'}{c}\right) - \right. \\ & \left. - F(r', \Omega') \frac{\partial}{\partial t'} \delta\left(t' + \frac{r'}{c} - t\right) \Big|_{t'=0} \right]. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Производную от δ -функции можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t'} \delta\left(t' + \frac{r'}{c} - t\right) \Big|_{t'=0} = c^2 \delta'(r' - ct).$$

С учетом свойств δ -функции, приведенных в гл. 1, § 2, выражение (6.72) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \psi(0, t) = & \int d\Omega' \int_0^{\infty} r' dr' f\left(r', \Omega', t' = t - \frac{r'}{c}\right) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \left[tD(ct, \Omega') + \frac{\partial}{\partial t} (tF(ct, \Omega')) \right]. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Полученное выражение называется *решением Пуассона* задачи с начальными условиями. В отсутствие источников ($f = 0$) поле в начале координат в момент t зависит только от величины начальных полей в точках на расстоянии ct от начала координат.

Задачи с начальными условиями для волнового уравнения подробно исследованы для случая одного, двух, трех и большего числа измерений. Мы отсылаем читателя к книге Морса и Фешбаха [77] или к книге Адамара [47], где изложение является более математическим.

Теперь получим из (6.70) так называемое интегральное представление Кирхгофа для поля внутри объема V через значение ψ и ее производных на граничной поверхности S . Предположим теперь, что внутри V нет источников и начальные значения ψ и $\partial\psi/\partial t$ равны нулю [вместо этого мы могли бы предположить, что начальный момент времени отодвинут столь далеко в прошлое, что решение (6.73), соответствующее начальным значениям, уже не сказывается на поле внутри объема V]. Тогда поле внутри V определится выражением

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} dt' \oint_S da' \left(G \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial G}{\partial n'} \right). \quad (6.74)$$

Учитывая (6.64), мы можем вычислить $\partial G / \partial n'$

$$\begin{aligned} \text{grad}' G &= \frac{\partial G}{\partial R} \text{grad}' R = -\frac{\mathbf{R}}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\delta \left(t' + \frac{R}{c} - t \right)}{R} \right] = \\ &= -\frac{\mathbf{R}}{R} \left\{ -\frac{\delta \left(t' + \frac{R}{c} - t \right)}{R^2} + \frac{\delta' \left(t' + \frac{R}{c} - t \right)}{cR} \right\}. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Член с производной от δ -функции можно проинтегрировать по времени t' по частям. В результате интегральное представление Кирхгофа запишется в виде

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \oint_S \mathbf{n} \cdot \left[\frac{\text{grad}' \psi(\mathbf{x}', t')}{R} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \psi(\mathbf{x}', t') - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathbf{R}}{cR^2} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \right]_{\text{запазд}} da', \end{aligned} \quad (6.76)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, а \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности S . Подчеркнем, что (6.76) *не является* решением, а дает только интегральное представление поля ψ через его значение и значение его производных по координатам и по времени на поверхности S . Последние не могут быть выбраны произвольно и определяются только путем решения соответствующей граничной задачи Коши.

Интеграл Кирхгофа (6.76) является математическим выражением принципа Гюйгенса и служит исходным пунктом при рассмотрении задач дифракции. Подробно дифракция будет рассмотрена в гл. 9, § 5 и далее.

§ 8. Теорема Пойнтинга

Для теории электромагнитных полей важное значение имеет формулировка законов сохранения энергии и импульса. Мы начнем с рассмотрения закона сохранения энергии, который часто называют *теоремой Пойнтинга* (1884 г.). Работа, совершаемая электромагнитным полем \mathbf{E} , \mathbf{B} в единицу времени над отдельным зарядом q , равна $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$, где \mathbf{v} — скорость заряда. Магнитное поле работы не совершает, поскольку магнитная сила перпендикулярна скорости. При непрерывном распределении зарядов и токов полная работа, совершаемая полем в объеме V в единицу времени, равна

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x. \quad (6.77)$$

Это выражение определяет скорость превращения электромагнитной энергии в механическую или тепловую. Очевидно, с такой же скоростью уменьшается энергия электромагнитного поля

внутри объема V . Чтобы найти этот закон сохранения в явном виде, преобразуем выражение (6.77) с помощью уравнений Максвелла. Для исключения \mathbf{J} воспользуемся законом Ампера — Максвелла:

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[c\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] d^3x. \quad (6.78)$$

Учитывая векторное тождество

$$\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}$$

и закон Фарадея, преобразуем правую часть (6.78) к виду

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x = -\frac{1}{4\pi} \int_V \left[c \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] d^3x. \quad (6.79)$$

Для дальнейшего необходимо сделать два допущения. Первое из них не имеет существенного значения и делается только для простоты. Будем предполагать, что макроскопическая среда обладает *линейными* электрическими и магнитными свойствами. Тогда два члена в (6.79), содержащие производные по времени, можно в соответствии с (4.92) и (6.16) интерпретировать как производные по времени от плотностей электростатической и магнитной энергий. Теперь мы сделаем второе предположение, а именно будем считать, что сумма выражений (4.92) и (6.16) представляет собой полную электромагнитную энергию также и в случае переменных во времени полей. Если плотность полной энергии поля обозначить через

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}), \quad (6.80)$$

то (6.79) переписется в виде

$$-\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x = \int_V \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{4\pi} \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right] d^3x. \quad (6.81)$$

Поскольку объем V произволен, это соотношение можно представить в форме дифференциального закона сохранения, или уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (6.82)$$

Вектор \mathbf{S} , определяющий поток энергии, называется *вектором Пойнтинга*. Он равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (6.83)$$

и имеет размерность энергия/(площадь \times время). Так как в законе сохранения фигурирует только дивергенция этого вектора, к вектору Пойнтинга можно прибавить ротор произвольного вектора поля. Однако этот добавочный член не приводит ни к каким физи-

ческим следствиям, и поэтому обычно используется частная форма (6.83).

Физический смысл интегральной или дифференциальной формы законов (6.81) или (6.82) заключается в том, что скорость возрастания электромагнитной энергии внутри некоторого объема в сумме с энергией, вытекающей за единицу времени через поверхность, ограничивающую этот объем, равна взятой со знаком минус полной работе, совершаемой полем над источниками внутри данного объема. Соотношения (6.81) и (6.82) выражают закон сохранения энергии. Если имеются нелинейные эффекты, такие, как гистерезис в ферромагнитных материалах, то простая форма закона сохранения (6.82) неприменима и необходимо добавить соответствующие члены, учитывающие потери на гистерезис.

§ 9. Законы сохранения для системы заряженных частиц и электромагнитных полей

Из выражений (6.81) и (6.82) для теоремы Пойнтинга видна существенная роль понятия энергии электромагнитного поля. Работа $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$, совершаемая полем в единичном объеме за единицу времени, определяет количество электромагнитной энергии, перешедшей в механическую или тепловую. Так как материя состоит в конце концов из заряженных частиц (электронов и атомных ядер), мы можем считать, что скорость передачи энергии является скоростью возрастания энергии заряженных частиц в единице объема. Таким образом, мы можем интерпретировать теорему Пойнтинга для микроскопических полей как выражение закона сохранения энергии для комбинированной системы частиц и полей. Если мы обозначим общую энергию частиц внутри объема V через $E_{\text{мех}}$ и предположим, что частицы не выходят из этого объема, то, очевидно,

$$\frac{dE_{\text{мех}}}{dt} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x. \quad (6.84)$$

Таким образом, теорема Пойнтинга выражает закон сохранения энергии для комбинированной системы

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} (E_{\text{мех}} + E_{\text{полев}}) = - \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} da, \quad (6.85)$$

где полная энергия поля внутри V равна

$$E_{\text{полев}} = \int_V u d^3x = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3x. \quad (6.86)$$

Аналогично можно рассмотреть и закон сохранения импульса. Мы знаем, что сила, действующая на заряд q во внешнем поле \mathbf{E} , равна $q\mathbf{E}$. Из основного соотношения (5.12) для сил, действующих на токи, мы можем заключить, что внешнее магнитное поле \mathbf{B} действует на заряд q , движущийся со скоростью \mathbf{v} , с силой $(q/c)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Отсюда полная сила, с которой электромагнитное поле действует на заряженную частицу, равна

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (6.87)$$

Она называется *силой Лоренца*. Мы вывели выражение (6.87) из соотношений для постоянных полей, но оно экспериментально подтверждено для произвольных полей и для частиц с произвольно большими скоростями.

Согласно второму закону Ньютона, скорость изменения импульса частицы равна

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (6.88)$$

Если обозначить сумму импульсов всех частиц в объеме V через $\mathbf{P}_{\text{мех}}$, то мы можем написать

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{мех}}}{dt} = \int_V \left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right) d^3x. \quad (6.89)$$

Для удобства вычислений мы заменили сумму по частицам на интеграл по плотностям заряда и тока. Дискретный характер распределения зарядов можно восстановить в любой момент, вводя δ -функцию аналогично гл. 1, § 2. Так же как и при выводе теоремы Пойнтинга, мы исключим ρ и \mathbf{J} из (6.89) с помощью уравнений Максвелла:

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}, \quad \mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \left(\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (6.90)$$

Отметим, что в (6.90) входят \mathbf{E} и \mathbf{B} , а не \mathbf{H} и \mathbf{D} . Это обусловлено тем, что, как уже указывалось выше, мы отнесли энергию зарядов к механической части энергии системы и поэтому пользуемся микроскопическими уравнениями, которые содержат только \mathbf{E} и \mathbf{B} . В следующем параграфе будут сделаны некоторые замечания об особенностях подхода, при котором энергия и импульс отдельных частиц, а именно связанных атомов, включаются в «полевую» энергию и импульс через диэлектрическую и магнитную проницаемости (см. также задачу 6.8).

Подставляя (6.90) в (6.89), представим подинтегральное выражение в виде

$$\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} \right). \quad (6.91)$$

Воспользуемся соотношением

$$\mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

и добавим в скобках в (6.91) член $\mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} \equiv 0$; тогда

$$\begin{aligned} \rho E + \frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) - \\ - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (6.92)$$

Для скорости изменения механического импульса можно теперь написать вместо (6.89) соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_{\text{мех}}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} d^3x = \frac{1}{4\pi} \int_V (\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} + \\ + \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) d^3x. \end{aligned} \quad (6.93)$$

Естественно отождествить объемный интеграл, стоящий в левой части равенства, с полным электромагнитным импульсом $\mathbf{P}_{\text{полев}}$ в объеме V :

$$\mathbf{P}_{\text{полев}} = \frac{1}{4\pi c} \int_V (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d^3x. \quad (6.94)$$

Подынтегральное выражение можно интерпретировать как плотность электромагнитного импульса. Заметим, что плотность импульса пропорциональна плотности потока энергии \mathbf{S} с коэффициентом пропорциональности c^{-2} .

Чтобы окончательно убедиться в том, что объемный интеграл от $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})/4\pi c$ можно отождествить с электромагнитным импульсом и представить (6.93) в форме закона сохранения импульса, мы должны преобразовать объемный интеграл в правой части (6.93) в поверхностный интеграл от нормальной составляющей некоторой величины, которую можно интерпретировать как поток импульса.

Подынтегральное выражение в (6.93), очевидно, имеет векторный характер. Поэтому если его можно представить как дивергенцию некоторой величины, то эта величина должна быть тензором второго ранга. Вместо того чтобы перейти к прямоугольным декартовым составляющим импульса, можно рассматривать тензоры, оставаясь в рамках векторных операций, если ввести соответствующие *диадные* обозначения. Если обозначить трехмерный тензор через T_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), а единичные базисные векторы вдоль координатных осей — через \mathbf{e}_i , то в диадном обозначении тензор T_{ij}

будет иметь вид ¹⁾

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}_i T_{ij} \mathbf{e}_j. \quad (6.95)$$

Стоящий слева от T_{ij} единичный вектор может образовывать скалярные или векторные произведения только при умножении слева, вектор, стоящий справа,— только при умножении справа. При заданной диаде компоненты тензора определяются как скалярные произведения

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e}_j. \quad (6.96)$$

Обозначим через $\overleftrightarrow{\mathbf{I}}$ диаду, соответствующую единичному тензору второго ранга:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{I}} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \quad (6.97)$$

Скалярное произведение произвольного вектора или векторного оператора на $\overleftrightarrow{\mathbf{I}}$ слева или справа равно этому же вектору.

После этих беглых замечаний о свойствах диад вернемся теперь к векторным преобразованиям, необходимым для приведения объемного интеграла в правой части (6.93) к поверхностному. Используя векторное тождество

$$\frac{1}{2} \text{grad} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{B},$$

мы можем записать члены, содержащие \mathbf{B} , в виде

$$\mathbf{B} \text{ div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{B} = \mathbf{B} \text{ div} \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \text{grad} B^2. \quad (6.98)$$

Последнее выражение можно представить в виде дивергенции от диады

$$\mathbf{B} \text{ div} \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \text{grad} B^2 = \text{div} \left(\mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} \overleftrightarrow{\mathbf{I}} B^2 \right). \quad (6.99)$$

Аналогично преобразуются члены, содержащие электрическое поле в (6.93). Следовательно, закон сохранения импульса принимает вид

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{\text{мех}} + \mathbf{P}_{\text{полев}}) = \int_V \text{div} \overleftrightarrow{\mathbf{T}} d^3x = \oint_S \mathbf{n} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} da. \quad (6.100)$$

¹⁾ Диадные обозначения мало распространены в нашей литературе. Произвольный тензор второго ранга может быть представлен как сумма n диад (внешних произведений векторов), где n — число измерений. Если разложить векторы, образующие диады, по единичным векторам системы координат, то мы придем к представлению (6.95). Оно удобно в том отношении, что умножение тензора (6.95) на вектор слева или справа сводится к скалярному (внутреннему) перемножению векторов.— *Прим. ред.*

Тензор-диада $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$, называемый *максвелловским тензором натяжений*, равен

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \frac{1}{4\pi} \left[\mathbf{E}\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2} \overleftrightarrow{\mathbf{I}} (E^2 + B^2) \right]. \quad (6.101)$$

Элементы этого тензора равны

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + B^2) \right]. \quad (6.102)$$

Очевидно, $(-\mathbf{n} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}})$ в уравнении (6.100) представляет собой нормальный к поверхности поток импульса через единичную площадь из объема V сквозь поверхность S . Иными словами, $(-\mathbf{n} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}})$ — это сила, действующая на единичную площадку поверхности S . Это соотношение можно использовать для расчета сил, действующих на материальные тела в электромагнитном поле, если окружить эти тела граничной поверхностью S и подсчитать полную действующую на поверхность силу, определяемую правой частью уравнения (6.100).

Сохранение момента количества движения комбинированной системы частиц и полей можно рассмотреть таким же образом, как и сохранение энергии и импульса. Соответствующие расчеты предлагается выполнить читателю (см. задачу 6.9).

§ 10. Макроскопические уравнения

Хотя в большей части главы уравнения электродинамики записаны в макроскопической форме, читатель помнит, что вывод макроскопических уравнений из микроскопических был проведен отдельно для *электростатики* и *магнетостатики* в гл. 4, § 3 и в гл. 5, § 8. В связи с этим возникает вопрос о применимости этих уравнений для переменных во времени полей. Применимость этих уравнений представляется интуитивно очевидной, поскольку добавление максвелловского тока смещения было сделано на макроскопическом уровне. Тем не менее полезно непосредственно получить макроскопические уравнения из микроскопических и, в частности, проследить, как изменение во времени поляризации \mathbf{P} порождает распределение токов и приводит к превращению микроскопического тока смещения $\partial\mathbf{E}/\partial t$ в макроскопический ток смещения $\partial\mathbf{D}/\partial t$.

Основное допущение, которое было принято в наших предыдущих рассмотрениях, заключается в том, что макроскопические поля \mathbf{E} и \mathbf{B} , удовлетворяющие двум однородным уравнениям Мак-

свелла (6.28), являются средними значениями соответствующих микроскопических полей ϵ и β :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \langle \epsilon \rangle, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \langle \beta \rangle. \quad (6.103)$$

Под средним значением теперь мы должны подразумевать результат усреднения как по пространству, так и по времени, например

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{\Delta V \Delta T} \int d^3 \xi \int d\tau \epsilon(\mathbf{x} + \xi, t + \tau), \quad (6.104)$$

где объем ΔV и интервал времени ΔT малы по сравнению с соответствующими макроскопическими величинами.

Из соотношений (6.103) следует, что макроскопические потенциалы Φ и \mathbf{A} являются средними значениями соответствующих микроскопических величин

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \langle \varphi \rangle, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{a} \rangle, \quad (6.105)$$

поскольку поля \mathbf{E} и \mathbf{B} (или ϵ и β) получаются из них дифференцированием, согласно (6.29) и (6.31).

Чтобы выразить усредненные потенциалы через молекулярные характеристики, необходимо произвести точно такой же расчет, как в гл. 4, § 3, и гл. 5, § 8, за исключением двух моментов. Во-первых, в соответствии с проведенным в § 6 анализом решения волнового уравнения мы должны пользоваться «запаздывающими» потенциалами. Поэтому те же рассуждения, которые приводили к (4.33), приводят теперь к усредненному скалярному потенциалу

$$\begin{aligned} \langle \varphi \rangle = & \int N(\mathbf{x}') \times \\ & \times \left[\frac{\langle e_{\text{мол}}(\mathbf{x}', t') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \langle \mathbf{p}_{\text{мол}}(\mathbf{x}', t') \rangle \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right]_{\text{запазд}} d^3 x'. \end{aligned} \quad (6.106)$$

К этому выражению надо прибавить запаздывающий потенциал, обусловленный избыточными свободными зарядами $q_{\text{св}}$. Второе изменение касается векторного потенциала. В стационарном случае обусловленный молекулами вклад в векторный потенциал был суммой членов типа потенциала магнитных диполей (5.75). Главные члены в разложениях были равны нулю в силу условия $\text{div } \mathbf{J} = 0$, которое для переменных полей уже несправедливо. Если проследить рассуждения вплоть до соотношения (5.51), то можно убедиться, что главный член в выражении для $\mathbf{a}_{\text{мол}}$ равен

$$\mathbf{a}_{\text{мол}} = \frac{1}{c |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} \int \mathbf{J}_{\text{мол}}(\mathbf{x}', t') d^3 x' + \text{Дипольн. члены (5.75)} + \dots \quad (6.107)$$

Для простоты мы временно опускаем индексы, указывающие на запаздывание. С помощью тождества $\text{div}'(x'_i \mathbf{J}) = J_i + x_i \text{div}' \mathbf{J}$ пер-

вый член преобразуется к виду

$$\mathbf{a}_{\text{мол}} = -\frac{1}{c|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|} \int \mathbf{x}' \operatorname{div}' \mathbf{J}_{\text{мол}} d^3x' + \text{Дипольн. члены (5.75)} + \dots \quad (6.108)$$

Используем далее уравнение непрерывности $\operatorname{div}' \mathbf{J}_{\text{мол}} = -\partial \rho_{\text{мол}} / \partial t'$ и определение молекулярного электрического дипольного момента (4.25). Тогда (6.108) дает

$$\mathbf{a}_{\text{мол}}(\mathbf{x}, t) \approx \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{p}_j(t')}{\partial t'} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|} + \frac{\mathbf{m}_j(t') \times (\mathbf{x}-\mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|^3} \right]_{\text{запазд}} \quad (6.109)$$

В случае переменных полей главный член оказывается пропорциональным скорости изменения электрического дипольного момента¹⁾. Суммируя по всем молекулам и производя усреднение в соответствии с (6.104), получаем средний микроскопический векторный потенциал

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{1}{c} \int N(\mathbf{x}') \left[\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \frac{\partial}{\partial t'} \langle \mathbf{p}_{\text{мол}}(\mathbf{x}', t') \rangle + c \langle \mathbf{m}_{\text{мол}}(\mathbf{x}', t') \rangle \times \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right]_{\text{запазд}} d^3x'. \quad (6.110)$$

Сюда следует добавить обычное выражение для потенциала макроскопического тока проводимости с плотностью $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$.

Решения (6.106) и (6.110) с добавлением потенциалов, создаваемых свободными зарядами и токами проводимости, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle \varphi \rangle &= \int \left[\frac{\langle \rho \rangle}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right]_{\text{запазд}} d^3x', \\ \langle \mathbf{a} \rangle &= \frac{1}{c} \int \left[\frac{\langle \mathbf{J} \rangle}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right]_{\text{запазд}} d^3x'. \end{aligned} \quad (6.111)$$

Входящие сюда усредненные заряды и токи следующим образом зависят от макроскопических векторов поляризации \mathbf{P} и намагниченности \mathbf{M} , определенных соотношениями (4.36) и (5.77):

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= \rho - \operatorname{div} \mathbf{P}, \\ \langle \mathbf{J} \rangle &= \mathbf{J} + c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (6.112)$$

где ρ и \mathbf{J} — макроскопические плотности заряда и тока.

Теперь, наконец, мы в состоянии непосредственно вывести макроскопические уравнения Максвелла из микроскопических. Однородные уравнения Максвелла вытекают непосредственно из

¹⁾ В действительности в случае переменных полей появляется не только главный член, но из второго слагаемого в (5.51) возникает также член, равный $(1/c) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \cdot \operatorname{grad}' (1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)$, где \mathbf{Q} — квадрупольная диада молекулы. Поскольку мы удерживаем в (6.106) только дипольные члены, здесь этот квадрупольный член опущен.

определений (6.103). Переходя к неоднородным уравнениям, рассмотрим микроскопическую форму закона Ампера

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\beta} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t}. \quad (6.113)$$

Усредняя обе части равенства и используя выражение (6.112) для $\langle \mathbf{J} \rangle$, мы получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{J} + c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6.114)$$

Так как, согласно определению, $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ и $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, то мы приходим к искомому соотношению

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (6.115)$$

Другое уравнение $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$ выводится аналогичным образом из (6.112).

В заключение анализа макроскопических уравнений поля рассмотрим различие между микроскопической и макроскопической формами теоремы Пойнтинга. В § 8 мы получили макроскопическую форму (6.81) закона сохранения энергии. Записанный явно через поля, он имеет вид

$$\frac{c}{4\pi} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} da + \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d^3x = - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d^3x. \quad (6.116)$$

Чтобы понять смысл входящих сюда сочетаний полей \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} , следует установить связь с микроскопической формой теоремы Пойнтинга. Это проще всего сделать, выразив левую часть (6.116) через основные поля \mathbf{E} и \mathbf{B} . Легко видеть, что (6.116) примет при этом вид

$$\begin{aligned} \frac{c}{4\pi} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} da + \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d^3x = \\ = - \int_V \mathbf{E} \cdot \left(\mathbf{J} + c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) d^3x. \end{aligned} \quad (6.117)$$

Из соотношений (6.112) следует, что соотношение (6.117) представляет собой аналог теоремы Пойнтинга для микроскопических полей, в котором каждая величина заменена на свое среднее значение. Оно *не является* простым результатом усреднения теоремы Пойнтинга для микроскопических полей, отличаясь рядом членов, которые выражают сохранение энергии флуктуирующих полей, представляющих собой мгновенные отклонения $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\beta}$ от \mathbf{E} и \mathbf{B} . Если не рассматривать эти флуктуирующие поля, мы можем интерпретировать соотношение (6.117) следующим образом.

Будем относить заряды и токи, создаваемые электронами, движущимися внутри молекул, так же как и токи проводимости,

к внешним источникам. Тогда теорема Пойнтинга должна относиться к основным полям \mathbf{E} и \mathbf{B} и содержать работу, совершаемую электрическим полем в единицу времени над *всеми* токами. Если трактовать работу, совершаемую над эффективным молекулярным током $d\mathbf{P}/dt + c \operatorname{rot} \mathbf{M}$, как энергию, содержащуюся или распространяющуюся в среде, то мы можем перенести соответствующий член в левую часть (6.117) и включить его в члены для плотности энергии и потока энергии в среде. Таким образом, мы опять приходим к макроскопической форме теоремы Пойнтинга (6.116), где явно выделена только работа электрического поля над токами проводимости. Энергию, связанную с эффективным молекулярным током, естественно включать в энергию поля, так как она представляет собой характеристику среды и в действительности является *запасенной* энергией (т. е. реактивной мощностью), которая в среднем не испытывает диссипации (последнее не верно для магнитных сред при наличии гистерезисных эффектов). Напротив, мощность, связанная с токами проводимости, диссипирует: электрическая энергия превращается в механическую.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Законы сохранения энергии и импульса для электромагнитных полей рассматриваются почти во всех учебниках. Хорошее изложение вопроса об энергии квазистационарных токов и силах, действующих на контуры с током, дано в книге Пановского и Филипс [78], гл. 10, где использован подход, отличный от нашего. В книге Стрэттона [106], гл. 2, подробно рассмотрен тензор максвелловских напряжений с точки зрения сил, действующих на жидкости и твердые тела. Общее рассмотрение законов сохранения, а также теория квазистационарных токов, расчет индуктивностей и сил очень ясно изложены в книге Абрагама и Беккера [1], гл. 8 и 9.

Расчет индуктивностей и теория цепей имеются также в книге Смайта [100], гл. 8—10, и во многих технических учебниках. Опущенные в нашей книге разделы о токах Фуко и индуктивном нагреве рассмотрены с многочисленными примерами в книге Смайта [100], гл. 11.

Основным математическим содержанием этой главы является анализ волнового уравнения. Задачи с начальными условиями для одного, двух, трех и большего числа измерений рассматриваются в книге Морса и Фешбаха [77] и в более математической форме в книге Адамара [47].

Дополнение редактора. Физические основы теории переменных полей хорошо изложены в книге Тамма [130].

ЗАДАЧИ

6.1. а) Показать, что полная энергия системы взаимодействующих элементов тока в магнитном поле в свободном пространстве равна

$$W = \frac{1}{2c^2} \int d^3x \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ — плотность тока.

б) Пусть имеется n контуров с токами I_1, I_2, \dots, I_n . Показать, что их энергия выражается формулой

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_i I_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i=1}^n M_{ij} I_i I_j.$$

Написать интегральное выражение для самоиндукции L_i и взаимоиנדукции M_{ij} .

6.2. Двухпроводная линия передачи состоит из пары немагнитных параллельных проводов с радиусами a и b , расположенных на расстоянии $d > (a + b)$. Токи текут по этим проводам в противоположные стороны и равномерно распределены по сечению проводов. Показать, что самоиндукция на единицу длины определяется соотношением

$$c^2 L = 1 + 2 \ln \frac{d^2}{ab}.$$

6.3. Контур представляет собой тонкую проводящую оболочку радиусом a и параллельный ей внутренний обратный провод радиусом b . Предполагая распределение тока однородным по поперечному сечению провода, рассчитать самоиндукцию на единицу длины. Какова будет самоиндукция, если внутренний проводник является тонкой поллой трубкой?

6.4. Показать, что взаимоиנדукция двух круглых коаксиальных витков в однородной среде с магнитной проницаемостью μ равна

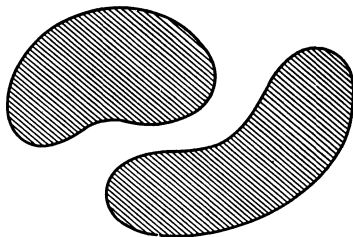
$$M_{12} = \frac{4\pi\mu}{c^2} \sqrt{ab} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right],$$

где

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + d^2};$$

здесь a и b — радиусы витков, d — расстояние между их центрами, а K и E — полные эллиптические интегралы.

Получить предельное выражение для случая, когда $d \ll |a$ и $a \approx b$.



Ф и г. 6.5.

6.5. Линия передачи состоит из двух параллельных идеальных проводников произвольного, но постоянного поперечного сечения (фиг. 6.5). Ток течет по одному из этих проводников и возвращается по другому.

Показать, что произведение индуктивности единицы длины на емкость единицы длины равно

$$LC = \frac{\mu\epsilon}{c^2},$$

где μ и ϵ — магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, окружающей проводники, а c — скорость света в свободном пространстве.

6.6. Доказать, что произвольный вектор \mathbf{F} можно разложить на поперечную и продольную составляющие

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t,$$

такие, что $\operatorname{div} \mathbf{F}_t = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{F}_l = 0$; при этом \mathbf{F}_l и \mathbf{F}_t определяются выражениями (6.49) и (6.50).

6.7. а) Показать, что одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

имеет общее решение

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} f\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{1}{2} f\left(t + \frac{x}{c}\right) + \frac{c}{2} \int_{t-(x/c)}^{t+(x/c)} F(t') dt'$$

для граничных условий, при которых величины ψ и $\partial\psi/\partial x$ считаются заданными при $x = 0$ для произвольного времени t :

$$\psi(0, t) = f(t), \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}(0, t) = F(t).$$

б) Найти соответствующее решение для граничных условий, заданных при $t = 0$:

$$\psi(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}(x, 0) = g(x).$$

6.8. Рассмотреть закон сохранения энергии и импульса для макроскопической системы источников и электромагнитных полей в среде, описываемой диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ . Показать, что плотность энергии, вектор Пойнтинга, плотность импульса поля и максвелловский тензор натяжений даются выражениями:

$$u = \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + \mu H^2),$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}),$$

$$\mathbf{g} = \frac{\mu\epsilon}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}),$$

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[\epsilon E_i E_j + \mu H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\epsilon E^2 + \mu H^2) \right].$$

Что изменится, если ϵ и μ будут зависеть от пространственных координат?

6.9. В тех же предположениях, что и в задаче 6.8, рассмотреть закон сохранения момента количества движения. Показать, что дифференциаль-

ная и интегральная формы закона сохранения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{L}_{\text{мех}} + \mathcal{L}_{\text{полев}}) + \text{div} \vec{\mathbf{M}} = 0$$

и

$$\frac{d}{dt} \int_V (\mathcal{L}_{\text{мех}} + \mathcal{L}_{\text{полев}}) d^3x + \int_S \mathbf{n} \cdot \vec{\mathbf{M}} da = 0,$$

где плотность момента количества движения электромагнитного поля есть

$$\mathcal{L}_{\text{полев}} = \mathbf{x} \times \mathbf{g} = \frac{\mu\epsilon}{4\pi c} \mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H}),$$

а поток момента количества движения поля описывается тензором

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{T}} \times \mathbf{x}.$$

Замечание. $\vec{\mathbf{M}}$ можно записать в виде тензора третьего ранга, $M_{ijk} = T_{ijx_k} - T_{ikx_j}$. Он антисимметричен по индексам j и k и поэтому имеет всего три независимых компонента. С учетом индекса i тензор M_{ijk} имеет девять компонент и может быть представлен как псевдотензор второго ранга, как это и сделано выше.

6.10. Плоская волна падает нормально на полностью поглощающий плоский экран.

а) Используя закон сохранения импульса, показать, что давление (так называемое радиационное давление), действующее на экран, равно энергии поля в единице объема.

б) Вблизи Земли поток электромагнитной энергии от Солнца приблизительно равен $0,14 \text{ вт/см}^2$. Пусть межпланетный «парусный корабль» имеет парус с массой 10^{-4} г на 1 см^2 его площади и пренебрежимо малый вес остальной части. Каково будет максимальное ускорение в см/сек^2 , обусловленное давлением солнечного излучения? Сравнить с ускорением, обусловленным солнечным «ветром» (корпускулярной радиацией).

6.11. Циркулярно поляризованная волна, распространяющаяся в z -направлении, имеет конечную протяженность в x - и y -направлениях. Предполагая, что амплитуда изменяется медленно (ширина фронта много больше длины волны), показать, что электрическое и магнитное поля приближенно выражаются формулами

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) \approx \left[E_0(x, y) (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) + \frac{i}{k} \left(\frac{\partial E_0}{\partial x} \pm i \frac{\partial E_0}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3 \right] e^{ikz - i\omega t},$$

$$\mathbf{B} \approx \mp i \sqrt{\mu\epsilon} \mathbf{E},$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — единичные векторы по осям x, y и z .

6.12. Для циркулярно поляризованной волны, рассмотренной в задаче 6.11, рассчитать среднюю по времени составляющую момента количества движения, параллельную направлению распространения. Показать, что отношение этой составляющей момента количества движения к энергии волны равно

$$\frac{L_3}{U} = \pm \omega^{-1}.$$

Объяснить этот результат с точки зрения представления о световых квантах (фотонах). Показать, что для цилиндрически симметричной ограниченной плоской волны поперечные составляющие момента количества движения равны нулю.

ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Предметом настоящей главы являются плоские волны в неограниченном или полугограниченном пространстве. В первую очередь будут рассмотрены основные свойства плоских волн в непроводящей среде — их поперечная природа и различные типы поляризации. Затем описывается поведение одномерных волновых пакетов, вводятся понятия групповой скорости и дисперсии. Исследуется преломление и отражение волн от плоской границы раздела двух диэлектриков. Далее рассматриваются плоские волны в проводящей среде и анализируется простейшая модель электропроводности. Затем эта модель видоизменяется так, чтобы ее можно было применить к разреженной плазме или электронному газу, и рассматривается распространение поперечных волн в плазме, находящейся во внешнем статическом магнитном поле.

§ 1. Плоские волны в непроводящей среде

Характерной особенностью уравнений Максвелла для электромагнитного поля является существование решений в виде распространяющихся волн, несущих с собою энергию. Простейшим и вместе с тем наиболее важным случаем электромагнитных волн являются поперечные плоские волны. Прежде всего рассмотрим, как получаются такие решения в непроводящей среде, описываемой постоянными диэлектрической и магнитной проницаемостями. Уравнения Максвелла в неограниченном пространстве без источников имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\mu \varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где параметры μ , ε — характеристики среды. Комбинируя два содержащих роторы уравнения и учитывая равенство нулю дивергенций, мы легко найдем, что любая декартова составляющая полей \mathbf{E} и \mathbf{B} удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (7.2)$$

где постоянная

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad (7.3)$$

имеющая размерность скорости, является характеристикой среды. Волновое уравнение (7.2) имеет известное решение в виде плоской волны

$$u = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \quad (7.4)$$

где частота ω и модуль волнового вектора \mathbf{k} связаны соотношением

$$k = \frac{\omega}{v} = \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\omega}{c}. \quad (7.5)$$

Если мы рассмотрим волны, распространяющиеся только в одном направлении, скажем в x -направлении, то фундаментальным решением будет

$$u(x, t) = Ae^{ikhx - i\omega t} + Be^{-ikhx - i\omega t}. \quad (7.6)$$

Используя (7.5), мы можем написать

$$u_k(x, t) = Ae^{ik(x-vt)} + Be^{-ik(x+vt)}. \quad (7.7)$$

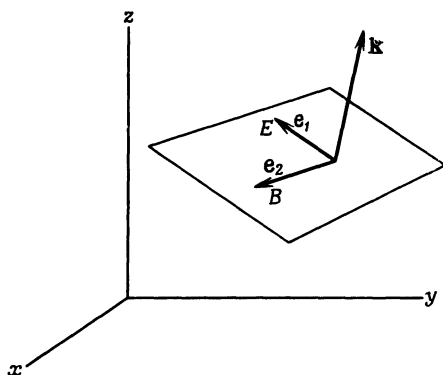
Если v не зависит от k (т. е. рассматривается недиспергирующая среда, для которой $\mu\varepsilon$ не зависит от частоты), то, как мы знаем, из интегральной теоремы Фурье [см. (2.50) и (2.51)] с помощью линейной суперпозиции $u_k(x, t)$ можно построить общее решение вида

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt), \quad (7.8)$$

где f и g — произвольные функции. Легко проверить и непосредственно, что это решение действительно удовлетворяет волновому уравнению (7.2). Оно описывает волны, движущиеся соответственно в положительном и отрицательном направлениях по x со скоростью v , которая называется фазовой скоростью волны. Если же v зависит от k , то ситуация не будет простой — начальные волны $f(x)$ и $g(x)$ уже не распространяются со скоростью v без искажения формы (см. § 3). Однако для каждой частотной компоненты скорость v , определенная равенством (7.3), остается фазовой скоростью.

Плоские волны, определяемые соотношениями (7.4) и (7.5), удовлетворяют скалярному волновому уравнению (7.2). Но нужно еще учесть векторный характер полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла. Принимая условие, что истинные электрическое

Ф и г. 7.1. Волновой вектор \mathbf{k} и два ортогональных вектора поляризации \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 .



и магнитное поля соответствуют действительным частям комплексных величин, будем искать \mathbf{E} и \mathbf{B} в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{e}_1 E_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{e}_2 B_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

где \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 — постоянные единичные векторы, а E_0 и B_0 — комплексные амплитуды, постоянные как в пространстве, так и во времени. Из условий $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ следуют равенства

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (7.10)$$

которые означают, что \mathbf{E} и \mathbf{B} перпендикулярны направлению распространения волны \mathbf{k} . Такие волны называются *поперечными*. Роторные уравнения приводят к дальнейшим ограничениям. Подставляя (7.9) в первое роторное уравнение (7.1), получаем

$$i \left[(\mathbf{k} \times \mathbf{e}_1) E_0 - \frac{\omega}{c} \mathbf{e}_2 B_0 \right] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} = 0. \quad (7.11)$$

Уравнение (7.11) (в действительности это несколько уравнений) имеет решение

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_1}{k}, \quad (7.12)$$

$$B_0 = \sqrt{\mu \varepsilon} E_0. \quad (7.13)$$

Таким образом, \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{k} образуют систему ортогональных векторов, векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} колеблются в фазе и отношение \mathbf{E} к \mathbf{B} постоянно (фиг. 7.1). Волна, описываемая соотношениями (7.9), (7.12)

и (7.13), является поперечной волной, распространяющейся в направлении \mathbf{k} . Соответствующий средний по времени поток энергии определяется действительной частью комплексного вектора Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*. \quad (7.14)$$

Этот поток (энергия, проходящая через единицу площади в единицу времени) равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |E_0|^2 \mathbf{e}_3, \quad (7.15)$$

где \mathbf{e}_3 — единичный вектор в направлении \mathbf{k} .

Средняя по времени плотность энергии равна

$$u = \frac{1}{16\pi} \left(\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* \right), \quad (7.16)$$

откуда следует, что

$$u = \frac{\varepsilon}{8\pi} |E_0|^2. \quad (7.17)$$

Беря отношение абсолютных величин (7.15) и (7.17), мы видим, что скорость потока энергии равна $v = c/\sqrt{\mu\varepsilon}$, что и следовало ожидать согласно (7.8).

§ 2. Линейная и круговая поляризация

В плоской волне (7.9) вектор электрического поля направлен вдоль \mathbf{e}_1 . Такая волна называется линейно поляризованной с вектором поляризации \mathbf{e}_1 .

Для получения общего случая поляризации нам нужна еще одна линейно поляризованная волна, не зависящая от первой. Ясно, что две волны

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{e}_1 E_1 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{e}_2 E_2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \\ \mathbf{V}_j &= \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_j}{k} \quad (j = 1, 2), \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

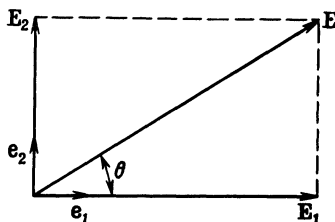
у которых

представляют собой два таких линейно независимых решения. Амплитуды E_1 и E_2 являются комплексными числами, что позволяет ввести разность фаз между обеими волнами. Общее решение для плоской волны, распространяющейся в направлении \mathbf{k} , дается линейной комбинацией \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{e}_1 E_1 + \mathbf{e}_2 E_2) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}. \quad (7.19)$$

Если E_1 и E_2 имеют *одинаковые фазы*, то (7.19) представляет собой *линейно поляризованную* волну с вектором поляризации, направленным под углом $\theta = \text{arctg}(E_2/E_1)$ к оси \mathbf{e}_1 и с амплитудой $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$, как показано на фиг. 7.2.

Ф и г. 7.2. Электрическое поле линейно поляризованной волны.

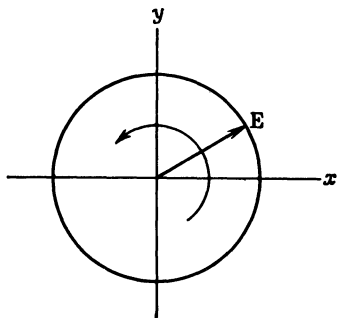


Если же E_1 и E_2 имеют *различные фазы*, то волна (7.19) *эллиптически поляризована*.

Чтобы понять, что это означает, рассмотрим простейший случай *круговой* (или циркулярной) *поляризации*. При этом E_1 и E_2 одинаковы по абсолютной величине, а по фазе отличаются на 90° . Волна (7.19) принимает вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = E_0(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \quad (7.20)$$

где E_0 — ее действительная амплитуда. Пусть оси координат выбраны таким образом, что волна распространяется в положи-



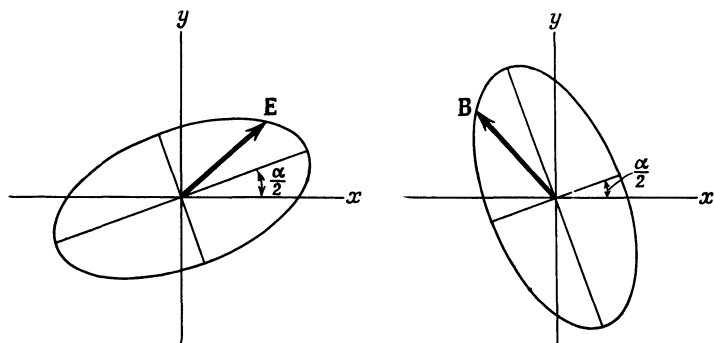
Ф и г. 7.3. Электрическое поле волны с круговой поляризацией.

тельном направлении оси z , если \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 направлены соответственно вдоль осей x и y . Составляющие электрического поля мы получим, беря действительную часть (7.20):

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{x}, t) &= E_0 \cos(kz - \omega t), \\ E_y(\mathbf{x}, t) &= \mp E_0 \sin(kz - \omega t). \end{aligned} \quad (7.21)$$

В любой *фиксированной точке пространства* электрический вектор поля (7.21) имеет постоянную амплитуду, но вращается по кругу с частотой ω , как показано на фиг. 7.3. Верхний знак, $(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2)$,

соответствует вращению против часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего навстречу волне. Эта волна в оптике называется *волной с левой круговой поляризацией*. По терминологии современной физики эта волна, как говорят, имеет *положительную спиральность*. Последний термин представляется более удобным, поскольку в такой волне момент количества движения имеет положительную составляющую по оси z (см. задачу 6.12). При нижнем знаке,



Ф и г. 7.4. Электрическое и магнитное поля в эллиптически поляризованной волне.

($\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2$), если также смотреть навстречу волне, вращение электрического вектора происходит по часовой стрелке; это — волна с правой круговой поляризацией (в оптике), иными словами, она имеет *отрицательную спиральность*.

Две волны с круговой поляризацией (7.20) аналогично линейно поляризованным волнам представляют собой базисную систему для описания общего случая поляризованных волн. Введем комплексные ортогональные единичные векторы

$$\mathbf{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2), \quad (7.22)$$

обладающие следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{e}_{\mp} &= 0, \\ \mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{e}_3 &= 0, \\ \mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{e}_{\pm} &= 1. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Тогда общее представление (7.19) можно записать в эквивалентном виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (E_+ \mathbf{e}_+ + E_- \mathbf{e}_-) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \quad (7.24)$$

где E_+ и E_- — комплексные амплитуды. Если E_+ и E_- различны по модулю, но имеют одинаковые фазы, то (7.24) представляет

собой эллиптически поляризованную волну с главными осями эллипса, расположенными вдоль e_1 и e_2 . Отношение полуосей эллипса равно $(1+r)/(1-r)$, где $r = E_-/E_+$. Если же комплексные амплитуды E_+ и E_- имеют различные фазы, так что $E_-/E_+ = re^{i\alpha}$, то оси эллипса, описываемого вектором \mathbf{E} , повернуты на угол $\alpha/2$. На фиг. 7.4 показан общий случай эллиптической поляризации: в каждой точке пространства векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} описывают эллипсы, изображенные на фиг. 7.4.

При $r = \pm 1$ мы возвращаемся к случаю линейно поляризованных волн.

§ 3. Суперпозиция волн в одном измерении. Групповая скорость

Выше мы нашли решения уравнений Максвелла в виде плоских волн и обсудили их свойства. Мы ограничились рассмотрением только монохроматических волн с заданными частотой и волновым числом. Однако в реальных условиях таких идеализированных волн не существует. Даже самый монохроматический источник света и остронастроенный радиопередатчик дают излучение в конечном (хотя, возможно, и малом) интервале частот или длин волн. Немонохроматичность связана с конечной продолжительностью импульса, с собственной шириной линии в источнике света, а также с множеством других причин. Так как основные уравнения линейны, мы можем в принципе очень просто получить любую линейную суперпозицию решений с различными частотами. В действительности, однако, следует иметь в виду некоторые особенности.

1. В диспергирующей среде (где диэлектрическая проницаемость является функцией частоты поля) волны, имеющие разные частоты, распространяются с различными фазовыми скоростями. В результате изменяются взаимные фазы различных компонент. В частности, это приводит к изменению формы импульса по мере его распространения.

2. Скорость потока энергии в диспергирующей среде может сильно отличаться от фазовой скорости и даже не иметь определенного значения.

3. В среде с поглощением импульс излучения, затухая, не сохраняет своей формы, если поглощение существенно зависит от частоты.

По существу, эти дисперсионные и диссипативные эффекты неявно учитываются в теории рядов и интегралов Фурье (см. гл. 2, § 9). Возьмем для простоты скалярные одномерные волны. Пусть $u(x, t)$ является скалярной функцией, под которой мы можем подразумевать любую из декартовых составляющих электромагнит-

ного поля. Основное решение волнового уравнения (7.2) возьмем в форме (7.6). Связь между частотой ω и волновым числом k электромагнитных волн дается соотношением (7.5). При линейной суперпозиции мы можем принять за независимую переменную либо ω , либо k . Примем сначала за независимую переменную волновое число k . Для учета дисперсии будем считать ω произвольной функцией k

$$\omega = \omega(k). \quad (7.25)$$

Поскольку дисперсионные свойства среды не могут зависеть от направления распространения волны, частота ω должна быть четной функцией k , так что $\omega(-k) = \omega(k)$. Для большинства длин волн ω является медленно меняющейся функцией k . Однако при некоторых частотах имеются области «аномальной дисперсии», где ω меняется быстро в узком интервале длин волн. Последующее рассмотрение, основанное только на общей формуле (7.25), одинаково применимо к электромагнитным волнам, звуковым волнам, волнам де Бройля и т. д. Мы будем пока считать, что k и $\omega(k)$ вещественны, исключив тем самым из рассмотрения диссипативные эффекты.

Из фундаментальных решений (7.6) мы можем построить общее решение в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx - i\omega(k)t} dk. \quad (7.26)$$

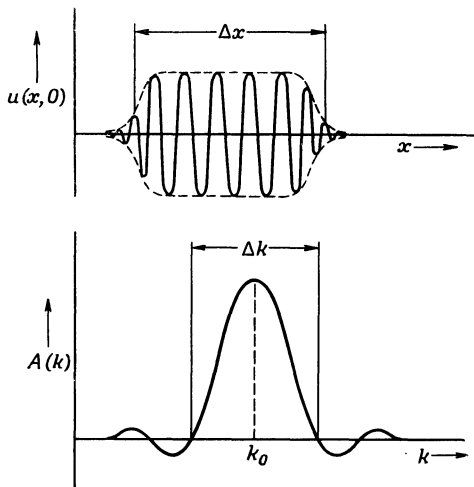
Множитель $1/\sqrt{2\pi}$ введен для согласования с обозначениями теории интегралов Фурье [см. (2.50) и (2.51)]. Амплитуда $A(k)$ описывает свойства линейной суперпозиции различных волн. Она определяется через значение пространственной амплитуды $u(x, t)$ при $t = 0$ ¹⁾ с помощью преобразования

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-ikx} dx. \quad (7.27)$$

Если $u(x, 0)$ представляет собой гармоническую волну $\exp(ik_0x)$ на всей оси x , то из соотношения ортогональности (2.52) следует $A(k) = \sqrt{2\pi} \delta(k - k_0)$, что соответствует монохроматической бегущей волне $u(x, t) = \exp[ik_0x - i\omega(k_0)t]$, как и должно быть. Если же при $t = 0$ функция $u(x, 0)$ представляет собой волновой

¹⁾ В последующем изложении мы не касаемся вопроса о начальных условиях. Для дифференциального уравнения второго порядка мы должны были бы задать не только $u(x, 0)$, но также и $du(x, 0)/dt$. Однако это обстоятельство не повлияет на результаты данного раздела. Оно будет учтено в следующем параграфе.

пакет конечной длины порядка Δx (фиг. 7.5), то амплитуда $A(k)$ уже не будет δ -функцией. Она будет представляться пикообразной функцией с шириной порядка Δk с максимумом вблизи волнового числа k_0 , являющегося основным волновым числом модулированной волны $u(x, 0)$. Если обозначить через Δx и Δk среднеквадра-



Ф и г. 7.5. Синусоидальный волновой пакет конечной протяженности и его фурье-спектр.

точные отклонения величин x и k [определенные через интенсивности $|u(x, 0)|^2$ и $|A(k)|^2$], то для них можно вывести общее соотношение

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}. \quad (7.28)$$

Читатель может легко убедиться, что обычно для импульсов или волновых пакетов, не слишком быстро обрывающихся по краям, произведение Δx на Δk близко к предельной величине $1/2$. Это означает, что короткому отрезку волны всего лишь в несколько длин волн соответствует широкое распределение волновых чисел, и наоборот, «длинная» синусоидальная волна почти монохроматична. Соотношение (7.28) в равной мере применимо к отклонениям времени и частоты.

Рассмотрим теперь изменение во времени импульса, или ограниченного во времени волнового отрезка.

Импульс, изображенный на фиг. 7.5 для момента $t = 0$, с течением времени перемещается. Компоненты с различными частотами

и волновыми числами движутся с разными фазовыми скоростями. Таким образом, имеется тенденция к потере первоначальной когерентности и к искажению формы импульса. Поэтому мы можем ожидать, что импульс будет распространяться со скоростью, несколько отличающейся, скажем, от средней фазовой скорости составляющих его волн. Рассмотрение общего случая сильно диспергирующей среды, а также очень короткого импульса с широким интервалом волновых чисел довольно сложно. Однако распространение импульса с не слишком широким спектром волновых чисел, а также распространение импульса в среде, в которой частота слабо зависит от волнового числа, может быть рассмотрено следующим приближенным методом. В любой момент времени t волна описывается соотношением (7.26). Если функция $A(k)$ имеет достаточно острый пик около некоторого волнового числа k_0 , то частоту $\omega(k)$ можно разложить в ряд в окрестности $k = k_0$:

$$\omega(k) = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 (k - k_0) + \dots \quad (7.29)$$

При этом интеграл преобразуется к виду

$$u(x, t) \approx \frac{\exp \{i [k_0 (d\omega/dk)|_0 - \omega_0] t\}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp \left\{ i \left[x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 t \right] k \right\} dk. \quad (7.30)$$

Из сравнения с выражением (7.27) и с обратным фурье-образом следует, что интеграл в (7.30) равен $\sqrt{2\pi} u(x', 0)$, где $x' = x - (d\omega/dk)|_0 t$, т. е.

$$u(x, t) \approx u \left(x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 t, 0 \right) \exp \left\{ i \left[k_0 \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 - \omega_0 \right] t \right\}. \quad (7.31)$$

Отсюда видно, что если не говорить об общем фазовом множителе, то импульс движется без искажения формы со скоростью

$$v_{\text{гр}} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0, \quad (7.32)$$

которая носит название *групповой скорости*. Если плотность энергии определяется амплитудой волны (точнее, квадратом ее модуля), то ясно, что в этом приближении перенос энергии происходит с групповой скоростью, т. е. со скоростью движения импульса.

Для световых волн связь между ω и k описывается соотношением

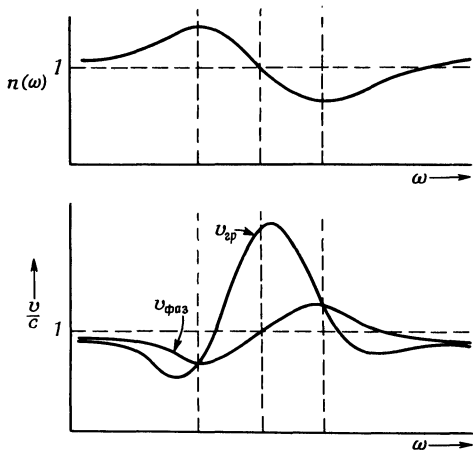
$$\omega(k) = \frac{ck}{n(k)}, \quad (7.33)$$

где c — скорость света в свободном пространстве, а $n(k)$ — пока-

затель преломления в функции от k . Фазовая скорость

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n(k)} \quad (7.34)$$

может быть как меньше, так и больше c в зависимости от того, больше или меньше единицы величина $n(k)$. Для большинства



Ф и г. 7.6. Зависимость показателя преломления $n(\omega)$, фазовой скорости $v_{\text{фаз}}$ и групповой скорости $v_{\text{гр}}$ от частоты ω в области аномальной дисперсии.

длин волн в оптическом диапазоне $n(k)$ больше единицы почти во всех средах. Групповая скорость (7.32) равна

$$v_{\text{гр}} = \frac{c}{n(\omega) + \omega (dn/d\omega)}. \quad (7.35)$$

В этом соотношении более удобно считать n функцией от ω , а не от k . При нормальной дисперсии производная $dn/d\omega$ положительна и, кроме того, $n > 1$; таким образом, скорость потока энергии меньше фазовой скорости, а также меньше c . В области же аномальной дисперсии $dn/d\omega$ может оказаться большой отрицательной величиной. При этом групповая скорость будет сильно отличаться от фазовой скорости и может стать больше c ¹⁾.

Зависимость групповой и фазовой скоростей от частоты в области аномальной дисперсии показана на фиг. 7.6.

¹⁾ Здесь нет оснований беспокоиться, что нарушаются принципы специальной теории относительности, поскольку в этом случае групповая скорость теряет свой физический смысл. Большая величина $dn/d\omega$ означает, что ω быстро меняется при изменении k , и, следовательно, приближение (7.29) и вытекающие из него соотношения неприменимы. В этом случае поведение импульса гораздо более сложно.

§ 4. Примеры распространения импульсов в диспергирующей среде

Чтобы проиллюстрировать общую теорию предыдущего параграфа и показать применимость понятия групповой скорости, рассмотрим теперь некоторый частный случай зависимости частоты от волнового числа и точно рассчитаем распространение импульса в такой среде. Но прежде чем переходить к частной модели, необходимо более детально, чем это делалось при выводе (7.26) и (7.27), сформулировать задачу с начальными условиями. Как отмечалось выше, при корректной постановке задачи с начальными условиями для волнового уравнения требуется задать начальные значения функции $u(x, t)$ и ее производной по времени $\partial u(x, 0)/\partial t$. Так как для получения $u(x, t)$ мы условились брать действительную часть (7.26)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx - i\omega(k)t} dk \mp \text{Компл. сопр.}, \quad (7.36)$$

то легко видеть, что $A(k)$ следующим образом выражается через начальные величины:

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left[u(x, 0) + \frac{i}{\omega(k)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \right] dx. \quad (7.37)$$

Рассмотрим теперь импульс, в начальный момент представляющий собой модулированную синусоидальную волну, огибающая которой является гауссовой кривой:

$$u(x, 0) = e^{-x^2/2L^2} \cos k_0 x. \quad (7.38)$$

Для простоты предположим, что

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \quad (7.39)$$

Это означает, что в момент времени, непосредственно предшествующий моменту $t = 0$, волна состояла из двух импульсов, каждый из которых двигался по направлению к началу координат, так что при $t = 0$ они совместились и образовали импульс (7.38). Ясно, что в последующие моменты времени импульсы будут продолжать двигаться в противоположные стороны. Таким образом, следует ожидать, что начальное распределение (7.38) расщепится на два одинаковых волновых пакета, один из которых будет двигаться влево, а другой—вправо. Амплитуда Фурье $A(k)$ импульса,

задаваемого соотношениями (7.38) и (7.39), имеет вид

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-x^2/2L^2} \cos k_0 x \, dx = \\ = \frac{L}{2} \left\{ \exp \left[-\frac{L^2}{2} (k - k_0)^2 \right] + \exp \left[-\frac{L^2}{2} (k + k_0)^2 \right] \right\}. \quad (7.40)$$

Как мы увидим ниже, четность функции $A(k)$ [$A(-k) = A(k)$] как раз и отражает наличие двух импульсов, движущихся в разные стороны от начала координат.

Чтобы рассчитать форму волны в последующие моменты времени, мы должны задать $\omega = \omega(k)$. В качестве модели, допускающей точное решение и позволяющей выявить существенные особенности дисперсии, мы выберем зависимость

$$\omega(k) = \nu \left(1 + \frac{a^2 k^2}{2} \right); \quad (7.41)$$

здесь ν — постоянная частота, а a — постоянная длина, определяющая характерную длину волны, для которой дисперсия становится существенной. Импульс (7.38) представляет собой модулированную волну с волновым числом $k = k_0$, поэтому из приближенной теории предыдущего параграфа вытекает, что оба импульса должны двигаться с групповой скоростью

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} (k_0) = \nu a^2 k_0 \quad (7.42)$$

и не должны существенно изменяться по форме (если, конечно, они не являются слишком узкими).

Точное описание зависимости от времени можно получить из соотношений (7.36) и (7.40) для $A(k)$:

$$u(x, t) = \frac{L}{2\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{L^2}{2} (k - k_0)^2 \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[-\frac{L^2}{2} (k + k_0)^2 \right] \right\} \exp \left\{ ikx - i\nu t \left[1 + \frac{a^2 k^2}{2} \right] \right\} dk. \quad (7.43)$$

Интеграл легко вычисляется, если дополнить показатели экспонент до полных квадратов. В результате получим

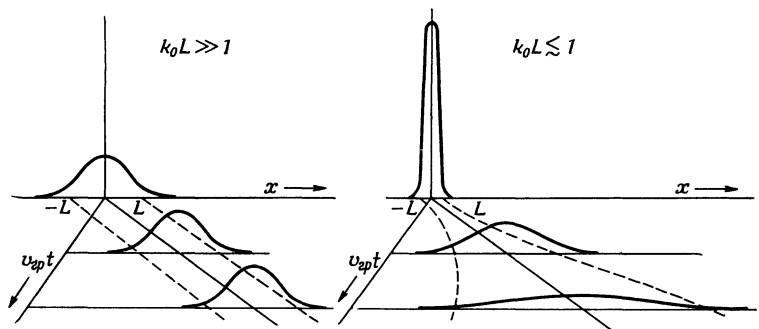
$$u(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\exp \left[-(x - \nu a^2 k_0 t)^2 / 2L^2 \left(1 + \frac{ia^2 \nu t}{L^2} \right) \right]}{[1 + (ia^2 \nu t / L^2)]^{1/2}} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ik_0 x - i\nu \left(1 + \frac{a^2 k_0^2}{2} \right) t \right] + (k_0 \rightarrow -k_0) \right\}, \quad (7.44)$$

где член $(k_0 \rightarrow -k_0)$ имеет тот же вид, что и первый, но с заменой k_0 на $-k_0$.

Выражение (7.44) описывает два импульса, распространяющихся в противоположных направлениях. Максимум амплитуды каждого импульса движется с групповой скоростью (7.42), а огибающая кривая остается по форме гауссовой. Однако ширина этой гауссовой кривой не постоянна, а растет со временем. Эффективная ширина огибающей равна

$$L(t) = \left[L^2 + \left(\frac{a^2 \nu t}{L} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (7.45)$$

Таким образом, влияние дисперсии на импульс тем сильнее (за данный отрезок времени), чем острее его огибающая. Условие малости



Ф и г. 7.7. Изменение формы волнового пакета при его движении.

Пакет, ширина которого велика по сравнению с длиной волны ($k_0 L \gg 1$), искажается сравнительно мало, в то время как узкий пакет ($k_0 L \lesssim 1$) быстро расширяется, а его амплитуда уменьшается.

изменения формы является $L \gg a$. Конечно, для очень больших промежутков времени t ширина гауссовой кривой всегда будет линейно возрастать со временем:

$$L(t) \rightarrow \frac{a^2 \nu t}{L}, \quad (7.46)$$

но время, в течение которого происходит переход к этой асимптотической зависимости, определяется отношением L/a . Для оценки скорости расширения импульса можно сопоставить величину $L(t)$, определяемую соотношением (7.45), с величиной $v_{gp} t = \nu a^2 k_0 t$. На фиг. 7.7, где представлены для примера два импульса, изображены кривые положения максимумов $x = v_{gp} t$ и линии $v_{gp} t \pm L(t)$, показывающие расширение импульса со временем. В левой части фиг. 7.7 импульс содержит много длин волн k_0^{-1} и поэтому почти не расплывается. В правой части показано поведение первоначально узкого импульса, который расплывается настолько быстро, что по прошествии короткого времени его уже даже нельзя назвать импульсом.

Хотя предыдущие результаты получены при некотором специальном выборе начальной формы импульса (7.38) и дисперсионного соотношения (7.41), они имеют более общее значение. В § 3 было показано, что средней скоростью импульса является групповая скорость $v_{гр} = d\omega/dk = \omega'$. Расширение импульса объясняется тем, что импульсу с начальной шириной Δx_0 присущ разброс волновых чисел $\Delta k \sim 1/\Delta x_0$. Отсюда следует, что групповая скорость, определенная для различных величин k внутри импульса, имеет разброс порядка

$$\Delta v_{гр} \sim \omega'' \Delta k \sim \frac{\omega''}{\Delta x_0}. \quad (7.47)$$

За время t это приводит к расширению на величину $\sim \Delta v_{гр} t$. Если мы сложим квадратично начальную ширину и уширение из-за разброса групповой скорости, то получим ширину $\Delta x(t)$ в момент времени t :

$$\Delta x(t) \approx \sqrt{(\Delta x_0)^2 + \left(\frac{\omega'' t}{\Delta x_0}\right)^2}, \quad (7.48)$$

Мы видим, что (7.48) в точности совпадает с (7.45), если положить $\Delta x_0 = L$. Выражение (7.48) для $\Delta x(t)$ показывает, что если $\omega'' \neq 0$, то узкий импульс расплывается быстро, поскольку он характеризуется широким спектром волновых чисел, и, наоборот, широкий импульс расплывается медленно. Все эти соображения непосредственно применимы и в волновой механике. Они лежат в основе принципа неопределенностей Гейзенберга. В волновой механике частота равна энергии, деленной на постоянную Планка, а волновое число — механическому импульсу, также деленному на постоянную Планка.

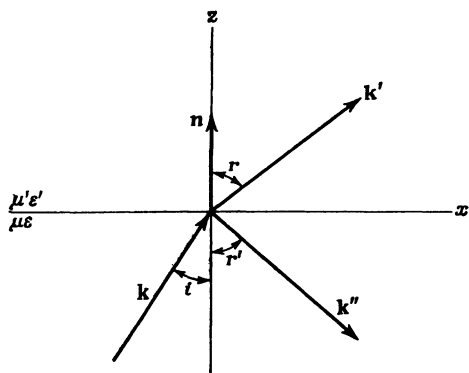
Задача о движении волновых пакетов в диссипативной диспергирующей среде является довольно сложной. Некоторые частные случаи поддаются аналитическому описанию, но получающимся аналитическим выражениям трудно дать физическую интерпретацию. Волновые пакеты в такой среде затухают и существенно искажаются при распространении. Мы отсылаем читателя к книге Стрэттона [106], где рассмотрен этот вопрос и приведены примеры численных расчетов.

§ 5. Отражение и преломление электромагнитных волн на плоской границе раздела между диэлектриками

Явления отражения и преломления света на плоской поверхности между двумя средами с различными диэлектрическими свойствами общеизвестны. Характеристики этих явлений можно разбить на два класса:

1. Кинематические характеристики
 - а) закон отражения: угол падения равен углу отражения;
 - б) закон преломления Снеллиуса: $\sin i / \sin r = n' / n$, где i и r — углы падения и преломления, n и n' — соответствующие показатели преломления.
2. Динамические характеристики
 - а) интенсивность отраженного и преломленного света;
 - б) изменение фазы и поляризация.

Кинематические характеристики непосредственно вытекают из волновой природы явления и необходимости удовлетворения граничных условий. Они не зависят от конкретного типа волн или



Ф и г. 7.8. Отражение и преломление на плоской границе раздела двух различных сред. k — падающая волна, k'' — отраженная, k' — преломленная.

вида граничных условий. Динамические же характеристики зависят от специфики электромагнитных полей и их граничных условий.

Координатная система и принятые обозначения показаны на фиг. 7.8. Среда, расположенные снизу и сверху от плоскости $z = 0$, характеризуются соответственно магнитной и электрической проницаемостями μ , ϵ и μ' , ϵ' . Плоская волна с волновым вектором k и частотой ω падает из среды μ , ϵ . Преломленная волна имеет волновой вектор k' , отраженная — волновой вектор k'' , а n — единичный вектор нормали, направленный из среды μ , ϵ в среду μ' , ϵ' . Согласно (7.18), электрическое и магнитное поля для указанных трех волн можно записать в виде:

для падающей волны

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \\ \mathbf{B} &= \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{k}, \end{aligned} \quad (7.49)$$

для преломленной волны

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= E'_0 e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \\ \mathbf{B}' &= \sqrt{\mu'\epsilon'} \frac{\mathbf{k}' \times \mathbf{E}'}{k'}, \end{aligned} \quad (7.50)$$

для отраженной волны

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'' &= \mathbf{E}_0'' e^{i\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \\ \mathbf{B}'' &= \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''}{k}. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Волновые числа имеют следующую абсолютную величину:

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}| &= |\mathbf{k}''| = k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\epsilon}, \\ |\mathbf{k}'| &= k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu'\epsilon'}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Из наличия граничных условий при $z = 0$, которые должны удовлетворяться во всех точках плоскости в любой момент времени, вытекает требование одинаковой зависимости от координат и времени всех полей при $z = 0$. Поэтому независимо от характера граничных условий при $z = 0$ все фазовые множители должны совпадать:

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})_{z=0} = (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})_{z=0} = (\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x})_{z=0}. \quad (7.53)$$

Соотношение (7.53) дает кинематические характеристики отражения и преломления. Легко видеть, что все три волновых вектора должны лежать в одной плоскости. Далее, в обозначениях фиг. 7.8

$$k \sin i = k' \sin r = k'' \sin r'. \quad (7.54)$$

Поскольку $k'' = k$, то $i = r'$, т. е. угол падения равен углу отражения. Отсюда же следует и закон Снеллиуса:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{k'}{k} = \sqrt{\frac{\mu'\epsilon'}{\mu\epsilon}} = \frac{n'}{n}. \quad (7.55)$$

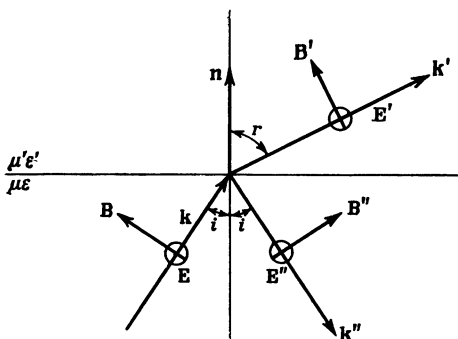
Динамические характеристики вытекают из граничных условий непрерывности нормальных составляющих \mathbf{D} и \mathbf{B} и тангенциальных составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} . Для полей (7.49) — (7.51) граничные условия записываются в виде

$$\begin{aligned} [\epsilon(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'') - \epsilon'\mathbf{E}'_0] \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'' - \mathbf{k}' \times \mathbf{E}'_0] \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'' - \mathbf{E}'_0) \times \mathbf{n} &= 0, \\ \left[\frac{1}{\mu} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'') - \frac{1}{\mu'} \mathbf{k}' \times \mathbf{E}'_0 \right] \times \mathbf{n} &= 0. \end{aligned} \quad (7.56)$$

При применении этих граничных условий удобно рассмотреть отдельно два случая: случай, когда вектор поляризации падающей плоской линейно поляризованной волны перпендикулярен плоскости падения (плоскости, образованной векторами \mathbf{k} и \mathbf{n}), и случай, когда вектор поляризации лежит в плоскости падения. Общий

случай произвольной эллиптической поляризации, как показано в §2, может быть получен линейной комбинацией этих двух решений.

Рассмотрим сначала случай, когда электрическое поле перпендикулярно плоскости падения (фиг. 7.9). Векторы электрического поля направлены от читателя. Ориентации векторов \mathbf{B} выбраны



Ф и г. 7.9. Отражение и преломление при поляризации, перпендикулярной плоскости падения.

таким образом, чтобы поток энергии был направлен вдоль волновых векторов. Так как все электрические поля параллельны плоскости раздела, то первое граничное условие (7.56) ничего не дает. Из третьего и четвертого условий (7.56) получаем

$$\begin{aligned} E_0 + E_0'' - E_0' &= 0, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (E_0 - E_0'') \cos i - \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} E_0' \cos r &= 0. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Второе условие (7.56) при учете закона Снеллиуса дублирует третье условие. Относительные амплитуды преломленной и отраженной волн определяются соотношениями (7.57).

Таким образом, в случае, когда поле \mathbf{E} перпендикулярно плоскости падения, имеем

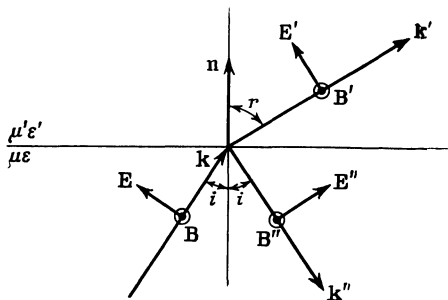
$$\begin{aligned} \frac{E_0'}{E_0} &= \frac{2}{1 + (\mu \operatorname{tg} i / \mu' \operatorname{tg} r)} \rightarrow \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r)}, \\ \frac{E_0''}{E_0} &= \frac{1 - (\mu \operatorname{tg} i / \mu' \operatorname{tg} r)}{1 + (\mu \operatorname{tg} i / \mu' \operatorname{tg} r)} \rightarrow -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Здесь выражения справа справедливы в предположении $\mu' = \mu$, которое обычно выполняется для оптических частот.

Если электрическое поле параллельно плоскости падения, как показано на фиг. 7.10, то граничные условия содержат нормальную составляющую \mathbf{D} и тангенциальные составляющие \mathbf{E} и \mathbf{H} [первое, третье и четвертое условия (7.56)]. Из условия непрерывности тангенциальных составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} получаем

$$\begin{aligned} \cos i (E_0 - E_0'') - \cos r E_0' &= 0, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (E_0 + E_0'') - \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} E_0' &= 0. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Условие непрерывности нормальной составляющей \mathbf{D} в совокупности с законом Снеллиуса приводит к условию, повторяющему второе из этих соотношений. Из (7.59) вытекают следующие выражения



Ф и г. 7.10. Отражение и преломление при поляризации, параллельной плоскости падения.

для относительных амплитуд преломленной и отраженной волн для случая, когда поле \mathbf{E} параллельно плоскости падения:

$$\frac{E'_0}{E_0} = 2 \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu'\epsilon'}} \frac{\sin 2i}{\sin 2r + (\mu/\mu') \sin 2i} \rightarrow \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r) \cos(i-r)}, \quad (7.60)$$

$$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{(\mu/\mu') \sin 2i - \sin 2r}{\sin 2r + (\mu/\mu') \sin 2i} \rightarrow \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)}.$$

Как и выше, выражения, стоящие справа, справедливы при $\mu' = \mu$.

Для нормального падения ($i = 0$) обе системы (7.58) и (7.60) сводятся к выражениям

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{2}{\sqrt{\mu\epsilon'/\mu'\epsilon} + 1} \rightarrow \frac{2n}{n' + n}, \quad (7.61)$$

$$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon'/\mu'\epsilon} - 1}{\sqrt{\mu\epsilon'/\mu'\epsilon} + 1} \rightarrow \frac{n' - n}{n' + n}.$$

Знак отраженной волны выбран в соответствии с фиг. 7.10 для поляризации, параллельной плоскости падения. При $n' > n$ фаза отраженной волны обратна фазе падающей.

§ 6. Поляризация при отражении и полное внутреннее отражение

Заслуживают внимания следующие два вывода из динамических соотношений для отражения и преломления. Во-первых, при поляризации, параллельной плоскости падения, существует угол падения, называемый углом Брюстера, при котором нет отраженной

волны ¹⁾. Полагая для простоты $\mu' = \mu$, мы видим из (7.60), что отраженной волны не будет, когда $i + r = \pi/2$. Из закона Снеллиуса (7.55) находим следующее выражение для угла Брюстера:

$$i_B = \operatorname{arctg} \frac{n'}{n}. \quad (7.62)$$

Для типичного отношения $n'/n = 1,5$ получаем $i_B \approx 56^\circ$. Если плоская волна смешанной поляризации падает на плоскую поверхность раздела под углом Брюстера, то отраженная волна будет *полностью поляризованной* в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Это свойство может быть использовано для получения пучков плоскополяризованного света, хотя такой метод и менее эффективен, чем методы, основанные на использовании анизотропных свойств некоторых диэлектриков.

Даже если неполяризованная волна падает и не под углом Брюстера, отраженная волна все равно будет иметь преимущественную поляризацию перпендикулярно плоскости падения. На этом основано применение темных стекол, преимущественно пропускающих волны лишь с одним направлением поляризации. В радиочастотном диапазоне приемные антенны благодаря поляризационным свойствам отраженных волн могут быть ориентированы таким образом, чтобы ослабить прием отраженных от поверхности волн (или волн, отраженных от ионосферы) и создать благоприятные условия для приема прямых волн.

Второе явление называется *полным внутренним отражением*. Слово «внутреннее» подчеркивает, что падающая и отраженная волны находятся в среде с большим показателем преломления, чем преломленная волна ($n > n'$) ²⁾. Из закона Снеллиуса (7.55) следует, что $r > i$ при $n > n'$. Следовательно, $r = \pi/2$, когда $i = i_0$, где

$$i_0 = \operatorname{arc} \sin \frac{n'}{n}. \quad (7.63)$$

Для волны, падающей под углом $i = i_0$, преломленная волна распространяется параллельно поверхности. При этом поток энергии через поверхность равен нулю и, следовательно, такому углу падения должно соответствовать полное отражение. Что же произойдет при $i > i_0$? Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что $\sin r > 1$ при $i > i_0$. Это означает, что r является комплексным

¹⁾ В общем случае $\mu \neq \mu'$ угол Брюстера может соответствовать и перпендикулярной поляризации. Однако далее автор ограничивается случаем $\mu = \mu'$, когда отсутствие отраженной волны возможно только для параллельной поляризации.— *Прим. ред.*

²⁾ Не очень удачный термин «полное внутреннее отражение» в последнее время часто заменяют более простым термином «полное отражение».— *Прим. ред.*

углом с мнимым косинусом

$$\cos r = i \sqrt{\left(\frac{\sin i}{\sin i_0}\right)^2 - 1}. \quad (7.64)$$

Смысл появляющихся комплексных величин станет ясным, если мы рассмотрим фазу преломленной волны

$$\begin{aligned} \exp(ik' \cdot \mathbf{x}) &= \exp[ik'(x \sin r + z \cos r)] = \\ &= \exp\left\{-k' \left[\left(\frac{\sin i}{\sin i_0}\right)^2 - 1\right]^{1/2} z\right\} \exp\left(ik' \frac{\sin i}{\sin i_0} x\right). \end{aligned} \quad (7.65)$$

Это выражение показывает, что при $i > i_0$ преломленная волна распространяется только параллельно поверхности; в направлении, перпендикулярном поверхности, она экспоненциально затухает. За исключением случая $i \approx i_0$, волна существенно затухает уже на расстоянии нескольких длин волн от границы раздела.

Хотя на другой стороне от границы раздела поля и существуют, однако ясно, что поток энергии сквозь поверхность равен нулю. Таким образом, для углов $i \geq i_0$ имеет место полное внутреннее отражение. В отсутствии потока энергии можно убедиться, вычисляя среднюю по времени нормальную составляющую вектора Пойнтинга на внутренней стороне поверхности

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}'^*)]. \quad (7.66)$$

Подставляя сюда $\mathbf{H}' = (c/\mu' \omega)(\mathbf{k}' \times \mathbf{E}')$, находим

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{c^2}{8\pi\omega\mu'} \operatorname{Re} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}') |E'_0|^2]. \quad (7.67)$$

Но $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}' = k' \cos r$ — чисто мнимая величина, так что $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Явление полного внутреннего отражения находит широкое применение в тех случаях, когда необходимо осуществить передачу световых потоков без потерь интенсивности. В ядерной физике «световоды» из люсита или других пластиков используются для передачи света, испускаемого сцинтиллирующим кристаллом при пролете ионизирующей частицы, в фотоумножитель, где этот свет преобразуется в полезный электрический сигнал. Фотоумножитель часто приходится располагать далеко от сцинтиллирующего кристалла из-за нехватки места или из-за магнитных полей, искажающих его показания. Если поперечный размер световода велик по сравнению с длиной волны, то приближенно справедливо приведенное выше рассмотрение для плоской границы. Если же поперечные размеры диэлектрика имеют величину порядка длины волны, то необходимо специальное рассмотрение с учетом конкретной геометрии световода. С такой задачей мы встретимся при рассмотрении диэлектрических волноводов (см. гл. 8, § 8).

§ 7. Волны в проводящей среде

Распространение волн в проводящей среде существенно отличается от распространения в непроводящей среде. Если наряду с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ среда характеризуется также проводимостью σ , то к уравнениям Максвелла следует добавить закон Ома

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (7.68)$$

С учетом (7.68) мы можем представить уравнения Максвелла в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mu \mathbf{H} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Выше было показано, что в непроводящем диэлектрике *перпендикулярные* во времени поля являются *поперечными*, т. е. векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны направлению пространственного изменения поля. В предельном случае нулевой частоты, как мы знаем из электростатики и магнитостатики, *статические* поля в диэлектрике *продольны* в том смысле, что они получаются из скалярных потенциалов и поэтому параллельны направлению пространственного изменения последних.

При отличной от нуля проводимости картина несколько изменяется. Рассмотрим для простоты поля, зависящие только от одной пространственной координаты ξ . Разложим \mathbf{E} и \mathbf{H} на продольную и поперечную составляющие

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi, t) &= \mathbf{E}_{\parallel}(\xi, t) + \mathbf{E}_{\perp}(\xi, t), \\ \mathbf{H}(\xi, t) &= \mathbf{H}_{\parallel}(\xi, t) + \mathbf{H}_{\perp}(\xi, t). \end{aligned} \quad (7.70)$$

Из свойства оператора ротора следует, что поперечные составляющие \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют двум роторным уравнениям системы (7.69), приводящим к поперечным волнам (см. ниже), в то время как продольные составляющие удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{\parallel}}{\partial \xi} &= 0, & \frac{\partial H_{\parallel}}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial E_{\parallel}}{\partial \xi} &= 0, & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \right) E_{\parallel} &= 0. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Из первой пары уравнений следует, что единственным возможным продольным магнитным полем является статическое однородное поле. В этом отношении проводящая среда ведет себя как и непроводящая. Однако вторая пара уравнений в (7.71) показывает,

что продольное электрическое поле однородно в пространстве, но изменяется во времени

$$E_{\parallel}(\xi, t) = E_0 e^{-4\pi\sigma t/\epsilon}. \quad (7.72)$$

Следовательно, в отсутствие внешних токов статическое продольное поле не может существовать в проводящей среде. Для хороших проводников, таких, как медь, σ имеет величину порядка 10^{17} сек^{-1} , так что возмущения затухают за весьма короткое время.

Рассмотрим теперь поперечные поля в проводящей среде. В предположении, что поля изменяются как $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$, из первого роторного уравнения (7.69) получаем соотношение

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\mu\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}), \quad (7.73)$$

а из второго — соотношение

$$i(\mathbf{k} \times \mathbf{H}) + i\epsilon \frac{r\omega}{c} \mathbf{E} - \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} = 0. \quad (7.74)$$

Исключая \mathbf{H} или \mathbf{E} из двух последних уравнений, находим

$$\left[k^2 - \left(\mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} + 4\pi i \frac{\mu\omega\sigma}{c^2} \right) \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0. \quad (7.75)$$

Отсюда следует, что волновой вектор k является комплексным

$$k^2 = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right). \quad (7.76)$$

Первый член соответствует току смещения, а второй — току проводимости. Ветвь квадратного корня в выражении для k выбирается таким образом, чтобы при $\sigma = 0$ получались известные результаты. Предполагая, что проводимость σ — действительное число, получаем

$$k = \alpha + i\beta,$$

где

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} \left[\frac{\sqrt{1 + (4\pi\sigma/\omega\epsilon)^2} \pm 1}{2} \right]^{1/2}. \quad (7.77)$$

Для плохого проводника ($4\pi\sigma/\omega\epsilon \ll 1$) справедливо приближенное соотношение

$$k = \alpha + i\beta \approx \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} + i \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sigma \quad (7.78)$$

с точностью до членов первого порядка по $\sigma/\omega\epsilon$. В этом приближении $\text{Re } k \gg \text{Im } k$, и затухание волны ($\text{Im } k$) не зависит от частоты, если не учитывать возможной зависимости проводимости от частоты. Наоборот, для хорошего проводника ($4\pi\sigma/\omega\epsilon \gg 1$) α и β при-

ближенно равны друг другу и

$$k \approx (1 + i) \frac{\sqrt{2\pi\sigma\omega\mu}}{c}; \quad (7.79)$$

здесь сохранен только член наименьшего порядка малости по $\omega\varepsilon/\sigma$.

Волны, описываемые выражением $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t)$, являются затухающими поперечными волнами. Их поля могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{-\beta\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}} e^{i\alpha\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 e^{-\beta\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}} e^{i\alpha\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}, \end{aligned} \quad (7.80)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{k} . Из уравнения $\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = 0$ следует, что $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$, а соотношение (7.73), связывающее \mathbf{H} и \mathbf{E} , дает

$$\mathbf{H}_0 = \frac{c}{\mu\omega} (\alpha + i\beta) \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0. \quad (7.81)$$

Отсюда видно, что в проводнике фазы \mathbf{H} и \mathbf{E} не совпадают. Определяя амплитуду и фазу k соотношениями

$$\begin{aligned} |k| &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\omega}{c} \left[1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2 \right]^{1/4}, \\ \varphi &= \arctg \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2} \arctg \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}, \end{aligned} \quad (7.82)$$

мы можем записать (7.81) в виде

$$\mathbf{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2 \right]^{1/4} e^{i\varphi} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0. \quad (7.83)$$

Выражение (7.83) показывает, что \mathbf{H} отстает во времени от \mathbf{E} на фазовый угол φ , а отношение амплитуд \mathbf{H} и \mathbf{E} равно

$$\frac{|\mathbf{H}_0|}{|\mathbf{E}_0|} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2 \right]^{1/4}. \quad (7.84)$$

В хороших проводниках магнитное поле велико по сравнению с электрическим полем и отстает от него по фазе почти на 45° . При этом энергия почти полностью сосредоточена в магнитном поле.

Как показывают соотношения (7.80), волны экспоненциально затухают с расстоянием. Это означает, что амплитуда электромагнитной волны внутри проводника уменьшается в $e = 2,718$ раза на расстоянии

$$\delta = \frac{1}{\beta} \approx \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega\mu}}. \quad (7.85)$$

(Последнее выражение справедливо для хороших проводников.) Длина δ называется *толщиной скин-слоя*, или *глубиной проникно-*

вения¹⁾. Для меди, например, $\delta \approx 0,85$ см при частоте 60 гц и $\delta \approx 0,71 \cdot 10^{-3}$ см при 10^8 гц. Столь быстрое ослабление волн означает, что токи в высокочастотных контурах текут только по поверхности проводников. Отсюда, в частности, следует, что индуктивность элементов контура на высокой частоте несколько меньше, чем на низкой, из-за вытеснения магнитного потока из толщи проводников.

Задача об отражении и преломлении на границе между проводящими средами весьма сложна и здесь не рассматривается. Интересующегося читателя мы отсылаем к книге Стрэттона [106]. В гл. 8, § 1, будут рассмотрены поля на границе между диэлектриком и хорошим проводником.

§ 8. Простая модель проводимости

Простейшая модель проводимости была предложена Друде в 1900 г. Согласно этой модели, в каждой единице объема имеется некоторое количество n_0 электронов, которые свободно движутся под действием приложенного электрического поля. Кроме того, на них действует тормозящая сила, обусловленная столкновениями. Таким образом, уравнение движения для этих электронов будет иметь вид

$$m \frac{dv}{dt} + mgv = eE(x, t), \quad (7.86)$$

где g — постоянная затухания²⁾. Для быстропеременных полей смещение электрона мало по сравнению с длиной волны, так что приближенно

$$m \frac{dv}{dt} + mgv = eE_0 e^{-i\omega t}, \quad (7.87)$$

где E_0 — электрическое поле в среднем положении электрона. Установившееся решение для скорости электрона имеет вид

$$v = \frac{e}{m(g - i\omega)} E_0 e^{-i\omega t}. \quad (7.88)$$

Отсюда следует, что проводимость дается выражением

$$\sigma = \frac{n_0 e^2}{m(g - i\omega)}. \quad (7.89)$$

¹⁾ В системе МКС толщина скин-слоя (7.85) равна $\delta = (2/\sigma\omega\mu)^{1/2}$.

²⁾ Константа затухания g характеризует среднее число столкновений, приводящих к существенному изменению импульса. Электрон испытывает столкновения с колебаниями решетки, дефектами решетки и с примесями. Для последовательного расчета g требуется квантовомеханическое рассмотрение с учетом принципа Паули (см. [118]).

Предполагая, что на атом приходится один свободный электрон, мы получаем для таких металлов, как медь (где плотность электронов $n_0 \approx 8 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, а $\sigma \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ сек}^{-1}$), эмпирическое значение константы затухания $g \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ сек}^{-1}$. Следовательно, для частот порядка микроволновых ($\sim 10^{10} \text{ сек}^{-1}$) или меньших проводимость металлов фактически является действительной величиной (т. е. ток находится в фазе с полем) и не зависит от частоты. Однако для более высоких частот (инфракрасные и выше) проводимость комплексна и существенно зависит от частоты; качественно эта зависимость описывается простой формулой (7.89).

§ 9. Поперечные волны в разреженной плазме

В некоторых случаях, как, например, в ионосфере или в разреженной плазме, торможение свободных электронов из-за столкновений пренебрежимо мало. Поэтому «проводимость» становится чисто мнимой

$$\sigma_{\text{пл}} \approx i \frac{n_0 e^2}{m \omega}. \quad (7.90)$$

Термин «проводимость» взят здесь в кавычки, так как в том случае, когда ток и электрическое поле находятся не в фазе, потери энергии на сопротивлении не происходит. Распространение поперечных электромагнитных волн в разреженной плазме описывается соотношением (7.76) с заменой σ на величину $\sigma_{\text{пл}}$, определяемую соотношением (7.90)¹, т. е.

$$k^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right), \quad (7.91)$$

где величина

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m} \quad (7.92)$$

называется *плазменной частотой*. Так как волновое число может быть записано в виде $k = n\omega/c$, где n — показатель преломления, мы заключаем, что показатель преломления плазмы определяется выражением

$$n^2 \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (7.93)$$

Для волн высокой частоты ($\omega > \omega_p$) показатель преломления — действительное число, и волны свободно распространяются. Для частот, меньших плазменной частоты ω_p , показатель преломления является чисто мнимым. Следовательно, такие электромагнитные

¹ Иногда соотношение (7.91) разрешают относительно ω^2 , т. е. записывают в виде $\omega^2 \approx \omega_p^2 + c^2 k^2$; в этом случае оно называется дисперсионным уравнением для $\omega = \omega(k)$.

волны отражаются от поверхности плазмы, а внутри плазмы поле экспоненциально спадает с расстоянием от поверхности. Глубина проникновения $\delta_{\text{пл}}$ дается формулой

$$\delta_{\text{пл}} = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}} \approx \frac{c}{\omega_p} \quad (7.94)$$

(последнее равенство справедливо при $\omega \ll \omega_p$). В лабораторных условиях плотность электронов (плотность плазмы) обычно имеет величину порядка $n_0 \approx 10^{12} - 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Это значит, что $\omega_p \approx 6 \cdot 10^{10} - 6 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}$, так что типичная глубина проникновения для статических и низкочастотных полей лежит в пределах $5 \cdot 10^{-1} - 5 \cdot 10^{-3} \text{ см}$. Вытеснение полей из плазмы — хорошо известный эффект в проблеме управляемых термоядерных реакций; имеются попытки его использования для удержания горячей плазмы (см. гл. 10, § 5 и 6).

Простое выражение (7.93) для показателя преломления плазмы становится неприменимым при наличии внешнего статического магнитного поля. Это обстоятельство проявляется не только в лабораторных условиях, но также и в ионосфере, где имеется внешнее магнитное поле Земли. Для иллюстрации влияния внешнего поля рассмотрим простую задачу о распространении поперечных волн вдоль сильного статического однородного магнитного поля \mathbf{B}_0 в разреженной однородной электронной плазме. Если мы пренебрежем столкновениями и будем считать, что смещение электронов мало, то уравнение движения запишется приближенно в виде

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \approx eEe^{-i\omega t} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0. \quad (7.95)$$

Мы пренебрегли здесь магнитным полем \mathbf{B} волны по сравнению со статическим полем \mathbf{B}_0 . Удобно рассматривать поперечные волны с круговой поляризацией. В этом случае

$$\mathbf{E} = E(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2), \quad (7.96)$$

а магнитное поле \mathbf{B}_0 направлено вдоль \mathbf{e}_3 . Так как мы ищем установившееся решение, то примем для скорости электрона выражение

$$\mathbf{v}(t) = v(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2)e^{-i\omega t}. \quad (7.97)$$

Из (7.95) с учетом (7.96) сразу получаем

$$v = \frac{ie}{m(\omega \pm \omega_B)} E, \quad (7.98)$$

где ω_B — частота вращения заряженной частицы в магнитном поле (ларморовская частота)

$$\omega_B = \frac{eB_0}{mc}. \quad (7.99)$$

Результат (7.98) становится понятным, если учесть, что во вращающейся с частотой ω_B координатной системе электрон ускоряется вращающимся электрическим полем с эффективной частотой $\omega \pm \omega_B$ в зависимости от знака круговой поляризации.

Плотность тока в плазме, обусловленная движением электронов, равна

$$\mathbf{J} = en_0\mathbf{v} = \frac{in_0e^2}{m(\omega \pm \omega_B)} \mathbf{E}. \quad (7.100)$$

Добавляя этот ток к току смещения, получаем соответствующее уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_B)} \right] \mathbf{E}. \quad (7.101)$$

Множитель в квадратных скобках можно интерпретировать как диэлектрическую проницаемость, или квадрат показателя преломления

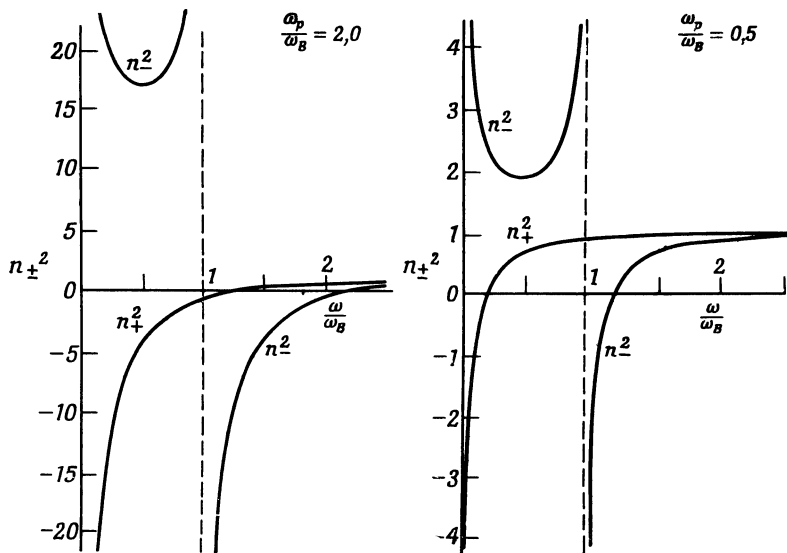
$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_B)}. \quad (7.102)$$

Эта формула представляет собой обобщение выражения (7.93) на случай отличного от нуля статического магнитного поля. Она не является общей, так как получена в предположении, что волны распространяются вдоль направления постоянного магнитного поля. Но даже на этом простом примере мы обнаруживаем ту существенную особенность, что волны с правой и левой круговой поляризацией распространяются различно и, следовательно, ионосфера является двоякопреломляющей. Если волна распространяется в направлении, не совпадающем с направлением постоянного поля \mathbf{V}_0 , то легко показать, что в тех случаях, когда можно пренебречь членами порядка ω_B^2 по сравнению с ω^2 и $\omega\omega_B$, показатель преломления определяется той же формулой (7.102). Однако при определении ларморовской частоты по (7.99) мы должны теперь вместо V_0 подставлять составляющую поля, параллельную направлению распространения. При этом ω_B в (7.102) зависит от угла, т. е. такая среда является не только двоякопреломляющей, но и анизотропной.

Для ионосферы максимальная плотность свободных электронов обычно равна $n_0 \approx 10^4 - 10^6 \text{ см}^{-3}$, что соответствует плазменной частоте $\omega_p \approx 6 \cdot 10^6 - 6 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}$. Если мы примем напряженность земного магнитного поля равной $0,3 \text{ гаусс}$, то ларморовская частота будет $\omega_B \approx 6 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$.

На фиг. 7.11 показана зависимость n_{\pm}^2 от частоты при двух величинах отношения ω_p/ω_B . В обоих случаях имеются широкие интервалы частот, где одна из величин n_{+}^2 и n_{-}^2 положительна, в то время как вторая отрицательна. В таком интервале частот волна с одной из круговых поляризаций не может распространяться

в плазме. Поэтому волна соответствующей поляризации будет полностью отражаться от плазмы. Волны с другой поляризацией будут частично проникать в плазму. Таким образом, если на плазму падает линейно поляризованная волна, то отраженная волна будет поляризована по эллипсу, большая ось которого, вообще говоря, повернута относительно направления поляризации падающей волны.

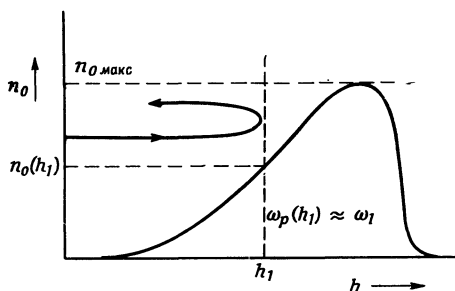


Ф и г. 7.11. Зависимость показателя преломления от частоты для модели ионосферы (разреженная электронная плазма в постоянном однородном магнитном поле).

Направление распространения параллельно магнитному полю, n_+ и n_- обозначают соответственно показатель преломления для волн с правой и левой круговой поляризации, ω_B — ларморовская частота; ω_p — плазменная частота.

С точки зрения рассмотренной здесь теории можно объяснить поведение радиоволн, отраженных от ионосферы, однако наличие нескольких слоев плазмы, плотность и относительное расположение которых меняются с высотой и во времени, делает проблему значительно более сложной, чем в нашем простейшем случае. Электронную плотность на различных высотах можно определить путем изучения отражения импульсов излучения, направленных вертикально вверх. Плотность свободных электронов в ионосфере медленно возрастает с высотой внутри данного слоя, как показано на фиг. 7.12, достигает максимума и затем резко падает при дальнейшем увеличении высоты. Импульс заданной частоты ω_1 входит

внутри слоя без отражения благодаря медленному изменению n_0 . Когда же плотность n_0 становится достаточно большой, так что $\omega_p(h_1) \approx \omega_1$, то показатель преломления (7.102) обращается в нуль и импульс отражается. Плотность n_0 , при которой происходит отражение, определяется из условия обращения в нуль правой части выражения (7.102). Измеряя промежуток времени между



Ф и г. 7.12. Зависимость электронной плотности от высоты в ионосферном слое (схематически).

излучением импульса и возвращением отраженного сигнала, мы можем найти высоту h_1 , соответствующую этой плотности. Меняя частоту ω_1 и измеряя соответствующие временные интервалы, можно найти зависимость электронной плотности от высоты. При достаточно большой частоте ω_1 показатель преломления в нуль не обращается и отражение становится очень малым. Частота, при которой исчезает отражение, и определяет максимум электронной плотности в данном слое.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Оптика как раздел электродинамики хорошо изложена в книге Борна и Вольфа [16], где в первой главе рассмотрены плоские волны, поляризация, отражение и преломление волн и пр. Весьма полное рассмотрение падения плоских волн на границу раздела диэлектриков и проводников дано в книге Стрэттона [106], гл. 9.

Хорошее изложение теории электромагнитных волн в изотропных и анизотропных средах дано также у Ландау и Лифшица [64], гл. 10 и 11. Более элементарное, но ясное и детальное изложение теории плоских волн и их свойств имеется в книге Адлера, Чу и Фано [2], гл. 7 и 8.

Распространение волн в диспергирующих средах подробно рассмотрено Бриллюэном [22]. Искажение и затухание импульсов в диссипативных средах детально изложено в книге Стрэттона [106].

Дополнение редактора. Распространение плоских электромагнитных волн рассмотрено также в книге Вайнштейна [122] и в монографии Альперта, Гинзбурга и Фейнберга [120] по распространению радиоволн. В последней работе, в частности, детально рассмотрено распространение в разреженной плазме (в ионосфере).

ЗАДАЧИ

7.1. Почти монохроматический плоский одномерный волновой пакет имеет начальную форму $u(x, 0) = f(x) \exp(ik_0x)$, где $f(x)$ — огибающая. Для приведенных ниже функций $f(x)$ найти спектр волновых чисел пакета $|A(k)|^2$, построить схематически $|u(x, 0)|^2$ и $|A(k)|^2$, определить в явном виде среднеквадратичные значения Δx и Δk [выразить их через интенсивности $|u(x, 0)|^2$ и $|A(k)|^2$] и проверить неравенство (7.28):

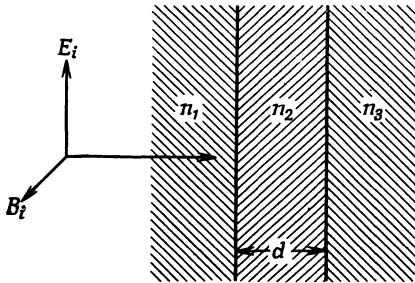
а) $f(x) = Ne^{-\alpha|x|/2}$,

б) $f(x) = Ne^{-\alpha^2 x^2/4}$,

в) $f(x) = \begin{cases} N(1 - \alpha|x|) & \text{для } \alpha|x| < 1. \\ 0 & \text{для } \alpha|x| > 1, \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} N & \text{для } |x| < a, \\ 0 & \text{для } |x| > a. \end{cases}$

7.2. Плоская волна падает нормально на плоский слой, изображенный на фиг. 7.13. Все три среды немагнитны, их показатели преломления равны соответственно n_1, n_2, n_3 . Толщина среднего слоя d .



Ф и г. 7.13.

а) Рассчитать коэффициенты прохождения и отражения (отношения проходящего и отраженного потоков энергии к падающему потоку энергии) и построить их зависимость от частоты для $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3; n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1; n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = 1$.

б) Пусть среда n_1 является частью оптической системы (например, линзой); среда n_3 — воздух ($n_3 = 1$). Необходимо сделать такое оптическое покрытие (среда n_2), чтобы не было отраженных волн с частотой ω_0 . Какая при этом требуется толщина d и показатель преломления n_2 ?

7.3. Два плоских полубесконечных слоя из однородного изотропного немагнитного непоглощающего диэлектрика с показателем преломления n параллельны друг другу и разделены воздушным зазором ($n = 1$), имеющим ширину d . Плоская электромагнитная волна с частотой ω падает на зазор из одного слоя под углом падения i . Для линейно поляризованных волн с поляризацией как параллельной, так и перпендикулярной плоскости падения

а) рассчитать отношение мощности, проходящей во второй слой, к падающей мощности и отношение отраженной мощности к падающей,

б) для угла i , превышающего критический угол полного внутреннего отражения, построить зависимость отношения проходящей мощности к падающей от отношения ширины зазора d к длине волны в воздухе.

7.4. Плоскополяризованная электромагнитная волна с частотой ω падает из свободного пространства нормально на плоскую поверхность немагнитной среды, имеющей проводимость σ и диэлектрическую проницаемость ϵ .

а) Рассчитать амплитуду и фазу отраженной волны для произвольных σ и ϵ .

б) Рассмотреть предельные случаи очень плохой и очень хорошей проводимости и показать, что для хорошего проводника коэффициент отражения (отношение отраженной мощности к падающей) приближенно равен

$$R \approx 1 - 2 \frac{\omega}{c} \delta,$$

где δ — толщина скин-слоя.

7.5. Плоскополяризованная электромагнитная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_i \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$ нормально падает на плоский однородный слой *хорошего* проводника ($\sigma \gg \omega$), имеющий толщину t . Предполагая, что как во внешнем пространстве, так и в проводнике $\mu = \epsilon = 1$, рассмотреть отражение и прохождение падающей волны.

а) Показать, что амплитуды отраженной и проходящей волн с точностью до членов первого порядка по $(\omega/\sigma)^{1/2}$ описываются выражениями

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{(1 - \beta)(1 - e^{-2\lambda})}{(1 - e^{-2\lambda}) + \beta(1 + 3e^{-2\lambda})},$$

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{4\beta e^{-\lambda}}{(1 - e^{-2\lambda}) + \beta(1 + 3e^{-2\lambda})},$$

где $\beta = \sqrt{\omega/8\pi\sigma}(1 - i) = (\omega\delta/2c)(1 - i)$, $\lambda = (1 - i)t/\delta$, и $\delta = c/\sqrt{2\pi\omega\sigma}$ — толщина скин-слоя.

б) Убедиться, что для нулевой и бесконечной толщин слоя получаются правильные предельные результаты.

в) Показать, что, за исключением случая очень малых толщин, коэффициент прохождения равен

$$T = \frac{32(\operatorname{Re} \beta)^2 e^{-2t/\delta}}{1 - 2e^{-2t/\delta} \cos(2t/\delta) + e^{-4t/\delta}}.$$

Построить зависимость $\ln T$ от t/δ для $\operatorname{Re} \beta = 10^{-2}$. Уточнить понятие «очень малой толщины».

7.6. Плоские волны распространяются в однородном немагнитном *анизотропном* диэлектрике. В общем случае диэлектрик характеризуется тензором ϵ_{ij} , но если выбрать оси координат вдоль главных осей тензора, то составляющие вектора смещения связаны с соответствующими составляющими электрического поля соотношениями $D_i = \epsilon_i E_i$ ($i = 1, 2, 3$), где ϵ_i — собственные значения матрицы ϵ_{ij} .

а) Показать, что для плоских волн с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} должно выполняться уравнение

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D} = 0.$$

б) Показать, что при заданном волновом векторе $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ могут распространяться две различные волны с разными фазовыми скоростями, удовлетворяющими уравнению Френеля:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2}{v^2 - v_i^2} = 0,$$

где $v_i = c/\sqrt{\epsilon_i}$ — так называемые главные скорости, а n_i — проекции единичного вектора \mathbf{n} по главным осям тензора.

в) Показать, что если \mathbf{D}_a и \mathbf{D}_b — векторы смещения для двух вышеупомянутых волн, то $\mathbf{D}_a \cdot \mathbf{D}_b = 0$.

7.7. Однородный изотропный немагнитный диэлектрик характеризуется показателем преломления $n(\omega)$, который предполагается, вообще говоря, комплексным (для описания процессов поглощения).

а) Показать, что общее решение для плоской одномерной волны может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} [A(\omega) e^{i(\omega/c)n(\omega)x} + B(\omega) e^{-i(\omega/c)n(\omega)x}],$$

где $u(x, t)$ — любая составляющая \mathbf{E} или \mathbf{B} .

б) Показать, что если функция $u(x, t)$ действительна, то $n(-\omega) = n^*(\omega)$.

в) Показать, что если $u(0, t)$ и $\partial u(0, t)/\partial x$ — граничные значения функции u и ее производной при $x = 0$, то коэффициенты $A(\omega)$ и $B(\omega)$ имеют вид

$$\begin{cases} A(\omega) \\ B(\omega) \end{cases} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \left[u(0, t) \mp \frac{ic}{\omega n(\omega)} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \right].$$

7.8. Очень длинный импульс, представляющий собой плоскую волну частотой ω_0 с крутым передним фронтом, нормально падает в момент $t = 0$ на полупространство диэлектрик с показателем преломления $n(\omega)$, занимающий полупространство $x > 0$. На входе в диэлектрик ($x = +0$) граничные значения тангенциальной составляющей электрического поля и ее нормальной производной равны

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \theta(t) e^{-\epsilon t} \cos \omega_0 t, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= \theta(t) \frac{\omega_0 n(\omega_0)}{c} e^{-\epsilon t} \sin \omega_0 t, \end{aligned}$$

где $\theta(t)$ — ступенчатая функция: [$\theta(t) = 0$ при $t < 0$, $\theta(t) = 1$ при $t > 0$]. Показатель спада ϵ — положительная бесконечно малая постоянная величина.

а) Используя решение, полученное в задаче 7.7, представить поле $u(x, t)$ в диэлектрике в виде интеграла по частотам с явными выражениями для коэффициентов $A(\omega)$ и $B(\omega)$.

б) Доказать, что достаточным условием выполнения принципа причинности (согласно которому никакой сигнал не может распространяться со скоростью, превышающей скорость света) в этой задаче является требование, что показатель преломления должен быть аналитической функцией комплексного переменного ω , не имеющей нулей и полюсов в верхней полуплоскости, и стремится к единице при $|\omega| \rightarrow \infty$.

в) Обобщить результаты п. «б» на случай произвольного направления падения волнового импульса.

7.9. а) Убедиться, что если показатель преломления $n(\omega)$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексного переменного ω и стремится к единице при больших $|\omega|$, то его действительная и мнимая части при вещественных частотах ω связаны дисперсионным соотношением

$$\operatorname{Re} n(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \operatorname{Im} n(\omega') d\omega',$$

где P — главное значение интеграла. Написать второе дисперсионное соотношение, выражающее мнимую часть в виде интеграла от действительной части.

б) Исходя из дисперсионного соотношения, показать, что в интервале частот, где есть резонансное поглощение, обязательно имеет место аномальная дисперсия.

в) Элементарная классическая модель эффекта преломления основана на представлении о совокупности затухающих электронных осцилляторов и приводит к следующему выражению для показателя преломления:

$$n(\omega) \approx 1 + \frac{2\pi N e^2}{m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2 - i\nu_k \omega},$$

где ω_k — резонансная частота для k -го типа осцилляторов, ν_k — их константа затухания, а f_k — число таких осцилляторов на атом. Проверить, что такой показатель преломления удовлетворяет дисперсионному соотношению, приведенному в п. «а».

ВОЛНОВОДЫ И РЕЗОНАТОРЫ¹⁾

Изучение электромагнитных полей, ограниченных металлическими стенками, представляет значительный практический интерес. При высоких частотах, когда длины волн имеют величину порядка метра или меньше, единственным практически разумным способом генерирования и передачи электромагнитного излучения является использование металлических конструкций, размеры которых сравнимы с длиной волны. В этой главе мы рассмотрим сначала поля вблизи поверхности проводника и изучим проникновение поля в проводник, сопровождаемое омическими потерями. Далее в довольно общем виде рассматривается задача об электромагнитных волнах в полых металлических трубах (волноводах) и резонаторах, причем по ходу изложения обсуждаются различные частные случаи. В заключение мы вкратце остановимся на теории диэлектрических волноводов, которые также пригодны для передачи электромагнитных волн.

¹⁾ Некоторые формулы этой главы, отмеченные звездочкой (*) при их порядковом номере, написаны таким образом, что из них можно легко получить соответствующую формулу в единицах МКС. Для этого достаточно опустить множитель в квадратных скобках. Например, для соотношения (8.12)

$$\frac{dP_{\text{ПТ}}}{da} = \left[\frac{1}{4\pi} \right] \frac{\mu\omega\delta}{4} |H_{\parallel}|^2$$

соответствующее равенство в системе МКС будет

$$\frac{dP_{\text{ПТ}}}{da} = \frac{\mu\omega\delta}{4} |H_{\parallel}|^2,$$

где все величины берутся в единицах МКС и, следовательно, могут отличаться как по величине, так и по размерности от соответствующих величин в гауссовой системе.

Если формула помечена звездочкой, но в ней нет квадратных скобок, то она имеет одинаковый вид как в гауссовой системе, так и в системе МКС.

Общие правила преобразования уравнений в систему МКС даны в приложении в табл. 3.

§ 1. Поля на поверхности и внутри проводника

В конце § 7 предыдущей главы отмечалось, что задача об отражении и преломлении волн на границе двух проводящих сред довольно сложна. Однако наиболее важные и полезные особенности этого явления можно выяснить приближенным методом, если одна из сред является хорошим проводником. Этот приближенный метод в пределах области своей применимости оказывается пригодным для решения существенно более общих задач, чем падение плоских волн.

Рассмотрим сначала поверхность с единичной нормалью \mathbf{n} , направленной от *идеального* проводника, расположенного с одной стороны от этой поверхности, в сторону непроводящей среды, расположенной по другую сторону. Так же как и в статическом случае, внутри проводника электрическое поле отсутствует. Заряды внутри идеального проводника предполагаются столь подвижными, что они мгновенно реагируют на сколь угодно быстрые изменения поля, всегда создавая на поверхности требуемую поверхностную плотность заряда Σ , обеспечивающую нулевое электрическое поле внутри проводника. Эта поверхностная плотность заряда определяется из соотношения

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = [4\pi] \Sigma. \quad (8.1)^*$$

Аналогично при изменении во времени магнитного поля поверхностные заряды движутся под действием тангенциального магнитного поля, создавая поверхностный ток \mathbf{K} , обеспечивающий отсутствие магнитного поля внутри идеального проводника

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \left[\frac{4\pi}{c} \right] \mathbf{K}. \quad (8.2)^*$$

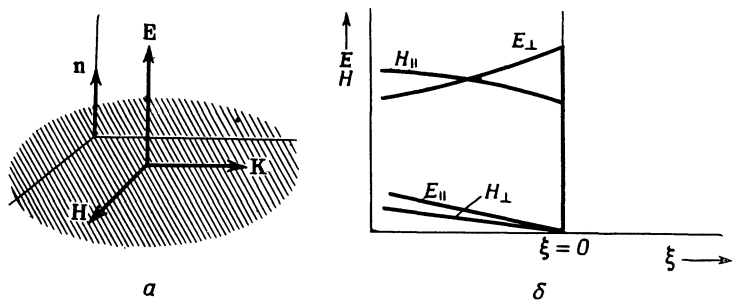
Остальные два граничных условия для нормальной составляющей \mathbf{B} и тангенциальной составляющей \mathbf{E} имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) &= 0, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}_c) &= 0. \end{aligned} \quad (8.3)^*$$

Здесь индекс c относится к полю в проводнике. Граничные условия (8.3) показывают, что на внешней стороне поверхности идеального проводника электрическое поле \mathbf{E} имеет только *нормальную* составляющую, а магнитное поле \mathbf{H} — только *тангенциальную* составляющую и что внутри идеального проводника поля скачком спадают до нуля (фиг. 8.1).

Поля вблизи поверхности неидеального, но хорошего проводника должны вести себя приблизительно так же, как и в случае.

идеального проводника. Как мы видели в § 7 предыдущей главы, внутри проводника поля уменьшаются в e раз на характеристической длине δ , называемой *толщиной скин-слоя*. Для хороших проводников δ измеряется при средних частотах долями сантиметра. Следовательно, граничные условия (8.1) и (8.2) приближенно выполняются для хороших проводников, если не считать тонкого переходного поверхностного слоя.



Ф и г. 8.1. Поля вблизи поверхности идеального проводника.

Рассмотрение самого переходного слоя требует, однако, известной осторожности. Прежде всего из закона Ома (7.68) следует, что при конечной проводимости, строго говоря, не может быть поверхностного тока, как это предполагается в (8.2). Вместо этого граничные условия для магнитного поля будут иметь вид

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}_e) = 0. \quad (8.4)^*$$

Для оценки эффектов, обусловленных конечной проводимостью, мы применим метод последовательных приближений. Предположим сначала, что на внешней стороне проводника имеется только нормальное электрическое поле \mathbf{E}_{\perp} и тангенциальное магнитное поле \mathbf{H}_{\parallel} , как и в случае идеального проводника. Величины этих полей мы будем считать известными из решения соответствующей граничной задачи. Затем мы используем граничные условия и уравнения Максвелла в проводнике для нахождения полей внутри переходного слоя, а также малых поправок к полям вне проводника. При решении уравнений Максвелла внутри проводника мы воспользуемся тем, что поля меняются по нормали к поверхности гораздо быстрее, чем в направлении, параллельном поверхности. Поэтому всеми производными по координатам, параллельным поверхности, вполне можно пренебречь по сравнению с нормальными производными.

Если вне поверхности имеется тангенциальное поле \mathbf{H}_{\parallel} , то из граничного условия (8.4) следует, что такое же поле должно быть

и внутри тела. Если пренебречь током смещения в проводнике, то роторные уравнения (7.69) дают

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_c &\approx \frac{c}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{H}_c, \\ \mathbf{H}_c &= -\frac{ic}{\mu\omega} \operatorname{rot} \mathbf{E}_c, \end{aligned} \quad (8.5)$$

где предполагается, что поля изменяются по гармоническому закону $\sim e^{-i\omega t}$. Если \mathbf{n} — внешняя единичная нормаль к проводнику, а ξ — координата, отсчитываемая по нормали *внутри* проводника, то оператор градиента может быть записан в виде

$$\operatorname{grad} \approx -\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \xi};$$

остальными производными от полей внутри проводника мы пренебрегаем. В этом приближении уравнения (8.5) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_c &\approx -\frac{c}{4\pi\sigma} \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{H}_c}{\partial \xi}, \\ \mathbf{H}_c &\approx \frac{ic}{\mu\omega} \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}_c}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Объединяя эти уравнения, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_c) + \frac{2i}{\delta^2} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_c) \approx 0, \quad (8.7)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_c \approx 0, \quad (8.8)$$

где δ — толщина скин-слоя, определяемая формулой (7.85). Второе из этих уравнений показывает, что \mathbf{H} внутри проводника параллельно его поверхности, в согласии с нашими граничными условиями. Решение уравнения (8.7) для \mathbf{H}_c имеет вид

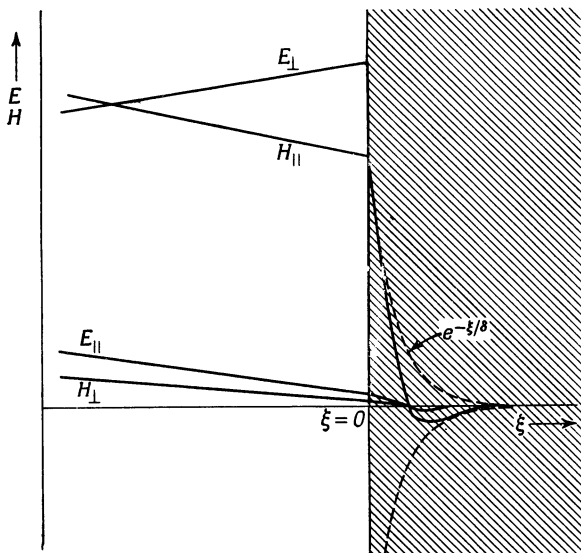
$$\mathbf{H}_c = \mathbf{H}_{||} e^{-\xi/\delta} e^{i\xi/\delta}, \quad (8.9)$$

где $\mathbf{H}_{||}$ — тангенциальное магнитное поле вне поверхности. Согласно (8.6), электрическое поле в проводнике приближенно можно записать как

$$\mathbf{E}_c \approx \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} (1-i) (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{||}) e^{-\xi/\delta} e^{i\xi/\delta}. \quad (8.10)$$

Полученные решения для \mathbf{H} и \mathbf{E} внутри проводника обладают всеми свойствами, указанными в § 7 предыдущей главы, а именно: а) они быстро экспоненциально спадают; б) электрическое и магнитное поля сдвинуты по фазе; в) магнитное поле много больше

электрического. Кроме того, из этих решений видно, что поля внутри хорошего проводника параллельны его поверхности¹⁾ и распространяются по нормали к поверхности, причем их величины полностью определяются тангенциальной составляющей магнитного поля \mathbf{H}_{\parallel} на внешней стороне поверхности.



Ф и г. 8.2. Поля вблизи поверхности хорошего, но не идеального проводника.

Из граничного условия (8.3) для тангенциальной составляющей \mathbf{E} мы находим, что на внешней стороне поверхности имеется небольшая тангенциальная составляющая электрического поля, определяемая формулой (8.10) при $\xi = 0$:

$$\mathbf{E}_{\parallel} \approx \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} (1 - i) (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{\parallel}). \quad (8.11)$$

В рассматриваемом приближении на внешней стороне поверхности имеется также и малая нормальная составляющая \mathbf{B}_{\perp} . Она может быть найдена из фарадеевского закона индукции и оказы-

¹⁾ Из непрерывности тангенциальных составляющих \mathbf{H} и уравнения, связывающего \mathbf{E} и $\text{rot } \mathbf{H}$ на обеих сторонах поверхности, вытекает, что в проводнике существует небольшая нормальная составляющая электрического поля $\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{n} \approx (i\omega\epsilon/4\pi\sigma) E_{\perp}$, однако она имеет следующий порядок малости по сравнению с (8.10).

вается такого же порядка, как и E_{\parallel} . Амплитуды полей внутри и вне проводника схематически показаны на фиг. 8.2.

Существование малой тангенциальной составляющей E вне поверхности наряду с нормальной составляющей E и тангенциальной составляющей H указывает на наличие потока энергии, направленного в проводник. Средняя по времени мощность, поглощаемая единицей поверхности, равна

$$\frac{dP_{\text{пт}}}{da} = -\frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)] = \left[\frac{1}{4\pi} \right] \frac{\mu\omega\delta}{4} |\mathbf{H}_{\parallel}|^2. \quad (8.12)^*$$

Эта мощность представляет собой омические потери в толще проводника, в чем нетрудно убедиться. Действительно, согласно закону Ома, плотность тока \mathbf{J} вблизи поверхности проводника можно представить следующим образом:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_c = \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{8\pi}} (1-i) (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{\parallel}) e^{-\xi(1-i)/\delta}. \quad (8.13)$$

Средняя по времени скорость диссипации энергии (на единицу объема), обусловленной омическими потерями, равна $1/2 \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^* = (1/2\sigma) |\mathbf{J}|^2$, поэтому мощность, выделяющаяся в объеме проводника, лежащем под элементом его поверхности ΔA , будет

$$\frac{1}{2\sigma} \Delta A \int_0^{\infty} d\xi \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* = \Delta A \frac{\mu\omega}{8\pi} |\mathbf{H}_{\parallel}|^2 \int_0^{\infty} e^{-2\xi/\delta} d\xi = \Delta A \frac{\mu\omega\delta}{16\pi} |\mathbf{H}_{\parallel}|^2.$$

Полученное значение мощности потерь в точности совпадает с найденным выше с помощью вектора Пойнтинга [см. (8.12)].

Поскольку ток \mathbf{J} течет в тонком слое, примыкающем к поверхности проводника, то его можно считать эквивалентным некоторому эффективному поверхностному току с плотностью $\mathbf{K}_{\text{эфф}}$

$$\mathbf{K}_{\text{эфф}} = \int_0^{\infty} \mathbf{J} d\xi = \left[\frac{c}{4\pi} \right] \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{\parallel}. \quad (8.14)^*$$

Сравнение с (8.2) показывает, что хороший проводник ведет себя так же, как идеальный проводник, если идеализированный поверхностный ток заменить эффективным током, распределенным в очень тонком, но конечном поверхностном слое. Мощность потерь можно выразить через эффективный поверхностный ток:

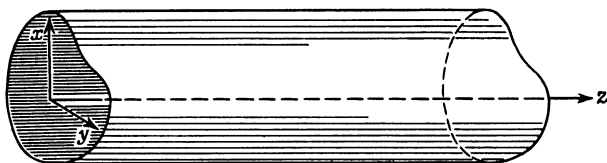
$$\frac{dP_{\text{пт}}}{da} = \frac{1}{2\sigma\delta} |\mathbf{K}_{\text{эфф}}|^2. \quad (8.15)^*$$

Это выражение показывает, что величина $1/\sigma\delta$ играет роль поверхностного сопротивления проводника. Формула (8.15), где $\mathbf{K}_{\text{эфф}}$ определяется соотношением (8.14), позволяет приближенно рассчиты-

вать омические потери в резонаторах, линиях передачи и волноводах, если известны поля для соответствующей идеализированной задачи с бесконечной проводимостью.

§ 2. Цилиндрические резонаторы и волноводы

Возбуждение и распространение электромагнитных волн в полых металлических трубах имеет широкое практическое применение. Если труба имеет торцовые поверхности, то она называется



Ф и г. 8.3. Полый цилиндрический волновод с произвольным поперечным сечением.

резонатором, в противном случае — волноводом. В дальнейшем мы будем считать граничные поверхности идеально проводящими. Имеющиеся в действительности потери можно рассчитать методом, изложенным в § 1. Цилиндрическая поверхность S произвольного поперечного сечения изображена на фиг. 8.3. Мы предполагаем для простоты, что размеры и форма поперечного сечения не меняются вдоль оси цилиндра. При синусоидальной зависимости от времени $\sim e^{-i\omega t}$ уравнения Максвелла для полей внутри цилиндра принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \mathbf{E}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Здесь предполагается, что цилиндр заполнен однородной непроводящей средой с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ . Из (8.16) следует, что \mathbf{E} и \mathbf{B} удовлетворяют уравнению

$$\left(\nabla^2 + \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = 0. \quad (8.17)$$

Благодаря цилиндрической симметрии можно выделить зависимость от координаты z и положить

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{E}(x, y, z, t) \\ \mathbf{B}(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{E}(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t} \\ \mathbf{B}(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t} \end{Bmatrix}. \quad (8.18)$$

Беря соответствующие линейные комбинации, можно получить как бегущие, так и стоячие волны. Волновое число k является пока неизвестным параметром и может быть как действительным, так и комплексным. При выбранной зависимости полей от z волновое уравнение сводится к двумерному уравнению

$$\left[\nabla_t^2 + \left(\mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = 0, \quad (8.19)$$

где ∇_t^2 — поперечная часть оператора Лапласа

$$\nabla_t^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (8.20)$$

Удобно также разбить поля на две части — параллельную и перпендикулярную оси z :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_z + \mathbf{E}_t. \quad (8.21)$$

Продольное электрическое поле равно

$$\mathbf{E}_z = (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}) \mathbf{e}_3, \quad (8.22)$$

а поперечное

$$\mathbf{E}_t = (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}) \times \mathbf{e}_3, \quad (8.23)$$

где \mathbf{e}_3 — единичный вектор, направленный вдоль оси z . Аналогичные обозначения введем и для вектора магнитной индукции \mathbf{B} . Преобразуя роторные уравнения (8.16) и используя явную зависимость (8.18) от z , можно выразить поперечные составляющие полей через их продольные составляющие:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_t &= \frac{1}{\mu\epsilon (\omega^2/c^2) - k^2} \left[\text{grad}_t \frac{\partial B_z}{\partial z} + i\mu\epsilon \frac{\omega}{c} \mathbf{e}_3 \times \text{grad}_t E_z \right], \\ \mathbf{E}_t &= \frac{1}{\mu\epsilon (\omega^2/c^2) - k^2} \left[\text{grad}_t \frac{\partial E_z}{\partial z} - i \frac{\omega}{c} \mathbf{e}_3 \times \text{grad}_t B_z \right]. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Из этих соотношений следует, что для определения полей достаточно знать решения двумерного уравнения (8.19) для E_z и B_z ; остальные составляющие могут быть определены с помощью (8.24).

В качестве граничных условий на поверхности цилиндра примем условия для идеального проводника

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad (8.25)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности. Поскольку уравнения Максвелла и граничные условия внутренне согласованы, достаточно использовать условие обращения в нуль z -составляющей электрического поля на поверхности

$$E_z|_S = 0. \quad (8.26)$$

Для нормальной составляющей \mathbf{V} , используя первое соотношение (8.24) для \mathbf{V}_t , мы находим, что из условия $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = 0$ следует необходимость выполнения равенства

$$\left. \frac{\partial B_z}{\partial n} \right|_S = 0, \quad (8.27)$$

где $\partial/\partial n$ — нормальная производная, взятая на поверхности S .

Двумерное волновое уравнение (8.19) для E_z и B_z вместе с граничными условиями для E_z и B_z на поверхности цилиндра образуют обычную задачу на собственные значения. При заданной частоте ω дифференциальное уравнение и граничные условия удовлетворяются только при определенных значениях продольного волнового числа k (такая ситуация типична для волноводов); при заданном k допустимы только определенные частоты (типичная ситуация для резонаторов). Так как граничные условия для E_z и B_z различны, они не могут, вообще говоря, удовлетворяться одновременно. Соответственно поля делятся на две различные группы:

поперечно-магнитные (ТМ-волны)

$$B_z = 0 \text{ везде}$$

с граничным условием

$$E_z|_S = 0;$$

поперечно-электрические (ТЕ-волны)

$$E_z = 0 \text{ везде}$$

с граничным условием

$$\left. \frac{\partial B_z}{\partial n} \right|_S = 0.$$

Вместо названий «поперечно-магнитные» и «поперечно-электрические» волны иногда используют названия «электрические» или «магнитные» волны (или E - и H -волны), отмечая этим наличие соответствующей продольной составляющей электрического или магнитного поля. Кроме этих двух типов волн, имеется еще вырожденный тип, так называемые *поперечные электромагнитные волны* (ТЕМ), в которых равны нулю обе продольные составляющие E_z и B_z . Из (8.24) видно, что при E_z и B_z , равных нулю, отличные от нуля поперечные составляющие полей могут существовать только в том случае, когда продольное волновое число удовлетворяет условию

$$k = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c}. \quad (8.28)$$

Следовательно, ТЕМ-волны распространяются с той же скоростью, что и волны в свободном пространстве (без ограничивающих поверхностей). Из двумерного волнового уравнения (8.19) следует, что

$$\nabla_t^2 \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_{\text{ТЕМ}} \\ \mathbf{B}_{\text{ТЕМ}} \end{Bmatrix} = 0, \quad (8.29)$$

т. е. каждая составляющая поперечных полей удовлетворяет электростатическому двумерному уравнению Лапласа. Легко убедиться, что $\mathbf{E}_{\text{ТЕМ}}$ и $\mathbf{B}_{\text{ТЕМ}}$ являются градиентами скалярных потенциалов, удовлетворяющих уравнению Лапласа, и что поле $\mathbf{B}_{\text{ТЕМ}}$ всюду перпендикулярно $\mathbf{E}_{\text{ТЕМ}}$. Действительно, из закона индукции Фарадея следует

$$\mathbf{B}_{\text{ТЕМ}} = \frac{c}{i\omega} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_{\text{ТЕМ}}). \quad (8.30)$$

Поскольку зависимость от z выражается множителем $\exp(i\sqrt{\mu\varepsilon}\omega z/c)$, то

$$\mathbf{B}_{\text{ТЕМ}} = \sqrt{\mu\varepsilon} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_{\text{ТЕМ}}). \quad (8.31)^*$$

Точно так же связаны \mathbf{B} и \mathbf{E} в плоской волне, распространяющейся в неограниченном пространстве.

Из (8.29) следует, что ТЕМ-волны не могут существовать внутри односвязного полого цилиндрического идеально проводящего проводника. Его поверхность является эквипотенциальной, и, следовательно, электрическое поле внутри нее должно обращаться в нуль. Для получения ТЕМ-волн необходимо иметь две (или более) цилиндрические поверхности. Эти волны являются основными для таких систем, как коаксиальный кабель или двухпроводная линия передачи (см. задачи 8.1 и 8.2).

§ 3. Волноводы

Рассмотрим теперь распространение электромагнитных волн в полой волноводе постоянного поперечного сечения. При зависимости от z вида e^{ikhz} поперечные составляющие полей для двух типов волн связаны, согласно (8.24), соотношениями

ТМ-волны

$$\mathbf{B}_t = \frac{\mu\varepsilon\omega}{ck} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_t,$$

ТЕ-волны

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\omega}{ck} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}_t.$$

(8.32)

В свою очередь поперечные поля определяются через продольные:

$$\left. \begin{array}{l} \text{TM-волны} \\ \text{TE-волны} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{E}_t = \frac{ik}{\gamma^2} \text{grad}_t \psi, \\ \mathbf{B}_t = \frac{ik}{\gamma^2} \text{grad}_t \psi; \end{array} \quad (8.33)$$

здесь $\psi = E_z$ для TM-волн и $\psi = B_z$ для TE-волн. Скалярная функция ψ удовлетворяет двумерному волновому уравнению (8.19)

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) \psi = 0, \quad (8.34)$$

где

$$\gamma^2 = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2, \quad (8.35)$$

и граничным условиям

$$\psi|_S = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_S = 0 \quad (8.36)$$

соответственно для TM- и TE-волн.

Уравнение (8.34) для ψ вместе с граничным условием (8.36) определяет задачу на собственные значения. Легко видеть, что введенная константа γ^2 не может быть отрицательной. Грубо говоря, это следует из того, что функция ψ должна иметь колебательный характер, для того чтобы удовлетворить граничным условиям (8.36) на противоположных сторонах цилиндра. Имеется спектр собственных значений γ_λ^2 и соответствующих им собственных функций ψ_λ ($\lambda = 1, 2, 3, \dots$), которые составляют ортогональную систему. Получающиеся при этом различные решения называются *модами*, или *типами волн*¹⁾. При заданной частоте ω волновое число определяется для каждого значения λ соотношением

$$k_\lambda^2 = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \gamma_\lambda^2. \quad (8.37)$$

Определим *граничную частоту* ω_λ следующим образом:

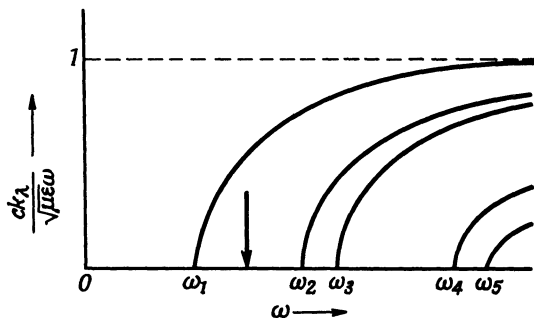
$$\omega_\lambda = [c] \frac{\gamma_\lambda}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (8.38)^*$$

Тогда волновое число k_λ можно записать в виде

$$k_\lambda = \left[\frac{1}{c} \right] \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}. \quad (8.39)^*$$

¹⁾ Хотя термин «тип волны» имеет и другой, более широкий смысл (волны электрического и магнитного типов), в русской литературе он более распространен, и мы его примем в этой книге.— *Прим. ред.*

Если $\omega > \omega_\lambda$, то волновое число k_λ вещественно и волны λ -типа могут распространяться в волноводе. Для частот, меньших граничной частоты, k_λ оказывается мнимым; такие типы волн не могут распространяться. Зависимость продольного волнового числа от частоты качественно показана на фиг. 8.4. Мы видим, что на каждой данной частоте может распространяться только конечное число типов волн. Размеры волновода обычно выбирают таким образом, чтобы при рабочей частоте мог распространяться только наини́зший тип волн. (Примерное положение рабочей частоты показано на фиг. 8.4 вертикальной стрелкой.)



Ф и г. 8.4. Зависимость волнового числа k_λ от частоты ω для различных λ . ω_λ — граничная частота.

Так как волновое число k_λ всегда меньше, чем постоянная распространения $\sqrt{\mu\epsilon}\omega/c$ для свободного пространства, то длина волны в волноводе всегда больше, чем в свободном пространстве. Соответственно фазовая скорость $v_{\text{фаз}}$ в волноводе также больше, чем в свободном пространстве:

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k_\lambda} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - (\omega_\lambda^2/\omega^2)}} > \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad (8.40)$$

и стремится к бесконечности, когда частота ω приближается к граничной частоте ω_λ .

§ 4. Волны в прямоугольном волноводе

В качестве иллюстрации общих свойств волн, описанных в предыдущем параграфе, рассмотрим распространение ТЕ-волн в прямоугольном волноводе с внутренними размерами a , b (фиг. 8.5). Функция $\psi = B_z$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2 \right) \psi = 0 \quad (8.41)$$

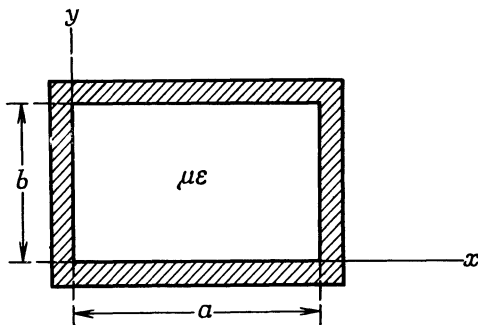
с граничными условиями $\partial\psi/\partial n = 0$ при $x = 0, a$ и $y = 0, b$. Очевидно, решение имеет вид

$$\psi_{mn}(x, y) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (8.42)$$

где

$$\gamma_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right). \quad (8.43)$$

Индекс λ , определяющий тип волны, заменен здесь двумя положительными целочисленными индексами m, n . Чтобы решение было



Ф и г. 8.5.

нетривиальным, m и n не должны быть одновременно равны нулю. Граничная частота ω_{mn} определяется соотношением

$$\omega_{mn} = [c] \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{1/2}. \quad (8.44)^*$$

Если $a > b$, то наименьшая граничная частота, соответствующая основному ТЕ-типу, получается при $m = 1, n = 0$:

$$\omega_{10} = \frac{\pi c}{\sqrt{\mu\epsilon} a}. \quad (8.45)$$

При этом на стороне a укладывается половина длины волны в свободном пространстве. Явные выражения для полей волн этого типа, обозначаемого ТЕ₁₀, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B_z &= B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{ikhz - i\omega t}, \\ B_x &= -\frac{ika}{\pi} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{ikhz - i\omega t}, \\ E_y &= i \frac{\omega a}{\pi c} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{ikhz - i\omega t}. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Наличие множителя i в B_x (и E_y) означает, что B_x и E_y сдвинуты в пространстве и во времени по фазе на 90° по отношению к B_z . Оказывается, что TE_{10} -волна имеет наименьшую граничную частоту из всех TE - и TM -волн ¹⁾ и поэтому именно она обычно используется практически. Для типичного случая $a = 2b$ отношение граничных частот $\omega_{mn} / \omega_{10}$ для нескольких типов волн дается следующей таблицей:

m	ω_{mn}/ω_{10}			
	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0		2,00	4,00	6,00
1	1,00	2,24	4,13	
2	2,00	2,84	4,48	
3	3,00	3,61	5,00	
4	4,00	4,48	5,66	
5	5,00	5,39		
6	6,00			

В интервале частот от граничной частоты до ее удвоенного значения распространяется только TE_{10} -волна. Выше этой удвоенной частоты начинают быстро появляться другие типы волн. Конфигурации полей TE_{10} -волны и других изображены во многих книгах (см., например, [5]).

§ 5. Поток энергии и затухание в волноводах

Общее обсуждение цилиндрических волноводов с произвольной формой поперечного сечения, проведенное в § 3, можно продолжить, рассмотрев также поток энергии вдоль волновода и затухание волн, обусловленное потерями в стенках с конечной проводимостью. Мы ограничимся рассмотрением одного отдельного типа волны; общий случай может быть получен суперпозицией.

¹⁾ Это становится очевидным, если мы заметим, что E_z для TM -волн имеет вид

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$

причем тогда и γ^2 определяется выражением (8.43). Волне низшего типа соответствует здесь $m = n = 1$. Ее граничная частота больше граничной частоты TE_{10} -волны в $[1 + (a^2/b^2)]^{1/2}$ раз.

Средний по времени поток энергии дается действительной частью комплексного вектора Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \left[\frac{c}{4\pi} \right] \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*). \quad (8.47)^*$$

Для введенных выше двух типов волн, используя (8.24), найдем

$$\mathbf{S} = \frac{\omega k}{8\pi\gamma^4} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \left[\mathbf{e}_z |\text{grad}_t \psi|^2 + i \frac{\gamma^2}{k} \psi \text{grad}_t \psi^* \right], \\ \frac{1}{\mu} \left[\mathbf{e}_z |\text{grad}_t \psi|^2 - i \frac{\gamma^2}{k} \psi^* \text{grad}_t \psi \right], \end{array} \right. \quad (8.48)$$

где верхняя строчка соответствует ТМ-волнам, а нижняя — ТЕ-волнам. Так как функция ψ обычно вещественна ¹⁾, то поперечная составляющая \mathbf{S} представляет лишь реактивный поток энергии и не дает вклада в средний по времени поток энергии. Наоборот, аксиальная составляющая \mathbf{S} определяет среднюю плотность потока энергии вдоль волновода. Для получения полного потока мощности P через сечение волновода проинтегрируем продольную составляющую \mathbf{S} по площади поперечного сечения волновода A :

$$P = \int_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_z da = \frac{\omega k}{8\pi\gamma^4} \left\{ \frac{\varepsilon}{1} \right\} \int_A (\text{grad}_t \psi)^* \cdot (\text{grad}_t \psi) da. \quad (8.49)$$

Применяя первую формулу Грина (1.34) к поверхностному интегралу (8.49), мы можем написать P в виде

$$P = \frac{\omega k}{8\pi\gamma^4} \left\{ \frac{\varepsilon}{1} \right\} \left[\oint_C \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} dl - \int_A \psi^* \nabla_t^2 \psi da \right], \quad (8.50)$$

где первый интеграл берется по контуру C , ограничивающему поперечное сечение цилиндра. В силу граничных условий (8.36) этот интеграл равен нулю для обоих типов волн. С учетом волнового уравнения (8.34) второй интеграл сводится к нормировочному интегралу для ψ . Таким образом, проходящая мощность оказывается равной

$$P = \left[\frac{c}{4\pi} \right] \frac{1}{2 \sqrt{\mu\varepsilon}} \left(\frac{\omega}{\omega_\lambda} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\varepsilon}{1} \right\} \int_A \psi^* \psi da, \quad (8.51)^*$$

где верхняя строчка в фигурных скобках соответствует ТМ-волнам, а нижняя — ТЕ-волнам и явно выделена зависимость от частоты ω .

¹⁾ Можно возбудить волновод таким образом, что данный тип волн или линейная комбинация волн будут характеризоваться комплексной функцией ψ . Тогда может появиться средний по времени поперечный поток энергии. Этот поток может быть только циркулярным, соответствуя некоторой запасенной энергии поля, и большого практического значения не имеет.

Непосредственное вычисление энергии на единицу длины волновода производится аналогично и дает

$$U = \left[\frac{1}{4\pi} \right] \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_\lambda} \right)^2 \left\{ \frac{\epsilon}{\mu} \right\} \int_A \psi^* \psi da. \quad (8.52)^*$$

Сравнивая это выражение с потоком мощности P , мы видим, что P и U пропорциональны друг другу. Коэффициент пропорциональности имеет размерность скорости (скорость потока энергии) и совпадает с групповой скоростью

$$\frac{P}{U} = \frac{k}{\omega} \frac{c^2}{\mu\epsilon} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}} = v_{\text{гр}}. \quad (8.53)$$

В последнем легко убедиться, вычисляя $v_{\text{гр}} = d\omega/dk$ из (8.39) в предположении, что диэлектрик, заполняющий волновод, является недиспергирующей средой. Отметим, что групповая скорость всегда меньше скорости волн в неограниченной среде и обращается в нуль при стремлении ω к граничной частоте ω_λ . Произведение фазовой скорости (8.40) на групповую скорость равно константе

$$v_{\text{фаз}} v_{\text{гр}} = \frac{c^2}{\mu\epsilon}, \quad (8.54)$$

что является прямым следствием соотношения $\omega\Delta\omega \sim k\Delta k$.

Наше рассмотрение до сих пор относилось к волноводам с идеально проводящими стенками. Аксиальное волновое число k_λ было либо действительным, либо чисто мнимым. Если стенки имеют конечную проводимость, то из-за омических потерь в стенках поток мощности будет затухать вдоль волновода. При большой проводимости стенок к волновому числу добавляется малая мнимая часть

$$k_\lambda \approx k_\lambda^{(0)} + i\beta_\lambda, \quad (8.55)^*$$

где $k_\lambda^{(0)}$ — волновое число для идеально проводящих стенок. Постоянную затухания β_λ можно определить, либо решая заново задачу с граничными условиями, учитывающими конечную проводимость, либо рассчитывая омические потери методом, изложенным в § 1 этой главы, и привлекая закон сохранения энергии. Мы пойдем по второму пути. Поток мощности вдоль волновода определяется выражением

$$P(z) = P_0 e^{-2\beta_\lambda z}. \quad (8.56)^*$$

Отсюда постоянная затухания равна

$$\beta_\lambda = -\frac{1}{2P} \frac{dP}{dz}, \quad (8.57)^*$$

где $-dP/dz$ — мощность, расходуемая на омический нагрев на единицу длины волновода. В соответствии с результатами § 1 эта мощность потерь равна

$$-\frac{dP}{dz} = \left[\frac{c^2}{16\pi^2} \right] \frac{1}{2\sigma\delta\mu^2} \oint_C |\mathbf{n} \times \mathbf{B}|^2 dl, \quad (8.58)^*$$

где интегрирование производится по контуру поперечного сечения волновода. Подставляя сюда поля (8.32) и (8.33), получаем

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{c^2}{32\pi^2\sigma\delta\mu^2} \left(\frac{\omega}{\omega_\lambda} \right)^2 \times \\ \times \oint_C dl \left\{ \begin{array}{l} \frac{c^2}{\omega_\lambda^2} \left| \frac{\partial\psi}{\partial n} \right|^2, \\ \frac{c^2}{\mu\varepsilon\omega_\lambda^2} \left(1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2} \right) |\mathbf{n} \times \text{grad}_t \psi|^2 + \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2} |\psi|^2, \end{array} \right\} \quad (8.59)$$

где снова верхняя строчка относится к ТМ-волнам, а нижняя — к ТЕ-волнам.

Так как поперечные производные ψ полностью определяются размером и формой волновода, то (8.59) дает явную зависимость потерь мощности от частоты. Интегралы в выражении (8.59) можно просто оценить, учитывая, что для обоих типов волн справедливо соотношение

$$\left(\nabla_t^2 + \frac{\mu\varepsilon\omega_\lambda^2}{c^2} \right) \psi = 0. \quad (8.60)$$

Отсюда следует, что (за исключением особых случаев) поперечные производные ψ по порядку величины равны $\sqrt{\mu\varepsilon} (\omega_\lambda/c) \psi$ и, следовательно,

$$\left\langle \left| \frac{\partial\psi}{\partial n} \right|^2 \right\rangle \sim \langle |\mathbf{n} \times \text{grad}_t \psi|^2 \rangle \sim \mu\varepsilon \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} \langle |\psi|^2 \rangle. \quad (8.61)$$

Это позволяет связать криволинейные интегралы в (8.59) с интегралом от $|\psi|^2$ по площади поперечного сечения. Например,

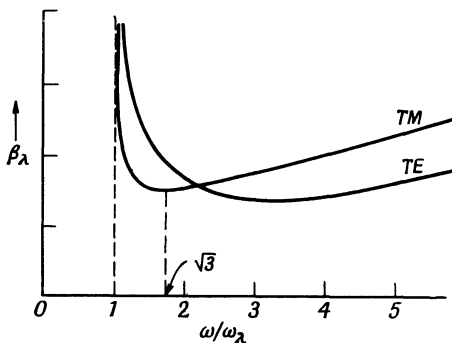
$$\oint_C \frac{c^2}{\omega_\lambda^2} \left| \frac{\partial\psi}{\partial n} \right|^2 dl = \xi_\lambda \mu\varepsilon \frac{C}{A} \int_A |\psi|^2 da, \quad (8.62)$$

где C — длина контура, A — площадь поперечного сечения, а ξ_λ — безразмерное число порядка единицы. Таким образом, не конкретизируя форму волновода, мы можем найти порядок величины постоянной затухания β_λ и ее зависимость от частоты. Используя (8.59), (8.62) и (8.51), а также зависимость толщины скин-слоя

(7.85) от частоты, получаем

$$\beta_{\lambda} = \left[\frac{c}{4\pi} \right] \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{\sigma \delta_{\lambda}} \frac{C}{2A} \frac{(\omega/\omega_{\lambda})^{1/2}}{(1 - \omega_{\lambda}^2/\omega^2)^{1/2}} \left[\xi_{\lambda} + \eta_{\lambda} \left(\frac{\omega_{\lambda}}{\omega} \right)^2 \right]; \quad (8.63)^*$$

здесь σ — проводимость (которая предполагается не зависящей от частоты), δ_{λ} — толщина скин-слоя при граничной частоте ω_{λ} , а ξ_{λ} и η_{λ} — безразмерные числа порядка единицы. Для ТМ-волн $\eta_{\lambda} = 0$.



Ф и г. 8.6. Зависимость постоянной затухания β_{λ} от частоты ω для типичных ТЕ- и ТМ-волн.

Для ТМ-волн минимум затухания достигается при $\omega/\omega_{\lambda} = \sqrt{3}$ независимо от формы поперечного сечения.

Зависимость постоянной затухания β_{λ} от частоты показана на фиг. 8.6. При $\omega \rightarrow \omega_{\lambda}$ она стремится к бесконечности (из-за обращения в нуль потока мощности P), достигает минимума при частоте порядка нескольких ω_{λ} и затем снова возрастает примерно пропорционально $\omega^{1/2}$ при $\omega \gg \omega_{\lambda}$. Для ТМ-волн минимум поглощения лежит при $\omega_{\text{мин}} = \sqrt{3} \omega_{\lambda}$ независимо от формы волновода. Для ТЕ-волн отношение величин ξ_{λ} и η_{λ} зависит от формы волновода и от λ . Поэтому нельзя в общем случае указать частоту, при которой затухание будет минимальным. В микроволновом диапазоне характерные значения постоянной затухания для меди соответствуют уменьшению мощности потока в e раз на длине 200—400 м, т. е. затуханию ~ 20 —40 дБ/км.

При заданной форме поперечного сечения волновода безразмерные константы ξ_{λ} и η_{λ} , входящие в (8.63), легко вычисляются. Для ТЕ-волн в прямоугольном волноводе имеем

$$\begin{aligned} \xi_{mnp} &= \frac{2b}{a+b} \frac{m^2 (b/a) + n^2}{m^2 (b^2/a^2) + n^2}, \\ \eta_{mnp} &= \frac{2a}{a+b} \frac{m^2 (b^3/a^3) + n^2}{m^2 (b^2/a^2) + n^2}, \end{aligned} \quad (8.64)$$

где использованы обозначения из § 4 и $m \neq 0$, $n \neq 0$. Соответствующие выражения для ТЕ-волн с $n = 0$ имеют вид

$$\xi_{m0} = \frac{a}{a+b}, \quad \eta_{m0} = \frac{2b}{a+b}. \quad (8.65)$$

Мы видим, что при разумных соотношениях между a и b эти параметры имеют порядок единицы независимо от величин m и n . Расчет параметров ξ_{mn} и η_{mn} для ТМ-волн мы предоставляем читателю в качестве упражнения. Другие формы поперечного сечения рассматриваются в задачах к этой главе.

В реальных случаях затухание волн связано также и с потерями в диэлектрике, заполняющем волновод. Если поглощающая способность диэлектрика известна, то это дополнительное затухание может быть найдено методом, аналогичным использованному при определении потерь в стенках волновода.

§ 6. Резонаторы

Электромагнитные резонаторы могут иметь самые разнообразные формы. Особо важным классом являются резонаторы, представляющие собой цилиндрические волноводы с закрытыми торцами. Мы будем считать, что торцовые поверхности являются плоскостями, перпендикулярными оси цилиндра. Как обычно, примем, что стенки резонатора имеют бесконечную проводимость и что резонатор заполнен диэлектриком без потерь, имеющим характеристики ϵ , μ . Вследствие отражения от торцовых поверхностей зависимость полей от z должна соответствовать стоячим волнам

$$A \sin kz + B \cos kz.$$

Если торцовые стенки расположены при $z = 0$ и $z = d$, то граничные условия на них выполняются только при значениях k , удовлетворяющих соотношению

$$k = p \frac{\pi}{d}, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (8.66)$$

Для ТМ-колебаний из условия обращения в нуль поля E_z при $z = 0$ и $z = d$ получаем

$$E_z = \psi(x, y) \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right), \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (8.67)$$

Аналогично для ТЕ-колебаний условие обращения B_z в нуль при $z = 0$ и $z = d$ дает

$$B_z = \psi(x, y) \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right), \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (8.68)$$

Поперечные составляющие полей находятся из (8.24):

ТМ-колебания

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t &= -\frac{\rho\pi}{\gamma^2 d} \sin\left(\frac{\rho\pi z}{d}\right) \text{grad}_t \psi, \\ \mathbf{B}_t &= \frac{i\mu\varepsilon\omega}{\gamma^2 c} \cos\left(\frac{\rho\pi z}{d}\right) \mathbf{e}_3 \times \text{grad}_t \psi \end{aligned} \quad (8.69)$$

ТЕ-колебания

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t &= -\frac{i\omega}{\gamma^2 c} \sin\left(\frac{\rho\pi z}{d}\right) \mathbf{e}_3 \times \text{grad}_t \psi, \\ \mathbf{B}_t &= \frac{\rho\pi}{\gamma^2 d} \cos\left(\frac{\rho\pi z}{d}\right) \text{grad}_t \psi. \end{aligned} \quad (8.70)$$

Граничные условия на торцах резонатора здесь, очевидно, выполнены, и мы, как и ранее, приходим к задаче на собственные значения (8.34) — (8.36). Однако теперь постоянная γ^2 равна

$$\gamma^2 = \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\rho\pi}{d}\right)^2. \quad (8.71)$$

Для каждого ρ собственное значение γ_λ^2 определяет собственное значение резонансной частоты

$$\omega_{\lambda\rho}^2 = [c^2] \frac{1}{\mu\varepsilon} \left[\gamma_\lambda^2 + \left(\frac{\rho\pi}{d}\right)^2 \right] \quad (8.72)^*$$

и поля, соответствующие этому резонансному типу волны. Резонансные частоты образуют дискретный спектр и могут быть определены из графика зависимости аксиального волнового числа k от частоты в волноводе (см. фиг. 8.4), если учесть, что $k = \rho\pi/d$. Обычно желательно выбирать размеры резонатора так, чтобы рабочая резонансная частота была достаточно удалена от других резонансных частот. В этом случае резонатор будет более стабилен в работе и нечувствителен к возмущающим эффектам, связанным с изменением частоты, нагрузки и т. д.

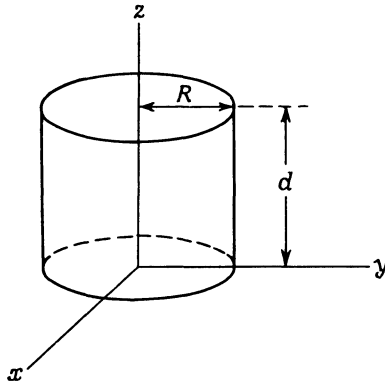
Очень часто применяется резонатор в виде прямого круглого цилиндра, иногда с поршнем, позволяющим производить настройку путем изменения длины резонатора. На фиг. 8.7 показан такой цилиндр с внутренним радиусом R и длиной d . Для ТМ-колебаний решение поперечного волнового уравнения для $\psi = E_z$, удовлетворяющее граничному условию $E_z = 0$ при $\varrho = R$, имеет вид

$$\psi(\varrho, \varphi) = J_m(\gamma_{mn}\varrho) e^{\pm im\varphi}, \quad (8.73)$$

где

$$\gamma_{mn} = \frac{x_{mn}}{R}, \quad (8.74)$$

а x_{mn} представляет собой n -й корень уравнения $J_m(x) = 0$. Эти корни приведены на стр. 90 после уравнения (3.92). Число m



Ф и г. 8.7.

принимает значения $m = 0, 1, 2, \dots$, число n —значения $n = 1, 2, 3, \dots$, а резонансные частоты определяются формулой

$$\omega_{mnp} = [c] \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{x_{mn}^2}{R^2} + \frac{p^2\pi^2}{d^2}}. \quad (8.75)^*$$

Низшую частоту имеет ТМ-колебание, соответствующее $m = 0$, $n = 1$, $p = 0$ и обозначаемое через ТМ₀₁₀. Эта резонансная частота равна

$$\omega_{010} = \frac{2,405}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{c}{R}. \quad (8.76)$$

Поля в этом случае описываются соотношениями

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 J_0 \left(\frac{2,405q}{R} \right) e^{-i\omega t}, \\ B_\varphi &= -i \sqrt{\mu\epsilon} E_0 J_1 \left(\frac{2,405q}{R} \right) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (8.77)$$

Резонансная частота этого типа колебаний не зависит от d , поэтому простая настройка перемещением поршня в данном случае невозможна.

Для ТЕ-колебаний также применимо основное решение (8.73), однако граничное условие для $B_z \left(\frac{\partial \psi}{\partial q} \Big|_R = 0 \right)$ приводит теперь к равенству

$$\gamma_{mn} = \frac{x'_{mn}}{R}, \quad (8.78)$$

где x'_{mn} является n -м корнем уравнения $J'_m(x) = 0$. Эти корни для первых нескольких значений m и n приводятся ниже:

Корни уравнения $J'_m(x) = 0$

$$m = 0: \quad x'_{0n} = 3,832, \quad 7,016, \quad 10,174, \quad \dots$$

$$m = 1: \quad x'_{1n} = 1,841, \quad 5,331, \quad 8,536, \quad \dots$$

$$m = 2: \quad x'_{2n} = 3,054, \quad 6,706, \quad 9,970, \quad \dots$$

$$m = 3: \quad x'_{3n} = 4,201, \quad 8,015, \quad 11,336, \quad \dots$$

Резонансные частоты определяются выражением

$$\omega_{mnp} = [c] \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left(\frac{x'^2_{mn}}{R^2} + \frac{p^2\pi^2}{d^2} \right)^{1/2}, \quad (8.79)^*$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$, а $n, p = 1, 2, 3, \dots$. Низшее колебание ТЕ-типа соответствует $m = n = p = 1$ и обозначается TE_{111} . Его резонансная частота равна

$$\omega_{111} = \frac{1,841}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{c}{R} \left(1 + 2,912 \frac{R^2}{d^2} \right)^{1/2}, \quad (8.80)$$

а поля выражаются с помощью (8.70) через B_z :

$$B_z = B_0 J_1 \left(\frac{1,841\rho}{R} \right) \cos \varphi \sin \left(\frac{\pi z}{d} \right) e^{-i\omega t}. \quad (8.81)$$

При достаточно большом d ($d > 2,03 R$) резонансная частота ω_{111} меньше, чем низшая частота ТМ-колебания [см. (8.76)]. В этом случае TE_{111} -колебание представляет собой основной тип колебаний резонатора. Поскольку эта частота зависит от отношения d/R , то имеется возможность производить настройку резонатора путем перемещения его торцовых стенок.

§ 7. Потери мощности в резонаторе. Добротность резонатора

В предыдущем параграфе мы показали, что резонаторы имеют дискретные резонансные частоты колебаний, которым соответствуют определенные конфигурации полей. Это означает, что каким бы способом мы ни пытались возбудить колебания данного типа, никаких полей правильной формы не возникнет до тех пор, пока частота возбуждения не будет в точности равна резонансной частоте. В действительности резонансная кривая не имеет вида δ -функции, а вокруг резонансной частоты имеется некоторый весьма узкий интервал частот, внутри которого возможно заметное возбуждение резонатора. Наиболее существенной причиной расплывания резонанс-

ного пика являются потери энергии в стенках резонатора, а также в заполняющем его диэлектрике. Мерой остроты резонанса по отношению к внешнему возбуждению является добротность резонатора Q , определяемая как отношение средней энергии, запасенной в резонаторе, к энергии, теряемой за период колебаний:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{\text{Запасенная энергия}}{\text{Мощность потерь}}; \quad (8.82)^*$$

здесь ω_0 — резонансная частота при отсутствии потерь. Согласно закону сохранения энергии, мощность омических потерь равна взятой с обратным знаком производной по времени от запасенной энергии U . Поэтому формулу (8.82) можно записать в виде уравнения для U

$$\left. \begin{aligned} \text{откуда} \quad & \frac{dU}{dt} = -\frac{\omega_0}{2\pi Q} U, \\ & U(t) = U_0 e^{-\omega_0 t / 2\pi Q}. \end{aligned} \right\} \quad (8.83)$$

Запасенная в начальный момент энергия U_0 экспоненциально убывает со скоростью, обратно пропорциональной Q . Временная зависимость (8.83) означает, что колебания поля в резонаторе затухают по закону

$$E(t) = E_0 e^{-\omega_0 t / 4\pi Q} e^{-i\omega_0 t}. \quad (8.84)$$

Такого рода затухающие колебания имеют не одну частоту, а представляют собой суперпозицию частот, расположенных в окрестности $\omega = \omega_0$. Таким образом,

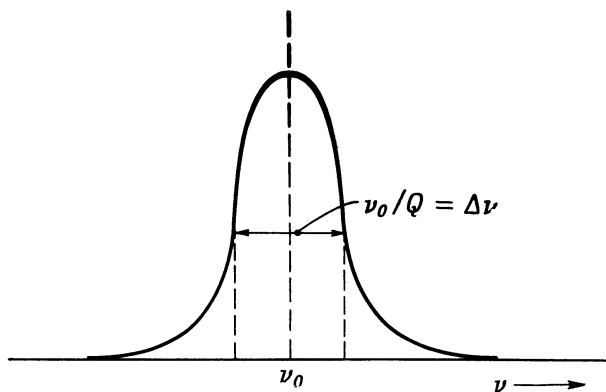
$$\left. \begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \\ \text{где} \quad E(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} E_0 e^{-\omega_0 t / 4\pi Q} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt. \end{aligned} \right\} \quad (8.85)$$

Интегрирование в (8.85) производится элементарно и приводит к частотному распределению энергии в резонаторе, имеющему вид лоренцовского пика:

$$|E(\omega)|^2 \sim \frac{1}{(\nu - \nu_0)^2 + (\nu_0 / 2Q)^2}. \quad (8.86)$$

В (8.86) мы перешли от угловых частот ω и ω_0 к линейным $\nu = \omega / 2\pi$ и $\nu_0 = \omega_0 / 2\pi$ в соответствии с определением Q . У резонансного пика (8.86), изображенного на фиг. 8.8, полная ширина

на высоте, равной половине максимальной (которую, к сожалению, часто называют «полушириной»), составляет ν_0/Q . При постоянном возбуждающем напряжении энергия колебаний в резонаторе в зависимости от частоты будет изменяться в окрестности резонансной



Ф и г. 8.8. Резонансный пик.

Полная ширина $\Delta\nu$ на половине максимума (по мощности) равна отношению центральной частоты ν_0 к добротности резонатора Q .

частоты, следуя резонансной кривой. Если $\Delta\nu$ — разность частот, соответствующих точкам половинной мощности, то добротность резонатора равна

$$Q = \frac{\nu_0}{\Delta\nu}. \quad (8.87)$$

Величина Q для микроволновых резонаторов обычно имеет порядок сотен или тысяч.

Для определения добротности необходимо рассчитать среднюю по времени энергию, накопленную в резонаторе, а затем найти мощность, поглощаемую в стенках. Вычисления аналогичны проведенным в § 5 при расчете затухания в волноводах. Мы ограничимся здесь рассмотрением цилиндрического резонатора, описанного в § 6. Энергия, запасенная в резонаторе для возбуждения колебания λ, p -типа в соответствии с (8.67) — (8.70), равна

$$U = \left[\frac{1}{4\pi} \right] \frac{d}{4} \left\{ \begin{array}{c} \epsilon \\ 1 \\ \mu \end{array} \right\} \left[1 + \left(\frac{p\pi}{\gamma\lambda d} \right)^2 \right] \int_A |\psi|^2 da, \quad (8.88)^*$$

где верхняя строчка относится к ТМ-, а нижняя — к ТЕ-типу колебаний. Для ТМ-типа при $p = 0$ следует еще ввести множитель 2.

Мощность потерь можно рассчитать по несколько измененной формуле (8.58)

$$P_{\text{пт}} = \left[\frac{c^2}{16\pi^2} \right] \frac{1}{2\sigma\delta\mu^2} \left[\oint_C dl \int_0^d dz |\mathbf{n} \times \mathbf{B}|_{\text{бок}}^2 + \right. \\ \left. + 2 \int_A da |\mathbf{n} \times \mathbf{B}|_{\text{торц}}^2 \right]. \quad (8.89)^*$$

Для ТМ-типов колебаний с $p \neq 0$ легко показать, что

$$P_{\text{пт}} = \left[\frac{c^2}{16\pi^2} \right] \frac{\varepsilon}{\sigma\delta\mu} \left[1 + \left(\frac{p\pi}{\gamma_\lambda d} \right)^2 \right] \left(1 + \xi_\lambda \frac{Cd}{4A} \right) \int_A |\psi|^2 da; \quad (8.90)^*$$

здесь ξ_λ — то же самое безразмерное число, что и в (8.62), C — длина контура поперечного сечения резонатора, а A — площадь этого сечения. Для $p = 0$ величину ξ_λ следует заменить на $2\xi_\lambda$. Подставляя (8.88) и (8.89) в выражение (8.82) и используя определение (7.85) толщины скин-слоя, найдем добротность резонатора Q :

$$Q = \frac{\mu}{\mu_c} \frac{d}{\delta} \frac{1}{4\pi(1 + \xi_\lambda Cd/4A)}, \quad (8.91)^*$$

где μ_c — магнитная проницаемость металлических стенок резонатора. Для $p = 0$ следует в (8.91) умножить правую часть на 2, а ξ_λ заменить на $2\xi_\lambda$. Выражению для Q можно дать простую физическую интерпретацию, если записать его в виде

$$Q = \frac{\mu}{\mu_c} \frac{V}{S\delta} G, \quad (8.92)^*$$

где G — некоторый геометрический множитель, V — объем резонансной полости, а S — площадь его поверхности. Отвлекаясь от геометрического множителя, мы видим, что добротность Q равна отношению объема, занятого полем, к объему проводника, в который поле проникает вследствие конечной проводимости. Для ТМ-колебаний в цилиндрическом резонаторе геометрический множитель имеет вид

$$G = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + Cd/2A}{1 + \xi_\lambda Cd/4A} \quad (8.93)$$

для $p \neq 0$ и

$$G = \frac{1}{\pi} \frac{1 + Cd/2A}{1 + \xi_\lambda Cd/2A} \quad (8.94)$$

для $p = 0$. Для ТЕ-колебаний в цилиндрическом резонаторе геометрический множитель несколько более сложен, но имеет такой же

порядок величины. Для ТМ₀₁₀-типа в круглом цилиндрическом резонаторе, поле в котором описывается выражением (8.77), $\xi_\lambda = 1$ (это верно для всех ТМ-типов), так что геометрический множитель равен $1/\pi$ и

$$Q = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu}{\mu_c} \frac{1}{1+d/R} \frac{d}{\delta}. \quad (8.95)^*$$

Для ТЕ₁₁₁-типа геометрический множитель¹⁾, как показывают вычисления, имеет следующий вид:

$$G = \frac{1+d/R}{2\pi} \frac{1+0,344d^2/R^2}{1+0,209d/R+0,242d^3/R^3} \quad (8.96)$$

и соответственно

$$Q = \frac{\mu}{4\pi\mu_c} \frac{d}{\delta} \frac{1+0,344d^2/R^2}{1+0,209d/R+0,242d^3/R^3}. \quad (8.97)^*$$

Соотношение (8.92) для Q применимо не только к цилиндрическим резонаторам, но и к резонаторам произвольной формы, причем множитель G обычно имеет величину порядка $1/2\pi$.

§ 8. Диэлектрические волноводы

В § 2—5 мы рассматривали волноводы, представляющие собой полые металлические трубы с полем внутри. Возможны и другие волноводные системы. Простейшим примером может служить двухпроводная линия передачи. Отличительной чертой электромагнитных волноводов является то, что энергия в них может распространяться только вдоль волновода, а не в перпендикулярном направлении. Это означает, что поля локализованы в основном лишь в непосредственной окрестности волноводной системы. Для полых волноводов это требование удовлетворяется тривиальным образом. Но для открытых систем, таких, как двухпроводная линия, поля простираются на некоторое расстояние в сторону от проводников, спадая как $1/\rho^2$ для ТЕМ-волны и экспоненциально для волн высших типов.

Диэлектрический цилиндр типа показанного на фиг. 8.9 также может служить волноводом, причем при достаточно большой диэлектрической проницаемости он по свойствам весьма близок к полному металлическому волноводу. Имеются, однако, характерные особенности, связанные с существенным различием граничных условий. Общие выводы § 2 здесь также справедливы, но поведение полей в поперечном направлении описывается теперь двумя уравнениями типа (8.19): одно для области внутри цилиндра, а дру-

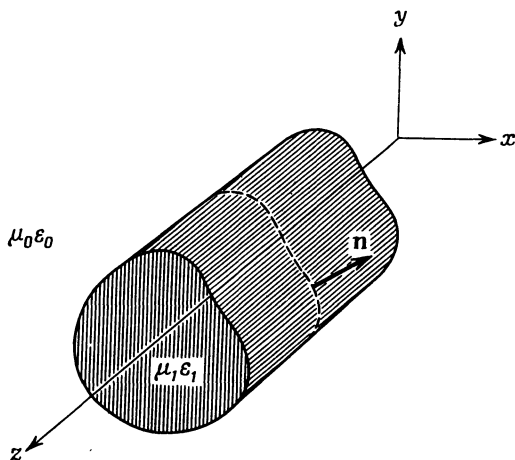
¹⁾ Отметим, что этот множитель меняется всего на 30% при изменении отношения d/R от $d/R \gg 1$ до $d/R \ll 1$.

гое для внешней области. Эти уравнения имеют вид

$$\left[\nabla_i^2 + \left(\mu_1 \varepsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = 0, \quad (8.98)$$

$$\left[\nabla_i^2 + \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = 0, \quad (8.99)$$

причем (8.98) соответствует внутренней, а (8.99) — внешней области. Как диэлектрик (μ_1, ε_1), так и окружающее пространство (μ_0, ε_0) предполагаются здесь однородными и изотропными. Чтобы



Ф и г. 8.9. Отрезок диэлектрического волновода.

граничные условия удовлетворялись во всех точках поверхности цилиндра в произвольный момент времени, постоянная распространения (волновое число) k должна быть одинаковой внутри и вне цилиндра.

Как обычно, внутри диэлектрического цилиндра двумерный оператор Лапласа ∇_i^2 должен быть отрицательным, так что постоянная

$$\gamma^2 = \mu_1 \varepsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \quad (8.100)$$

положительна. Вне цилиндра условие отсутствия поперечного потока энергии приводит к требованию экспоненциального убывания полей. (В диэлектрическом волноводе не существует ТЕМ-волны.) Соответственно величина в круглых скобках в (8.99) должна быть отрицательной. Введем обозначение

$$\beta^2 = k^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} \quad (8.101)$$

и будем требовать далее, чтобы волноводному решению соответствовало положительное значение β^2 (действительное β).

На границе диэлектрического цилиндра следует сшить осциллирующие решения внутри цилиндра с экспоненциальными решениями вне него. Граничными условиями являются непрерывность нормальных составляющих \mathbf{B} и \mathbf{D} и тангенциальных составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} (а не обращение в нуль нормальной составляющей \mathbf{B} и тангенциальной \mathbf{E} , как это было в случае полых металлических волноводов). Из-за более сложных граничных условий поля не могут быть разделены на ТЕ- и ТМ-волны, за исключением частных случаев, как, например, аксиально-симметричные волны в круглом цилиндре, которые и будут рассмотрены ниже. В общем же случае существуют продольные составляющие как \mathbf{E} , так и \mathbf{B} . Такие волны иногда обозначаются как HE -волны.

Для иллюстрации некоторых свойств диэлектрического волновода рассмотрим круглый цилиндр радиусом a из немагнитного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , расположенный во внешней немагнитной среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 . Будем считать для простоты, что поля не зависят от азимутального угла. При этом радиальные уравнения для E_z и B_z являются уравнениями Бесселя:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \gamma^2 \right) \psi &= 0, & \rho \leq a, \\ \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \beta^2 \right) \psi &= 0, & \rho > a. \end{aligned} \quad (8.102)$$

Решения, удовлетворяющие требованиям конечности в нуле и на бесконечности, согласно гл. 3, § 6, имеют вид

$$\psi = \begin{cases} J_0(\gamma\rho), & \rho \leq a, \\ AK_0(\beta\rho), & \rho > a. \end{cases} \quad (8.103)$$

При известных E_z и B_z остальные составляющие \mathbf{E} и \mathbf{B} можно определить с помощью (8.24). При отсутствии зависимости от азимутального угла ϕ соотношения (8.24) внутри цилиндра принимают вид

$$\begin{aligned} B_\rho &= \frac{ik}{\gamma^2} \frac{\partial B_z}{\partial \rho}, & B_\phi &= \frac{i\epsilon_1\omega}{\gamma^2 c} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}, \\ E_\phi &= -\frac{\omega}{ck} B_\rho, & E_\rho &= \frac{ck}{\epsilon_1\omega} B_\phi. \end{aligned} \quad (8.104)$$

Аналогичные соотношения имеют место для $\rho > a$. Тот факт, что поля разбиваются на две группы (B_ρ и E_ϕ зависят от B_z , а B_ϕ и E_ρ зависят от E_z), дает возможность получить решения ТЕ- и ТМ-типов, как и в металлическом волноводе. Для ТЕ-типов яв-

ные выражения для составляющих поля имеют вид

$$\left. \begin{aligned} B_z &= J_0(\gamma \varrho), \\ B_\rho &= -\frac{ik}{\gamma} J_1(\gamma \varrho), \\ E_\varphi &= \frac{i\omega}{c\gamma} J_1(\gamma \varrho) \end{aligned} \right\} \varrho \leq a \quad (8.105)$$

и

$$\left. \begin{aligned} B_z &= AK_0(\beta \varrho), \\ B_\rho &= \frac{ikA}{\beta} K_1(\beta \varrho), \\ E_\varphi &= -\frac{i\omega A}{c\beta} K_1(\beta \varrho). \end{aligned} \right\} \varrho > a \quad (8.106)$$

Эти поля должны удовлетворять известным граничным условиям при $\varrho = a$, которые приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} AK_0(\beta a) &= J_0(\gamma a), \\ -\frac{A}{\beta} K_1(\beta a) &= \frac{J_1(\gamma a)}{\gamma}. \end{aligned} \quad (8.107)$$

Исключая константу A , получаем уравнения для определения γ , β , а следовательно, и k :

$$\begin{aligned} \frac{J_1(\gamma a)}{\gamma J_0(\gamma a)} + \frac{K_1(\beta a)}{\beta K_0(\beta a)} &= 0, \\ \gamma^2 + \beta^2 &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{\omega^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (8.108)$$

Последнее равенство вытекает из (8.100) и (8.101). Поведение обоих слагаемых первого соотношения (8.108) изображено на фиг. 8.10, а. На фиг. 8.10, б обе кривые изображены в функции γa в соответствии со вторым соотношением (8.108). На графике изображен случай достаточно большой частоты, при которой существуют два типа волн, обозначенных кружками на пересечении кривых. Вертикальные асимптоты дают корни $J_0(x) = 0$. Если максимальная величина γa меньше первого корня $x_{01} = 2,405$, то при действительном β кривые не пересекаются. Таким образом, нижняя «граничная» частота для TE_{0n} -волн равна

$$\omega_{01} = \frac{2,405c}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_0 a}}. \quad (8.109)$$

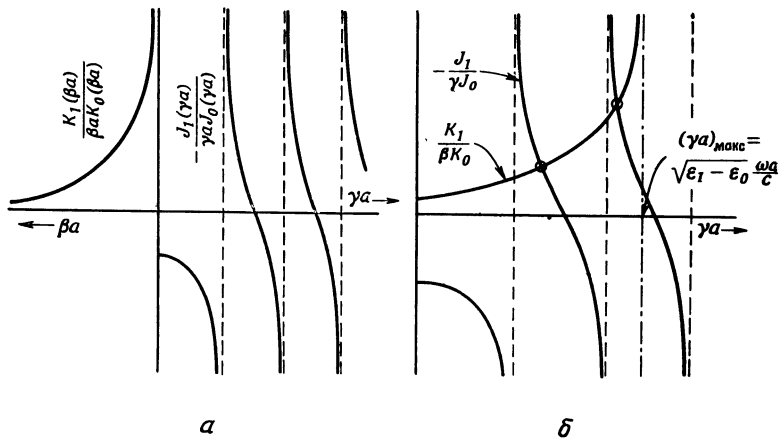
При этой частоте $\beta^2 = 0$, но продольное волновое число k еще остается действительным и равно волновому числу $\sqrt{\varepsilon_0} \omega / c$ в свободном пространстве. Для частот ниже «граничной» частоты система перестает быть волноводом и становится антенной, излу-

чающей энергию в радиальном направлении. Для частот, существенно больших граничной, β и k имеют один порядок величины, и если разница между ϵ_1 и ϵ_0 не очень мала, то β и k много больше γ .

Для ТМ-волн первое соотношение (8.108) заменяется соотношением

$$\frac{J_1(\gamma a)}{\gamma J_0(\gamma a)} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \frac{K_1(\beta a)}{\beta K_0(\beta a)} = 0. \quad (8.110)$$

Очевидно, все качественные характеристики, которые видны на фиг. 8.10, сохраняются и для ТМ-волн. Ясно также, что низшая

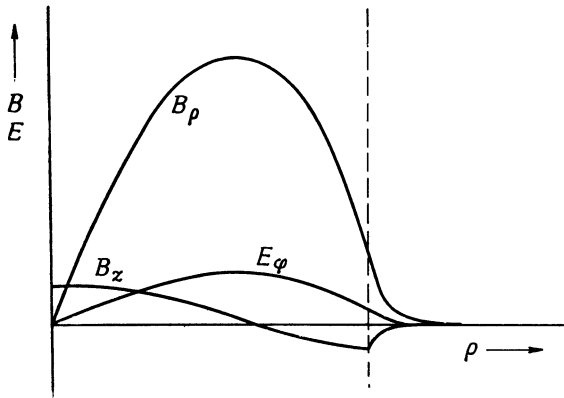


Ф и г. 8.10. К графическому определению продольной постоянной распространения для диэлектрического волновода.

граничная частота для TM_{0n} -волн та же самая, что и для TE_{0n} -волн. При $\epsilon_1 \gg \epsilon_0$ постоянная распространения, согласно (8.110), приближенно определяется уравнением $J_1(\gamma a) \approx 0$, если только максимальная величина γa не лежит слишком близко к одному из корней уравнения $J_0(x) = 0$. Таким же уравнением определяется и постоянная распространения для ТЕ-волн в металлическом волноводе. Причиной эквивалентности ТМ-волн в диэлектрическом волноводе и ТЕ-волн в полном металлическом волноводе является симметрия уравнений Максвелла относительно перестановки \mathbf{E} и \mathbf{B} (с необходимым изменением знака и введением множителей $\sqrt{\mu\epsilon}$) и соответствие между граничными условиями обращения в нуль нормальной составляющей \mathbf{B} на металлической поверхности и почти нулевой нормальной составляющей \mathbf{E} на поверхности диэлектрика (вследствие непрерывности нормальной слагающей \mathbf{D} при $\epsilon_1 \gg \epsilon_0$).

Если $\epsilon_1 \gg \epsilon_0$, то из (8.100) и (8.101) следует, что внешняя постоянная затухания β много больше γ (за исключением окрестности граничной частоты). Это означает, что поля быстро убывают

при удалении от цилиндра. На фиг. 8.11 качественно показано поведение полей для TE_{01} -волны. Другие типы волн ведут себя аналогично. Как отмечалось ранее, у типов волн с азимутальной зависимостью полей продольные составляющие как \mathbf{E} , так и \mathbf{B} отличны от нуля. Хотя их математический анализ и более сложен (см. задачу 8.6), однако качественно характер распространения — малая



Ф и г. 8.11. Радиальная зависимость полей TE_{01} -волны в диэлектрическом волноводе.

При $\epsilon_1 \gg \epsilon_0$ поля в основном сосредоточены внутри диэлектрика. Пунктиром изображена граница диэлектрика.

длина волны вдоль цилиндра, быстрое убывание полей вне цилиндра и т. д. — остается тем же самым, что и в случае аксиально-симметричных волн.

До сих пор диэлектрические волноводы не использовались для передачи микроволн, кроме некоторых специальных приложений. Одной из причин этого является трудность получения подходящего диэлектрика, имеющего достаточно малые потери в микроволновом диапазоне частот. Недавно для оптических частот начали применять очень тонкие диэлектрические волокна, покрытые тонким слоем из материала с существенно меньшим показателем преломления. Плотный перевитый пучок таких волокон служит для передачи оптических изображений [21]. Диаметр волокон достаточно мал (~ 10 мк), чтобы к ним были применимы понятия волновода, хотя по ним обычно распространяется смесь различных типов волн.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Волноводы и резонаторы описаны в многочисленных книгах по электротехнике и связи. Среди физических учебников, где рассматриваются волноводы, линии передачи и резонаторы, отметим книги Пановского и Филипс

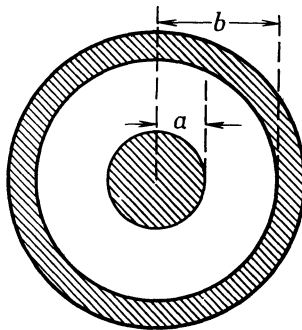
[78], гл. 12, Слэтера [97], Зоммерфельда [102] и Стрэттона [106]. Математические методы решения граничных задач приведены в книге Морса и Фешбаха [77], особенно гл. 13. Сведения о специальных функциях можно найти в книге Магнуса и Оберхеттингера [70]. Численные значения бесселевых функций приведены в таблицах Янке и Эмде [54] и в книге Ватсона [114].

Дополнение редактора. См. также монографию Вайнштейна [122], посвященную главным образом исследованию электромагнитных волн в волноводах и резонаторах.

Вопросы дифракции подробно рассмотрены в работе [132]; см. также [122].

ЗАДАЧИ

8.1. Линия передачи, состоящая из двух коаксиальных круглых металлических цилиндров с проводимостью σ и толщиной скин-слоя δ (фиг. 8.12), заполнена однородным диэлектриком (μ , ε), потери в котором отсутствуют. Вдоль линии распространяется поперечная ТЕМ-волна.



Ф и г. 8.12.

а) Показать, что средний по времени поток мощности вдоль линии равен

$$P = \left[\frac{c}{4\pi} \right] \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \pi a^2 |H_0|^2 \ln \frac{b}{a},$$

где H_0 — амплитудное значение азимутального магнитного поля на поверхности внутреннего проводника.

б) Показать, что мощность убывает с расстоянием вдоль линии по закону

$$P(z) = P_0 e^{-2\gamma z},$$

где

$$\gamma = \left[\frac{c}{4\pi} \right] \frac{1}{2\sigma\delta} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1/a + 1/b}{\ln b/a}.$$

в) Характеристический импеданс линии Z_0 определяется как отношение напряжения между цилиндрами при любом заданном z к продольному току, текущему по одному из цилиндров. Показать, что для такой линии

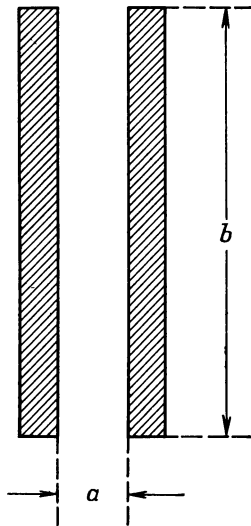
$$Z_0 = \left[\frac{4\pi}{c} \right] \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{b}{a}.$$

г) Показать, что сопротивление и индуктивность на единицу длины линии описываются выражениями

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma\delta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

$$L = \left[\frac{4\pi}{c^2} \right] \left\{ \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu_c\delta}{4\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right\},$$

где μ_c — магнитная проницаемость проводника. Поправка к индуктивности связана с проникновением поля на глубину порядка δ внутрь проводника.



Ф и г. 8.13.

8.2. Линия передачи состоит из двух одинаковых тонких металлических полос, показанных в поперечном сечении на фиг. 8.13. Предполагая, что $b \gg a$, рассмотреть распространение ТЕМ-волны в такой линии аналогично задаче 8.1. Показать, что

$$P = \left[\frac{c}{4\pi} \right] \frac{ab}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} |H_0|^2,$$

$$\gamma = \left[\frac{c}{4\pi} \right] \frac{1}{a\sigma\delta} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}},$$

$$Z_0 = \left[\frac{4\pi}{c} \right] \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{a}{b},$$

$$R = \frac{1}{2\sigma\delta b},$$

$$L = \left[\frac{4\pi}{c^2} \right] \left(\frac{\mu a + \mu_c \delta}{b} \right),$$

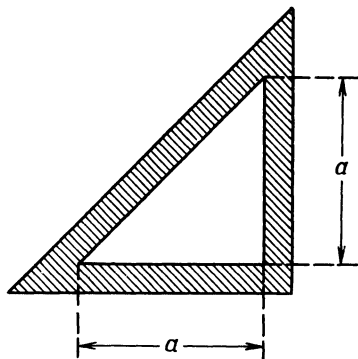
где использованы те же обозначения, что и в задаче 8.1.

8.3. Поперечные электрические и магнитные волны распространяются вдоль полого прямого круглого медного цилиндра с внутренним радиусом R .

а) Найти граничные частоты для различных ТЕ- и ТМ-волн. Определить численно низшую граничную частоту, выраженную через радиус волновода, и отношение граничных частот следующих четырех высших типов волн к этой основной частоте.

б) Рассчитать зависимость постоянной затухания в волноводе от частоты для двух низших типов волн и построить график этой частотной зависимости.

8.4. В поперечном сечении волновод представляет собой прямоугольный треугольник со сторонами a , a , $\sqrt{2}a$ (фиг. 8.14). Внутренняя среда имеет характеристики $\mu = \epsilon = 1$.



Фиг. 8.14.

а) Предполагая бесконечную проводимость стенок, определить возможные типы распространяющихся волн и их граничные частоты.

б) Для низших волн каждого типа рассчитать постоянную затухания при условии, что стенки имеют большую, но конечную проводимость. Сравнить полученные результаты с соответствующими результатами для квадратного волновода с ребром a , сделанного из того же материала.

8.5. Медный резонатор представляет собой полый прямой круглый цилиндр с внутренним радиусом R и длиной L , с плоскими торцовыми поверхностями.

а) Определить резонансные частоты такого резонатора для всех типов колебаний. Принимая $c/\sqrt{\mu\epsilon}R$ за единицу частоты, построить кривые зависимости четырех низших резонансных частот каждого типа от R/L для $0 < R/L < 2$. Соответствует ли одному и тому же типу колебаний наименьшая частота при всех R/L ?

б) Пусть $R = 2$ см, $L = 3$ см и резонатор изготовлен из чистой меди. Чему равна численная величина добротности для низшего резонансного типа колебаний?

8.6. Прямой круглый цилиндр радиусом a из непроводящего диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ расположен в свободном пространстве и используется в качестве диэлектрического волновода.

а) Рассмотреть распространение волн вдоль такого волновода, предполагая азимутальную зависимость полей вида $e^{im\phi}$.

б) Полагая $m = \pm 1$, определить тип волн с низшей граничной частотой и рассмотреть свойства его полей (граничную частоту, пространственное изменение и т. д.) в предположении, что $\epsilon \gg 1$.

ПРОСТЕЙШИЕ ИЗЛУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ И ДИФРАКЦИЯ

В двух предыдущих главах мы рассмотрели свойства электр-магнитных волн и их распространение в ограниченном и неограниченном пространствах. Однако при этом ничего не было сказано о получении таких волн. В настоящей главе мы частично восполним этот пробел и рассмотрим излучение волн ограниченными системами колеблющихся зарядов и токов. Если рассматривать только достаточно простые излучающие системы, то можно ограничиться сравнительно простым математическим аппаратом. Более систематическое изложение теории излучения будет дано в гл. 16, где рассматриваются мультипольные поля.

Вторая половина главы посвящена вопросам дифракции. Так как скалярная теория Кирхгофа обычно излагается во многих книгах, мы сосредоточим основное внимание на векторных свойствах дифракционных электромагнитных полей.

§ 1. Поля, создаваемые ограниченными колеблющимися источниками

Систему зарядов и токов, изменяющихся во времени, всегда можно разложить на гармоники с помощью рядов или интегралов Фурье и рассматривать в отдельности каждую гармонику. Поэтому без ущерба для общности мы можем рассматривать потенциалы, поля и излучение ограниченной системы зарядов и токов, изменяющихся во времени по синусоидальному закону:

$$\begin{aligned} \varrho(\mathbf{x}, t) &= \varrho(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{J}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Как обычно, для нахождения истинных физических величин следует брать действительную часть этих выражений. Предпола-

гается, что электромагнитные потенциалы и поля имеют такую же временную зависимость.

В гл. 6 было показано, что в случае отсутствия ограничивающих поверхностей решение волнового уравнения для векторного потенциала при лоренцевской калибровке имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3x' \int dt' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t\right). \quad (9.2)$$

Дельта-функция обеспечивает конечную скорость распространения полей. При синусоидальной зависимости от времени (9.1) решение для \mathbf{A} принимает вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (9.3)$$

где $k = \omega/c$ — волновое число, а множитель $e^{-i\omega t}$ подразумевается. Магнитное поле определяется соотношением

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (9.4)$$

а электрическое поле вне источников равно

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k} \text{rot } \mathbf{B}. \quad (9.5)$$

При заданном распределении токов $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ поля, по крайней мере в принципе, могут быть найдены, если вычислен интеграл (9.3). В § 4 этой главы мы рассмотрим некоторые примеры прямого вычисления этого интеграла. Однако сначала мы установим некоторые простые, но общие свойства полей, предполагая, что токи сосредоточены в очень малой по сравнению с длиной волны области. Если размеры источника имеют величину порядка d , а длина волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ и $d \ll \lambda$, то представляют интерес три области

ближняя (статическая) зона: $d \ll r \ll \lambda$,
 промежуточная (индукционная) зона: $d \ll r \sim \lambda$,
 дальняя (волновая) зона: $d \ll \lambda \ll r$.

Мы увидим, что свойства полей в разных зонах весьма различны. В ближней зоне поля носят характер статических полей: имеются отличные от нуля радиальные составляющие, и изменение полей с расстоянием зависит от свойств источника. В дальней зоне, напротив, поля перпендикулярны радиусу-вектору и всегда спадают по закону $1/r$, характерному для полей излучения.

Если мы рассматриваем поля вдали от источника, т. е. случай $r \gg d$ (не делая никаких предположений об отношении r к λ), то в интеграле (9.3) можно положить

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}', \quad (9.6)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{x} . При этом векторный потенциал принимает вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{cr} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'}}{1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'/r} d^3x'. \quad (9.7)$$

Предполагая что $r \gg d$ и $d \ll \lambda$, можно разложить экспоненту и знаменатель в ряд по $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')$:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'}}{1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'/r} &= 1 + \left(\frac{1}{r} - ik \right) (\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}') + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r^2} - \frac{2ik}{r} - k^2 \right) (\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')^2 + \dots \end{aligned} \quad (9.8)$$

Подставив это разложение в (9.7), получим m -й член ряда для \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}_m = \frac{e^{ikr}}{cr} \frac{(-ik)^m}{m!} \left(1 + \frac{a_1}{ikr} + \dots + \frac{a_m}{(ikr)^m} \right) \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') (\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')^m d^3x', \quad (9.9)$$

где коэффициенты полинома a_j — некоторые целые числа. Это выражение позволяет определить радиальную зависимость поля в общем случае. В ближней зоне, где $kr \ll 1$, преобладающим является последний член полинома, так что векторный потенциал стремится к пределу

$$\lim_{kr \rightarrow 0} \mathbf{A}_m \rightarrow \frac{(-1)^m a_m}{cm!} \frac{1}{r^{m+1}} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') (\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')^m d^3x', \quad (9.10)$$

не зависящему от волнового числа k . Таким образом, ближние поля являются квазистатическими: они гармонически изменяются во времени как $e^{-i\omega t}$, но во всех других отношениях имеют статический характер.

В дальней зоне, где $kr \gg 1$, доминирующим членом полинома в (9.9) будет первый член, и для векторного потенциала получаем

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \mathbf{A}_m \rightarrow \frac{e^{ikr}}{cr} \frac{(-ik)^m}{m!} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') (\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')^m d^3x'. \quad (9.11)$$

В этом приближении векторный потенциал дает расходящуюся сферическую волну. Легко показать, что в дальней зоне поля (9.4) и (9.5) перпендикулярны радиусу-вектору и спадают как r^{-1} . Таким образом, они представляют собой поля излучения. Амплитуда m -го члена разложения \mathbf{A} в волновой зоне равна

$$\frac{1}{m!} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') (k\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')^m d^3x'. \quad (9.12)$$

Так как \mathbf{x}' имеет величину порядка d , а произведение kd , по предположению, мало по сравнению с единицей, то очевидно, что последовательные члены в разложении \mathbf{A} быстро уменьшаются с номером m . Следовательно, излучение источника определяется в основ-

ном первым неисчезающим членом разложения (9.8). Перейдем теперь к более детальному анализу полей, соответствующих последовательным членам разложения.

§ 2. Электрическое дипольное поле и излучение

Если ограничиться первым членом разложения (9.8), то векторный потенциал (9.7) окажется равным

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{cr} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x'. \quad (9.13)$$

Этот интеграл можно представить в более привычной форме с помощью интегрирования по частям

$$\int \mathbf{J} d^3x' = - \int \mathbf{x}' \operatorname{div}' \mathbf{J} d^3x' = -i\omega \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d^3x', \quad (9.14)$$

где использовано уравнение непрерывности

$$i\omega \rho = \operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (9.15)$$

Таким образом, векторный потенциал равен

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -ik\mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (9.16)$$

где величина

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d^3x' \quad (9.17)$$

представляет собой электрический дипольный момент, введенный в электростатике соотношением (4.8).

Поля электрического диполя, согласно (9.4) и (9.5), запишутся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right), \\ \mathbf{E} &= k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} \frac{e^{ikr}}{r} + [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Заметим, что магнитное поле перпендикулярно радиусу-вектору на любых расстояниях, а электрическое поле имеет составляющие, как параллельные, так и перпендикулярные \mathbf{n} .

В волновой зоне поля принимают асимптотическую форму

$$\mathbf{B} = k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (9.19)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{n},$$

характерную для полей излучения.

Наоборот, в ближней зоне они выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= ik(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{1}{r^2}, \\ \mathbf{E} &= [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}] \frac{1}{r^3}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Если отвлечься от колебаний во времени, то электрическое поле совпадает с электростатическим дипольным полем (4.13). В области $kr \ll 1$ магнитное поле в $(kr)^{-1}$ раз меньше электрического. Поэтому поле в ближней зоне имеет в основном электрический характер. В пределе $k \rightarrow 0$, соответствующем статическому полю, магнитное поле, естественно, исчезает, и ближняя зона распространяется до бесконечности.

Средняя по времени мощность, излучаемая в единицу телесного угла колеблющимся дипольным моментом \mathbf{p} , равна

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\mathbf{r}^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*), \quad (9.21)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{B} даются выражениями (9.19). Отсюда

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} k^4 |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{p})|^2. \quad (9.22)$$

Направление поляризации определяется вектором $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{p})$. Если все составляющие \mathbf{p} имеют одинаковую фазу, то получается характерное угловое распределение дипольного излучения

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} k^4 |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta, \quad (9.23)$$

где угол θ отсчитывается от направления \mathbf{p} . Полная мощность излучения равна

$$P = \frac{ck^4}{3} |\mathbf{p}|^2. \quad (9.24)$$

Простым примером электрического дипольного излучателя является возбуждаемая в центре линейная антенна, длина которой d мала по сравнению с длиной волны. На фиг. 9.1 показана такая антенна, направленная вдоль оси z и расположенная между $z = -d/2$ и $z = d/2$. Напряжение подводится к небольшому зазору в центре антенны. Ток, имеющий одинаковое направление в обеих половинах антенны и величину I_0 в зазоре, спадает к краям антенны приблизительно линейно, достигая нуля на ее концах:

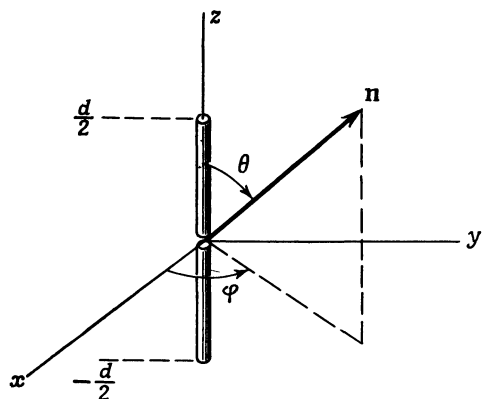
$$I(z) e^{-i\omega t} = I_0 \left(1 - \frac{2|z|}{d} \right) e^{-i\omega t}. \quad (9.25)$$

Согласно уравнению непрерывности (9.15), линейная плотность заряда q' (заряд на единицу длины) постоянна на обеих половинах

антенны и равна

$$q'(z) = \pm \frac{2iI_0}{\omega d}, \quad (9.26)$$

где верхний знак соответствует положительным значениям z ,



Ф и г. 9.1. Короткая линейная антенна с возбуждением в центре.

а нижний — отрицательным. Дипольный момент (9.17) параллелен оси z и имеет величину

$$p = \int_{-d/2}^{d/2} zq'(z) dz = \frac{iI_0 d}{2\omega}. \quad (9.27)$$

Угловое распределение излучаемой мощности описывается выражением

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{32\pi c} (kd)^2 \sin^2 \theta, \quad (9.28)$$

а полная излучаемая мощность — выражением

$$P = \frac{I_0^2 (kd)^2}{12c}. \quad (9.29)$$

Мы видим, что, по крайней мере в длинноволновой области ($kd \ll 1$), мощность излучения растет при фиксированном токе пропорционально квадрату частоты.

§ 3. Магнитные дипольные и электрические квадрупольные поля

Следующий член в разложении (9.8) приводит к векторному потенциалу

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{cr} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') d^3x'. \quad (9.30)$$

Это выражение можно представить в виде суммы двух членов, один из которых дает поперечное магнитное поле, а другой — поперечное электрическое поле. Эти физически различные компоненты можно разделить, записывая подинтегральное выражение в (9.30) в виде суммы симметричной и антисимметричной по \mathbf{J} и \mathbf{x}' частей:

$$\frac{1}{c} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J} = \frac{1}{2c} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{x}'] + \frac{1}{2c} (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{n}. \quad (9.31)$$

Вторая, антисимметричная часть, очевидно, связана с намагниченностью, обусловленной током:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2c} (\mathbf{x} \times \mathbf{J}). \quad (9.32)$$

Первый, симметричный член, как будет показано ниже, связан с электрическим квадрупольным моментом.

Рассматривая только магнитный член, получаем

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = ik (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right), \quad (9.33)$$

где \mathbf{m} — магнитный дипольный момент

$$\mathbf{m} = \int \mathcal{M} d^3x = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{x} \times \mathbf{J}) d^3x. \quad (9.34)$$

Переходя к вычислению полей, заметим, что векторный потенциал (9.33) с точностью до множителя равен магнитному полю (9.18) электрического диполя, если \mathbf{m} заменить на \mathbf{p} . Поэтому магнитное поле магнитного диполя будет равно электрическому полю электрического диполя с заменой $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}$. Таким образом, получаем

$$\mathbf{B} = k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{n} \frac{e^{ikr}}{r} + [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr}. \quad (9.35)$$

Аналогично электрическое поле магнитного диполя равно взятому с обратным знаком магнитному полю электрического диполя:

$$\mathbf{E} = -k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right). \quad (9.36)$$

Все выводы, относящиеся к поведению полей в ближней и дальней зонах, остаются теми же, что и для электрического дипольного источника, если только заменить $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}$. Аналогично распределение излучения и полная излучаемая мощность для обоих диполей одинаковы. Единственное различие полей излучения связано с их поляризацией. Для электрического диполя электрический вектор лежит в плоскости, образованной векторами \mathbf{n} и \mathbf{p} , в то время как для магнитного диполя он перпендикулярен плоскости, проходящей через \mathbf{n} и \mathbf{m} .

Интеграл от симметричного члена в (9.31) после интегрирования по частям и некоторых преобразований приводится к виду

$$\frac{1}{2c} \int [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{x}'] d^3 x' = -\frac{ik}{2} \int \mathbf{x}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \varrho(\mathbf{x}') d^3 x'. \quad (9.37)$$

Здесь $\operatorname{div} \mathbf{J}$ заменена на $i\omega\varrho$ согласно уравнению непрерывности (9.15). Так как этот интеграл содержит второй момент плотности заряда, то, следовательно, он соответствует электрическому квадрупольному источнику. Векторный потенциал имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{k^2}{2} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \int \mathbf{x}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \varrho(\mathbf{x}') d^3 x'. \quad (9.38)$$

Выражения для полей в общем случае довольно сложны, и мы не будем их выписывать, ограничившись лишь рассмотрением полей в волновой зоне. Тогда легко видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= ik\mathbf{n} \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= ik(\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Таким образом, для магнитного поля получаем

$$\mathbf{B} = -\frac{ik^3}{2} \frac{e^{ikr}}{r} \int (\mathbf{n} \times \mathbf{x}') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \varrho(\mathbf{x}') d^3 x'. \quad (9.40)$$

Используя определение (4.9) тензора квадрупольного момента

$$Q_{\alpha\beta} = \int (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \varrho(\mathbf{x}) d^3 x, \quad (9.41)$$

можно записать интеграл в (9.40) в виде

$$\mathbf{n} \times \int \mathbf{x}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \varrho(\mathbf{x}') d^3 x' = \frac{1}{3} \mathbf{n} \times \mathbf{Q}(\mathbf{n}), \quad (9.42)$$

где вектор $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ определяется соотношением

$$Q_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta} n_\beta. \quad (9.43)$$

Заметим, что его величина и направление зависят как от направления наблюдения, так и от свойств источника. В этих обозначениях магнитное поле запишется в виде

$$\mathbf{B} = -\frac{ik^3}{6} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{n} \times \mathbf{Q}(\mathbf{n}), \quad (9.44)$$

а средняя мощность, излучаемая в единичный телесный угол, — в виде

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{288\pi} k^6 |\mathbf{n} \times \mathbf{Q}(\mathbf{n})|^2. \quad (9.45)$$

Угловое распределение имеет довольно сложный характер. Однако полная мощность излучения вычисляется непосредственно.

Учитывая определение $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$, представим угловую зависимость в виде

$$\begin{aligned} |\mathbf{n} \times \mathbf{Q}(\mathbf{n})|^2 &= \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q} - |\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}|^2 = \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} Q_{\alpha\beta}^* Q_{\alpha\gamma} n_\beta n_\gamma - \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} Q_{\alpha\beta}^* Q_{\gamma\delta} n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Вычисление угловых интегралов от произведений прямоугольных составляющих \mathbf{n} дает

$$\begin{aligned} \int n_\beta n_\gamma d\Omega &= \frac{4\pi}{3} \delta_{\beta\gamma}, \\ \int n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta d\Omega &= \frac{4\pi}{15} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}), \end{aligned} \quad (9.47)$$

откуда

$$\begin{aligned} \int |\mathbf{n} \times \mathbf{Q}(\mathbf{n})|^2 d\Omega &= 4\pi \left\{ \frac{1}{3} \sum_{\alpha, \beta} |Q_{\alpha\beta}|^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{15} \left[\sum_{\alpha} Q_{\alpha\alpha}^* \sum_{\gamma} Q_{\gamma\gamma} + 2 \sum_{\alpha, \beta} |Q_{\alpha\beta}|^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.48)$$

Так как сумма элементов тензора $Q_{\alpha\beta}$, стоящих на главной диагонали, равна нулю, первый член в квадратных скобках тождественно обращается в нуль. Отсюда получается окончательное выражение для полной мощности излучения квадрупольного источника

$$P = \frac{ck^6}{360} \sum_{\alpha, \beta} |Q_{\alpha\beta}|^2. \quad (9.49)$$

При заданном квадрупольном моменте излучаемая мощность пропорциональна шестой степени частоты в отличие от дипольного излучения, где она пропорциональна четвертой степени частоты.

Простым примером квадрупольного источника является осциллирующее сфероидальное распределение зарядов. В этом случае недиагональные элементы $Q_{\alpha\beta}$ равны нулю, а диагональные элементы можно представить как

$$Q_{33} = Q_0, \quad Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2} Q_0. \quad (9.50)$$

При этом угловое распределение излучаемой мощности будет иметь вид

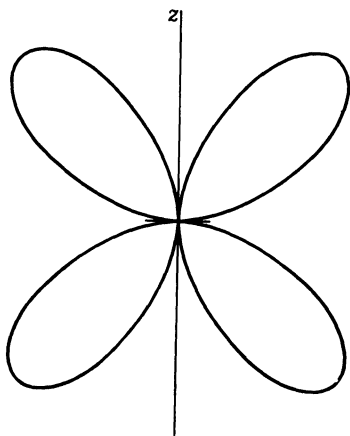
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^6}{128\pi} Q_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (9.51)$$

Соответствующая четырехлепестковая диаграмма излучения показана на фиг. 9.2. Ее максимумы расположены при $\theta = \pi/4$ и

$\theta = 3\pi/4$. Полная мощность излучения такого квадруполья равна

$$P = \frac{ck^6 Q_0^2}{240}. \quad (9.52)$$

Если мы продолжим наше рассмотрение разложения (9.8) и перейдем к высшим членам разложения векторного потенциала, то вычислительные трудности непомерно возрастут. Кроме того, такой подход обладает тем недостатком, что физически ясные члены, как,



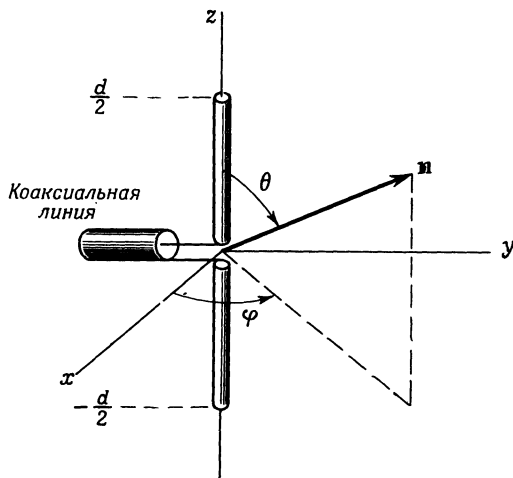
Ф и г. 9.2. Угловое распределение излучения квадруполья.

например, поле магнитного диполя или электрического квадруполья, приходится искусственно выделять из отдельных слагаемых в (9.8). Наконец, развитый выше метод применим лишь для достаточно длинных волн. Систематический анализ мультипольного излучения будет дан в гл. 16. Для этого потребуется разработать специальный математический аппарат, что, однако, окупит себя впоследствии. Этот метод позволит единообразно рассмотреть все мультипольные члены, причем результаты применимы для любых длин волн, а физически различные электрические и магнитные мультиполи разделяются с самого начала.

§ 4. Линейная антенна с центральным возбуждением

Для ряда излучающих систем с достаточно простой геометрией распределение токов таково, что интеграл (9.3), определяющий векторный потенциал, может быть найден в сравнительно простой замкнутой форме. В качестве примера таких систем рассмотрим тонкую линейную антенну длиной d с коротким зазором в центре, на который подается возбуждающее напряжение. Пусть антенна

расположена вдоль оси z , а ее зазор находится в начале координат (фиг. 9.3). Если пренебречь затуханием, связанным с излучением, то ток вдоль антенны можно считать синусоидальным по времени и координате с волновым числом $k = \omega/c$ и симметричным в обоих



Ф и г. 9.3. Линейная антенна с возбуждением в центре.

плечах антенны. Поскольку ток должен обращаться в нуль на концах антенны, мы можем записать плотность тока в виде

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = I \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \delta(x) \delta(y) \mathbf{e}_z, \quad (9.53)$$

где $|z| < d/2$. Здесь δ -функции показывают, что ток течет только вдоль оси z , а I представляет собой максимальный ток в антенне, если $kd \geq \pi$. Ток в зазоре равен $I_0 = I \sin(kd/2)$.

При плотности тока, задаваемой соотношением (9.53), векторный потенциал направлен вдоль оси z и, согласно (9.7), в волновой зоне равен

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_z \frac{Ie^{ikr}}{cr} \int_{-d/2}^{d/2} \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) e^{-ikz \cos\theta} dz. \quad (9.54)$$

Непосредственное интегрирование дает

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_z \frac{2Ie^{ikr}}{ckr} \left[\frac{\cos[(kd/2) \cos\theta] - \cos(kd/2)}{\sin^2\theta} \right]. \quad (9.55)$$

Поскольку в волновой зоне магнитное поле определяется формулой $\mathbf{B} = ik \mathbf{n} \times \mathbf{A}$, то его абсолютная величина есть

$|\mathbf{B}| = k \sin \theta |A_3|$. Отсюда находим среднюю мощность, излучаемую в единичный телесный угол:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I^2}{2\pi c} \left| \frac{\cos [(kd/2) \cos \theta] - \cos (kd/2)}{\sin \theta} \right|^2. \quad (9.56)$$

Электрическое поле направлено вдоль составляющей \mathbf{A} , перпендикулярной к \mathbf{n} . Следовательно, излучение поляризовано в плоскости, проходящей через антенну и радиус-вектор точки наблюдения.

Характер углового распределения (9.56) зависит от величины kd . Легко видеть, что в случае длинных волн ($kd \ll 1$) мы приходим к распределению дипольного излучения (9.28). В частных случаях, когда $kd = \pi$ или $kd = 2\pi$, что соответствует одной или двум полу-волнам тока в антенне, угловые распределения даются формулами

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I^2}{2\pi c} \begin{cases} \frac{\cos^2 [(\pi/2) \cos \theta]}{\sin^2 \theta}, & kd = \pi, \\ \frac{4 \cos^4 [(\pi/2) \cos \theta]}{\sin^2 \theta}, & kd = 2\pi. \end{cases} \quad (9.57)$$

Эти угловые зависимости показаны в гл. 16 (см. фиг. 16.4), где они сравниваются с мультипольными разложениями. Угловое распределение излучения полуволновой антенны очень похоже на диаграмму излучения диполя, а полноволновая антенна имеет существенно более острую направленность.

Распределение излучения полноволновой антенны можно представлять себе как суперпозицию полей двух полуволновых антенн, расположенных одна над другой и возбуждаемых в фазе. При $\theta = \pi/2$, где волны складываются алгебраически, интенсивность в 4 раза больше, чем для полуволновой антенны. В направлениях, отличных от $\theta = \pi/2$, волны интерferируют, что и сужает лепесток диаграммы. Если подходящим образом расположить систему базисных антенн, например полуволновых, и соответственно подобрать фазы токов в них, то можно сформировать произвольную диаграмму направленности. Интересующегося читателя мы отсылаем к электротехнической литературе, где такие антенные решетки рассмотрены достаточно подробно.

Для полуволновой и полноволновой антенн можно проинтегрировать угловое распределение по всем углам, что дает полную мощность излучения

$$P = \frac{I^2}{c} \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt, & kd = \pi, \\ 2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt - \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt, & kd = 2\pi. \end{cases} \quad (9.58)$$

Интегралы в (9.58) можно выразить через интегральный косинус

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt, \quad (9.59)$$

а именно

$$\int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt = \ln(\gamma x) - \text{Ci}(x), \quad (9.60)$$

где $\gamma = 1,781 \dots$ — постоянная Эйлера. Таблицы интегрального косинуса даны, например, в справочнике Янке и Эмде [54]. Численные значения мощности излучения составляют

$$P = \frac{I^2}{2c} \begin{cases} 2,44, & kd = \pi, \\ 6,70, & kd = 2\pi. \end{cases} \quad (9.61)$$

При данной амплитуде тока I полноволновая антенна с возбуждением в центре излучает примерно в 3 раза большую мощность, чем полуволновая антенна. Коэффициент при $I^2/2$ имеет размерность сопротивления и называется *сопротивлением излучения* $R_{\text{изл}}$ антенны. Его величина в омах получается из (9.61) умножением на 30 (этот множитель равен численной величине скорости света, деленной на 10 в соответствующей степени). Таким образом, полуволновая и полноволновая антенны имеют соответственно сопротивления излучения 73,2 и 201 ом.

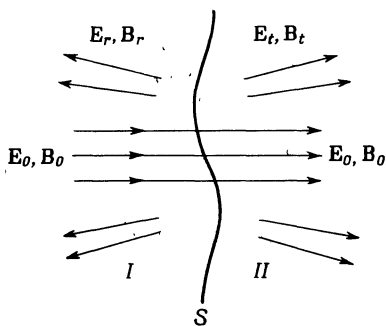
Следует оговориться, что идеализированный случай бесконечно тонкой линейной антенны с синусоидальным распределением тока является весьма упрощенной схемой реальных антенн. Конечные поперечные размеры, омические и радиационные потери, несинусоидальное распределение тока, конечная величина возбуждающего зазора и другие факторы существенно усложняют задачу. Эти важные для практических приложений проблемы подробно изложены в обширной литературе, посвященной расчету и конструированию антенн, к которой мы и отсылаем интересующегося читателя.

§ 5. Интеграл Кирхгофа

Общая задача дифракции рассматривает падение волны на одно или несколько препятствий или отверстий в поглощающих или проводящих поверхностях. Волна частично поглощается и рассеивается, что приводит к появлению волн, распространяющихся в различных направлениях, отличных от направления падающей волны. Расчетом излучения, распространяющегося от препятствия или отверстия, и занимается теория дифракции. Первая система-

тическая теория дифракции была дана Кирхгофом (1882 г.), который развил идею Гюйгенса о суперпозиции элементарных волн. В этом параграфе мы рассмотрим обычный метод Кирхгофа и остановимся на некоторых его недостатках, а в следующем выведем векторные теоремы, являющиеся векторным обобщением обычной скалярной теоремы Кирхгофа.

В теории дифракции обычно рассматривают две пространственные области I и II , разделенные граничной поверхностью S , как



Ф и г. 9.4. Дифракционная система.

На поверхности S , в которой имеются отверстия, возникают отраженные и проходящие волны, налагающиеся на волны, которые существовали бы в областях I и II в отсутствие поверхности S .

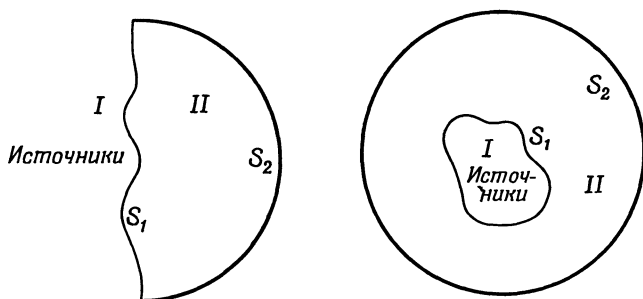
показано на фиг. 9.4. Поверхность S может быть, например, бесконечной металлической плоскостью с отверстиями. Волна, излучаемая источниками, расположенными в области I , падает на граничную поверхность S и дифрагирует на ней. При этом образуются рассеянные волны — проходящая вперед и отраженная. Обычно рассматривают только проходящую волну. Ее угловое распределение называется *дифракционной диаграммой* системы. Если падающая волна характеризуется полями \mathbf{E}_0 и \mathbf{B}_0 , отраженная волна — полями \mathbf{E}_r и \mathbf{B}_r , а проходящая волна — полями \mathbf{E}_t и \mathbf{B}_t , то полное поле в областях I и II будет $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_s$, где под s следует понимать соответственно r или t . Основной задачей теории дифракции является определение полей $(\mathbf{E}_t, \mathbf{B}_t)$ и $(\mathbf{E}_r, \mathbf{B}_r)$ при известных падающих полях $(\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)$ и известных свойствах граничной поверхности S . Поля в областях I и II связаны граничными условиями для \mathbf{E} и \mathbf{B} , которые должны удовлетворяться на S ; вид этих условий зависит от свойств поверхности S .

Задачи такого рода решаются обычно применением тождеств Грина к волновому уравнению (см. гл. 6). Рассмотрим скалярное поле $\psi(\mathbf{x}, t)$, определенное внутри и на *замкнутой* поверхности S и удовлетворяющее в этой области волновому уравнению без источников. Под $\psi(\mathbf{x}, t)$ можно понимать любую декартову составляющую \mathbf{E} или \mathbf{B} . В гл. 6 мы показали, что значение ψ внутри S можно выразить через величину ψ и ее нормальную производную

на поверхности

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{1}{R} \left[\text{grad}' \psi(\mathbf{x}', t') - \right. \\ \left. - \frac{\mathbf{R}}{R^2} \psi(\mathbf{x}', t') - \frac{\mathbf{R}}{cR} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \right]_{\text{запазд}} \cdot \mathbf{n} da', \quad (9.62)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности и индекс указывает, что поля берутся в запаздывающий момент времени



Ф и г. 9.5. Две возможные схемы дифракции.

Область I содержит источники излучения. В области II поля удовлетворяют условиям излучения.

$t' = t - R/c$. При гармонической зависимости от времени $e^{-i\omega t}$ интеграл (9.62) для $\psi(\mathbf{x}, t)$ можно записать в виде

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{n} \cdot \left\{ \text{grad}' \psi + ik \left(1 + \frac{i}{kR} \right) \frac{\mathbf{R}}{R} \psi \right\} da'. \quad (9.63)$$

Чтобы применить соотношение (9.63) к дифракционным задачам, рассмотрим замкнутую поверхность S , состоящую из двух поверхностей S_1 и S_2 . Выбор поверхности S_1 определяется удобством решения данной конкретной задачи (например, ею может быть проводящий экран с отверстиями), а в качестве поверхности S_2 выберем сферу или полусферу очень большого радиуса (в пределе бесконечного) в области II , как показано на фиг. 9.5. Так как поля в области II являются проходящими и исходят из дифракционной области, то в окрестности S_2 они должны иметь вид уходящих волн. Отсюда следует, что поля, а следовательно, и $\psi(\mathbf{x})$ должны удовлетворять так называемым *условиям излучения*:

$$\psi \rightarrow f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \rightarrow \left(ik - \frac{1}{r} \right). \quad (9.64)$$

Легко показать, что при выполнении этих условий интеграл в (9.63) по полусфере S_2 стремится к нулю как $1/R_s$ при стремлении радиуса

полусферы R_s к бесконечности. Таким образом, в пределе мы приходим к интегралу Кирхгофа для функции $\psi(\mathbf{x})$ в области II

$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{n} \cdot \left[\text{grad}' \psi + ik \left(1 + \frac{i}{kR} \right) \frac{R}{R} \psi \right] da', \quad (9.65)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к S_1 , направленный в область II . Чтобы применить формулу Кирхгофа (9.65) к дифракционной задаче, необходимо знать величины ψ и $\partial\psi/\partial n$ на поверхности S_1 . Однако пока мы не решили точно соответствующую граничную задачу, эти значения нам не известны. Если, например, S_1 — плоский идеально проводящий экран с отверстием, а ψ — составляющая электрического поля, параллельная S_1 , то, очевидно, ψ равно нулю всюду на S_1 , за исключением отверстия. Значение же ψ в отверстии неизвестно. Поэтому без дополнительных исследований мы можем получить лишь приближенные решения, принимая определенные предположения о значениях ψ и $\partial\psi/\partial n$ на S_1 . *Приближение Кирхгофа* соответствует следующим допущениям:

1. Величины ψ и $\partial\psi/\partial n$ равны нулю на S_1 всюду, за исключением отверстий.
2. Величины ψ и $\partial\psi/\partial n$ в отверстиях равны соответствующим величинам в падающей волне в отсутствие каких-либо экранов или препятствий.

Все обычные дифракционные расчеты в классической оптике основаны на этом приближении Кирхгофа. Следует помнить, что полученные таким образом результаты справедливы лишь приближенно. Заметим, что сделанные допущения являются математически несовместными. Действительно, как было показано в гл. 1, § 9, для уравнения Лапласа решение внутри замкнутого объема однозначно определяется заданием на его поверхности либо только ψ (задача Дирихле), либо только $\partial\psi/\partial n$ (задача Неймана). Это же справедливо и для волнового уравнения Гельмгольца. Обе величины ψ и $\partial\psi/\partial n$ нельзя независимо задавать на поверхности. Приближение Кирхгофа дает хорошие результаты для очень малых длин волн, когда размеры отверстия велики по сравнению с длиной волны. Однако даже в этом случае скалярная теория не учитывает эффектов, связанных с поляризацией дифрагирующей волны. Для промежуточных и длинных волн скалярное приближение вообще плохо применимо, не говоря уже об указанных выше сильных предположениях.

Так как задача о дифракции электромагнитных волн представляет собой граничную задачу для векторных полей, то можно надеяться, что мы добьемся существенно лучших результатов при использовании векторных эквивалентов интеграла Кирхгофа (9.65).

§ 6. Векторные эквиваленты интеграла Кирхгофа

Для получения векторной формулы, эквивалентной интегралу Кирхгофа (9.63), положим

$$G(x, x') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \quad (9.66)$$

и запишем скалярную формулу (9.63) в виде

$$\psi(x) = \oint_S [G \mathbf{n} \cdot \text{grad}' \psi - \psi \mathbf{n} \cdot \text{grad}' G] da'. \quad (9.67)$$

Если написать такие соотношения для каждой декартовой составляющей электрического или магнитного поля и векторно сложить их, то получим векторную теорему для \mathbf{E}

$$\mathbf{E}(x) = \oint_S [G(\mathbf{n} \cdot \text{grad}' \mathbf{E}) - \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \text{grad}' G)] da' \quad (9.68)$$

и аналогичное выражение для \mathbf{B} . Этот результат не особенно удобен для вычислений, но его можно привести к более удобному виду, используя некоторые векторные преобразования. Во-первых, подынтегральное выражение в (9.68) можно представить как

$$[\] = (\mathbf{n} \cdot \text{grad}') (G\mathbf{E}) - 2\mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \text{grad}' G). \quad (9.69)$$

Далее, комбинируя векторные тождества

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \text{grad}' G) &= \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \text{grad}' G) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad}' G, \\ \text{grad}' G \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) &= \mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \text{grad}' G) - (\mathbf{n} \cdot \text{grad}' G) \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (9.70)$$

можно исключить последний член в (9.69)

$$[\] = (\mathbf{n} \cdot \text{grad}') (G\mathbf{E}) - \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \text{grad}' G) - \mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \text{grad}' G) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad}' G - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \text{grad}' G. \quad (9.71)$$

Используем теперь формулу для ротора произведения вектора на скаляр, чтобы преобразовать второй член в (9.71), и учтем условие $\text{div}' \mathbf{E} = 0$ при преобразовании третьего члена. В результате получим

$$[\] = (\mathbf{n} \cdot \text{grad}') (G\mathbf{E}) + \mathbf{n} \times \text{rot}' (G\mathbf{E}) - \mathbf{n} \text{div}' (G\mathbf{E}) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad}' G - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \text{grad}' G - G\mathbf{n} \times \text{rot}' \mathbf{E}. \quad (9.72)$$

Преобразование двух членов (9.68) в шесть членов (9.72) может показаться не очень целесообразным, однако мы сейчас покажем, что поверхностные интегралы от первых трех членов в (9.72), содержащих произведение $G\mathbf{E}$, тождественно обращаются в нуль.

Для этого воспользуемся легко проверяемыми тождествами, связывающими поверхностные интегралы по *замкнутой* поверхности S с объемными интегралами по области, заключенной внутри S :

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} da &= \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} d^3x, \\ \oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) da &= \int_V \operatorname{rot} \mathbf{A} d^3x, \\ \oint_S \varphi \mathbf{n} da &= \int_V \operatorname{grad} \varphi d^3x.\end{aligned}\quad (9.73)$$

Здесь \mathbf{A} и φ — произвольные векторная и скалярная функции. С помощью этих тождеств поверхностный интеграл от первых трех членов в (9.72) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\oint_S [(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}') (GE) + \mathbf{n} \times \operatorname{rot}' (GE) - \mathbf{n} \operatorname{div}' (GE)] da' = \\ = \int_V [\nabla'^2 (GE) + \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' (GE) - \operatorname{grad}' \operatorname{div}' (GE)] d^3x'.\end{aligned}\quad (9.74)$$

Так как $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$, то объемный интеграл тождественно равен нулю¹⁾.

Оставшиеся три члена в (9.72) дают еще одну возможную форму векторного соотношения Кирхгофа (9.68). Заменяя $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ на \mathbf{B} с помощью уравнения Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{B}$, можно привести формулу для электрического поля в произвольной точке объема, ограниченного поверхностью S , к виду

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\oint_S [ik(\mathbf{n} \times \mathbf{B})G + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \operatorname{grad}' G + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad}' G] da'. \quad (9.75)$$

Аналогично для магнитного поля имеем

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\oint_S [-ik(\mathbf{n} \times \mathbf{E})G + (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) \times \operatorname{grad}' G + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) \operatorname{grad}' G] da'. \quad (9.76)$$

¹⁾ Читатель может усомниться в применимости тождеств (9.73) к векторной функции (GE) , имеющей особенность в точке $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$. Однако эту особенность можно исключить, считая, что поверхность S состоит из внешней поверхности S' и малой сферы S'' вокруг точки $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$. Можно показать, что вклад интеграла по S'' стремится к нулю при стремлении к нулю радиуса сферы S'' . Таким образом, формулы (9.74) остаются справедливыми, даже если функция G имеет особенность в интересующем нас объеме.

В интегралах (9.75) и (9.76) вектор \mathbf{n} , как обычно, — единичный вектор внешней нормали. Этим интегралам можно дать наглядную интерпретацию, введя эквивалентные источники (заряды и токи). Нормальную составляющую \mathbf{E} в (9.75) можно, очевидно, рассматривать как эффективную плотность поверхностного заряда. Аналогично в соответствии с (8.14) тангенциальную составляющую магнитного поля $(\mathbf{n} \times \mathbf{B})$ можно рассматривать как эффективный поверхностный ток. Оставшиеся члены $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})$ и $(\mathbf{n} \times \mathbf{E})$ интерпретируются соответственно как эффективные поверхностные *магнитные* заряды и токи.

Векторные формулы (9.75) и (9.76) являются векторными аналогами скалярной теоремы Гюйгенса — Кирхгофа (9.63). Если поля \mathbf{E} и \mathbf{B} удовлетворяют на бесконечности условиям излучения (9.64) и, кроме того, векторному соотношению $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times (\mathbf{r}/r)$, то легко показать, что интеграл по бесконечно удаленной части поверхности S равен нулю. Поэтому в обозначениях фиг. 9.5 электрическое поле (9.75) запишется в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_{S_1} [(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \text{grad}' G + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad}' G + ik(\mathbf{n} \times \mathbf{B}) G] da', \quad (9.77)$$

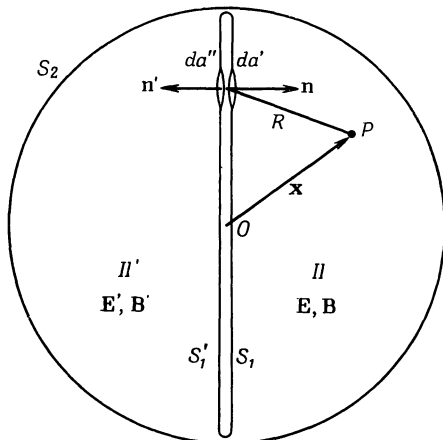
где S_1 — поверхность соответствующей дифракционной системы, а нормаль \mathbf{n} направлена теперь *внутрь* области наблюдения.

Векторная теорема (9.77) является важным обобщением скалярного выражения (9.65). В ней полностью учтен векторный характер электромагнитного поля. Однако для расчета дифрагированных полей и здесь необходимо знать величины \mathbf{E} и \mathbf{B} на поверхности S_1 . Для достаточно коротких волн применимо приближение Кирхгофа, описанное в предыдущем параграфе. Резкий скачок \mathbf{E} и \mathbf{B} от невозмущенных величин в освещенной области поверхности S_1 до нуля в теневой области может быть математически скомпенсирован линейными токами, текущими по границам отверстий ¹⁾.

Из соотношения (9.77) можно получить очень удобную формулу для частного случая плоской граничной поверхности S_1 . Представим себе, что поверхность S_1 , охватывающая источники и изображенная в правой части фиг. 9.5, изменена по форме так, что представляет собой большой плоский диск, показанный на фиг. 9.6. Область «проходящих» волн II разбивается теперь на области II и II' , соединяющиеся только посредством кольцевого отверстия на бесконечности. Обозначим стороны диска через S_1 и S_1' . Единичные векторы \mathbf{n} и $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$ направлены соответственно в области II и II' . Найдем интегральное выражение для полей в области II через поля на *правой* поверхности S_1 . Этот случай аналогичен изо-

¹⁾ Вопрос о линейных токах дискутируется в книгах Стрэттона [106] и Силвера [95], гл. 57.

браженному в левой части фиг. 9.5. Величины полей в области II' нас не интересуют. Поэтому можно подобрать гипотетические источники внутри диска, чтобы окончательные выражения для дифрагированных полей в области II были особенно удобны. Получив желаемое выражение для полей в области II в виде интеграла по поверхности S_1 [см. соотношение (9.82)], мы можем забыть о способе его вывода и не интересоваться левой частью фиг. 9.6.



Ф и г. 9.6.

Для нас представляет интерес лишь дифрагированное поле в области II , определяемое отверстиями или препятствиями, расположенными на плоской поверхности S_1 .

Если поля в областях II и II' соответственно равны \mathbf{E}, \mathbf{B} и \mathbf{E}', \mathbf{B}' , то, как видно из фиг. 9.6, при стремлении толщины диска к нулю интеграл (9.77) можно записать в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_{S_1} \{[\mathbf{n} \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}')] \times \text{grad}' G + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{E}') \text{grad}' G + ik\mathbf{n} \times (\mathbf{B} - \mathbf{B}') G\} da'. \quad (9.78)$$

Поле $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ в левой части равенства — это либо \mathbf{E} , либо \mathbf{E}' в зависимости от того, где находится точка \mathbf{x} ; интеграл же берется только по правой стороне поверхности S_1 .

Наиболее часто встречается случай проводящей поверхности с отверстиями. Граничные условия на идеально проводящей поверхности имеют вид $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$, однако $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{n} \times \mathbf{B} \neq 0$. При вычислении поверхностного интеграла (9.78) было бы желательно интегрировать только по отверстиям, а не по всей поверхности. Первый член в (9.78) в случае идеально проводящего экрана отличен

от нуля только на отверстиях. Попытаемся выбрать поля в области II' так, чтобы оставшиеся члены обращались в нуль на всей поверхности S_1 . Очевидно, следует потребовать выполнения соотношений

$$\begin{aligned}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}')_{S_1'} &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})_{S_1}, \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{B}')_{S_1'} &= (\mathbf{n} \times \mathbf{B})_{S_1}.\end{aligned}\quad (9.79)$$

Конечно, поля \mathbf{E}' , \mathbf{B}' должны удовлетворять уравнениям Максвелла и условиям излучения в области II' , если \mathbf{E} , \mathbf{B} удовлетворяют им в области II . Легко видеть, что требования (9.79) на поверхностях S_1 и S_1' удовлетворяются, если \mathbf{E} и \mathbf{B} связаны соотношениями

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \mathbf{E}'(\mathbf{x}') &= -\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{x}') &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}), \quad | \\ \mathbf{n} \times \mathbf{B}'(\mathbf{x}') &= \mathbf{n} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}'(\mathbf{x}') &= -\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}),\end{aligned}\quad (9.80)$$

где точка \mathbf{x}' является зеркальным изображением точки \mathbf{x} в плоскости S_1 . При переходе от точек \mathbf{x} к зеркально сопряженным точкам \mathbf{x}' знак тангенциальной составляющей электрического поля и нормальной составляющей магнитного поля меняется на обратный, а знак нормальной составляющей электрического поля и тангенциальной составляющей магнитного поля остается прежним.

Подставляя (9.80) в (9.78), мы приходим к простому выражению для поля $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ через интеграл по плоскости S_1 , ограничивающей область II ¹⁾:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 2 \int_{S_1} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \text{grad}' G da', \quad (9.81)$$

где $(\mathbf{n} \times \mathbf{E})$ — тангенциальная составляющая электрического поля на поверхности S_1 (\mathbf{n} — единичный вектор нормали, направленный внутрь области II), а G — функция Грина (9.66). Поскольку $\text{grad}' G = -\text{grad} G$, соотношение (9.81) может быть представлено и в другой форме:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 2 \text{rot} \int_{S_1} \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') da'. \quad (9.82)$$

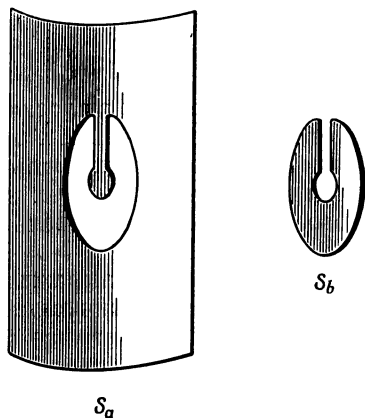
Для дифракционной системы, представляющей собой идеально проводящий экран с отверстиями, интеграл по S_1 сводится к интегралам только по площади отверстий. Формулы (9.81) и (9.82) будут точ-

¹⁾ Эта формула для плоских экранов была впервые получена Смайтом [101] методом двойного токового слоя в отличие от применяемого здесь метода тождеств Грина.

ными, если в них подставить правильное значение тангенциальной составляющей E в отверстии экрана. Однако практически подставляется некоторое приближенное значение поля в отверстии. Для плоского проводящего экрана нужно аппроксимировать только тангенциальную составляющую электрического поля, причем граничные условия на экране выполняются автоматически [как можно проверить, исходя непосредственно из (9.82)].

§ 7. Принцип Бабинэ для дополнительных экранов

Прежде чем переходить к рассмотрению отдельных примеров дифракции, установим одно полезное соотношение, так называемый *принцип Бабинэ*. Принцип Бабинэ связывает дифракционные поля для некоторого экрана с полями для дополнительного экрана.



Фиг. 9.7. Дифракционный экран S_a и дополнительный к нему экран S_b .

Рассмотрим сначала этот принцип, ограничиваясь скалярным приближением Кирхгофа. Дифракционный экран предполагается расположенным на некоторой поверхности S , разделяющей пространство на области I и II так же, как и в § 5. Пусть экран занимает всю поверхность S , за исключением некоторых отверстий. Дополнительным экраном называется экран, получающийся из первоначального заменой отверстий на экран, а экрана на отверстия. Обозначим поверхность исходного экрана через S_a , а дополнительного — через S_b , тогда $S_a + S_b = S$, как схематически показано на фиг. 9.7.

Если внутри S (в области I) имеются источники поля $\psi(x)$, то в отсутствие каких-либо экранов это поле в области II дается интегралом Кирхгофа (9.65), где интегрирование производится по всей поверхности S . Если же на поверхности S расположен экран S_a , то поле $\psi_a(x)$ в области II в приближении Кирхгофа дается интегралом (9.65), в подынтегральном выражении которого стоит

то же поле ψ , но интеграл берется только по S_b (по отверстиям). Аналогично для дополнительного экрана поле $\psi_b(\mathbf{x})$ в том же приближении дается интегралом по S_a . Отсюда очевидно следующее соотношение между дифрагированными полями ψ_a и ψ_b :

$$\psi_a + \psi_b = \psi. \quad (9.83)$$

Это и есть принцип Бабине, как его обычно формулируют в оптике. Если, например, ψ представляет собой падающую плоскую волну, то, согласно принципу Бабине, дифракционная картина в направлениях, отличных от направления прямого падения, одинакова для взаимно дополнительных экранов.

Полученная формулировка принципа Бабине неудовлетворительна в двух отношениях: во-первых, она относится к скалярным полям и, во-вторых, основана на приближении Кирхгофа. Второй недостаток можно устранить, если мы обобщим определение дополненности и при замене экрана на дополнительный экран введем и дополнительные граничные условия (т. е. условия Дирихле заменим на условия Неймана, и наоборот) для скалярных полей. Однако, поскольку нас в основном интересуют электромагнитные поля, мы не будем больше останавливаться на скалярной задаче.

Строгую формулировку принципа Бабине для электромагнитных волн можно получить для случая тонкого плоского идеально проводящего экрана и дополнительного к нему экрана¹⁾. Пусть поля \mathbf{E}_0 , \mathbf{V}_0 , падают на экран с металлической поверхностью S_a (см. фиг. 9.7), расположенный в свободном пространстве. Вследствие наличия экрана образуются проходящие и отраженные волны, как показано на фиг. 9.4. В дальнейшем в тех случаях, когда нам не потребуется более детального разделения, мы будем объединять проходящие и отраженные волны под общим названием рассеянных волн \mathbf{E}_s , \mathbf{V}_s . В случае идеально проводящего экрана поверхностный ток \mathbf{K} , индуцируемый падающей волной, должен быть таким, чтобы во всех точках поверхности экрана S_a выполнялось равенство $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0$. Для тонкой плоской поверхности из симметрии задачи следует, что тангенциальные составляющие рассеянных магнитных полей на поверхности должны быть равны и противоположно направлены. Согласно (5.90), имеем

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_t = \frac{2\pi}{c} \mathbf{K} = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}_r, \quad (9.84)$$

где нормаль \mathbf{n} направлена в сторону области II . С помощью тех же рассуждений, что и при выводе (9.80) из (9.79), можно показать,

¹⁾ Для электромагнитного поля принцип дополненности был сформулирован впервые советским ученым А. А. Пистолькорсом [ЖТФ, 14, 693, (1944)] и в более корректной формулировке — М. А. Леонтовичем [ЖЭТФ, 16, 475 (1946)]. — *Прим. ред.*

что для любой точки \mathbf{x} в области II и ее зеркального изображения \mathbf{x}' в области I рассеянные поля удовлетворяют следующим условиям симметрии:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_r(\mathbf{x}') &= \mathbf{n} \times \mathbf{E}_t(\mathbf{x}), \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_r(\mathbf{x}') &= -\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_t(\mathbf{x}), \\ \mathbf{n} \times \mathbf{B}_r(\mathbf{x}') &= -\mathbf{n} \times \mathbf{B}_t(\mathbf{x}), \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_r(\mathbf{x}') &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_t(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (9.85)$$

Заметим, что эти соотношения отличаются от (9.80) заменой знаков $\mathbf{E}_r(\mathbf{x}')$ и $\mathbf{B}_r(\mathbf{x}')$ на обратные. Как показано в книге Смайта [100], поля (9.80) соответствуют двойному токовому слою, тогда как поля (9.85) обладают симметрией, характерной для простого плоского токового слоя, излучающего в обоих направлениях.

Мы можем написать выражение для рассеянного магнитного поля в виде интеграла по поверхностным токам \mathbf{K} . Поскольку \mathbf{B} есть ротор векторного потенциала, то

$$\mathbf{B}_s = \text{rot} \frac{4\pi}{c} \int_{S_a} \mathbf{K} G da', \quad (9.86)$$

где G — функция Грина (9.66), а интегрирование производится по металлической поверхности экрана S_a . Подставляя \mathbf{K} из (9.84), мы можем записать магнитное поле в области II в виде

$$\mathbf{B}_t(\mathbf{x}) = 2 \text{rot} \int_{S_a} \mathbf{n} \times \mathbf{B}_t(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') da. \quad (9.87)$$

Этот результат аналогичен (9.82) с той разницей, что

- 1) поля \mathbf{E} и \mathbf{B} поменялись местами;
- 2) здесь интегрирование производится только по поверхности экрана, тогда как в (9.82) — только по площади отверстий;
- 3) в выражение (9.82) входит полное электрическое поле, тогда как в (9.87) входит только рассеянное поле.

Сопоставление (9.87) с (9.82) позволяет сформулировать принцип Бабинне. Запишем соотношение (9.82) для экрана, *дополнительного* к рассматриваемому экрану с металлической поверхностью

$$\mathbf{E}'(\mathbf{x}) = 2 \text{rot} \int_{S_a} \mathbf{n} \times \mathbf{E}'(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') da'. \quad (9.88)$$

Здесь интеграл берется только по поверхности S_a , поскольку она соответствует отверстиям в дополнительном экране. В области II поле \mathbf{E}' представляется суммой

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 + \mathbf{E}'_i, \quad (9.89)$$

где \mathbf{E}'_0 — падающее электрическое поле в дополнительной дифракционной задаче, а \mathbf{E}'_t — соответствующее проходящее, или дифрагированное, поле. Очевидно, выражения (9.87) и (9.88) переходят одно в другое при замене

$$\mathbf{V}_t \rightarrow \pm (\mathbf{E}'_0 + \mathbf{E}'_t). \quad (9.90)$$

Легко показать, что справедливо также соотношение

$$\mathbf{E}_t \rightarrow \mp (\mathbf{V}'_0 + \mathbf{V}'_t). \quad (9.91)$$

Отличие в знаках объясняется тем, что в обоих случаях поля должны представлять собой уходящие волны. Поскольку мы могли принять в качестве исходного дополнительный экран, то соотношения (9.90) и (9.91) должны быть справедливы и при замене штрихованных величин на нештрихованные и наоборот. Сравнение получающейся системы равенств с первоначальной показывает, что падающие поля в исходной и дополнительной дифракционных задачах должны быть связаны соотношениями

$$\mathbf{E}'_0 = -\mathbf{V}_0, \quad \mathbf{V}'_0 = \mathbf{E}_0. \quad (9.92)$$

Дополнительная задача соответствует не только дополнительному экрану, но также и дополнительным падающим полям, в которых \mathbf{E} и \mathbf{V} меняются местами.

Таким образом, принцип Бабине формулируется следующим образом: пусть дифракционная система состоит из источников, создающих поля \mathbf{E}_0 , \mathbf{V}_0 , падающие на тонкий плоский идеально проводящий экран с отверстиями. Дополнительная к ней дифракционная система состоит из источников, дающих поля $\mathbf{E}'_0 = -\mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}'_0 = \mathbf{E}_0$, падающие на дополнительный экран. Если проходящие (дифрагированные) поля за экраном (со стороны, противоположной источникам) равны \mathbf{E}_t , \mathbf{V}_t для основной системы и \mathbf{E}'_t , \mathbf{V}'_t для дополнительной, то имеют место следующие соотношения:

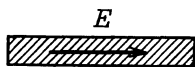
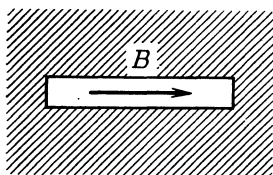
$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t + \mathbf{V}'_t &= -\mathbf{E}_0 = -\mathbf{V}'_0, \\ \mathbf{V}_t - \mathbf{E}'_t &= -\mathbf{V}_0 = \mathbf{E}'_0. \end{aligned} \quad (9.93)$$

Эти соотношения являются векторным аналогом скалярного принципа Бабине (9.83). Для плоской волны, падающей на дифракционный экран, из принципа Бабине следует, что в направлениях, отличных от направления падения, интенсивности дифракционного поля для экрана и его дополнения одинаковы, а сами поля связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t &= -\mathbf{V}'_t, \\ \mathbf{V}_t &= \mathbf{E}'_t. \end{aligned} \quad (9.94)$$

Поляризация падающей волны для дополнительного экрана должна быть, конечно, изменена согласно (9.92).

Строгая векторная формулировка принципа Бабиня очень полезна для микроволновых задач. Рассмотрим, например, узкую щель, прорезанную в бесконечной плоской проводящей пластине, на которую падает волна с магнитным полем, направленным вдоль щели, и с электрическим полем, перпендикулярным щели, как



Ф и г. 9.8. Эквивалентные излучающие системы в соответствии с принципом Бабиня.

показано на фиг. 9.8. Диаграмма излучения этой щели будет такая же, как и для тонкой линейной антенны, электрическое поле в которой направлено вдоль антенны (см. § 2 и 4). Поляризация излучения в этих двух системах будет различной: электрическому вектору в одной системе будет соответствовать магнитный вектор в другой. Таким путем можно рассчитать антенную решетку типа волновода со щелями на его боковых сторонах ¹⁾.

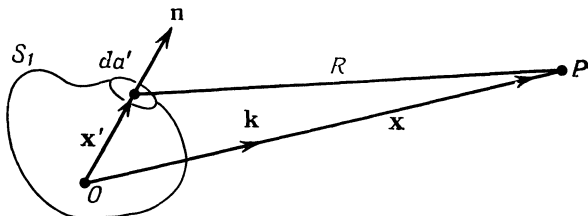
§ 8. Дифракция на круглом отверстии

Начиная с основополагающих работ Кирхгофа, теория дифракции интенсивно развивалась как в оптике, где обычно достаточно ограничиться скалярной теорией, основанной на выражении (9.65), так и в применении к микроволновому излучению, где необходимо более строгое рассмотрение. Целый ряд монографий посвящен исключительно вопросам дифракции и рассеяния волн. Мы рассмотрим здесь несколько примеров, иллюстрирующих применение скалярной и векторной теорем (9.65) и (9.82), и сравним точность различных приближенных методов расчета.

Дифракционные явления принято разделять на дифракцию Френеля и дифракцию Фраунгофера в зависимости от расстояния точки наблюдения от дифракционной системы. Обычно дифракционная система (например, отверстие в непрозрачном экране) имеет размеры, сравнимые с длиной волны или превышающие ее. При этом точка наблюдения может находиться в близкой зоне, т. е. на расстоянии меньше длины волны от дифракционной системы. Поля в ближ-

¹⁾ См., например, [95], гл. 9.

ней зоне имеют весьма сложную структуру и не представляют особого интереса. Точки, находящиеся на таком расстоянии от дифракционной системы, которое во много раз больше длины волны, но все же меньше или порядка собственных размеров системы, считаются находящимися во френелевской зоне. Область же, расположенная на расстоянии, которое велико как по сравнению с размерами дифракционной системы, так и по сравнению с длиной волны, называется френелевской зоной¹⁾. Она соответствует



Ф и г. 9.9.

волновой зоне, определенной в § 1 этой главы. Дифракционные картины в зонах Френеля и Фраунгофера существенно различаются, поскольку в дифракции Френеля наибольшую роль играют участки дифракционной системы, ближайшие к точке наблюдения, в то время как в дифракцию Фраунгофера вносит свой вклад вся система в целом. Мы будем рассматривать только френелевскую дифракцию; примеры дифракции Френеля будут даны в задачах в конце главы.

Если точка наблюдения находится далеко от дифракционной системы, то мы можем воспользоваться разложением (9.6) для $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Сохраняя только члены низшего порядка по $1/kr$, представим скалярный интеграл Кирхгофа (9.65) в виде

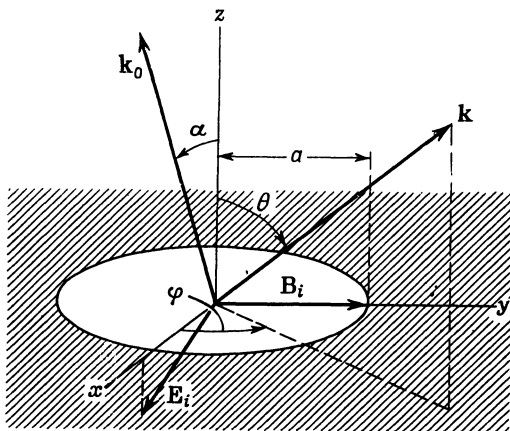
$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int_{S_1} e^{-ik \cdot \mathbf{x}'} [\mathbf{n} \cdot \text{grad}' \psi(\mathbf{x}') + ik \cdot \mathbf{n} \psi(\mathbf{x}')] da', \quad (9.95)$$

где \mathbf{x}' — координата элемента поверхности da' , r — длина вектора \mathbf{x} , соединяющего начало координат O с точкой наблюдения P , а $\mathbf{k} = k\mathbf{x}/r$ — волновой вектор, направленный в точку наблюдения (фиг. 9.9). Для плоской поверхности векторное выражение (9.82) в этом приближении принимает вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{ie^{ikr}}{2\pi r} \mathbf{k} \times \int_{S_1} \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}') e^{-ik \cdot \mathbf{x}'} da'. \quad (9.96)$$

¹⁾ Данное здесь автором определение зон Френеля и Фраунгофера не вполне точно. Зона Френеля соответствует таким расстояниям от дифракционной системы, отношение которых к размерам дифракционной системы порядка отношения этих размеров к длине волны. Зона Фраунгофера соответствует много большим расстояниям.— *Прим. ред.*

Рассмотрим в качестве примера дифракцию плоской волны, падающей под углом α на тонкий идеально проводящий экран с круглым отверстием радиусом a . Пусть вектор поляризации падающей волны лежит в плоскости падения. Используемая система координат показана на фиг. 9.10. Экран расположен в плоскости xy , а центр отверстия находится в начале координат. Волна падает снизу, так что области дифракционных полей соответствует $z > 0$.



Ф и г. 9.10. Дифракция на круглом отверстии радиусом a .

Плоскость падения мы выберем в качестве плоскости xz . Электрическое поле падающей волны представляется в явном виде в декартовых составляющих следующим образом:

$$\mathbf{E}_i = E_0 (\mathbf{e}_1 \cos \alpha - \mathbf{e}_3 \sin \alpha) e^{ik(z \cos \alpha + x \sin \alpha)}. \quad (9.97)$$

При расчете дифракционных полей с помощью (9.95) или (9.96) мы примем обычное предположение о том, что точное поле в поверхностном интеграле можно заменить падающим полем. Для расчета с помощью векторного соотношения (9.96) нужно знать величину

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_i)_{z=0} = E_0 \mathbf{e}_2 \cos \alpha e^{ik x' \sin \alpha}. \quad (9.98)$$

Вводя полярные координаты для интегрирования по отверстию, получаем

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{ie^{ikr} E_0 \cos \alpha}{2\pi r} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_2) \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\beta e^{i\mathbf{k}\rho} [\sin \alpha \cos \beta - \sin \theta \cos(\varphi - \beta)], \quad (9.99)$$

где θ и φ — угловые координаты вектора \mathbf{k} . Если ввести угловую функцию

$$\xi = (\sin^2\theta + \sin^2\alpha - 2 \sin\theta \sin\alpha \cos\varphi)^{1/2}, \quad (9.100)$$

то интеграл по углам запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) d\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\beta' e^{-ik\rho\xi \cos\beta'} = J_0(k\rho\xi). \quad (9.101)$$

После этого интеграл по радиусу легко вычисляется. В результате получим электрическое поле в векторном приближении Кирхгофа

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{ie^{ikr}}{r} a^2 E_0 \cos\alpha (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_2) \frac{J_1(ka\xi)}{ka\xi}. \quad (9.102)$$

Средняя мощность, излучаемая в единичный телесный угол, равна

$$\frac{dP}{d\Omega} = P_i \cos\alpha \frac{(ka)^2}{4\pi} (\cos^2\varphi + \cos^2\theta \sin^2\varphi) \left| \frac{2J_1(ka\xi)}{ka\xi} \right|^2, \quad (9.103)$$

где величина

$$P_i = \frac{cE_0^2}{8\pi} \pi a^2 \cos\alpha \quad (9.104)$$

представляет собой полную мощность, *падающую* на отверстие. Если отверстие велико по сравнению с длиной волны ($ka \gg 1$), то множитель $[2J_1(ka\xi)/ka\xi]^2$ имеет острый максимум при $\xi = 0$, равный единице, и быстро падает до нуля (с маленькими вторичными максимумами) в области $\Delta\xi \sim 1/ka$ в обе стороны от направления $\xi = 0$. Это значит, что поле в основном проходит через отверстие в соответствии с законами геометрической оптики; дифракционные эффекты очень слабы. При $ka \sim 1$ бесселева функция сравнительно медленно меняется с углом, и проходящая волна распространяется в направлениях, весьма отличных от направления падения. При $ka \ll 1$ угловое распределение полностью определяется множителем $(\mathbf{k} \times \mathbf{e}_2)$ в (9.102). Но в этом предельном случае замена истинного поля в отверстии невозмущенным является слишком грубым приближением.

Полная проходящая мощность получается интегрированием выражения (9.103) по всем углам в верхней полусфере. Отношение проходящей мощности к падающей называется *коэффициентом прохождения*

$$T = \frac{\cos\alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} (\cos^2\varphi + \cos^2\theta \sin^2\varphi) \left| \frac{J_1(ka\xi)}{\xi} \right|^2 \sin\theta d\theta. \quad (9.105)$$

В предельных случаях $ka \gg 1$ и $ka \ll 1$ коэффициенты прохождения стремятся к значениям

$$T \rightarrow \begin{cases} \cos \alpha, & ka \gg 1, \\ \frac{1}{3} (ka)^2 \cos \alpha, & ka \ll 1. \end{cases} \quad (9.106)$$

Предельное значение для случая длинных волн ($ka \ll 1$) в силу сделанных допущений представляется сомнительным, но во всяком случае из него следует, что коэффициент прохождения для малых отверстий весьма мал. Для случая нормального падения ($\alpha = 0$) коэффициент прохождения (9.105) можно записать в виде

$$T = \int_0^{\pi/2} J_1^2(ka \sin \theta) \left(\frac{2}{\sin \theta} - \sin \theta \right) d\theta. \quad (9.107)$$

С помощью интегральных соотношений

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} J_n^2(z \sin \theta) \frac{d\theta}{\sin \theta} &= \int_0^{2z} J_{2n}(t) \frac{dt}{t}, \\ \int_0^{\pi/2} J_n^2(z \sin \theta) \sin \theta d\theta &= \frac{1}{2z} \int_0^{2z} J_{2n}(t) dt \end{aligned} \quad (9.108)$$

и рекуррентных формул (3.87) и (3.88) коэффициент прохождения можно представить в следующих эквивалентных формах:

$$T = \begin{cases} 1 - \frac{1}{ka} \sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(2ka), \\ 1 - \frac{1}{2ka} \int_0^{2ka} J_0(t) dt. \end{cases} \quad (9.109)$$

При увеличении ka коэффициент прохождения в среднем возрастает с небольшими колебаниями. При $ka \gg 1$ из второго выражения (9.109) можно получить асимптотическое выражение

$$T \approx 1 - \frac{1}{2ka} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{(ka)^{3/2}} \sin \left(2ka - \frac{\pi}{4} \right) + \dots, \quad (9.110)$$

из которого явно видны малые колебания T . Приближенные выражения (9.109) и (9.110) для коэффициента прохождения характеризуют его общее поведение в зависимости от ka , однако они не могут претендовать на достаточную точность. Для круглого отверстия был произведен точный расчет, а также развиты более аккуратные приближенные методы. Их сравнение друг с другом проведено

в книге Кинга и У Тай-цзуня [59]. Корректное асимптотическое разложение для коэффициента прохождения не содержит члена $1/2ka$, а коэффициент перед $(ka)^{-3/2}$ в 2 раза больше.

Сравним теперь наши результаты для *векторного* приближения Кирхгофа с обычной скалярной теорией, основанной на выражении (9.95). Для волны, которая падает не по нормали к экрану, сразу возникает вопрос о том, с чем следует отождествить скалярную функцию $\psi(x)$. Наиболее разумно, по-видимому, выбрать в качестве ψ величину электрического или магнитного поля. При этом интенсивность излучения будет пропорциональной квадрату абсолютной величины (9.95). Выбрав в качестве ψ составляющую \mathbf{E} или \mathbf{B} , мы должны дальше решить, будем ли мы сохранять или отбрасывать радиальные составляющие дифрагированных полей при расчете мощности. Полагая функцию ψ равной величине электрического поля \mathbf{E} и вычисляя интеграл в (9.95), получаем скалярный эквивалент соотношения (9.102):

$$\psi(x) = -ik \frac{e^{ikr}}{r} a^2 E_0 \left(\frac{\cos \alpha + \cos \theta}{2} \right) \frac{J_1(ka\xi)}{ka\xi}. \quad (9.111)$$

Мощность, излучаемая в единицу телесного угла, равна в *скалярном* приближении Кирхгофа

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx P_i \frac{(ka)^2}{4\pi} \cos \alpha \left(\frac{\cos \alpha + \cos \theta}{2 \cos \alpha} \right)^2 \left| \frac{2J_1(ka\xi)}{ka\xi} \right|^2, \quad (9.112)$$

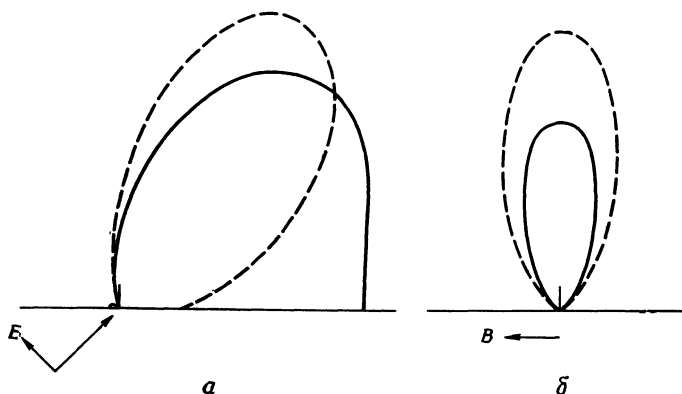
где P_i определяется выражением (9.104).

Сравнение результатов векторного приближения Кирхгофа (9.103) с (9.112) обнаруживает как сходство, так и различие между ними. Обе формулы содержат одинаковый дифракционный множитель $[J_1(ka\xi)/ka\xi]^2$ и дают одинаковую зависимость от волнового числа. Однако скалярное выражение в отличие от векторного не имеет азимутальной зависимости (кроме содержащейся в ξ). Азимутальное изменение обусловлено поляризацией поля и поэтому в скалярном приближении отсутствует. Для нормального падения ($\alpha = 0$) и больших отверстий ($ka \gg 1$) поляризационная зависимость становится несущественной. В этом случае дифрагированные поля сосредоточены в очень малом телесном угле вокруг направления падения и как скалярное, так и векторное приближения приводят к общему выражению

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx P_i \frac{(ka)^2}{\pi} \left| \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right|^2. \quad (9.113)$$

На фиг. 9.11 векторное и скалярное приближения Кирхгофа сравниваются для угла падения 45° и диаметра отверстия, равного длине волны ($ka = \pi$). Показано угловое распределение мощности излучения в плоскости падения (содержащей вектор электриче-

ского поля падающей волны) и в перпендикулярной плоскости. Сплошная кривая дает векторное приближение для каждого случая, пунктирная — скалярное; из кривых видно, что при $ka = \pi$



Ф и г. 9.11. Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии диаметром в одну длину волны в тонком плоском проводящем экране.

Плоская волна падает на экран под углом 45° . Сплошные линии соответствуют векторному приближению Кирхгофа, пунктирные — скалярному приближению. *a* — распределение интенсивности в плоскости падения (E — плоскость); *b* — распределение интенсивности (увеличенное в 2,5 раза) в плоскости, перпендикулярной плоскости падения (B — плоскость).

между этими двумя приближениями имеется значительное различие. Есть основания считать, что результаты векторного приближения Кирхгофа близки к точным, несмотря на то что при $ka \lesssim 1$ приближение уже становится некорректным. Векторное приближение для прямоугольного отверстия удивительно хорошо согласуется с точным расчетом вплоть до $ka \sim 1^1$.

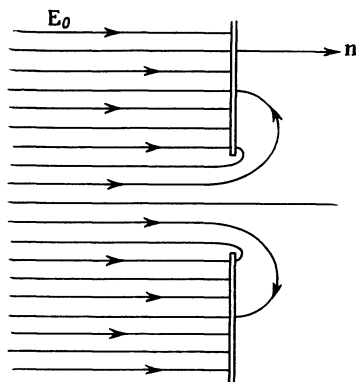
§ 9. Дифракция на малых отверстиях

Как мы видели, для больших апертур или коротких длин волн дифрагированные поля хорошо описываются приближенным методом, в котором тангенциальная составляющая электрического поля в отверстии заменяется ее невозмущенным значением для падающего поля.

Для больших длин волн это приближение дает гораздо менее удовлетворительные результаты. В том случае, когда размеры отверстия малы по сравнению с длиной волны, необходим совершенно другой подход.

¹) См. работу [107]. Ряд графиков, где сравнивается векторное приближение Кирхгофа с точными расчетами, приведен в статье [76].

Рассмотрим тонкую плоскую идеально проводящую пластину с малым отверстием в ней. Будем считать, что размеры отверстия очень малы по сравнению с длиной волны электромагнитного поля, имеющегося с одной стороны от пластины. Нашей задачей является нахождение дифрагированного поля по другую сторону пластины. Поскольку пластина плоская, то применима простая векторная теорема (9.82). Очевидно, для решения задачи достаточно определить электрическое поле в плоскости отверстия.



Ф и г. 9.12.

Бете (1942 г.) заметил, что поля в окрестности малого отверстия могут быть получены статическими или квазистатическими методами. В отсутствие отверстия электромагнитное поле вблизи проводящей плоскости на одной ее стороне имеет только нормальную составляющую электрического поля E_0 и тангенциальную составляющую магнитного поля B_0 , тогда как на другой стороне полей вообще нет. Употребляя выражение «вблизи проводящей плоскости», мы подразумеваем расстояния, которые малы по сравнению с длиной волны. Если теперь прорезать в плоскости небольшое отверстие, то поля в окрестности отверстия изменятся и будут проникать через него на другую сторону. Однако на больших расстояниях от отверстия (больших по сравнению с его размерами) поля «вблизи проводящей плоскости» будут такими же, как и в отсутствие отверстия, а именно E_0 будет перпендикулярно, а B_0 — параллельно к плоскости. Линии электрического поля будут иметь вид, показанный на фиг. 9.12. Так как поля E и B отличаются от их невозмущенных значений E_0 и B_0 только в области, размеры которой малы по сравнению с длиной волны, то задача определения E и B вблизи отверстия сводится к задаче электростатики или магнитостатики (если отвлечься от синусоидальной зависимо-

сти от времени вида $e^{-i\omega t}$). Для электрического поля это стандартная задача нахождения распределения потенциала при известной «асимптотической» величине \mathbf{E} на обеих сторонах идеально проводящей пластины, служащей эквипотенциальной поверхностью. Аналогично магнитное поле \mathbf{V} должно быть найдено по заданным асимптотическим величинам, равным \mathbf{V}_0 на одной стороне и нулю на другой стороне поверхности, и условию отсутствия нормальной составляющей на поверхности. После этого можно определить электрическое поле, обусловленное изменением во времени магнитного поля \mathbf{V} , и, сложив его с «электростатическим» электрическим полем, найти полное электрическое поле вблизи отверстия.

Например, для случая круглого отверстия радиусом a , малым по сравнению с длиной волны, тангенциальная составляющая электрического поля в плоскости отверстия оказывается равной

$$\mathbf{E}_{\parallel} = E_0 \frac{\mathbf{q}}{\pi \sqrt{a^2 - \mathbf{q}^2}} + \frac{2ik}{\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{V}_0) \sqrt{a^2 - \mathbf{q}^2}, \quad (9.114)$$

где $E_0 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n}$ — амплитуда нормальной составляющей электрического поля в отсутствие отверстия, \mathbf{V}_0 — тангенциальная составляющая магнитного поля в отсутствие отверстия, \mathbf{n} — единичный вектор нормали, направленный в дифракционную область [как в (9.82)], а \mathbf{q} — радиус-вектор в плоскости отверстия, проведенный из его центра. Найденное в статическом приближении поле (9.114) позволяет сразу определить дифракционные поля с помощью формулы (9.82). Этот расчет для круглого отверстия отнесен нами к задачам в конце главы (см. задачи 9.10 и 9.11).

§ 10. Рассеяние коротких волн проводящей сферой

Другим типом дифракционных задач является расчет рассеяния волн на препятствиях. Мы рассмотрим рассеяние плоской электромагнитной волны на идеально проводящем препятствии, размеры которого велики по сравнению с длиной волны. Для тонкого плоского препятствия можно применить метод, изложенный в § 8, возможно, в сочетании с принципом Бабины. Однако для препятствий иной формы необходимо исходить из векторной теоремы (9.77). Если мы ограничимся лишь полями в волновой зоне ($kr \gg 1$), то выражение (9.77) для рассеянного поля \mathbf{E}_s примет вид

$$\mathbf{E}_s \approx \frac{e^{ikr}}{4\pi ir} \int_{S_1} [(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s) \times \mathbf{k} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_s) \mathbf{k} - k(\mathbf{n} \times \mathbf{V}_s)] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} da', \quad (9.115)$$

где \mathbf{k} — волновой вектор рассеянной волны, а S_1 — поверхность

препятствия. Несколько проще рассчитывается магнитное поле $\mathbf{B}_s = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_s)/k$:

$$\mathbf{B}_s \approx \frac{e^{ikr}}{4\pi ir} \mathbf{k} \times \int_{S_1} \left[(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s) \times \frac{\mathbf{k}}{k} - \mathbf{n} \times \mathbf{B}_s \right] e^{-ik \cdot \mathbf{x}'} da'. \quad (9.116)$$

Поскольку мы не знаем точных значений полей \mathbf{E}_s и \mathbf{B}_s на поверхности препятствия, приходится делать некоторые допущения. Для малых по сравнению с размерами препятствия длин волн поверхность можно приближенно разделить на *освещенную* и *теньевую* области¹⁾. Граница между этими областями является резкой только в предельном случае геометрической оптики. Можно показать, что переходная область имеет ширину порядка $(2/kR)^{1/3}R$, где R — характерный радиус кривизны поверхности. Так как R имеет величину порядка размеров препятствия, то для достаточно коротких волн приближенно выполняются условия применимости геометрической оптики. В области тени рассеянное поле у поверхности должно быть почти равно по величине и противоположно по направлению падающему полю. В освещенной области тангенциальная составляющая электрического поля и нормальная составляющая магнитного поля на поверхности должны быть равны и противоположно направлены по отношению к соответствующим составляющим падающего поля (чтобы удовлетворялись граничные условия на поверхности идеально проводящего препятствия). С другой стороны, тангенциальная составляющая \mathbf{B}_s и нормальная составляющая \mathbf{E}_s в освещенной области должны быть приближенно равны соответствующим составляющим в падающей волне (как и в случае бесконечной плоской проводящей пластины) в силу принятого предположения о малости длины волны по сравнению с радиусом кривизны поверхности. Таким образом, мы получаем следующие приближенные значения рассеянных полей на поверхности препятствия:

Теньевая область

$$\mathbf{E}_s \approx -\mathbf{E}_i,$$

$$\mathbf{B}_s \approx -\mathbf{B}_i,$$

Освещенная область

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_i,$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_s = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_i,$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{B}_s \approx \mathbf{n} \times \mathbf{B}_i,$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_s \approx \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_i,$$

где \mathbf{E}_i и \mathbf{B}_i — поля падающей волны. Используя эти граничные значения, мы можем следующим образом записать выражение

¹⁾ Очень похожая трактовка рассеяния скалярных волн на сфере дана в книге Морса и Фешбаха [77].

(9.116) для магнитного поля:

$$\mathbf{B}_s \approx \frac{e^{ikr}}{4\pi ir} \mathbf{k} \times (\mathbf{F}_{\text{TH}} + \mathbf{F}_{\text{OCB}}). \quad (9.117)$$

Здесь

$$\mathbf{F}_{\text{TH}} = \int_{\text{TH}} \left[\frac{\mathbf{k}}{k} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_i) + \mathbf{n} \times \mathbf{B}_i \right] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} da' \quad (9.118)$$

и

$$\mathbf{F}_{\text{OCB}} = \int_{\text{OCB}} \left[\frac{\mathbf{k}}{k} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_i) - \mathbf{n} \times \mathbf{B}_i \right] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} da' \quad (9.119)$$

соответственно интегралы по теневой и освещенной областям.

Если падает плоская волна с волновым вектором \mathbf{k}_0 , т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) &= \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}}, \\ \mathbf{B}_i(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{k}_0}{k_0} \times \mathbf{E}_i(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (9.120)$$

то интегралы по теневой и освещенной областям поверхности препятствия принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{TH}} &= \frac{1}{k} \int_{\text{TH}} [(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0) \mathbf{k}_0] e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}'} da', \\ \mathbf{F}_{\text{OCB}} &= \frac{1}{k} \int_{\text{OCB}} [(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0) \mathbf{k}_0] e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}'} da'. \end{aligned} \quad (9.121)$$

Эти интегралы по-разному зависят от угла рассеяния. В предельном случае коротких волн величины $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'$ и $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}'$ велики по сравнению с единицей. Поэтому экспоненциальные множители в (9.121) быстро меняются, и, следовательно, средние значения подынтегральных выражений очень малы для всех направлений, кроме $\mathbf{k} \approx \mathbf{k}_0$. В направлении $\mathbf{k} \approx \mathbf{k}_0$ вторые члены в \mathbf{F}_{TH} и \mathbf{F}_{OCB} несущественны, поскольку рассеянное поле (9.117) пропорционально $\mathbf{k} \times \mathbf{F}$. Таким образом, поведение рассеянного поля, по крайней мере в прямом направлении, определяется первыми членами выражения (9.121). Мы видим, что \mathbf{F}_{TH} и \mathbf{F}_{OCB} пропорциональны соответственно $(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)$, поэтому интеграл по области тени конечен, а интеграл по освещенной области стремится к нулю. При отклонении угла рассеяния от направления падающей волны интеграл по области тени быстро стремится к нулю как из-за экспоненциального множителя, так и из-за векторного множителя в подынтегральном выражении. Наоборот, интеграл по освещенной области мал в прямом направлении; по-видимому, он должен быть малым и для всех других направлений благодаря тому, что экспоненциальный и векторный множи-

тели меняются в противоположных направлениях. Очевидно, интеграл по области тени дает дифрагированное поле, а интеграл по освещенной области дает отраженную волну.

Чтобы продвинуться дальше, мы должны конкретизировать форму препятствия. Пусть препятствием является идеально проводящая сфера радиусом a . Так как интеграл по области тени имеет заметную величину только в направлении падения волны, мы при его вычислении положим приближенно $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ всюду, кроме показателя экспоненты. Отбрасывая второй член в (9.121) и используя сферические координаты на поверхности сферы, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{ТН}} \approx -2\mathbf{E}_0 a^2 \int_0^{\pi/2} da \sin \alpha \cos \alpha \exp [ika (1 - \cos \theta) \cos \alpha] \times \\ \times \int_0^{2\pi} d\beta \exp [-ika \sin \theta \sin \alpha \cos (\beta - \varphi)]. \quad (9.122) \end{aligned}$$

Углы θ , φ и α , β — сферические угловые координаты векторов \mathbf{k} и \mathbf{n} , отсчитываемые от направления \mathbf{k}_0 . Экспоненту, содержащую в показателе множитель $(1 - \cos \theta)$, можно для малых углов θ положить равной единице. В результате интегрирования по β получаем $2\pi J_0(ka \sin \theta \sin \alpha)$. Следовательно,

$$\mathbf{F}_{\text{ТН}} \approx -4\pi a^2 \mathbf{E}_0 \int_0^{\pi/2} J_0(ka\theta \sin \alpha) \cos \alpha \sin \alpha da, \quad (9.123)$$

где $\sin \theta$ приближенно заменен на θ . Интеграл по α легко берется, так как

$$\int_0^{ka\theta} x J_0(x) dx = ka\theta J_1(ka\theta).$$

Таким образом, для интеграла по области тени получаем

$$\mathbf{F}_{\text{ТН}} \approx -4\pi^2 a \mathbf{E}_0 \frac{J_1(ka\theta)}{ka\theta}. \quad (9.124)$$

Мы видим, что рассеянное поле, по существу, совпадает с дифракционным полем для круглого отверстия [см. (9.102)].

Несколько сложнее вычисляется интеграл по освещенной области, дающий отраженное поле. Здесь мы должны рассматривать произвольные углы рассеяния, поскольку усиления в прямом направлении теперь не происходит. Интеграл содержит сравнительно медленно меняющуюся векторную функцию, умноженную на быстро меняющуюся экспоненту. Как известно, основной вклад

в такой интеграл дает область интегрирования, в которой фаза экспоненты стационарна. Эта фаза равна

$$f(\alpha, \beta) = (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}' = ka [(1 - \cos \theta) \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha \cos (\beta - \varphi)]. \quad (9.125)$$

Легко видеть, что точка экстремума фазы соответствует углам

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}, \quad (9.126)$$

$$\beta_0 = \varphi.$$

Это, очевидно, углы отражения от сферы по законам геометрической оптики. В точке экстремума единичный вектор \mathbf{n} направлен вдоль $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$. Разложение фазы в окрестности $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ имеет вид

$$f(\alpha, \beta) = -2ka \sin \frac{\theta}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \dots \right], \quad (9.127)$$

где $x = \alpha - \alpha_0$, $y = \beta - \beta_0$. Для расчета интеграла (9.121) можно приближенно в предэкспоненциальном множителе положить $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$; тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{осв}} &\approx a^2 \sin \theta [2\mathbf{n}_0 (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{E}_0] \exp \left(-2ika \sin \frac{\theta}{2} \right) \times \\ &\times \int dx \exp \left[i \left(ka \sin \frac{\theta}{2} \right) x^2 \right] \int dy \exp \left[i \left(ka \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) y^2 \right]; \end{aligned} \quad (9.128)$$

здесь \mathbf{n}_0 — единичный вектор в направлении $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$. При не слишком малом θ члены с экспонентами очень быстро осциллируют при больших x и y . Поэтому мы не сделаем существенной ошибки, если в обоих интегралах будем интегрировать по бесконечному интервалу от $-\infty$ до $+\infty$. Используя формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x^2} dx = \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^{1/2} e^{i\pi/4}, \quad (9.129)$$

получаем

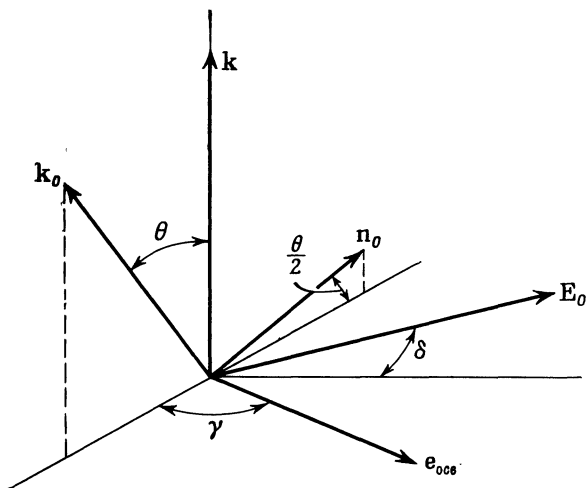
$$\mathbf{F}_{\text{осв}} \approx i \frac{2\pi a}{k} e^{-2ika \sin(\theta/2)} [2(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{E}_0) \mathbf{n}_0 - \mathbf{E}_0]. \quad (9.130)$$

После некоторых преобразований вклад в рассеянное поле от интеграла по освещенной части сферы можно представить в виде

$$\mathbf{E}_s^{(\text{осв})} \approx -\frac{a}{2} E_0 \frac{e^{ikr}}{r} e^{-2ika \sin(\theta/2)} \mathbf{e}_{\text{осв}}. \quad (9.131)$$

Направление вектора поляризации $\mathbf{e}_{\text{осв}}$ показано на фиг. 9.13. Если вектор поляризации падающей волны \mathbf{E}_0 образует угол δ

с нормалью к плоскости, содержащей волновые векторы \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 , то азимутальный угол γ вектора $\mathbf{e}_{\text{осв}}$, отсчитываемый от плоскости, содержащей \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 , равен $\gamma = (\pi/2) - \delta$. Заметим, что амплитуда отраженного поля (9.131) не зависит от угла отражения, хотя его фаза — быстро меняющаяся функция угла.



Ф и г. 9.13. Поляризация отраженной волны по отношению к падающей.

Рассеянное электрическое поле, обусловленное интегрированием по области тени, согласно (9.124) и (9.117), запишется как

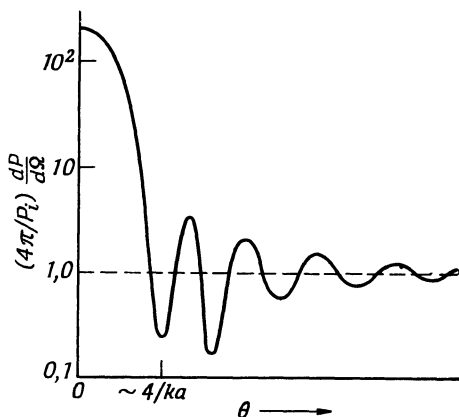
$$\mathbf{E}_s^{\text{TH}} \approx ika^2 \frac{J_1(ka\theta)}{ka\theta} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) \times \mathbf{k}}{k^2}. \quad (9.132)$$

Сравнение выражений (9.131) и (9.132) показывает, что в прямом направлении «тенивое» поле больше в $ka \gg 1$ раз. Однако для углов $\theta \gg 1/ka$ «тенивое» поле становится очень малым, и доминирующим оказывается изотропное отраженное поле. Мощность, рассеиваемую в единицу телесного угла, можно представить в виде

$$\frac{dP_s}{d\Omega} \approx P_i \begin{cases} \frac{(ka)^2}{4\pi} \left| \frac{2J_1(ka\theta)}{ka\theta} \right|^2, & \theta \lesssim \frac{1}{ka}, \\ \frac{1}{4\pi}, & \theta \gg \frac{1}{ka}, \end{cases} \quad (9.133)$$

где $P_i = cE_0^2 a^2 / 8$ — поток мощности падающей волны, приходящийся на сечение сферы πa^2 . При малых углах рассеяния мы имеем типичную дифракционную картину [см. (9.113)]. При больших углах рассеяние изотропно. При промежуточных значениях углов рассеяния происходит интерференция обоих полей и возникают

резкие минимумы рассеянной мощности, так что в некоторых направлениях мощность оказывается значительно меньше, чем в изотропной области (фиг. 9.14). Характер интерференционной картины зависит от ориентации вектора поляризации падающей волны по отношению к плоскости наблюдения, содержащей \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 . В том случае, когда вектор \mathbf{E}_0 лежит в этой плоскости, интерференция выражена значительно сильнее, чем в случае, когда вектор \mathbf{E}_0 перпендикулярен ей¹⁾.



Ф и г. 9.14. Диаграмма рассеяния на проводящей сфере.

Видны максимум в прямом направлении, обусловленный рассеянием в области тени, изотропное распределение отраженного излучения и интерференционные максимумы и минимумы.

Полная рассеянная мощность получается интегрированием по всем углам. Если пренебречь интерференционными членами, то полная рассеянная мощность складывается из интеграла по дифракционному максимуму и интеграла от изотропно отраженной части. Легко видеть, что эти интегралы одинаковы по величине, так что

$$P_s = P_i + P_i = 2P_i. \quad (9.134)$$

Этот результат часто формулируют следующим образом: эффективная поверхность сферы (т. е. сечение рассеяния) равна $2\pi a^2$. Одно слагаемое πa^2 обусловлено прямым отражением, а другое связано с дифракционным рассеянием, приводящим к образованию тени за препятствием.

Рассеяние электромагнитных волн на проводящей сфере, в частности для случая длинных волн, рассматривается другим методом в гл. 16, § 9.

¹⁾ Диаграммы рассеяния на сфере в функции ka приведены в книге Кинга и У Тай-цзуна [59].

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Простая теория излучения электромагнитных волн источниками, занимающими ограниченную область, рассматривается во всех современных учебниках. Изложение, аналогичное нашему, можно найти в книгах Пановского и Филипс [78], гл. 13, и Стрэттона [106], гл. 8. Более полные сведения об антеннах и антенных системах имеются в технической литературе, в частности в книгах Джордана [57], Крауса [60], Щелкунова [90] и Силвера [95].

Теории дифракции посвящена весьма обширная литература. Исчерпывающее рассмотрение как скалярной, так и векторной теории Кирхгофа с множеством примеров и отличных рисунков дано в книге Борна и Вольфа [16], гл. 8, 9, 11. Более элементарное изложение скалярной теории можно найти в книге Слэтера и Франка [98], гл. 13, 14.

Математические методы решения дифракционных задач рассмотрены в книгах Бекера и Копсона [7] и Морса и Фешбаха [77], гл. 11. Векторные теоремы, использованные в § 6—10 настоящей главы, имеются в книгах Морса и Фешбаха [77], гл. 13, Силвера [95], гл. 5, Стрэттона [106], гл. 8. Монография Кинга и У Тай-цзуня [59] специально посвящена рассеянию электромагнитных волн на препятствиях, причем большое внимание уделяется получению полезных численных результатов.

ЗАДАЧИ

9.1. Рассмотреть поток мощности и энергию поля электрического диполя (9.18), выразив их через комплексный вектор Пойнтинга $\mathbf{S} = (c/8\pi)(\mathbf{E} \times \mathbf{V}^*)$ и среднюю по времени плотность энергии $u = (1/16\pi)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^*)$. Действительная часть \mathbf{S} дает истинную мощность активных потерь, а мнимая часть представляет собой циркулирующую реактивную мощность.

а) Показать, что действительная часть вектора \mathbf{S} направлена по радиусу и дается выражением (9.23), умноженным на r^{-2} .

б) Показать, что мнимая часть \mathbf{S} имеет следующие составляющие по r и θ :

$$\text{Im } S_r = \frac{ck}{8\pi r^5} |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta,$$

$$\text{Im } S_\theta = -\frac{ck |\mathbf{p}|^2}{4\pi r^5} (1 + k^2 r^2) \sin \theta \cos \theta.$$

Изобразить схему циркуляции потока мощности с помощью соответственно направленных стрелок, длины которых пропорциональны величине $\text{Im } \mathbf{S}$ в данной точке.

в) Вычислить среднюю по времени плотность энергии:

$$u = \frac{1}{16\pi} \frac{|3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}|^2}{r^6} + \frac{k^2 |\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}|^2}{4\pi r^4} + \frac{k^4 |\mathbf{n} \times \mathbf{p}|^2}{8\pi r^2}.$$

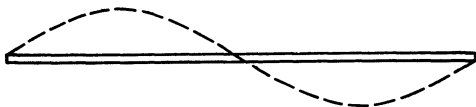
г) Вывести теорему Пойнтинга для комплексного вектора Пойнтинга. Чему равна мнимая часть от $\text{div } \mathbf{S}$? Удовлетворяют ли полученному соотношению результаты, найденные в п. «б» и «в».

9.2. Излучающий квадруполь представляет собой квадрат со стороной a , в углах которого последовательно размещены заряды q и $-q$. Квадрат вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр. Рассчитать квадрупольный момент,

излучаемые поля, угловое распределение излучения и полную мощность излучения в приближении длинных волн.

9.3. Две полусферические идеально проводящие металлические оболочки радиусом R разделены очень тонким изолирующим промежутком. К ним приложено переменное напряжение, так что потенциалы полусфер равны $\pm V \cos \omega t$. В приближении длинных волн найти поля излучения, угловое распределение излучаемой мощности и полную мощность, излучаемую сферой.

9.4. Тонкая линейная антенна длиной d возбуждается таким образом, что на ее длине укладывается полный период синусоиды тока, как показано на фиг. 9.15.



Ф и г. 9.15.

а) Произвести точный расчет мощности, излучаемой в единичный телесный угол, и построить график углового распределения излучения.

б) Определить полную мощность излучения и найти численную величину сопротивления излучения.

9.5. Рассмотреть линейную антенну задачи 9.4, используя метод разложения по мультиполям в приближении длинных волн.

а) Рассчитать мультипольные моменты (электрический дипольный, магнитный дипольный и электрический квадрупольный).

б) Сравнить угловое распределение для низшего неисчезающего мультиполя с точным распределением, полученным в задаче 9.4.

в) Определить полную мощность излучения для низшего мультиполя и соответствующее сопротивление излучения.

9.6. Идеально проводящий плоский экран занимает половину плоскости xy (именно $x < 0$). Плоская волна с интенсивностью I_0 и волновым числом k падает вдоль z из области $z < 0$. Рассмотреть величину дифрагированных полей в плоскости $z = Z > 0$, параллельной плоскости xy . Пусть координаты точки наблюдения будут $(X, 0, Z)$.

а) Показать, что обычное скалярное приближение Кирхгофа для $Z \gg X$ приводит к дифрагированному полю

$$\psi(X, 0, Z) \approx I_0^{1/2} e^{ikZ - i\omega t} \left(\frac{1+i}{2i} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\xi}^{\infty} e^{it^2} dt,$$

где $\xi = (k/2Z)^{1/2} X$.

б) Показать, что интенсивность можно записать в виде

$$I = |\psi|^2 = \frac{I_0}{2} \left[\left(C(\xi) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(S(\xi) + \frac{1}{2} \right)^2 \right],$$

где $C(\xi)$ и $S(\xi)$ — так называемые интегралы Френеля. Найти асимптотическое поведение I для больших положительных ξ (освещенная область) и больших отрицательных ξ (область тени). Чему равна величина I при $X = 0$? Построить графики зависимости I от X при фиксированном Z .

в) С помощью векторной формулы (9.82) получить результаты, эквивалентные п. «а». Сравнить оба полученных выражения.

9.7. Линейно поляризованная плоская волна с амплитудой E_0 и волновым числом k падает на круглое отверстие радиусом a в идеально проводящем плоском экране. Волновой вектор падающей волны образует угол α с нормалью к экрану. Волна поляризована перпендикулярно плоскости падения.

а) Рассчитать дифрагированное поле и мощность проходящего излучения в единице телесного угла с помощью векторной формулы Кирхгофа (9.82), предполагая, что тангенциальное электрическое поле в отверстии равно невозмущенному падающему полю.

б) Сравнить результат п. «а» с обычным скалярным приближением Кирхгофа и с результатами § 8, относящимися к случаю, когда плоскость поляризации совпадает с плоскостью падения.

9.8. В плоском идеально проводящем листе, расположенном в плоскости xy , имеется прямоугольное отверстие со сторонами a и $b \geq a$, ограниченное прямыми $x = \pm a/2$, $y = \pm b/2$. Вектор поляризации нормально падающей плоской волны направлен под углом β к длинной стороне отверстия.

а) Рассчитать дифракционное поле и мощность излучения в единице телесного угла с помощью векторного соотношения Кирхгофа (9.82), полагая, что тангенциальное электрическое поле в отверстии равно падающему невозмущенному полю.

б) Получить соответствующий результат с помощью скалярного приближения Кирхгофа.

в) Для случая $a = b$, $\beta = 45^\circ$, $ka = 4\pi$ вычислить в векторном и скалярном приближениях зависимость мощности излучения в единице телесного угла от угла θ при $\varphi = 0$. Построить графики и сравнить оба полученных результата.

9.9. Ось цилиндрической коаксиальной линии с внутренним радиусом a и внешним радиусом b является отрицательная ось z . Внутренний и внешний проводники обрываются при $z = 0$, причем внешний цилиндр соединен с бесконечным плоским фланцем, занимающим всю плоскость xy (за исключением круга радиусом b с центром в начале координат). В этой коаксиальной линии возбуждается его основная волна типа ТЕМ с частотой ω и с амплитудой напряжения между цилиндрами V . С помощью векторного приближения Кирхгофа рассчитать поля излучения, угловое распределение излучения и полную излучаемую мощность.

9.10. Рассмотреть дифракцию на малом круглом отверстии радиусом a в плоском идеально проводящем экране в предположении, что $ka \ll 1$.

а) Пусть поле вблизи экрана со стороны падающей волны имеет нормальную составляющую электрического поля $E_0 e^{-i\omega t}$ и тангенциальную составляющую магнитного поля $\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}$. Показать, что дифрагированное электрическое поле во френгоферовой зоне описывается выражением

$$\mathbf{E} = \frac{e^{ikr - i\omega t}}{3\pi r} k^2 a^3 \left[2 \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{B}_0 + \frac{\mathbf{k}}{k} \times \left(\mathbf{E}_0 \times \frac{\mathbf{k}}{k} \right) \right],$$

где \mathbf{k} — волновой вектор в направлении наблюдения.

б) Определить угловое распределение дифрагированного излучения и показать, что полная мощность, проходящая через отверстие, равна

$$P = \frac{c}{54\pi^2} k^4 a^6 (4B_0^2 + E_0^2).$$

9.11. Ограничив условия задачи 9.10 случаем дифракции плоской волны на малом круглом отверстии, рассмотреть общий случай наклонного падения под углом α к нормали при поляризации, параллельной и перпендикулярной плоскости падения.

а) Рассчитать угловое распределение дифрагированного излучения и сравнить его с результатами векторного приближения Кирхгофа в § 8 и в задаче 9.7 в предельном случае $ka \ll 1$.

б) Показать, что коэффициенты прохождения [см. (9.105)] для обеих поляризаций имеют соответственно вид

$$T_{\parallel} = \frac{64}{27\pi^2} (ka)^4 \frac{4 + \sin^2 \alpha}{4 \cos \alpha},$$

$$T_{\perp} = \frac{64}{27\pi^2} (ka)^4 \cos \alpha.$$

Заметим, что эти коэффициенты отличаются малым множителем $(ka)^2$ от коэффициентов, получающихся из векторного приближения Кирхгофа для этого случая.

МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА И ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

§ 1. Введение и основные понятия

Магнитогидродинамика и физика плазмы рассматривают поведение проводящей жидкости или газа в электромагнитных полях. Проводимость вещества связана с наличием свободных или почти свободных электронов, которые могут двигаться под действием приложенных полей. В твердом проводнике электроны фактически связаны, но за время между двумя столкновениями они могут сдвигаться на значительные по сравнению с атомными размерами расстояния внутри кристаллической решетки. При наложении полей в твердом теле проявляются такие динамические эффекты, как проводимость и эффект Холла, однако общего движения вещества не возникает. Действие приложенных полей на сами атомы сводится лишь к появлению напряжений в кристаллической решетке. Напротив, в жидкости или газе поля действуют как на электроны, так и на ионы, что приводит к движению всего вещества в целом. Движение вещества в свою очередь вызывает изменение электромагнитного поля. Следовательно, в этом случае мы должны рассматривать совместно взаимодействующую систему вещества и полей.

Между магнитогидродинамикой и физикой плазмы нет резкого различия. Тем не менее имеются определенные области применения идей и методов каждой из них. Для иллюстрации имеющегося различия можно рассмотреть способ вывода соотношения $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ для проводящей среды. В простой модели, рассмотренной в гл. 7, § 8, мы считали, что приложенное поле ускоряет электроны, а столкновения изменяют направление их движения, так что движению электронов в направлении поля противодействует некоторая эффективная сила трения $\gamma m v$, где ν — частота столкновений. Закон Ома как раз и выражает баланс между приложенной силой и силой трения. Если частота приложенного поля сравнима с ν , то электроны успевают ускоряться и тормозиться между двумя столкновениями. В этом случае существенна инерция электронов

и проводимость становится комплексной. К сожалению, для таких частот описание эффекта столкновений как тормозящей силы уже становится неприменимым, процесс здесь протекает более сложно. При частотах, значительно больших частоты столкновений, имеет место другое явление. Электроны и ионы, ускоряясь электрическим полем в противоположных направлениях, стремятся разделиться. При разделении зарядов появляются сильные электростатические поля, стремящиеся сблизить заряды, и возникают колебания плотности заряда. Эти высокочастотные колебания называются *плазменными колебаниями*. Они существенно отличаются от низкочастотных колебаний, связанных с перемещениями жидкости или газа, не сопровождающимися разделением зарядов. Низкочастотные колебания называются *магнитогидродинамическими волнами*.

В проводящих жидкостях и ионизованных газах большой плотности частота столкновений достаточно высока даже в случае хорошей проводимости, и поэтому в широкой области частот применим закон Ома в простой форме. Под действием приложенного поля электроны и ионы движутся таким образом, что, если отвлечься от высокочастотных колебаний, разделения зарядов не происходит. Электрическое поле появляется из-за движения жидкости или газа, что обуславливает электрические токи, или же из-за изменения во времени магнитного поля или распределений зарядов, внешних по отношению к рассматриваемой системе. Механическое движение системы может быть описано в этом случае как движение единой проводящей жидкости (газа) с помощью обычных гидродинамических переменных: плотности, скорости и давления. Для низких частот обычно можно пренебречь токами смещения. Такое приближение называется *магнитной гидродинамикой*.

В менее плотных ионизованных газах частота столкновений меньше. При этом еще может оставаться некоторая низкочастотная область, в которой уравнения магнитной гидродинамики применимы к квазистационарным процессам; в частности, это приближение обычно справедливо для астрофизических задач. Однако при больших частотах уже нельзя пренебрегать разделением зарядов и токами смещения и при описании движения следует учитывать инерцию электронов и ионов. Эту область мы называем *физикой плазмы*. Здесь иногда применима двухжидкостная модель электронного и ионного газа, которая при выполнении некоторых физических условий дает приблизительно правильное описание ряда явлений. Однако для высоких температур и низких плотностей приходится учитывать наличие разброса скоростей частиц относительно их среднего значения. Корректное рассмотрение производится в этом случае с помощью уравнения Больцмана с учетом или без учета короткомасштабных корреляций. Мы не будем входить здесь в такие детали.

При еще более высоких температурах и низких плотностях электростатические возвращающие силы становятся настолько слабыми, что расстояние, характеризующее разделение зарядов, начинает существенно превосходить размеры системы. При этом уже нельзя говорить о коллективном поведении частиц, подразумеваемом в жидкостной модели. Мы приходим к системе быстро движущихся заряженных частиц, взаимодействующих благодаря кулоновским столкновениям. По определению, ионизованный газ называется плазмой, если некоторый размер, начиная с которого мелкомасштабное индивидуальное поведение частиц заменяется крупномасштабным коллективным поведением, мал по сравнению с характерным размером системы. Этот размер, называемый *дебаевским радиусом экранирования*, будет рассмотрен в § 10. Он численно равен $7,91(T/n)^{1/2}$ см, где T — абсолютная температура в градусах Кельвина, а n — число электронов в 1 см^3 . Обычно, за исключением случаев очень горячей или очень разреженной плазмы, дебаевский радиус много меньше 1 см.

§ 2. Уравнения магнитной гидродинамики

Начнем с рассмотрения поведения электрически нейтральной проводящей жидкости (газа) в электромагнитном поле. Предположим для простоты, что магнитная проницаемость жидкости μ равна единице. Введем плотность вещества $\rho(x, t)$, скорость $\mathbf{v}(x, t)$, давление $p(x, t)$ (которое предполагается скалярным) и действительную проводимость σ . Гидродинамическими уравнениями являются уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0 \quad (10.1)$$

и уравнение движения

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}_v + \rho \mathbf{g}. \quad (10.2)$$

Кроме градиента давления и электромагнитной силы, мы включили вязкость и гравитационную силу. Для несжимаемой жидкости сила, обусловленная вязкостью, имеет вид

$$\mathbf{F}_v = \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (10.3)$$

где η — коэффициент вязкости. Следует подчеркнуть, что производная по времени от скорости в левой части равенства (10.2) является *материальной производной*

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}, \quad (10.4)$$

определяющей полную скорость изменения величины, движущейся с мгновенной скоростью \mathbf{v} .

В пренебрежении токами смещения электромагнитные поля в жидкости описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Условие $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$, эквивалентное пренебрежению токами смещения, является следствием второго уравнения (10.5). В (10.5) опущены два уравнения для дивергенции полей. Из закона индукции Фарадея следует, что $(\partial/\partial t) \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, так что требование $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ можно принять в качестве начального условия. Поскольку мы пренебрегли токами смещения, то можно также не принимать во внимание закон Кулона, так как электрическое поле полностью определяется уравнениями (10.5) и законом Ома (см. ниже). Учет токов смещения в законе Ампера и уравнения непрерывности $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho_e$ приводит к поправкам порядка v^2/c^2 . Для обычных магнитогидродинамических задач это пренебрежимо малая величина.

Для получения полной системы динамических уравнений необходимо установить связь между плотностью тока \mathbf{J} и полями \mathbf{E} и \mathbf{B} . Для обычной проводящей среды с проводимостью σ справедлив закон Ома, и плотность тока описывается обычным соотношением

$$\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}', \quad (10.6)$$

где \mathbf{J}' и \mathbf{E}' измеряются в системе координат, покоящейся относительно среды. Если жидкость движется со скоростью \mathbf{v} относительно лабораторной системы координат, то мы должны преобразовать плотность тока и электрическое поле к неподвижной системе координат. Преобразование поля определяется уравнением (6.10). Плотность тока в лабораторной системе, очевидно, равна

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}' + \rho_e \mathbf{v}, \quad (10.7)$$

где ρ_e — плотность заряда. Для однокомпонентной проводящей жидкости $\rho_e = 0$. Следовательно, закон Ома принимает вид

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (10.8)$$

Иногда эффективную проводимость жидкости можно считать бесконечно большой. Тогда под действием полей \mathbf{E} и \mathbf{B} жидкость движется таким образом, что удовлетворяется соотношение

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (10.9)$$

Уравнения (10.1), (10.2), (10.5) и (10.8), дополненные уравнением состояния жидкости, составляют полную систему уравнений магнитной гидродинамики. В следующем параграфе мы рассмотрим некоторые простые следствия из этих уравнений и введем основные понятия магнитной гидродинамики.

§ 3. Магнитная диффузия, вязкость и давление

Поведение жидкости в электромагнитном поле в значительной мере определяется ее проводимостью; это относится как к электромагнитным, так и к механическим характеристикам. Начнем с электромагнитных эффектов. Как мы увидим ниже, в зависимости от величины проводимости поля ведут себя совершенно различным образом. Производную по времени от магнитного поля после исключения \mathbf{E} с помощью (10.8) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (10.10)$$

Здесь принято, что σ не зависит от координат. Для покоящейся жидкости (10.10) сводится к уравнению диффузии

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (10.11)$$

Отсюда следует, что начальные значения магнитного поля затухают с характерным временем диффузии

$$\tau = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2}, \quad (10.12)$$

где L — характерный размер пространственного изменения \mathbf{B} . Для медной сферы радиусом 1 см время τ имеет величину порядка 1 сек, для жидкого ядра Земли — порядка 10^4 лет, а для магнитного поля Солнца — порядка 10^{10} лет.

Для времен, малых по сравнению со временем диффузии τ [т. е. в тех случаях, когда проводимость столь велика, что вторым членом в (10.10) можно пренебречь], зависимость магнитного поля от времени определяется уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (10.13)$$

Используя (6.5), можно показать, что это уравнение эквивалентно утверждению о постоянстве во времени магнитного потока через произвольный контур, движущийся вместе с жидкостью. Таким образом, в этом случае силовые линии как бы «вморожены» в вещество и движутся вместе с ним. При бесконечной проводимости скорость \mathbf{w} силовых линий магнитного поля (которая, по опреде-

лению, перпендикулярна \mathbf{B}) равна, согласно (10.9),

$$\mathbf{w} = c \frac{(\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{B^2}. \quad (10.14)$$

Этот так называемый электрический дрейф жидкости вместе с силовыми линиями можно объяснить, исходя из свойств траекторий отдельных частиц (электронов и ионов) в скрещенных электрическом и магнитном полях (см. гл. 12, § 8).

Полезной величиной, позволяющей различать состояния, в которых происходит диффузия силовых линий относительно вещества, и состояния, в которых силовые линии вморожены в вещество, является *магнитное число Рейнольдса* R_M . Если V — характерная скорость задачи, а L — характерная длина, то магнитное число Рейнольдса определяется как

$$R_M = \frac{V\tau}{L}, \quad (10.15)$$

где τ — время диффузии (10.12). Увлечение силовых линий жидкостью преобладает над диффузией при $R_M \gg 1$. Для таких жидкостей, как ртуть и натрий, в лабораторных условиях (за исключением случая очень больших скоростей) $R_M < 1$. Однако в геофизических и астрофизических приложениях R_M может быть очень большим по сравнению с единицей.

Механические свойства системы определяются уравнением движения (10.2). Подставляя в него выражение (10.8) для \mathbf{J} , получаем

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{\sigma B^2}{c^2} (\mathbf{v}_\perp - \mathbf{w}), \quad (10.16)$$

где \mathbf{F} — сумма всех неэлектромагнитных сил, а \mathbf{v}_\perp — составляющая скорости, перпендикулярная \mathbf{B} . Из этого уравнения явно видно, что движение вдоль \mathbf{B} происходит под действием только неэлектромагнитных сил. Скорость же движения жидкости, перпендикулярная \mathbf{B} , со временем затухания порядка

$$\tau' = \frac{\rho c^2}{\sigma B^2} \quad (10.17)$$

стремится к стационарной величине

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{w} + \frac{c^2}{\sigma B^2} \mathbf{F}_\perp. \quad (10.18)$$

В пределе бесконечной проводимости, как и следовало ожидать, этот результат сводится к (10.14). Член в (10.16), пропорциональный B^2 , учитывает вязкость, или силу трения, тормозящую движение жидкости в направлении, перпендикулярном силовым линиям магнитного поля. Иногда ее называют магнитной вязкостью.

Если обычная вязкость, входящая в \mathbf{F} , сравнима с магнитной вязкостью, то время затухания τ' уменьшается на очевидный множитель, содержащий отношение обеих вязкостей.

Выше было показано, что при большой проводимости силовые линии магнитного поля вморожены в жидкость и движутся вместе с ней. Отклонения от этого состояния движения быстро исчезают. При обсуждении механических эффектов мы рассматривали электромагнитные величины как заданные, а при рассмотрении электромагнитных эффектов считали заданными механические величины. В действительности, конечно, уравнения движения и уравнения поля взаимосвязаны. В случае предельно большой проводимости плотность тока в уравнении движения удобно выразить с помощью закона Ампера через магнитное поле \mathbf{B} , а из закона Фарадея с помощью (10.9) исключить \mathbf{E} , что приводит к (10.13). При этом магнитная сила в (10.2) записывается в виде

$$\frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (10.19)$$

С помощью векторного тождества

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (10.20)$$

можно преобразовать равенство (10.19) к виду

$$\frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\operatorname{grad} \frac{B^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B}. \quad (10.21)$$

Это соотношение показывает, что магнитная сила эквивалентна гидростатическому магнитному давлению

$$p_M = \frac{B^2}{8\pi} \quad (10.22)$$

плюс еще одно слагаемое, которое можно интерпретировать как натяжение вдоль силовых линий. Выражение (10.21) можно также получить из максвелловского тензора натяжений (см. гл. 6, § 9).

Если пренебречь влиянием вязкости и ввести потенциал ψ гравитационных сил ($\mathbf{g} = -\operatorname{grad} \psi$), то уравнение движения (10.2) примет вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} (p + p_M + \rho\psi) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B}. \quad (10.23)$$

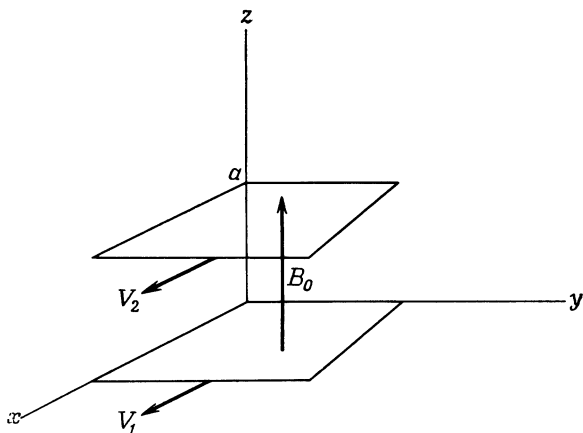
В некоторых простейших случаях, например, когда поле \mathbf{B} имеет только одну декартову составляющую, последний член, связанный с магнитным натяжением, обращается в нуль. В этом случае уравнение статики имеет интеграл

$$p + p_M + \rho\psi = \text{const}. \quad (10.24)$$

Отсюда следует, что если не учитывать гравитационных эффектов, то любые изменения гидростатического давления должны быть сбалансированы изменениями магнитного давления. Если, например, жидкость должна быть локализована внутри некоторого объема, так что p быстро падает до нуля вне этого объема, то магнитное давление должно столь же быстро возрасть к периферии. На этом основан пинч-эффект, рассмотренный в § 5.

§ 4. Магнитогидродинамический поток между границами в скрещенных электрическом и магнитном полях

Для иллюстрации конкурирующего влияния эффектов вмораживания силовых линий и диффузии поперек силовых линий, а также влияния граничных условий на электрический дрейф рассмотрим несжимаемую вязкую проводящую жидкость, движущуюся вдоль оси x между двумя непроводящими плоскостями $z = 0$ и $z = a$ (фиг. 10.1). Граничные плоскости движутся со скоростями V_1 и V_2 в x -направлении. Однородное магнитное поле \mathbf{B}_0



Фиг. 10.1. Течение вязкой проводящей жидкости в магнитном поле между двумя плоскостями, движущимися с различными скоростями.

направлено вдоль оси z . В x - и y -направлениях система считается бесконечной. Будем искать стационарное решение для потока, направленного вдоль оси x , причем все переменные зависят только от z .

Если поля не меняются во времени, то из уравнений Максвелла (10.5) следует, что электрическое поле является электростатическим потенциальным полем и полностью определяется граничными

условиями, т. е. представляет собой произвольное внешнее поле. Из выражения (10.14) для скорости силовых линий при бесконечной проводимости σ следует, что должно существовать электрическое поле, направленное вдоль оси y . Если мы предположим, что имеется только одна эта составляющая поля \mathbf{E} , то она должна быть постоянной; обозначим ее через E_0 . Поскольку движущаяся жидкость увлекает силовые линии, мы вправе ожидать, что наряду с z -составляющей B_0 магнитного поля появится также и его x -составляющая $B_x(z)$.

Для несжимаемой жидкости уравнение непрерывности имеет вид $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Оно удовлетворяется автоматически, если скорость направлена вдоль оси x и зависит только от z . Если пренебречь силой тяжести, то уравнение движения для стационарного течения имеет вид

$$\operatorname{grad} p = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \eta \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (10.25)$$

Отлична от нуля только одна составляющая \mathbf{J} , а именно

$$J_y(z) = \sigma \left[E_0 - \frac{1}{c} B_0 v(z) \right], \quad (10.26)$$

где v — скорость вдоль оси x . Выпишем уравнение (10.25) для каждой из его составляющих:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\sigma B_0}{c} \left(E_0 - \frac{B_0}{c} v \right) + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{\sigma B_x}{c} \left(E_0 - \frac{B_0}{c} v \right). \end{aligned} \quad (10.27)$$

В z -направлении градиент давления полностью уравновешивается магнитной силой. Предположим, что в x -направлении отсутствует перепад давления, тогда первое из этих уравнений примет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \left(\frac{M}{a} \right)^2 v = \left(\frac{M}{a} \right)^2 \frac{c E_0}{B_0}, \quad (10.28)$$

где

$$M = \left(\frac{\sigma B_0^2 a^2}{\eta c^2} \right)^{1/2} \quad (10.29)$$

называется *числом Гартмана*. Как видно из (10.17), величина M^2 равна отношению магнитной вязкости к обычной. Решение уравнения (10.28), удовлетворяющее граничным условиям $v(0) = V_1$ и

$v(a) = V_2$, легко может быть найдено

$$v(z) = \frac{V_1}{\operatorname{sh} M} \operatorname{sh} \left(M \frac{a-z}{a} \right) + \frac{V_2}{\operatorname{sh} M} \operatorname{sh} \left(M \frac{z}{a} \right) + \frac{cE_0}{B_0} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \left(M \frac{a-z}{a} \right) + \operatorname{sh} \left(M \frac{z}{a} \right)}{\operatorname{sh} M} \right]. \quad (10.30)$$

В пределе $B_0 \rightarrow 0$, $M \rightarrow 0$ получаем известное решение для ламинарного потока

$$v(z) = V_1 + (V_2 - V_1) \frac{z}{a}. \quad (10.31)$$

В другом предельном случае $M \gg 1$ следует ожидать, что преобладающей будет магнитная вязкость и что течение должно почти полностью определяться электрическим дрейфом. Для $z \ll a$ и $M \gg 1$ получаем

$$v(z) \approx \frac{cE_0}{B_0} + \left(V_1 - \frac{cE_0}{B_0} \right) e^{-Mz/a}. \quad (10.32)$$

Отсюда видно, что скорость $v(z)$, равная V_1 на поверхности $z = 0$, быстро (на интервале порядка a/M) достигает дрейфовой скорости cE_0/B_0 . Вблизи поверхности $z = a$ выражение для $v(z)$ получается из (10.32) заменой V_1 на V_2 и z на $a - z$. Профили скоростей для обоих предельных случаев (10.31) и (10.32) показаны на фиг. 10.2.

Магнитное поле $B_x(z)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} J_y = \frac{4\pi\sigma}{c} \left(E_0 - \frac{1}{c} B_0 v \right). \quad (10.33)$$

Чтобы сформулировать граничные условия для B_x при $z = 0$ и $z = a$, необходимо либо знать предысторию процесса установления стационарного течения, либо исходить из определенных условий симметрии. Мы можем лишь связать разность значений B_x с полным током вдоль оси y , приходящимся на единицу длины вдоль оси x :

$$B_x(a) - B_x(0) = \frac{4\pi}{c} \int_0^a J_y(z) dz. \quad (10.34)$$

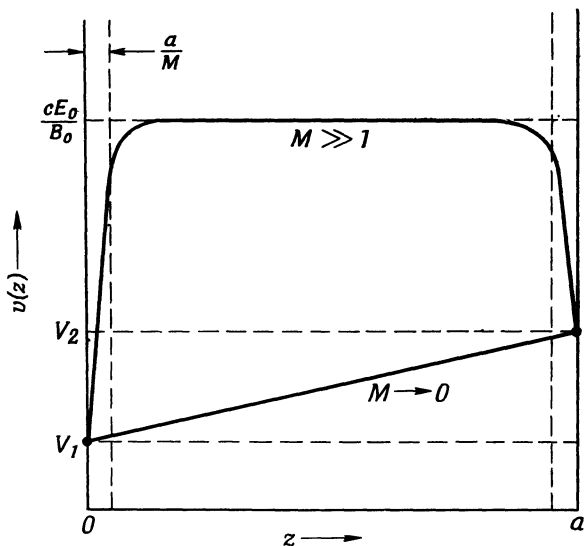
Такая неопределенность свойственна одномерным задачам. Ограничимся для простоты расчетом магнитного поля лишь для случая, когда полный ток по оси y равен нулю¹⁾. В этом случае мы можем

¹⁾ Это условие означает, что $cE_0/B_0 = 1/2 (V_1 + V_2)$.

принять, что B_x обращается в нуль при $z = 0$ и $z = a$. С учетом (10.30) уравнение (10.33) дает

$$B_x(z) = B_0 \left[\left(\frac{4\pi\sigma a^2}{c^2} \right) \left(\frac{V_2 - V_1}{2a} \right) \right] \left\{ \frac{\operatorname{ch} \frac{M}{2} - \operatorname{ch} \left(\frac{M}{2} - \frac{Mz}{a} \right)}{M \operatorname{sh} (M/2)} \right\}. \quad (10.35)$$

Безразмерный коэффициент в квадратных скобках в (10.35) можно отождествить с магнитным числом Рейнольдса (10.15), поскольку



Ф и г. 10.2. Профили скоростей для больших и малых чисел Гартмана M . При $M \rightarrow 0$ течение становится ламинарным. При $M \gg 1$ скорость потока равна скорости электрического дрейфа, за исключением областей, непосредственно примыкающих к границам.

$(V_2 - V_1)/2$ является характерной скоростью задачи, а a — характерной длиной. В предельных случаях $M \ll 1$ и $M \gg 1$ выражение (10.35) принимает вид

$$B_x(z) \approx R_M B_0 \begin{cases} \frac{z}{a} \left(1 - \frac{z}{a} \right) & \text{для } M \ll 1, \\ \frac{1}{M} [1 - (e^{-Mz/a} + e^{-M(a-z)/a})] & \text{для } M \gg 1. \end{cases} \quad (10.36)$$

На фиг. 10.3 показан вид силовых линий в этих предельных случаях. Заметное увлечение силовых линий наблюдается только при больших R_M , а при заданном R_M увлечение тем меньше, чем больше число Гартмана.

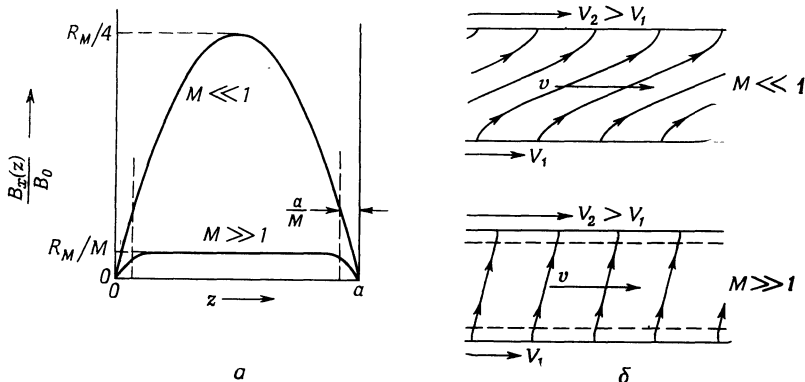
Для ртути при комнатной температуре

$$\sigma = 9,4 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1},$$

$$\eta = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ пуаз},$$

$$\rho = 13,5 \text{ г/см}^3.$$

Время диффузии τ [см. (10.12)] равно $1,31 \cdot 10^{-4} L^2 \text{ сек}$, если размер L выражен в сантиметрах. Число Гартмана M [см. (10.29)] равно $2,64 \cdot 10^{-2} a B_0$, если поле B_0 выражено в гауссах, а a — в сантиметрах. При $L \approx a \approx 1 \text{ см}$ магнитное число Рейнольдса R_M



Ф и г. 10.3. Продольная составляющая магнитного поля между граничными поверхностями при больших и малых числах Гартмана (а) и увлечение силовых линий магнитного поля в направлении потока (б).

примерно равно $10^{-4} V$. Следовательно, если скорости потока не слишком велики, то в лабораторных экспериментах со ртутью не происходит сколь-нибудь значительного увлечения силовых линий. Если же магнитное поле B_0 имеет величину порядка 10^4 гаусс , то $M \sim 250$ и скорость потока почти полностью определяется электрическим дрейфом (10.14). В геомагнитных процессах в земном ядре и в астрофизических задачах параметры (например, характерный размер) таковы, что R_M часто много больше единицы и, следовательно, увлечение силовых линий весьма существенно.

§ 5. Пинч-эффект

Удержание плазмы или проводящей жидкости ее собственным магнитным полем представляет значительный интерес для проблемы управляемых термоядерных реакций, а также для других приложений. Для примера рассмотрим бесконечный цилиндр проводящей жидкости, по которому течет продольный ток с плотностью

$J_z = J(r)$, создающий азимутальное магнитное поле $B_\varphi = B(r)$. Для простоты будем считать, что плотность тока, магнитное поле, давление и т. п. зависят только от расстояния r от оси цилиндра, а вязкость и гравитационные эффекты пренебрежимо малы. Рассмотрим сначала, возможно ли стационарное состояние, при котором плазма удерживается в основном внутри цилиндра с некоторым радиусом $r = R$ за счет своего собственного магнитного поля. Для стационарного состояния с $\mathbf{v} = 0$ уравнение движения жидкости (10.23) принимает вид

$$0 = -\frac{dp}{dr} - \frac{d}{dr} \left(\frac{B^2}{8\pi} \right) - \frac{B^2}{4\pi r}. \quad (10.37)$$

Закон Ампера в интегральной форме связывает $B(r)$ с током, протекающим по окружности радиусом r :

$$B(r) = \frac{4\pi}{cr} \int_0^r rJ(r) dr. \quad (10.38)$$

Целый ряд результатов можно получить без конкретизации вида зависимости $J(r)$, используя лишь такие физические требования, как конечность и т. п. Из закона Ампера следует, что если жидкость находится почти целиком внутри цилиндра $r = R$, то магнитное поле вне жидкости равно

$$B(r) = \frac{2I}{cr}, \quad (10.39)$$

где величина

$$I = \int_0^R 2\pi r J(r) dr$$

представляет собой полный ток, протекающий внутри цилиндра. Уравнение (10.37) можно переписать в виде

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{8\pi r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B^2) \quad (10.40)$$

или в проинтегрированном виде

$$p(r) = p_0 - \frac{1}{8\pi} \int_0^r \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B^2) dr. \quad (10.41)$$

Здесь p_0 — давление жидкости на оси цилиндра ($r = 0$). Если вещество сосредоточено в цилиндре $r = R$, то при $r = R$ давление равно нулю. Следовательно, давление p_0 на оси запишется сле-

дующим образом:

$$p_0 = \frac{1}{8\pi} \int_0^R \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B^2) dr. \quad (10.42)$$

Верхний предел интеграла можно заменить на бесконечность, поскольку, согласно (10.39), подинтегральное выражение при $r \geq R$ равно нулю. Подставляя (10.42) в (10.41), получаем

$$p(r) = \frac{1}{8\pi} \int_r^R \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B^2) dr. \quad (10.43)$$

При произвольной зависимости $p(r)$ давления от радиуса среднее давление внутри цилиндра можно связать с полным током I и радиусом цилиндра R . Действительно, интегрируя по частям выражение для среднего давления

$$\langle p \rangle = \frac{2\pi}{\pi R^2} \int_0^R r p(r) dr \quad (10.44)$$

и используя (10.40), получаем соотношение

$$\langle p \rangle = \frac{I^2}{2\pi R^2 c^2}, \quad (10.45)$$

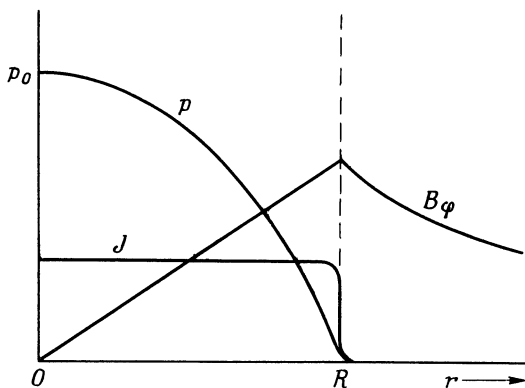
связывающее среднее давление, полный ток и радиус цилиндра жидкости или плазмы, удерживаемой собственным магнитным полем. Заметим, что среднее давление вещества оказывается равным магнитному давлению $B^2/8\pi$ на поверхности цилиндра. В термоядерных исследованиях рассматривается горячая плазма с температурой порядка 10^8 К ($kT \sim 10$ кэв) и плотностью частиц порядка 10^{15} см⁻³. При этих условиях давление приблизительно равно $10^{15} \cdot 10^8$ к $\approx 1,4 \cdot 10^7$ дин/см², или 14 атм. Для удержания такой плазмы требуется магнитное поле на поверхности порядка $19 \cdot 10^3$ гаусс, что соответствует току $9 \cdot 10^4 R$ а. Отсюда видно, что для удержания горячей плазмы необходимы очень большие токи.

До сих пор мы не рассматривали радиального распределения характеристик жидкости. Мы ограничимся для иллюстрации двумя простыми примерами. Пусть сначала плотность тока $J(r)$ постоянна при $r < R$. Тогда $B(r) = 2Ir/cR^2$ при $r < R$ и выражение (10.43) приводит к параболическому распределению давления в зависимости от радиуса

$$p(r) = \frac{I^2}{\pi c^2 R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (10.46)$$

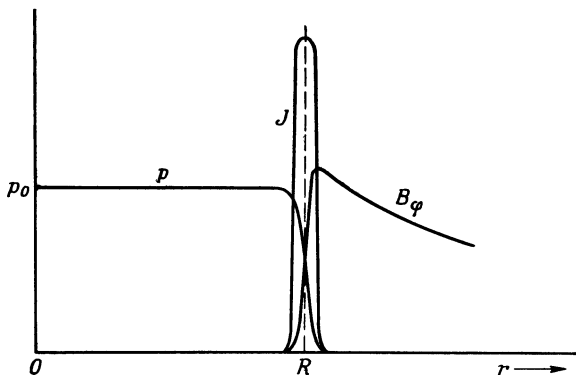
При этом давление p_0 на оси равно удвоенному среднему давлению $\langle p \rangle$. Радиальные зависимости этих величин схематически показаны на фиг. 10.4.

В качестве второго примера рассмотрим цилиндр с током, текущим в очень тонком поверхностном слое, что соответствует жидкости или плазме с большой проводимостью. Магнитное поле вне



Ф и г. 10.4. Радиальная зависимость азимутального магнитного поля и давления в цилиндрическом плазменном столбе при однородной плотности продольного тока.

цилиндра определяется выражением (10.39), а внутри цилиндра равно нулю. В этом случае давление внутри вещества постоянно и равно значению (10.45). Соответствующие распределения показаны на фиг. 10.5.

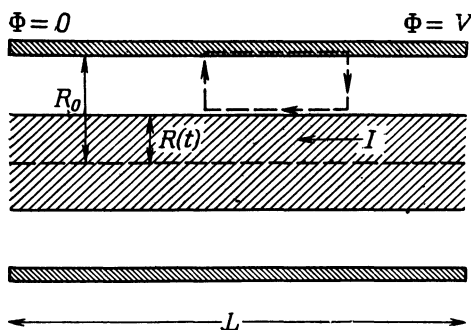


Ф и г. 10.5. Радиальная зависимость азимутального магнитного поля и давления в цилиндрическом плазменном столбе с поверхностным током.

§ 6. Динамическая модель пинч-эффекта

Простое рассмотрение, проведенное в § 5 настоящей главы, применимо в статическом или квазистатическом случае. В действи-

тельности такие условия не реализуются. Обычно сначала давление плазмы слишком мало, чтобы противостоять внешнему магнитному давлению. Из-за этого радиус плазменного цилиндра уменьшается, т. е. происходит сжатие плазменного столба (пинч-эффект). Таким образом достигается желаемый результат — отжатие плазмы от ограничивающих ее стенок. Если бы сжатый плазменный столб был устойчив в течение достаточно длительного времени, то плазму можно было бы нагреть до очень высокой температуры, не повредив при этом стенок камеры.



Ф и г. 10.6. Плазменный столб внутри полого цилиндрического проводника.

Розенблют предложил простую модель процесса сжатия, учитывающую его динамический характер. Предположим, что плазма создана в полем проводящем цилиндре радиусом R_0 и длиной L . К концам цилиндра приложена разность потенциалов V , так что по плазме течет ток I . Ток создает азимутальное магнитное поле B_ϕ , заставляющее плазму сжиматься. Радиус плазменного столба в момент времени $t > 0$ мы обозначим через $R(t)$. Проводимость плазмы будем считать бесконечной. При этом ток течет по поверхности плазмы, а магнитное поле

$$B_\phi = \frac{2I}{cr} \quad (10.47)$$

имеется только в области между $r = R(t)$ и $r = R_0$. В соответствии с предположением о бесконечной проводимости электрическое поле на поверхности плазмы в движущейся системе отсчета, в которой эта поверхность покоится, обращается в нуль

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0. \quad (10.48)$$

Применяя закон индукции Фарадея к показанному пунктирными линиями на фиг. 10.6 контуру, внутренняя сторона которого движется вместе с поверхностью плазмы, мы видим, что вклад в ли-

нейный интеграл от E дает только внешняя сторона контура, находящаяся в проводящей стенке. Таким образом,

$$-\frac{V}{L} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{R(t)}^{R_0} B_{\varphi} dr = -\frac{2}{c^2} \frac{d}{dt} \left(I \ln \frac{R_0}{R} \right). \quad (10.49)$$

Это уравнение выражает обычную индуктивную связь между током, напряжением и размерами, определяющими индуктивность. Его интеграл имеет вид

$$I \ln \frac{R_0}{R} = \frac{c^2}{2} E_0 \int_0^t f(t) dt, \quad (10.50)$$

где $E_0 f(t) = V/L$ — приложенное электрическое поле. Функция $f(t)$ считается известной и нормируется таким образом, чтобы величина E_0 была равна максимальному значению приложенного поля. Чтобы продвинуться дальше, мы должны найти динамическую связь между током I и радиусом плазмы R .

Необходимая зависимость получается из уравнения баланса импульсов, т. е. из второго закона Ньютона. Однако прежде необходимо сделать некоторые предположения относительно плазмы. Если бы длина свободного пробега между столкновениями была мала по сравнению с радиусом, то динамическое поведение плазмы определялось бы гидродинамическими ударными волнами. Однако для горячей и разреженной плазмы длина свободного пробега обычно сравнима или даже больше радиуса. В этом случае более подходящей является модель частиц, свободно движущихся внутри плазмы.

Если скорость границы плазмы \dot{R} значительно больше тепловых скоростей, то в системе отсчета, где эта граница неподвижна, каждая частица движется к границе со скоростью \dot{R} . Частица, проникнувшая во внешнюю область, под действием магнитного поля поворачивает обратно и покидает поверхность со скоростью $-\dot{R}$. Поэтому каждая частица, столкнувшаяся с границей плазмы, приобретает импульс $2M\dot{R}$. Число столкновений на единицу поверхности в единицу времени равно $N\dot{R}$, где N — начальное число частиц в единице объема. Следовательно, скорость изменения импульса (т. е. давление) дается выражением

$$p = 2NM\dot{R}^2 = 2q\dot{R}^2, \quad (10.51)$$

где q — начальная плотность. На границу плазмы действует магнитное давление $B^2/8\pi$, обусловленное скачком магнитного поля от нуля внутри плазмы до величины B вне плазмы. Оно должно уравновешивать давление плазмы. Это позволяет с учетом (10.47)

найти связь тока со скоростью границы плазмы:

$$I^2 = 4\pi qc^2 R^2 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2. \quad (10.52)$$

При выводе (10.52) мы весьма упрощенно считали, что каждая частица сталкивается с границей раздела только один раз. В действительности скорость границы раздела все время растет, так что поверхность догоняет также и ранее отразившиеся от нее частицы и снова нагревает их. Этот эффект можно приближенно учесть с помощью модели «снегоочистителя», в которой предполагается, что поверхность раздела увлекает с собой все вещество, на которое она надвигается по мере движения. При этом магнитное давление и скорость изменения импульса связаны уравнением

$$\frac{d}{dt} [M(R) \dot{R}] = -2\pi R \frac{B^2}{8\pi}, \quad (10.53)$$

в котором $M(R)$ — масса, увлекаемая «снегоочистителем»:

$$M(R) = \pi q (R_0^2 - R^2). \quad (10.54)$$

Отсюда получается соотношение между током и радиусом

$$I^2 = -\pi qc^2 R \frac{d}{dt} \left[(R_0^2 - R^2) \frac{dR}{dt} \right]. \quad (10.55)$$

В начальной стадии, когда $R \ll R_0$, модель «снегоочистителя» и модель свободных частиц приводят к одинаковым зависимостям тока от радиуса, различающимся лишь множителем 2¹⁾. По порядку величины обе модели дают один и тот же результат и для более поздних моментов времени.

Уравнение движения для $R(t)$ можно получить, подставляя I^2 из (10.52) или из (10.55) в соотношение (10.50). Выбирая для примера модель свободных частиц, находим

$$2R \ln \left(\frac{R_0}{R} \right) \frac{dR}{dt} = -\frac{cE_0}{\sqrt{4\pi q}} \int_0^t f(t') dt'. \quad (10.56)$$

Здесь знак квадратного корня определяется требованием $\dot{R} < 0$. Для решения этого уравнения необходимо знать $E_0(t)$. Некоторые свойства решения можно определить, перейдя к безразмерным

¹⁾ Разница в 2 раза объясняется тем, что в модели свободных частиц частицы отражаются упруго и изменение их скорости равно $2\dot{R}$, в то время как в другой модели столкновение частиц с границей раздела считается неупругим, так что изменение скорости равно \dot{R} .

переменным

$$\begin{aligned}\tau &= \left(\frac{c^2 E_0^2}{4\pi Q} \right)^{1/4} \frac{t}{R_0} . \\ x &= \frac{R}{R_0} .\end{aligned}\tag{10.57}$$

Тогда (10.56) запишется в виде

$$2x \ln x \frac{dx}{d\tau} = \int_0^\tau f(\tau') d\tau' .\tag{10.58}$$

Для модели «снегоочистителя» соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{d}{d\tau} \left[(1-x^2) \frac{dx}{d\tau} \right] = - \frac{1}{x (\ln x)^2} \left[\int_0^\tau f(\tau') d\tau' \right]^2 .\tag{10.59}$$

Даже не решая этих уравнений, можно сказать, что x существенно изменяется на интервале $\tau \sim 1$. Это означает, что по порядку величины радиальная скорость сжатия равна

$$|\dot{R}| \sim v_0 \equiv \left(\frac{c^2 E_0^2}{4\pi Q} \right)^{1/4} .\tag{10.60}$$

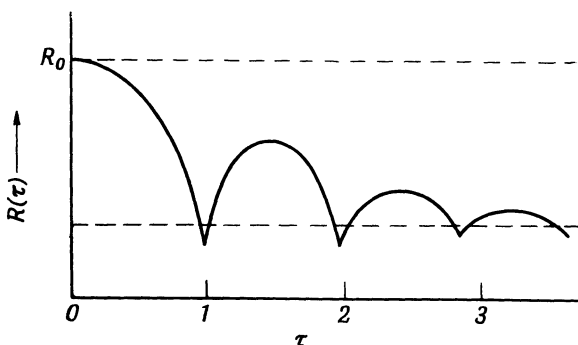
Такой результат получается при любой динамической модели, в том числе гидродинамической. Для «быстрых пинчей» в небольших установках с водородной и дейтериевой плазмой типичные значения приложенного электрического поля составляют около 10^3 в/см, а начальной плотности — около 10^{-8} г/см³ ($\sim 3 \cdot 10^{15}$ дейтронов в 1 см³). При этом v_0 оказывается величиной порядка 10^7 см/сек, а протекающий ток, согласно (10.52) или (10.55), равен

$$I = \frac{c^2 R_0 E_0}{v_0} F \left(x, \frac{dx}{d\tau} \right) ,\tag{10.61}$$

где F — безразмерная функция порядка единицы. Для трубки радиусом 10 см при описанных выше условиях ток составляет 10^5 — 10^6 а.

Предыдущее рассмотрение пинч-эффекта, очевидно, применимо только для короткого интервала времени после включения тока. Наша упрощенная модель показывает, что за время порядка R_0/v_0 радиус плазменного столба обращается в нуль. Ясно, однако, что, прежде чем это случится (даже приближенно), характер процесса изменится. В гидродинамическом приближении радиальные ударные волны, вызванные сжатием, отразятся от оси и, распространяясь обратно, будут замедлять движение границы или даже изменить направление ее движения на обратное. Это — так называемая

пульсация плазменного столба. Она, очевидно, имеет место и в модели свободных частиц. Поэтому общая зависимость радиуса



Фиг. 10.7. Изменение радиуса плазменного столба со временем с момента включения тока.

Характерная скорость сжатия определяется выражением (10.60).

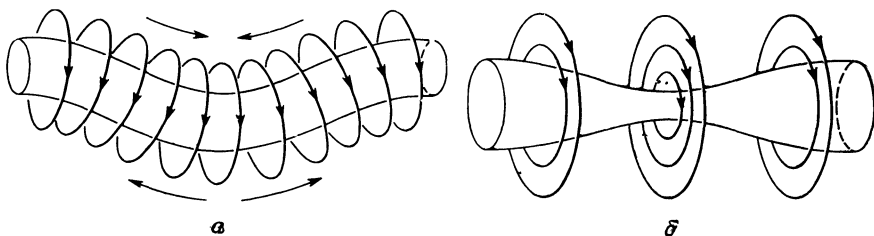
R от времени будет иметь вид, изображенный на фиг. 10.7. Хотя для последующих пульсаций соответствующий анализ не проведен, естественно предположить, что радиус приближается к некоторому стационарному значению, меньшему чем R_0 .

§ 7. Неустойчивости сжатого плазменного столба

Получить в лабораторных условиях долгоживущий сжатый плазменный столб чрезвычайно трудно. Поведение плазмы качественно соответствует описанному в § 6 только во время первого сжатия. Затем плазменный столб быстро разрушается. Причиной этого разрушения является развитие неустойчивостей. Плазменный столб неустойчив по отношению к отклонениям от цилиндрической симметрии. Малые возмущения быстро нарастают и приводят к разрушению плазменной конфигурации за очень короткие времена. Детальный анализ неустойчивостей весьма сложен, поэтому мы ограничимся только качественным рассмотрением, причем остановимся лишь на двух простейших возмущениях, приводящих к неустойчивости.

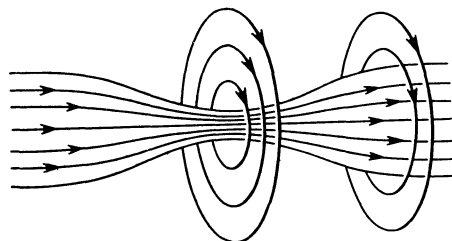
Первое — это так называемая *неустойчивость изгиба*, показанная на фиг. 10.8, а. При изгибе плазменного столба вниз силовые линии азимутального магнитного поля сгущаются на верхней стороне плазменного цилиндра и расходятся на нижней. Очевидно, изменение магнитного давления таково, что оно приводит к дальнейшему росту возмущения. Поэтому такое возмущение оказывается неустойчивым.

Другой тип неустойчивости называется неустойчивостью относительно *перетяжек*, или *шеек*, и показан на фиг. 10.8, б. В окрестности перетяжки азимутальное магнитное поле возрастает и магнитное давление становится больше, чем в других местах. Это ведет к возрастанию существующего возмущения.



Ф и г. 10.8. Неустойчивость изгиба (а) и неустойчивость типа перетяжки (б).

Развитию обоих типов неустойчивости может помешать продольное магнитное поле внутри плазменного цилиндра. При образовании перетяжки силовые линии продольного магнитного поля сгущаются в месте перетяжки, что приводит к возрастанию внутреннего



Ф и г. 10.9. Стабилизация неустойчивости типа перетяжки с помощью внутреннего продольного магнитного поля.

магнитного давления, противодействующего давлению азимутального поля, как схематически показано на фиг. 10.9. Легко видеть, что в случае резкой границы плазмы приращения соответствующих магнитных давлений определяются соотношениями

$$\frac{\Delta p_{\Phi}}{p_{\Phi}} = \frac{2x}{R}, \quad \frac{\Delta p_z}{p_z} = \frac{4x}{R}, \quad (10.62)$$

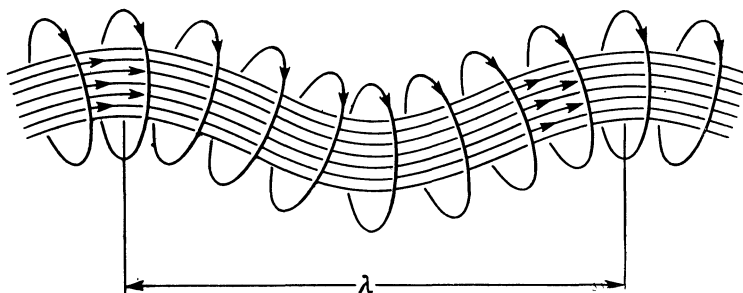
где x — малое смещение. Следовательно, при

$$B_z^2 > \frac{1}{2} B_{\Phi}^2 \quad (10.63)$$

плазменный цилиндр становится устойчивым относительно перетяжек.

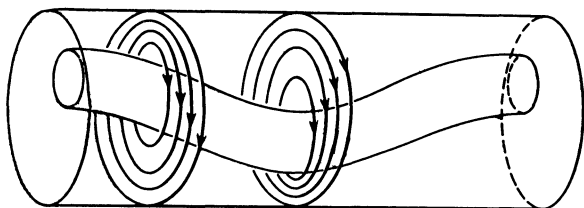
При изгибе силовые линии продольного магнитного поля не сгущаются, а растягиваются. Однако результат остается прежним:

возрастание натяжения силовых линий внутреннего магнитного поля противодействует внешним силам и способствует стабилизации плазменного столба. Фиг. 10.10 показывает, что при заданной



Ф и г. 10.10. Стабилизация неустойчивости изгиба за счет натяжения силовых линий внутреннего продольного магнитного поля.

величине бокового смещения коротковолновый изгиб приводит к большему натяжению силовых линий, чем длинноволновый. Таким образом, при данном отношении внутреннего продольного поля к внешнему азимутальному полю должны в первую очередь



Ф и г. 10.11. Стабилизация длинноволновых изгибов с помощью внешнего проводящего экрана.

стабилизироваться коротковолновые изгибы, а достаточно длинноволновые будут оставаться неустойчивыми. Расчет показывает, что при приблизительно равных полях возмущения такого типа стабилизируются для длин волн $\lambda < 14R$.

Длинноволновые изгибы могут быть стабилизированы с помощью внешнего проводящего экрана. При этом радиус плазменного цилиндра должен быть не слишком мал по сравнению с радиусом экрана. Силовые линии азимутального магнитного поля зажаты между экраном и границей плазмы, как показано на фиг. 10.11. Если плазма приближается к стенке, то силовые линии в промежутке между плазмой и экраном сгущаются, магнитное давление возрастает и возникает возвращающая сила.

Качественно ясно, что, используя подходящее сочетание замороженного продольного поля и проводящего экрана, можно создать устойчивую плазменную конфигурацию, по крайней мере для очень хорошо проводящей плазмы с резкой границей. Детальные расчеты ([85, 89, 108]; см. также [19, 109]) подтверждают этот качественный вывод и позволяют установить соответствующие количественные критерии. Оказывается существенным, чтобы внешнее продольное магнитное поле было возможно меньше, а радиус плазменного столба был порядка $1/2$ или $1/3$ радиуса экрана. При достаточно большом продольном поле вне плазмы в результате комбинации полей B_z и B_ϕ возникают винтовые силовые линии, что способствует развитию винтовой неустойчивости, которая особенно существенна при тороидальной геометрии плазмы. Если, однако, продольное поле вне плазмы будет очень большим, то шаг винта силовой линии настолько возрастает, что на конечной длине плазменного цилиндра силовая линия сделает лишь малую часть одного оборота. При этом опять возможна устойчивость. Стабилизация с помощью сильных продольных полей, создаваемых внешними токами, используется в некоторых термоядерных установках, например в стеллараторах.

Идеализированную конфигурацию плазмы с резкой границей трудно осуществить экспериментально. Даже будучи созданной, она разрушается из-за диффузии плазмы поперек силовых линий за время порядка $4\pi\sigma R^2/c^2$ (см. § 3). Для водородной плазмы с энергией 1 эв на частицу это время имеет величину порядка 10^{-4} сек при $R \sim 10$ см, однако для плазмы с энергией 10 кэв оно становится уже порядка 10^2 сек. Ясно, что в термоядерных экспериментах следует с самого начала пытаться создать возможно более горячую плазму с начальным временем диффузии, достаточно большим, чтобы обеспечить возможность дальнейшего ее нагревания.

§ 8. Магнитогидродинамические волны

В обычной гидродинамике возможен только один тип волн малой амплитуды, а именно продольные (звуковые) волны сжатия. Они распространяются со скоростью s , определяемой производной давления по плотности при постоянной энтропии

$$s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0. \quad (10.64)$$

Если принять адиабатический закон $p = K\rho^\gamma$, то $s^2 = \gamma p_0/\rho_0$, где γ — отношение удельных теплоемкостей. В магнитной гидродинамике возможен также и другой тип волнового движения, связанный с поперечными смещениями силовых линий магнитного поля. При натяжении силовых линий появляется возвращающая

сила, стремящаяся вернуть их в прежнее «более прямолинейное» положение, так что в результате возникают поперечные колебания. По аналогии со звуковыми волнами, которые распространяются со скоростью порядка корня квадратного из отношения гидростатического давления к плотности, следует ожидать, что эти магнитогидродинамические волны, называемые *альфвеновскими волнами*, будут иметь скорость порядка

$$v_A \sim \left(\frac{B_0^2}{8\pi\rho_0} \right)^{1/2}, \quad (10.65)$$

где $B_0^2/8\pi$ — магнитное давление.

Рассмотрим сжимаемую невязкую идеально проводящую жидкость в магнитном поле при отсутствии гравитационных сил. Ее движение описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} &= -\operatorname{grad} p - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (10.66)$$

К ним следует добавить еще уравнение состояния, связывающее давление и плотность. Предположим, что в равновесном состоянии скорость равна нулю и имеется пространственно однородное статическое магнитное поле \mathbf{B}_0 , пронизывающее однородную жидкость постоянной плотности ρ_0 . Введем малые отклонения от равновесных величин

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t), \\ \rho &= \rho_0 + \rho_1(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (10.67)$$

Линеаризируя уравнения (10.66) по этим малым возмущениям, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + s^2 \operatorname{grad} \rho_1 + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_0 \times \operatorname{rot} \mathbf{B}_1 &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} - \operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) &= 0, \end{aligned} \quad (10.68)$$

где s^2 — квадрат звуковой скорости (10.64). Эти уравнения можно скомбинировать таким образом, чтобы получилось одно уравнение для \mathbf{v}_1 :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} - s^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_A \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_A) = 0. \quad (10.69)$$

Здесь через v_A обозначена векторная альфвеновская скорость:

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi Q}}. \quad (10.70)$$

Волновое уравнение (10.69) для v_1 довольно сложно, но оно допускает простые решения для волн, распространяющихся параллельно и перпендикулярно магнитному полю¹⁾. Если искать решение для $v_1(x, t)$ в виде плоской волны с волновым вектором k и частотой ω

$$v_1(x, t) = v_1 e^{ik \cdot x - i\omega t}, \quad (10.71)$$

то уравнение (10.69) примет вид

$$-\omega^2 v_1 + (s^2 + v_A^2) (k \cdot v_1) k + v_A \cdot k [(v_A \cdot k) v_1 - (v_A \cdot v_1) k - (k \cdot v_1) v_A] = 0. \quad (10.72)$$

Если волновой вектор k перпендикулярен скорости v_A , то последний член в (10.72) равен нулю. В этом случае решением для v_1 будут продольные магнитозвуковые волны (v_1 параллельно k), имеющие фазовую скорость

$$u_{\parallel} = \sqrt{s^2 + v_A^2}. \quad (10.73)$$

Отметим, что эти волны распространяются со скоростью, которая с точностью до множителя порядка единицы определяется суммой гидростатического и магнитного давлений. При k , параллельном v_A , уравнение (10.72) принимает вид

$$(k^2 v_A^2 - \omega^2) v_1 + \left(\frac{s^2}{v_A^2} - 1 \right) k^2 (v_A \cdot v_1) v_A = 0. \quad (10.74)$$

В этом случае возможны два типа волн. Имеется обычная продольная волна (скорость v_1 параллельна k и v_A) с фазовой скоростью, равной звуковой скорости s . Но имеется также и поперечная волна ($v_1 \cdot v_A = 0$) с фазовой скоростью, равной альфвеновской скорости v_A . Эта альфвеновская волна является чисто магнитогидродинамической и зависит только от магнитного поля (натяжение) и плотности (инерция).

Для ртути при комнатной температуре альфвеновская скорость равна $B_0/13,1$ см/сек, а звуковая скорость составляет $1,45 \cdot 10^5$ см/сек. При обычных напряженностях поля в лабораторных условиях альфвеновская скорость много меньше скорости звука. Наоборот, в астрономических проблемах альфвеновская скорость может быть очень большой из-за весьма малых плотностей. В солнечной фотосфере, например, плотность имеет величину порядка 10^{-7} г/см³ ($6 \cdot 10^{16}$ атомов водорода в 1 см³), так что $v_A \approx 10^3 B_0$ см/сек. Сол-

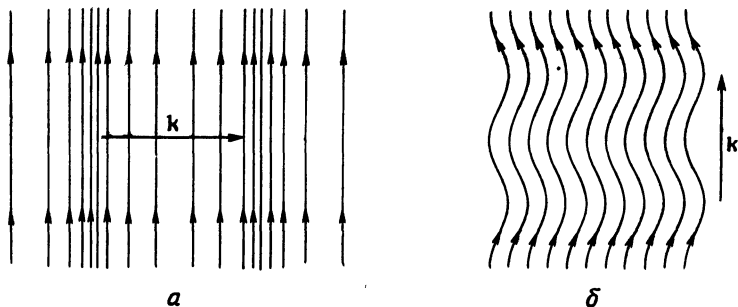
¹⁾ Определение характеристик волн при произвольном направлении распространения рассмотрено в задаче 10.3.

нечные магнитные поля имеют порядок 1—2 *гаусс* на поверхности и много большую величину в районе солнечных пятен. Для сравнения отметим, что скорость звука как в фотосфере, так и в хромосфере составляет около 10^6 см/сек.

Возмущения магнитного поля для различных типов волн можно определить из третьего уравнения (10.68):

$$\mathbf{V}_1 = \begin{cases} \frac{k}{\omega} v_1 \mathbf{B}_0 & \text{для } \mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0, \\ 0 & \text{для продольной волны с } \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0, \\ -\frac{k}{\omega} B_0 v_1 & \text{для поперечной волны с } \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0. \end{cases} \quad (10.75)$$

Магнитозвуковые волны, распространяющиеся перпендикулярно магнитному полю \mathbf{B}_0 , приводят к сгущению и разрежению силовых



Фиг. 10.12. Магнитогидродинамические волны.

линий без изменения их направления (фиг. 10.12, а). Альфвеновские волны, параллельные \mathbf{B}_0 , вызывают периодические колебания силовых линий (фиг. 10.12, б). В обоих случаях силовые линии вморожены и движутся вместе с жидкостью.

Если проводимость жидкости не бесконечна или же проявляется вязкость, то в результате диссипативных процессов колебания затухают. В этом случае ко второму и третьему уравнениям (10.68) добавляются диссипативные члены:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= -s^2 \text{grad } q_1 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_0 \times \text{rot } \mathbf{B}_1 + \eta \nabla^2 \mathbf{v}_1, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} &= \text{rot} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}_1; \end{aligned} \quad (10.76)$$

здесь η — вязкость ¹⁾, а σ — проводимость. Оба добавочных члена

¹⁾ Использование простого выражения (10.3) для вязкой силы в сжимаемой жидкости в действительности незаконно. Однако можно полагать, что оно дает правильное качественное описание.

приводят к дисперсии фазовой скорости, и их влияние проще всего проследить, если искать решение уравнений (10.76) в виде плоской волны. Легко видеть, что уравнения (10.76) эквивалентны для плоских волн следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \varrho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= \frac{-s^2 \operatorname{grad} \varrho_1 - (1/4\pi) \mathbf{B}_0 \times \operatorname{rot} \mathbf{B}_1}{1 + i\eta k^2 / \varrho_0 \omega}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} &= \frac{\operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0)}{1 + i c^2 k^2 / 4\pi \sigma \omega}. \end{aligned} \quad (10.77)$$

Соответственно уравнение (10.72), связывающее k и ω , также изменяется: во-первых, s^2 и ω^2 умножаются на $(1 + i c^2 k^2 / 4\pi \sigma \omega)$; во-вторых, ω^2 умножается на $(1 + i\eta k^2 / \varrho_0 \omega)$.

Для важного случая альфвеновской волны, распространяющейся параллельно полю, соотношение между ω и k принимает вид

$$k^2 v_A^2 = \omega^2 \left(1 + i \frac{c^2 k^2}{4\pi \sigma \omega} \right) \left(1 + i \frac{\eta k^2}{\varrho_0 \omega} \right). \quad (10.78)$$

Если члены, содержащие сопротивление и вязкость, можно считать малыми, то волновое число определяется приближенным выражением

$$k \approx \frac{\omega}{v_A} + i \frac{\omega^2}{2v_A^3} \left(\frac{c^2}{4\pi \sigma} + \frac{\eta}{\varrho_0} \right). \quad (10.79)$$

Это выражение показывает, что затухание быстро растет с повышением частоты (или волнового числа) и уменьшается при возрастании напряженности магнитного поля. Если отвлечься от эффекта вязкости, то влияние мнимой части волнового вектора таково, что за время диффузии (см. § 3) интенсивность волны уменьшается в e раз [если в (10.12) за характерную длину принять длину волны]. В противоположном предельном случае, когда члены, содержащие сопротивление и вязкость, являются преобладающими, волновое число можно определить, приравнявая нулю выражения в скобках в правой части (10.78). При этом k имеет одинаковые действительную и мнимую части, и волна быстро затухает независимо от величины магнитного поля.

Проведенное выше рассмотрение магнитогидродинамических волн применимо только для сравнительно низких частот, поскольку мы пренебрегли токами смещения в законе Ампера. Очевидно, что при очень высоких частотах мы должны перейти к описанному в гл. 7, § 9, поведению, характерному для ионосферы, когда определяющую роль играют эффекты, связанные с разделением зарядов. Однако если даже в магнитогидродинамическом описании пренебрегать эффектом разделения зарядов, токи смещения все же будут влиять на распространение альфвеновских и магнитозвуко-

вых волн. Закон Ампера с учетом токов смещения имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (10.80)$$

где электрическое поле \mathbf{E} исключено с помощью приближения бесконечной проводимости (10.9). Отсюда находим плотность тока, входящую в уравнение движения жидкости:

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \left[\operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right]. \quad (10.81)$$

Второе из уравнений линеаризованной системы (10.68) при этом обобщении примет вид

$$\varrho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_A \times \left(\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \times \mathbf{v}_A \right) \right] = -s^2 \operatorname{grad} \varrho_1 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_0 \times \operatorname{rot} \mathbf{B}_1. \quad (10.82)$$

Отсюда получаем следующее волновое уравнение для \mathbf{v}_1 :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\mathbf{v}_1 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right) - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_A (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_1) \right] - s^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_A \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_A) = 0. \quad (10.83)$$

Его исследование показывает, что если скорость \mathbf{v}_1 параллельна \mathbf{v}_A (т. е. параллельна \mathbf{B}_0), то результаты не отличаются от предыдущих. Однако для поперечной скорости \mathbf{v}_1 (для магнитозвуковых волн с волновым вектором \mathbf{k} , перпендикулярным \mathbf{B}_0 , или для альфвеновских волн с \mathbf{k} , параллельным \mathbf{B}_0) квадрат частоты умножается на величину $(1 + v_A^2/c^2)$. Таким образом, фазовая скорость альфвеновских волн становится равной

$$u_A = \frac{v_{Ac}}{\sqrt{c^2 + v_A^2}}. \quad (10.84)$$

В обычных условиях, когда $v_A \ll c$, эта скорость близка к v_A и токи смещения несущественны. Но если $v_A \gg c$, то фазовая скорость становится равной скорости света. Если рассматривать поперечные альфвеновские волны как электромагнитные волны, то их можно интерпретировать как волны в среде с показателем преломления, определяемым соотношением

$$u_A = \frac{c}{n}. \quad (10.85)$$

Отсюда

$$n^2 = 1 + \frac{c^2}{v_A^2} = 1 + \frac{4\pi\varrho_0 c^2}{B_1^2}. \quad (10.86)$$

При использовании этого соотношения для характеристики распространения электромагнитных волн в плазме необходимо соблюдать осторожность, поскольку оно применимо только для частот, при которых несущественны эффекты, связанные с разделением зарядов.

§ 9. Высокочастотные плазменные колебания

Магнитогидродинамическое приближение, рассмотренное в предыдущих параграфах, основано на представлении о взаимодействии между однокомпонентной электрически нейтральной жидкостью со скалярной проводимостью σ и электромагнитным полем. Однако, как указывалось во введении к настоящей главе, плазма является в действительности многокомпонентной жидкостью, состоящей из электронов и одного или нескольких сортов ионов. При низких частотах или больших длинах волн описание с помощью одножидкостной модели применимо, поскольку частота столкновений ν достаточно велика (средний свободный пробег достаточно мал), чтобы все время сохранялась локальная электронейтральность, несмотря на среднее движение электронов и ионов в противоположных направлениях под действием электрического поля, согласно закону Ома. При более высоких частотах одножидкостная модель становится уже непригодной. Электроны и ионы начинают двигаться независимо, и происходит разделение зарядов. Это разделение зарядов ведет к появлению больших возвращающих сил, и, следовательно, возникают колебания электростатического типа. При наличии магнитного поля появляются и другие эффекты. Электроны и ионы стремятся двигаться в магнитном поле по круговым или винтовым орбитам с угловой частотой

$$\omega_B = \frac{eB}{mc} . \quad (10.87)$$

При достаточно сильных полях или достаточно низких плотностях, когда угловая частота сравнима с частотой столкновений, представление о скалярной проводимости становится уже неприменимым, и величина тока начинает зависеть от его направления относительно магнитного поля (см. задачу 10.5). При еще больших частотах ионы, обладающие большой инерцией, не в состоянии следовать за быстрыми изменениями полей, и поэтому в движении принимают участие только электроны. Ионы же просто создают однородный фон положительных зарядов и обеспечивают электрическую нейтральность в среднем. Представление об однородном фоне зарядов и об электронной жидкости можно использовать только в том случае, когда характерные длины велики, по крайней мере по сравнению с расстоянием между частицами ($l \gg n_0^{-1/3}$). В действительности имеется и другая ограничивающая длина — дебаевский радиус экранирования,

которая при обычных температурах плазмы больше чем $n_0^{-1/3}$. Она-то и является реальной границей между мелкомасштабным индивидуальным движением отдельных частиц и коллективным движением жидкости (см. § 10).

Чтобы избежать излишних осложнений, мы рассмотрим только высокочастотные колебания плазмы, пренебрегая движением ионов. Мы будем также пренебрегать и влиянием столкновений. Электроны, имеющие заряд e и массу m , описываются плотностью $n(\mathbf{x}, t)$ и средней скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Равновесные плотности зарядов ионов и электронов равны $\mp en_0$. Уравнения движения электронной жидкости запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} &= \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) - \frac{1}{mn} \operatorname{grad} p, \end{aligned} \quad (10.88)$$

где тепловая кинетическая энергия электронов учитывается электронным давлением p (которое предполагается скалярным). Плотности заряда и тока соответственно описываются соотношениями

$$\begin{aligned} \rho_e &= e(n - n_0), \\ \mathbf{J} &= en\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (10.89)$$

и, следовательно, уравнения Максвелла можно записать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi e(n - n_0), \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi en}{c} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (10.90)$$

Предположим теперь, что в невозмущенном состоянии электронная жидкость покоится, ее плотность равна $n = n_0$, а поля отсутствуют, и рассмотрим малые отклонения от этого состояния, обусловленные некоторыми начальными возмущениями. Система линеаризованных уравнений включает уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{e}{m} \mathbf{E} + \frac{1}{mn_0} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_0 \operatorname{grad} n &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi en &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi en_0}{c} \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \quad (10.91)$$

и два однородных уравнения Максвелла. Здесь $n(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — отклонения от равновесных величин. В том случае, когда внешнее магнитное поле \mathbf{B}_0 отлично от нуля, во второе уравнение (10.91) следует добавить член $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)/c$ (см. задачу 10.7). Поскольку флуктуационное поле \mathbf{B} является величиной первого порядка малости, то произведение $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ имеет второй порядок малости и должно быть отброшено. Первое уравнение (10.91) фактически не является независимым и может быть получено из третьего и четвертого.

Поскольку уравнение движения в системе (10.91) не содержит магнитного поля, то следует ожидать, что существуют решения чисто электростатической природы с $\mathbf{B} = 0$. Комбинируя уравнение непрерывности и уравнение движения, мы получаем волновое уравнение для флуктуаций плотности

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{m} \right) n - \frac{1}{m} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_0 \nabla^2 n = 0. \quad (10.92)$$

С другой стороны, дифференцируя по времени уравнение Ампера и уравнение движения и комбинируя их, мы приходим к следующему уравнению для полей:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{m} \right) \mathbf{E} - \frac{1}{m} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_0 \text{grad div } \mathbf{E} = c \text{rot } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (10.93)$$

Структура левых частей уравнений (10.92) и (10.93), по существу, одинакова. Поэтому мы вполне можем положить, не опасаясь несоместности уравнений, что $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$. Поскольку статические поля уже исключены, то мы пришли к случаю $\mathbf{B} = 0$. При $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ из закона Фарадея вытекает, что $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ и, следовательно, поле \mathbf{E} равно градиенту скалярного потенциала. Каждая составляющая поля \mathbf{E} , очевидно, удовлетворяет тому же уравнению (10.92), что и флуктуации плотности. В пренебрежении электронным давлением в (10.92) плотность, скорость и электрическое поле колеблются с плазменной частотой

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m}. \quad (10.94)$$

Если же член с давлением существен, то мы получаем следующее дисперсионное соотношение для частоты:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{1}{m} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_0 k^2. \quad (10.95)$$

Определение коэффициента при k^2 требует известной аккуратности. Мы можем считать, что p и n связаны адиабатическим соотношением $p = p_0 (n/n_0)^\gamma$, но обычная акустическая величина $\gamma = 5/3$, соответствующая газу частиц с тремя внешними степенями свободы, но без внутренних степеней свободы, неприменима. Это

объясняется тем, что частота рассматриваемых колебаний плотности в противоположность акустическому случаю много больше частоты столкновений. Поэтому колебания плотности имеют существенно одномерную природу и, следовательно, определяются величиной γ , соответствующей одной трансляционной степени свободы. Поскольку $\gamma = (m + 2)/m$, где m — число степеней свободы, то мы получаем, что для нашего случая $\gamma = 3$ и

$$\frac{1}{m} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_0 = 3 \frac{p_0}{mn_0}. \quad (10.96)$$

Используя соотношение $p_0 = n_0 K T$ и определяя средний квадрат составляющей скорости в одном направлении (параллельном электрическому полю) соотношением

$$m \langle u^2 \rangle = K T, \quad (10.97)$$

мы можем записать дисперсионное соотношение (10.95) в виде

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3 \langle u^2 \rangle k^2. \quad (10.98)$$

Это соотношение является приближенным. Оно справедливо для случая длинных волн и в действительности представляет собой два первых члена в разложении по моментам распределения скоростей электронов (см. задачу 10.6). Записанное в форме (10.98) дисперсионное соотношение имеет более широкую область применимости, чем рассмотренный при его выводе случай идеального газа. Оно применимо, например, также к плазменным колебаниям в вырожденном электронном ферми-газе, в котором заполнены все ячейки в пространстве скоростей, лежащие внутри сферы с радиусом, равным скорости Ферми V_F . При этом среднее значение квадрата составляющей скорости будет

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{5} V_F^2. \quad (10.99)$$

Квантовые эффекты входят явно в дисперсионное соотношение только в членах более высокого порядка в разложении по k^2 .

Колебания, описанные выше, являются продольными электростатическими колебаниями, при которых колеблющихся магнитных полей нет. Это означает, что они не могут возбудить излучение в неограниченной плазме. Однако в плазме существуют и другие типы колебаний, которые представляют собой поперечные электромагнитные волны. Для нахождения различных возможных плазменных колебаний мы предположим, что все величины изменяются как $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$, и определим характеристическое соотношение между ω и \mathbf{k} , как это было сделано для магнитогиродинамических волн в § 8. При таком предположении линеаризованные уравнения (10.91) и два однородных уравнения Максвелла

примут вид

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{n_0}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}, \\
 \mathbf{v} &= \frac{ie\mathbf{E}}{m\omega} + \frac{3\langle u^2 \rangle}{\omega} \frac{n}{n_0} \mathbf{k}, \\
 \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= -i4\pi en, \\
 \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
 \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\frac{\omega}{c} \mathbf{E} - i\frac{4\pi en_0}{c} \mathbf{v}, \\
 \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \frac{\omega}{c} \mathbf{B}.
 \end{aligned} \tag{10.100}$$

Из уравнений Максвелла можно выразить \mathbf{v} через \mathbf{k} и \mathbf{E} :

$$\mathbf{v} = \frac{ie}{m\omega} \frac{1}{\omega_p^2} [(\omega^2 - c^2k^2) \mathbf{E} + c^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k}]. \tag{10.101}$$

Далее, используя уравнение движения и уравнение непрерывности для \mathbf{E} , исключим \mathbf{v} и получим уравнение, содержащее только \mathbf{E} :

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2k^2) \mathbf{E} + (c^2 - 3\langle u^2 \rangle) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k} = 0. \tag{10.102}$$

Если представить \mathbf{E} в виде суммы составляющих, параллельной и перпендикулярной \mathbf{k} ,

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}, \\
 \mathbf{E}_{\parallel} &= \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}}{k^2} \right) \mathbf{k},
 \end{aligned} \right\} \tag{10.103}$$

то (10.102) запишется в виде двух уравнений

$$\begin{aligned}
 (\omega^2 - \omega_p^2 - 3\langle u^2 \rangle k^2) \mathbf{E}_{\parallel} &= 0, \\
 (\omega^2 - \omega_p^2 - c^2k^2) \mathbf{E}_{\perp} &= 0.
 \end{aligned} \tag{10.104}$$

Первое из этих уравнений показывает, что продольные волны удовлетворяют дисперсионному соотношению (10.98), рассмотренному выше, а из второго уравнения следует существование двух поперечных волн (с различными поляризациями), дисперсионное соотношение для которых имеет вид

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2. \tag{10.105}$$

Соотношение (10.105) совпадает с дисперсионным соотношением для поперечных электромагнитных волн, описанных с другой точки зрения в гл. 7, § 9. В отсутствие внешних полей электростатические колебания и поперечные электромагнитные колебания не связаны друг с другом. Однако при наличии, например, внешнего маг-

нитного поля уравнение движения имеет дополнительный член, содержащий магнитное поле, и поэтому колебания становятся связанными (см. задачу 10.7).

§ 10. Коротковолновые плазменные колебания. Дебаевский радиус экранирования

При рассмотрении плазменных колебаний мы до сих пор не уточняли верхнего предела волновых чисел, выше которого уже неприменимо представление о коллективных колебаниях. Очевидно, одним верхним пределом для волновых чисел является $n_0^{1/3}$. Чтобы составить более точное представление о верхнем пределе, следует обратиться к соотношению (10.98) для продольных колебаний. Для длинных волн частота колебаний очень близка к $\omega = \omega_p$. Существенное отклонение частоты от ω_p имеет место только для волновых чисел, сравнимых с дебаевским волновым числом k_D

$$k_D^2 = \frac{\omega_p^2}{\langle u^2 \rangle}. \quad (10.106)$$

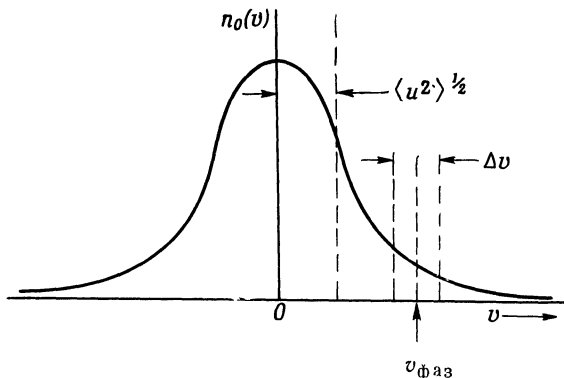
Для волновых чисел $k \ll k_D$ фазовая и групповая скорости продольных плазменных колебаний выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{\text{фаз}} &\approx \frac{\omega_p}{k}, \\ v_{\text{гр}} &\approx \frac{3 \langle u^2 \rangle}{v_{\text{фаз}}}. \end{aligned} \quad (10.107)$$

Из определения k_D видно, что для волновых чисел $k \ll k_D$ фазовая скорость много больше, а групповая скорость много меньше среднеквадратичной тепловой скорости $\langle u^2 \rangle^{1/2}$. При возрастании волнового числа до k_D фазовая скорость уменьшается от большой величины до $\langle u^2 \rangle^{1/2}$. Следовательно, при волновых числах порядка k_D волна движется со столь малой скоростью, что имеются значительные группы электронов, движущихся быстрее волны, медленнее волны и приблизительно вместе с волной. Иными словами, фазовая скорость лежит на склоне кривой теплового распределения. То обстоятельство, что скорость волны сравнима с тепловыми скоростями электронов, и является причиной возникновения механизма передачи энергии, который приводит к разрушению колебательного движения. Этот механизм состоит в захвате частиц движущейся волной, в результате чего энергия передается от движущейся волны к частицам. Обусловленное этим затухание волны называется *затуханием Ландау*.

Детальный расчет затухания Ландау выходит за рамки данной книги. Однако мы можем качественно описать механизм этого

явления. На фиг. 10.13 показано распределение электронных скоростей с некоторым среднеквадратичным разбросом и максвелловским хвостом на высоких скоростях. При малых k фазовая скорость лежит далеко на хвосте распределения, и затухание пренебрежимо мало. Но если $k \rightarrow k_D$, то фазовая скорость оказывается на склоне распределения, как показано на фиг. 10.13, и значительное количество электронов имеют тепловые скорости, сравнимые с $v_{\text{фаз}}$. При этом вокруг $v = v_{\text{фаз}}$ имеется интервал скоростей Δv , где



Ф и г. 10.13. Распределение тепловых скоростей электронов.

электроны движутся столь медленно относительно волны, что они могут быть захвачены в потенциальную яму и увлечены волной, движущейся со скоростью $v_{\text{фаз}}$. Если в интервале Δv число частиц со скоростью $v < v_{\text{фаз}}$, т. е. двигавшихся сначала медленней волны, больше числа частиц со скоростями $v > v_{\text{фаз}}$ (как показано на фиг. 10.13), то процесс захвата ведет в среднем к возрастанию энергии частиц и потере энергии волны. В этом и состоит механизм затухания Ландау. Детальный расчет показывает, что при $k \ll k_D$ это затухание соответствует мнимой части частоты, равной

$$\text{Im } \omega \approx -\omega_p \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{k_D}{k} \right)^3 e^{-k_D^2/2k^2}. \quad (10.108)$$

При выводе формулы (10.108) предполагается максвелловское распределение скоростей. При $k \gtrsim k_D$ постоянная затухания больше значения, определяемого формулой (10.108), и быстро становится намного больше действительной части частоты (10.98).

Формула Ландау (10.108) показывает, что при $k \ll k_D$ продольные плазменные колебания почти не затухают. Но затухание становится существенным при $k \sim k_D$ (даже для $k = 0,5k_D$ мы имеем $\text{Im } \omega \approx -\omega_p/6$). При волновых числах, превышающих дебаевское волновое число, затухание столь велико, что уже не имеет смысла говорить об упорядоченных колебаниях.

Можно привести другое рассмотрение, которое совершенно от-
лично от вышеизложенного, но дает то же самое предельное дебаев-
ское волновое число в качестве границы коллективных колебаний.
Мы знаем, что электронная плазма представляет собой систему
электронов и однородного фона положительных зарядов. В мелком
масштабе ее поведение должно описываться как последовательность
множества двухчастичных кулоновских столкновений. Однако
в больших масштабах поведение электронов становится коллек-
тивным. Если где-либо появляется локальный избышек положи-
тельных зарядов, то электроны стремятся быстро нейтрализовать его.
Такой коллективный отклик на флуктуации заряда и приводит
к крупномасштабным плазменным колебаниям. Но помимо этих
коллективных колебаний, или, лучше сказать, благодаря этим
колебаниям, коллективный отклик электронов препятствует даль-
нодействующему характеру кулоновского взаимодействия между
частицами. Отдельный электрон можно рассматривать как флук-
туацию плотности заряда. Окружающие электроны отталкиваются
таким образом, что стремятся заэкранировать кулоновское поле
рассматриваемого электрона, превращая кулоновское взаимодей-
ствие в короткомасштабное. Собственно этого и следовало ожи-
дать, если учесть, что единственным источником электростатиче-
ского взаимодействия являются кулоновские силы, действующие
между частицами. Если исключить ту часть, которая вызывает
длинноволновые коллективные плазменные колебания, то остаются
короткомасштабные взаимодействия между частицами.

Нестрогий вывод описанного выше экранирующего эффекта был
впервые дан Дебаем и Хюккелем в их теории электролитов. Пред-
положим, что мы имеем плазму, электроны которой находятся
в тепловом равновесии в поле с электростатическим потенциалом
 Φ . При этом функция их распределения пропорциональна множи-
телю Больцмана $e^{-H/KT}$, где H — функция Гамильтона для элект-
тронов. Поэтому пространственная плотность электронов описы-
вается выражением

$$n(\mathbf{x}) = n_0 e^{-e\Phi/KT}. \quad (10.109)$$

Пусть пробный заряд Ze , расположенный в начале координат, вне-
сен в объем, где находятся эти электроны и однородный фон поло-
жительных ионов (с плотностью заряда $-en_0$). Результирующий
потенциал Φ определится уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi Ze\delta(\mathbf{x}) - 4\pi en_0 (e^{-e\Phi/KT} - 1). \quad (10.110)$$

Если предположить, что величина $e\Phi/KT$ мала, то, линеаризуя
это уравнение, мы получаем

$$\nabla^2 \Phi - k_D^2 \Phi \approx -4\pi Ze\delta(\mathbf{x}), \quad (10.111)$$

где

$$k_D^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{KT}, \quad (10.112)$$

что является другой формой записи соотношения (10.106). Уравнение (10.111) имеет сферически симметричное решение

$$\Phi(r) = Ze \frac{e^{-k_D r}}{r}, \quad (10.113)$$

которое показывает, что электроны перераспределяются таким образом, что кулоновское поле пробного заряда экранируется на расстоянии порядка k_D^{-1} . Величина радиуса экранирования определяется соотношением между тепловой кинетической энергией и электростатической энергией. Численно величина k_D^{-1} выражается следующим образом:

$$k_D^{-1} = 6,91 \left(\frac{T}{n_0} \right)^{1/2} \text{ см}, \quad (10.114)$$

где T — температура в градусах Кельвина, а n_0 — число электронов в 1 см^3 . Для типичного случая горячей плазмы с $T = 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$ и $n_0 = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ получим $k_D^{-1} \approx 2,2 \cdot 10^{-1} \text{ см}$.

Для вырожденного электронного газа при низких температурах дебаевское волновое число k_D заменяется волновым числом Ферми k_F

$$k_F \sim \frac{\omega_p}{V_F}, \quad (10.115)$$

где V_F — скорость на поверхности ферми-сферы. Такая величина радиуса экранирования может быть получена из обобщения теории Дебая — Хюккеля, данного Ферми и Томасом. Она, естественно, согласуется с дисперсионным соотношением (10.98) с учетом среднего квадрата скорости (10.99).

Радиус экранирования Дебая — Хюккеля является естественной границей между короткомасштабными парными столкновениями и крупномасштабными коллективными эффектами, такими, как колебания плазмы. К счастью, как можно показать независимо, плазменные колебания с более короткими длинами волн не могут существовать из-за сильного затухания.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Количество литературы по магнитной гидродинамике и физике плазмы быстро растет. Значительная часть вышедших книг представляет собой сборники статей, представленных на конференции и симпозиумы. Эти книги интересны для специалистов, но не годятся для начинающих. Можно указать две книги по магнитной гидродинамике, в которых дано цельное изложение интересующего нас вопроса, — это книги Альфвена [4] и Каулинга [34].

Краткое изложение магнитогидродинамики дано в книге Ландау и Лифшица [64], гл. 8. Монографии Чандрасекара [26], Линхарта [67], Саймона [96] и Спитцера [104] посвящены в основном физике плазмы.

Проблема управляемых термоядерных реакций и значительный материал по основам физики плазмы излагаются в книгах Глестона и Ловберга [45], а также Роуза и Кларка [84].

Дополнение редактора. Прекрасным введением в физику плазмы в применении к проблеме управляемой термоядерной реакции может служить книга Арцимовича [121]. Для более детального ознакомления с этим кругом вопросов можно рекомендовать серию сборников под общим названием «Вопросы теории плазмы» [123].

ЗАДАЧИ

10.1. Бесконечно длинный твердый круглый металлический цилиндр имеет радиус $R/2$ и проводимость σ . Вокруг него расположен тесно примыкающий, но изолированный от него полый цилиндр из того же материала с внутренним радиусом $R/2$ и внешним радиусом R . Под действием внешнего напряжения вдоль внешнего и внутреннего цилиндров текут равные, но противоположно направленные токи, однородно распределенные по поперечному сечению цилиндров. При $t = 0$ приложенное напряжение снимается.

а) Найти распределение магнитного поля внутри цилиндров, существовавшее до момента $t = 0$.

б) Найти зависимость магнитного поля от времени после момента $t = 0$, пренебрегая токами смещения.

в) Каково поведение магнитного поля в функции от времени на большом интервале времени? Определить, что следует понимать под большим интервалом времени.

10.2. Сравнительно устойчивый самосжатый плазменный столб можно получить, создавая внутри плазмы перед ее сжатием продольное магнитное поле. Пусть в начальный момент плазма заполняет проводящую трубу радиусом R_0 , внутри которой имеется однородное продольное магнитное поле B_{z0} . Затем вдоль трубы прикладывается напряжение, так что начинает течь продольный ток, создающий азимутальное магнитное поле.

а) Показать, что, применяя условия равновесия, можно получить следующее уравнение баланса давлений:

$$\left[p(r) + \frac{B_z^2}{8\pi} + \frac{B_\phi^2}{8\pi} \right]_{r_1}^{r_2} + \frac{1}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{B_\phi^2}{r} dr = 0.$$

б) Пусть плазма имеет резкую границу и столь большую проводимость, что ток течет только в тонком поверхностном слое. Показать, что при этих условиях радиус плазменного столба $R(t)$ в квазистатическом приближении описывается уравнением

$$\frac{R_0}{R} \ln \frac{R_0}{R} = \frac{1}{t_0} \int_0^t f(t) dt,$$

где

$$t_0 = \frac{B_{z0} R_0}{c E_0},$$

а $E_0 f(t)$ — приложенное электрическое поле.

в) Пусть начальное продольное магнитное поле равно 100 гаусс, а приложенное электрическое поле в начальный момент равно 1 в/см и спадает почти линейно до нуля за 1 мсек. Определить конечный радиус, если начальный радиус равен 50 см. Эти условия приблизительно соответствуют английской тороидальной установке «Зета», но из-за внешних индуктивностей достигнутое в ней сжатие меньше расчетного (см. [24]).

10.3. Рассмотреть магнитогидродинамические волны в сжимаемой невязкой идеально проводящей жидкости в однородном статическом магнитном поле \mathbf{B}_0 . Если направление распространения не параллельно и не перпендикулярно \mathbf{B}_0 , то волны не разделяются на чисто продольные (магнитозвуковые) и поперечные (альфвеновские). Пусть угол между направлением распространения, характеризуемым волновым вектором \mathbf{k} , и полем \mathbf{B}_0 равен θ .

а) Показать, что имеются три различные волны, фазовые скорости которых определяются формулами

$$u_1^2 = (v_A \cos \theta)^2,$$

$$u_{2,3}^2 = \frac{1}{2} (s^2 + v_A^2) \pm \frac{1}{2} [(s^2 + v_A^2)^2 - 4s^2 v_A^2 \cos^2 \theta]^{1/2},$$

где s — скорость звука в жидкости, а $v_A = (B_0^2 / 4\pi Q_0)^{1/2}$ — альфвеновская скорость.

б) Найти волновые векторы этих трех волн и убедиться, что первая (альфвеновская) волна всегда поперечна, в то время как другие две волны не являются ни продольными, ни поперечными.

в) Определить фазовые скорости и волновые векторы смешанных волн в предположении, что $v_A \gg s$. Показать, что для одной из этих волн единственная существенная составляющая скорости параллельна магнитному полю, а для другой единственная составляющая скорости перпендикулярна полю и лежит в плоскости, содержащей \mathbf{k} и \mathbf{B}_0 .

10.4. Несжимаемая невязкая идеально проводящая жидкость с постоянной плотностью Q_0 находится в однородном статическом магнитном поле \mathbf{B}_0 и на нее действует гравитационное поле с потенциалом ψ .

а) Показать, что существуют магнитогидродинамические волны произвольной амплитуды и формы $\mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, которые описываются уравнениями

$$(\mathbf{B}_0 \cdot \text{grad}) \mathbf{B}_1 = \pm \sqrt{4\pi Q_0} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t},$$

$$\mathbf{B}_1 = \pm \sqrt{4\pi Q_0} \mathbf{v},$$

$$\rho + Q_0 \psi + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)^2 = \text{const.}$$

б) Пусть при $t = 0$ в жидкости существует некоторое возмущение поля $\mathbf{B}_1(\mathbf{x}, 0)$, удовлетворяющее этим уравнениям с верхним знаком. Определить поведение такого возмущения в функции от времени.

10.5. Уравнение движения для электронной плазмы, в которое включен феноменологический член, описывающий столкновения, но не учитывается гидростатическое давление (приближение нулевой температуры), имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) - \nu \mathbf{v},$$

где ν — частота столкновений.

а) Показать, что при наличии однородных внешних статического и магнитного полей линейаризованное выражение закона Ома для стационарных токов имеет вид

$$J_i = \sum_k \sigma_{ik} E_k,$$

где тензор проводимости

$$\sigma_{ik} = \frac{\omega_p^2}{4\pi\nu(1 + \omega_B^2/\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\omega_B}{\nu} & 0 \\ -\frac{\omega_B}{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{\omega_B^2}{\nu^2} \end{pmatrix},$$

а ω_p и ω_B — соответственно электронная плазменная и ларморовская частоты. Направление \mathbf{B} выбрано вдоль оси z .

б) Пусть при $t = 0$ внезапно включается внешнее электрическое поле \mathbf{E} , направленное вдоль оси x и перпендикулярное магнитному полю \mathbf{B} , направленному вдоль оси z . Пусть, далее, при $t = 0$ ток равен нулю. Найти выражения для составляющих тока в произвольный момент времени, в том числе и в период установления.

10.6. Влияние конечной температуры плазмы может быть приближенно описано с помощью кинетического уравнения Больцмана без учета столкновений (уравнение Власова). Пусть $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ является функцией распределения для электронов (с зарядом e и массой m) однокомпонентной плазмы. Уравнение Власова имеет вид

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}_x f + \mathbf{a} \cdot \text{grad}_v f = 0,$$

где grad_x и grad_v — градиенты в пространстве координат и скоростей, а \mathbf{a} — ускорение частицы. Для случая электростатических колебаний плазмы $\mathbf{a} = e\mathbf{E}/m$, где \mathbf{E} — макроскопическое электрическое поле, удовлетворяющее уравнению

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi e \left[\int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v - n_0 \right].$$

Пусть $f_0(\mathbf{v})$ — нормированная равновесная функция распределения электронов:

$$n_0 \int f_0(\mathbf{v}) d^3v = n_0.$$

а) Показать, что дисперсионное соотношение для малых продольных плазменных колебаний имеет вид

$$\frac{k^2}{\omega_p^2} = \int \frac{\mathbf{k} \cdot \text{grad}_v f_0}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} d^3v.$$

б) Предполагая, что фазовая скорость волны велика по сравнению с тепловыми скоростями, показать, что это дисперсионное соотношение приводит к следующему разложению:

$$\frac{\omega^2}{\omega_p^2} \approx 1 + 2 \frac{\langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle}{\omega} + 3 \frac{\langle (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 \rangle}{\omega^2} + \dots,$$

где знак $\langle \rangle$ означает усреднение по равновесному распределению $f_0(v)$. Сравнить этот результат с соответствующим выражением в тексте главы для модели электронной жидкости.

в) С чем связана особенность дисперсионного соотношения при $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega$?

10.7. Рассмотреть задачу о волнах в электронной плазме в присутствии внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 . Использовать при этом модель электронной жидкости, пренебрегая членами, описывающими давление и столкновения.

а) Написать линеаризованные уравнения движения и уравнения Максвелла, предполагая, что все переменные изменяются пропорционально $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$.

б) Показать, что дисперсионное соотношение между частотами различных типов колебаний и волновыми числами можно записать в виде

$$\omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2) (\omega^2 - \omega_p^2 - k^2 c^2)^2 = \omega_B^2 (\omega^2 - k^2 c^2) [\omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2 - k^2 c^2) + \omega_p^2 c^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{b})^2],$$

где \mathbf{b} — единичный вектор в направлении \mathbf{B}_0 , ω_p и ω_B — соответственно плазменная и ларморовская частоты.

в) Предполагая, что $\omega_B \ll \omega_p$, найти приближенное поведение корней для случаев, когда вектор \mathbf{k} параллелен \mathbf{b} и перпендикулярен \mathbf{b} . Построить зависимость ω^2 от k^2 для этих двух случаев.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Специальной теории относительности посвящено большое количество книг. Ее история тесно переплетается с историей электромагнетизма. Можно сказать, что формулировка уравнений Максвелла, объединивших электричество, магнетизм и оптику в единую теорию, подготовила почву для создания специальной теории относительности. Фундамент специальной теории относительности был заложен Лоренцом в его работах по электродинамике. Но наиболее определяющие принципы теории были сформулированы Эйнштейном, подвергшим критике ряд основных классических понятий. Хотя специальная теория относительности и ведет свое происхождение от электромагнетизма и оптики, в настоящий момент считают, что она применима и ко всем другим типам взаимодействий, за исключением, конечно, крупномасштабных гравитационных явлений. В современной физике эта теория служит пробным камнем при оценке правильности представлений о виде взаимодействия между элементарными частицами. Рассматриваются лишь те гипотезы о формах взаимодействий, которые согласуются со специальной теорией относительности, что является весьма существенным ограничением. Так как экспериментальные основы и развитие теории детально описаны во многих книгах, мы ограничимся лишь кратким изложением узловых пунктов.

§ 1. Исторические предпосылки и основные эксперименты

Последнее сорокалетие девятнадцатого века ознаменовалось триумфальным шествием волновой теории, основанной на уравнениях Максвелла. Эта теория позволила дать единое описание электрических, магнитных и оптических явлений. Из всего

предыдущего опыта, накопленного при изучении волнового движения, следовало, что волны всегда распространяются в некоей среде, поэтому для физиков вполне естественно было предположить, что для распространения света тоже необходима некоторая среда. Ряд известных свойств света заставлял предполагать, что эта среда, называемая *эфиром*, заполняет все пространство, имеет пренебрежимо малую плотность и пренебрежимо слабо взаимодействует с веществом. Она служит только носителем распространяющихся в ней электромагнитных волн. Однако гипотеза эфира ставила электромагнитные явления особняком от остальной физики. Давно было известно, что законы механики одинаковы в различных системах координат, движущихся равномерно одна относительно другой, или, иными словами, законы механики инвариантны относительно преобразований Галилея. Существование эфира подразумевает неинвариантность законов электромагнетизма относительно галилеевского преобразования координат, так как имеется преимущественная система координат, в которой эфир покоится и в которой скорость света в свободном пространстве равна c . В других системах координат скорость света получается при этом не равной c .

Чтобы избавить электромагнетизм от этого недостатка — невыполнения принципа относительности Галилея, имеется несколько путей. Мы можем:

1. Предположить, что скорость света равна c в той системе координат, в которой покоится источник.

2. Предположить, что преимущественной системой координат для света является система координат, связанная с материальной средой, через которую распространяется свет.

3. Предположить, что хотя эфир и очень слабо взаимодействует с веществом, но это взаимодействие достаточно для того, чтобы эфир увлекался астрономическими объектами, такими, например, как Земля.

Однако большое количество экспериментов заставило отказаться от всех трех гипотез и привело к созданию специальной теории относительности. Основными экспериментами были следующие:

1) наблюдение аберрации положений звезд за год;

2) опыт Физо по определению скорости света в движущихся жидкостях (1859 г.);

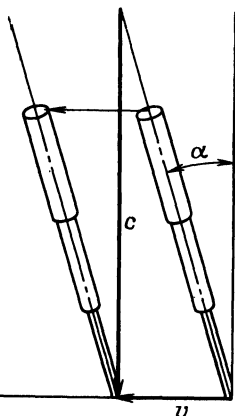
3) опыт Майкельсона — Морли по обнаружению движения относительно эфира (1887 г.).

Аберрация света звезды (малые сдвиги видимого положения далеких звезд в течение года) — давно известное явление, которое элементарно объясняется движением Земли по орбите вокруг Солнца со скоростью порядка $3 \cdot 10^6$ см/сек. Пусть свет звезды падает нормально к земной поверхности, в то время как скорость движения Земли по орбите параллельна этой поверхности. Как видно из

фиг. 11.1, телескоп должен быть наклонен на угол

$$\alpha \approx \frac{v}{c} \sim 10^{-4} \text{ рад}, \quad (11.1)$$

поскольку, пока свет движется вниз к наблюдателю, телескоп сдвигается в сторону вместе с Землей. Через полгода вектор скорости v будет иметь противоположное направление и звезда будет видна под углом α по другую сторону от вертикали. В течение года видимые положения звезд выписывают на небесной сфере эллиптические



Ф и г. 11.1. Аберрация положения звезды.

орбиты с угловыми размерами порядка (11.1). Это простое объяснение аберрации противоречит гипотезам о том, что скорость света определяется материальной средой, в которой распространяется свет (в данном случае атмосферой), или что эфир увлекается Землей. В обоих случаях аберрации не было бы.

Опыт Физо заключается в измерении с помощью интерферометра скорости света в жидкостях, текущих по трубкам как навстречу направлению распространения света, так и в том же направлении. Если показатель преломления жидкости равен n , то в зависимости от того, какую из гипотез мы принимаем, ожидаемая скорость должна описываться либо первым, либо вторым из выражений

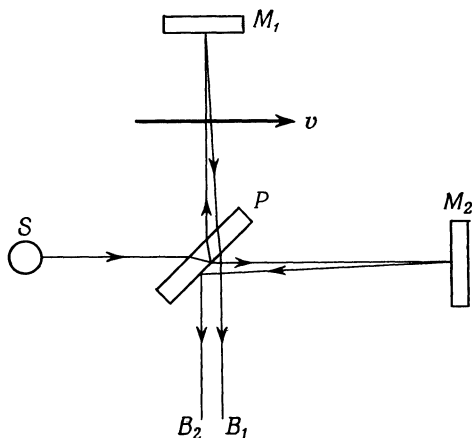
$$u = \frac{c}{n}, \quad u = \frac{c}{n} \pm v, \quad (11.2)$$

где v — скорость потока. В действительности же в пределах экспериментальных ошибок результат, полученный Физо, описывается формулой

$$u = \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (11.3)$$

Этот результат можно согласовать с гипотезой увлечения эфира Землей, только если предположить, что малые тела лишь частично способны увлекать с собой эфир. Такое предположение носит довольно искусственный характер¹⁾.

Опыт Майкельсона — Морли ставился с целью обнаружения движения Земли относительно преимущественной системы координат (связанной с эфиром), в которой скорость света равна c . Основная установка показана схематически на фиг. 11.2. Свет от лабораторного источника S фокусируется на полупрозрачную посеребренную стеклянную пластинку P , которая делит луч на два луча,



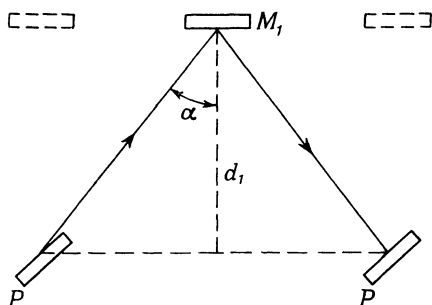
Ф и г. 11.2. Опыт Майкельсона—Морли.

перпендикулярные друг другу. Один из них идет к зеркалу M_1 , отражаясь, проходит опять через пластинку P и попадает в B_1 , а другой идет к зеркалу M_2 , обратно к пластинке и отражается к B_2 . Условия таковы, что оба луча проходят почти одинаковые расстояния. Малое различие в длине пути или времени распространения проявляется в сдвиге интерференционных полос, образуемых двумя лучами. Вся установка была прикреплена к каменной плите, плавающей в ртути, так что ее можно было поворачивать вокруг вертикальной оси. Предположим, что скорость Земли v сквозь эфир параллельна пути распространения света от P к M_2 . При этом скорость света относительно прибора на пути от P к M_2 и обратно есть $c \pm v$. Если расстояние от P до M_2 равно d_2 , то время, необходимое свету, чтобы пройти от P до M_2 и обратно, равно

$$t_2 = d_2 \left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right) = \frac{2d_2}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2}. \quad (11.4)$$

¹⁾ Формула (11.3) была теоретически выведена Френелем в 1818 г. на основе предположения о том, что модуль упругости эфира в веществе пропорционален n^2 .

Движение света от P к M_1 и обратно удобно рассматривать в системе координат, связанной с эфиром. Очевидно, что длина пути, проходимого лучом, больше расстояния d_1 от P до M_1 вследствие движения зеркала через эфир со скоростью v .



Ф и г. 11.3.

Геометрические соотношения для этого случая показаны на фиг. 11.3. Очевидно, $\sin \alpha = v/c$, так что длина пути луча

$$2d_1 \sec \alpha = 2d_1 \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

а для прохождения этого пути необходимо время

$$t_1 = \frac{2d_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (11.5)$$

Разность времен прохождения для обоих лучей составляет

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{d_2}{1-v^2/c^2} - \frac{d_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \quad (11.6)$$

При условии $v \ll c$ мы можем разложить знаменатели в ряд по v^2/c^2 :

$$\Delta t \approx \frac{2}{c} \left[(d_2 - d_1) + \frac{v^2}{c^2} \left(d_2 - \frac{d_1}{2} \right) \right]. \quad (11.7)$$

Если прибор повернуть на 90° , то времена прохождения становятся соответственно равными

$$t'_2 = \frac{2d_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (11.8)$$

$$t'_1 = \frac{2d_1}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2},$$

а их разность в первом порядке по v^2/c^2 равна

$$\Delta t' \approx \frac{2}{c} \left[(d_2 - d_1) + \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{d_2}{2} - d_1 \right) \right]. \quad (11.7)$$

Поскольку Δt и $\Delta t'$ не одинаковы, при повороте прибора должен возникнуть сдвиг интерференционных полос, пропорциональный разности

$$\Delta t' - \Delta t = -\frac{1}{c} (d_1 + d_2) \frac{v^2}{c^2}. \quad (11.9)$$

Орбитальная скорость Земли составляет около $3 \cdot 10^6$ см/сек, поэтому можно считать, что v^2/c^2 имеет величину порядка 10^{-8} , по крайней мере в течение какой-то части года. Для $(d_1 + d_2) \sim 3 \cdot 10^2$ см разность времен (11.9) равна 10^{-16} сек. Это означает, что соответствующая длина (которую следует сравнить с длиной волны света) равна $c |\Delta t' - \Delta t| \sim 3 \cdot 10^{-6}$ см = 300 Å. Поскольку длина волны видимого света имеет величину порядка 3000 Å, ожидаемый сдвиг полос должен составлять около 1/10 полосы.

Точность опыта Майкельсона — Морли давала возможность наблюдать относительную скорость 10^6 см/сек (что в 3 раза меньше скорости Земли). Однако никакого сдвига полос не было обнаружено. С тех пор первоначальный эксперимент Майкельсона был многократно повторен с различными длинами световых путей, но никаких свидетельств, подтверждающих относительное движение сквозь эфир, не было найдено. Сводка всех экспериментальных результатов приведена в работе Шенкленда и др. [93].

Отрицательный результат опыта Майкельсона — Морли можно было бы объяснить гипотезой об увлечении эфира. Однако этой гипотезе противоречит существование явления абберации света звезд. Со всеми тремя описанными экспериментами согласуются лишь так называемые эмиссионные теории, в которых скорость света считается постоянной относительно источника. Но в § 2 мы увидим, что целый ряд экспериментов исключает и эти теории. Положительной стороной опыта Майкельсона — Морли можно считать лишение электромагнетизма его исключительного положения в отношении принципа относительности. Не было обнаружено никаких эффектов, которые зависели бы от движения прибора по отношению к предполагаемой абсолютной системе отсчета. Следует отметить, однако, что Фицджеральд и Лоренц (1892 г.), сохраняя понятие эфира, объяснили нулевой результат опытов Майкельсона — Морли, постулировав, что при движении сквозь эфир все материальные тела сокращают свои размеры вдоль направления движения. Сокращение определяется законом

$$L(v) = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (11.10)$$

Из (11.4) или (11.7) ясно, что эта гипотеза приводит в формуле (11.9) к нулевому значению разности $\Delta t' - \Delta t$. Гипотеза сокращения Фицджеральда — Лоренца была, по-видимому, последней надеждой сторонников теории эфира, и в ней уже содержатся зачатки специальной теории относительности. В специальной теории относительности явление сокращения вытекает из общих принципов и применимо ко всем системам, движущимся относительно друг друга.

Наряду с изменением масштабов имеет место также твердо установленное экспериментально явление замедления времени (которое не было постулировано Фицджеральдом и Лоренцом). Эти вопросы будут рассмотрены в § 3 настоящей главы.

§ 2. Постулаты специальной теории относительности и преобразование Лоренца

В 1904 г. Лоренц показал, что уравнения Максвелла в свободном пространстве инвариантны относительно преобразования координат (11.19) (которое называется теперь *преобразованием Лоренца*), если принять, что напряженности полей также преобразуются подходящим образом. В предположении, что все вещество имеет электромагнитную природу и поэтому для него справедливы уравнения Максвелла, Лоренцу удалось вывести закон сокращения (11.10). Затем Пуанкаре показал, что при соответствующем преобразовании плотностей зарядов и токов все уравнения электродинамики становятся инвариантными относительно преобразования Лоренца. В 1905 г. почти одновременно с Пуанкаре и не зная о работе Лоренца, Эйнштейн сформулировал в общей и вполне замкнутой форме специальную теорию относительности, где были, в частности, получены результаты Лоренца и Пуанкаре и было показано, что исходные принципы имеют гораздо более широкую область применимости. Вместо того чтобы исходить из электродинамики, Эйнштейн показал, что достаточно лишь двух постулатов, один из которых касается весьма общего свойства света.

Два постулата Эйнштейна заключаются в следующем:

1. Постулат относительности

Законы природы и результаты всех опытов, производимых в какой-либо системе отсчета, не зависят от равномерного прямолинейного движения системы в целом. Таким образом, существует трижды бесконечное множество эквивалентных систем отсчета, которые движутся прямолинейно с постоянными скоростями относительно друг друга и в которых все физические явления происходят одинаково.

Для краткости эти эквивалентные координатные системы называют *галилеевскими системами отсчета*. Постулат относительности

согласуется со всем нашим опытом, накопленным в механике, где имеет смысл только относительное движение тел. Он согласуется также с опытом Майкельсона — Морли и делает бессмысленной постановку вопроса об определении движения относительно эфира.

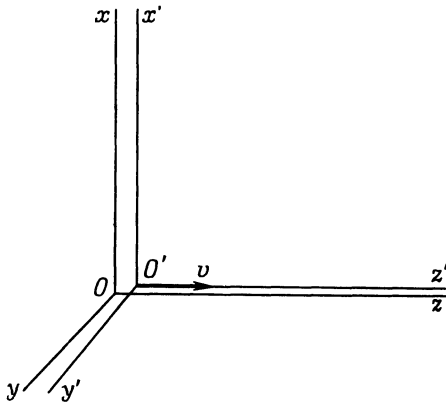
2. Постулат постоянства скорости света

Скорость света не зависит от движения источника.

Эта гипотеза, которая в момент ее выдвижения Эйнштейном еще не была подтверждена экспериментально, является необходимой и решающей предпосылкой для получения преобразований Лоренца и всех их следствий (см. ниже). Поскольку этот постулат противоречит нашему классическому представлению о времени как о переменной, не зависящей от пространственных координат, то длительное время его не признавали. Было сделано много остроумных попыток создания теорий, которые объяснили бы все наблюдаемые явления без привлечений этой гипотезы. Одной из выдающихся попыток было видоизменение электродинамики, предложенное Ритцем. В этой теории два однородных уравнения Максвелла оставались без изменений, а уравнения, содержащие источники, видоизменялись таким образом, чтобы скорость света была равна c , только при измерении ее относительно источника. В настоящее время экспериментально доказано, что все эти теории неверны, и установлено постоянство скорости света независимо от движения источника. Одним из таких экспериментов был опыт, поставленный с интерферометром Майкельсона — Морли, где вместо земного источника света использовался свет звезд. При этом не было обнаружено никаких эффектов, связанных с изменением скорости света из-за относительного движения звезды и Земли. Другой эксперимент, где использовался свет от вращающихся двойных звезд, показал, что скорость света в пределах точности не зависит от движения звезд к нам или от нас (если $c' = c + kv$, то $|k| < 0,002$).

Постоянство скорости света независимо от движения источника позволяет найти связь между пространственно-временными координатами в различных галилеевских системах отсчета. Рассмотрим для этого две координатные системы K и K' . Система K' движется относительно системы K со скоростью v в положительном направлении вдоль оси z таким образом, что координатные оси обеих систем остаются параллельными (фиг. 11.4). Пространственно-временные точки в этих двух системах мы обозначим соответственно через (x, y, z, t) и (x', y', z', t') . Предположим для простоты, что время в обеих системах отсчитывается от того момента $t = t' = 0$, когда координатные оси этих систем точно совпадали. Пусть наблюдатели в каждой из систем снабжены всеми необходимыми прибора-

ми (например, системой сверенных часов и фотоэлементами, расположенными на известных расстояниях от начала координат), которые позволяют определить время прибытия светового сигнала из начала координат в различные точки пространства. Если в системе K имеется покоящийся источник света (так что в системе K' он движется со скоростью v в отрицательном направлении оси z), который вспыхивает и быстро гаснет в момент $t = t' = 0$, то, согласно второму постулату Эйнштейна, оба наблюдателя с помощью своей системы фотоэлементов должны обнаружить сферическую световую



Ф и г. 11.4.

волну, расходящуюся от соответствующего начала координат со скоростью c . Следовательно, время прибытия импульса на детектор, находящийся в точке x, y, z в системе K , будет удовлетворять уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (11.11)$$

Аналогично в системе K' волновой фронт описывается уравнением

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (11.12)$$

На первый взгляд соотношения (11.11) и (11.12) противоречат первому постулату Эйнштейна. Если оба наблюдателя, находящихся в различных координатных системах, видят сферические волны с центрами в началах координат каждой системы, то эти сферы должны быть различными! Это кажущееся противоречие устраняется, если допустить возможность того, что события, одновременные в одной координатной системе, не обязательно одновременны в другой координатной системе, движущейся относительно первой. Мы вправе ожидать теперь, что время не является абсолютной

величиной, не зависящей от пространственных переменных и относительного движения.

Для получения связи между координатами (x', y', z', t') в системе K' и координатами (x, y, z, t) в системе K достаточно потребовать, чтобы соответствующее преобразование было линейным. Это требование представляется весьма правдоподобным и эквивалентно предположению об однородности и изотропности пространства — времени. Если преобразование линейно, то связь между квадратичными формами (11.11) и (11.12) может иметь лишь следующий вид:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2), \quad (11.13)$$

где $\lambda = \lambda(v)$ и $\lambda(0) = 1$. Введение множителя λ предполагает возможность изменения масштаба при переходе от K к K' . При этом поверхность излученного импульса в обеих системах остается сферой. Поскольку мы предположили, что система K' движется параллельно оси z системы K , то очевидно, что преобразование x' и y' должно иметь вид

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y \quad (11.14)$$

и не содержать времени, так как движение, параллельное оси z в системе K' , должно оставаться таким же и в системе K . Наиболее общее линейное преобразование, связывающее z', t' с z, t , имеет вид

$$z' = \lambda (a_1 z + a_2 t), \quad t' = \lambda (b_1 t + b_2 z), \quad (11.15)$$

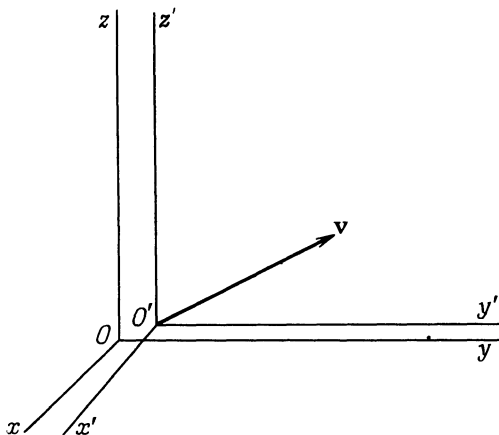
где для удобства выделен множитель λ . Коэффициенты a_1, a_2, b_1 и b_2 являются функциями v и имеют следующие предельные значения при $v \rightarrow 0$:

$$\lim_{v \rightarrow 0} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (11.16)$$

Начало координат системы K' движется в системе K со скоростью v . Следовательно, его положение определяется равенством $z = vt$. Отсюда следует, что в соотношениях (11.15) $a_2 = -va_1$. Подставляя (11.15) в (11.13), мы приходим к трем алгебраическим уравнениям для a_1, b_1 и b_2 . Решая эти уравнения, получаем следующие величины:

$$\begin{aligned} a_1 = b_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ b_2 &= -\frac{v}{c^2} a_1, \end{aligned} \quad (11.17)$$

где знак выбран в соответствии с (11.16). Нам остается теперь только определить $\lambda(v)$. Введем третью систему отсчета K'' , движущуюся со скоростью $-v$ вдоль оси z относительно системы K' . При этом координаты (x'', y'', z'', t'') выражаются через (x', y', z', t') с помощью полученных выше формул, если просто изменить



Ф и г. 11.5.

знак v . Но система K'' это не что иное, как исходная система K , так что $x'' = x$, $y'' = y$, $z'' = z$, $t'' = t$. Это приводит к требованию

$$\lambda(v)\lambda(-v) = 1. \quad (11.18)$$

Поскольку множитель $\lambda(v)$ выражает изменение масштаба в поперечном направлении, он не должен зависеть от знака v , откуда следует, что $\lambda(v) = 1$. Теперь мы уже в состоянии написать *преобразование Лоренца*, связывающее координаты в системе K' с координатами в системе K :

$$z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = x, \quad y' = y, \quad t' = \frac{t - (v/c^2)z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (11.19)$$

Это преобразование соответствует частному случаю, когда относительное движение систем K и K' параллельно оси z . Нетрудно получить также соответствующие соотношения для произвольного направления скорости \mathbf{v} движения системы K' относительно K (фиг. 11.5). Соотношения (11.19), очевидно, относятся к составляющим радиуса-вектора \mathbf{x} , параллельным и перпендикулярным \mathbf{v} :

$$x'_{\parallel} = \frac{x_{\parallel} - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x'_{\perp} = x_{\perp}, \quad t' = \frac{t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (11.20)$$

Согласно определению, $x_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) v / v^2$, $x_{\perp} = \mathbf{x} - x_{\parallel}$ и, следовательно, уравнения (11.20) приводят к общему преобразованию Лоренца¹⁾:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} - \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \mathbf{v} t, \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(t - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right). \end{aligned} \quad (11.21)$$

Следует подчеркнуть, что (11.21) описывает *одно* преобразование Лоренца к системе отсчета K' , движущейся со скоростью \mathbf{v} относительно системы K . Два последовательных преобразования Лоренца, вообще говоря, неперестановочны. Можно показать, что они перестановочны лишь в том случае, когда относительные скорости параллельны. Следовательно, три последовательных преобразования для скоростей, соответствующих составляющим \mathbf{v} по трем взаимно перпендикулярным направлениям, приводят к различным результатам в зависимости от порядка применения преобразований и ни одно из них не совпадает с (11.21) (см. задачу 11.2).

§ 3. Сокращение Фицджеральда — Лоренца и замедление времени²⁾

Как отмечалось выше, Фицджеральд и Лоренц предложили правило сокращения (11.10) для размеров предметов вдоль направления их движения со скоростью \mathbf{v} относительно эфира. Лоренц обосновал этот закон электродинамически, исходя из свойств уравнений Максвелла при преобразованиях Лоренца. Мы сейчас покажем, что сокращение длины в направлении движения является общим законом, применимым к любому относительному движению. Рассмотрим стержень длиной L_0 , расположенный вдоль оси z' и покоящийся в системе K' , обсуждавшейся в § 2 (фиг. 11.6). По определению, $L_0 = z'_2 - z'_1$, где z'_1 и z'_2 — координаты концов стержня в системе K' . В системе K длина L стержня равна, опять-таки по опреде-

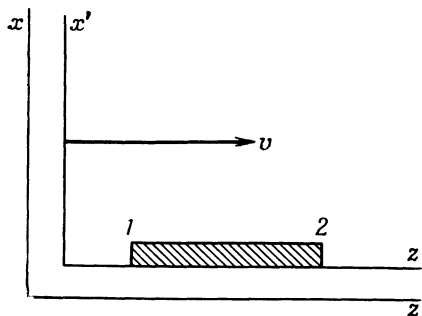
1) Термин «общее» обычно не применяется к преобразованию (11.21). Здесь он означает только, что скорость \mathbf{v} может иметь произвольное направление. Более общее преобразование предполагает также поворот осей системы K относительно K' . Но и такое преобразование Лоренца не является наиболее общим, так как оно остается однородным по координатам. Общее *неоднородное* преобразование Лоренца включает также перенос начала координат в пространстве — времени (см. [74]).

2) Автор пользуется несколько устаревшими терминами «сокращение длины», «замедление времени», которые в свое время вызывали ряд философских кривотолков. Мы сочли возможным сохранить эти термины, полагая, что у современного читателя они не вызовут никаких недоразумений.— *Прим. ред.*

лению, $L = z_2 - z_1$, где z_1 и z_2 — мгновенные значения координат концов стержня, измеренные в один и тот же момент времени t . Согласно (11.19), длина стержня в системе K' равна

$$L_0 = z'_2 - z'_1 = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (11.22)$$

что и совпадает с результатом Фицджеральда — Лоренца (11.10). Подчеркнем еще раз, что в системе K длина определяется измерением координат концов стержня в один и тот же момент времени t .



Ф и г. 11.6. Движущийся стержень (сокращение Фицджеральда — Лоренца)

То, что в системе K' это соответствует различным моментам времени, не имеет отношения к измерению длины в системе K . Это еще одна иллюстрация относительности понятия одновременности событий.

Другим следствием специальной теории относительности является замедление времени. Часы, движущиеся относительно наблюдателя, представляются идущими более медленно, чем покоящиеся часы. Наиболее «физичными» из имеющихся в нашем распоряжении часов являются нестабильные элементарные частицы. Частицы данного типа распадаются в состоянии покоя за вполне определенное (среднее) время жизни, не зависящее от внешних воздействий, за исключением ядерных и атомных сил, которые приводят к хорошо известным изменениям ¹⁾. Эти частицы можно использовать в качестве «часов», которые можно наблюдать как в состоянии покоя, так и в состоянии движения. Допустим, что мы рассматриваем мезон со временем жизни покоя, равным τ_0 , покоящийся в системе K' , которая движется с постоянной скоростью v относительно системы

¹⁾ Например, отрицательные μ -мезоны могут быть захвачены на водородоподобные орбиты вокруг ядер, энергиями связи которых нельзя пренебречь по сравнению с энергией, высвобождающейся при распаде. Так как скорость распада существенно зависит от выделяющейся энергии (примерно как пятая степень ΔE), то сильно связанный отрицательный μ -мезон имеет значительно меньшую скорость распада, чем такой же свободный мезон.

K . Предположим, что мезон родился в момент времени $t' = t = 0$ в начале координат системы K' . Очевидно, в системе K положение мезона определяется координатой $z = vt$. Если в системе K' он живет в течение времени τ_0 , а затем распадается, то мы находим

$$t' = \tau_0 = \frac{t - (v/c^2)z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (11.23)$$

Время t — это время жизни мезона τ , измеренное в системе K . Следовательно,

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (11.24)$$

Итак, при наблюдении в системе K движущийся мезон живет дольше, чем мезон, который покоится в системе K' . Движущиеся часы кажутся идущими медленнее, чем такие же покоящиеся часы.

Замедление времени наблюдалось на μ -мезонах большой энергии в космических лучах. Такие мезоны образуются в качестве вторичных частиц на высоте порядка 10—20 км, и большая часть из них достигает поверхности Земли. Так как среднее время жизни μ -мезона равно $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ сек, то, если бы не было замедления времени, он проходил бы до распада в среднем расстояние не большее $c\tau_0 = 0,66$ км. Очевидно, имеет место увеличение времени жизни не менее чем в 10 раз, что согласуется с большой энергией этих частиц (их скорость близка к скорости света).

Нетрудно поставить и лабораторный эксперимент по определению эффекта замедления времени для π -мезонов. Заряженный π -мезон имеет среднее время жизни $2,56 \cdot 10^{-8}$ сек. В Колумбийском университете был поставлен опыт¹⁾ по определению числа заряженных π -мезонов, распадающихся в полете на единице длины, в функции расстояния от источника мезонов (см. [38]). Скорость мезонов v составляла около $0,75c$. Число мезонов, распадающихся на единице длины, должно следовать экспоненциальному закону

$$N(x) = N_0 e^{-x/\lambda},$$

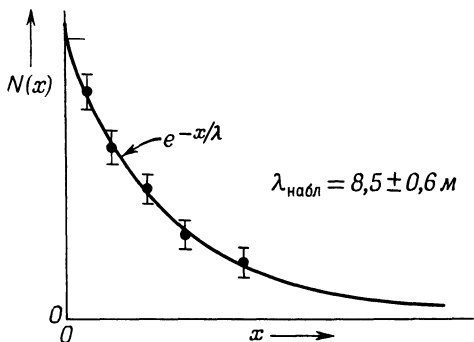
где λ — средний свободный пробег, а x — расстояние от источника (с учетом поправки на конечный телесный угол и т. п.). На фиг. 11.7 схематически показаны результаты этого опыта. Средний свободный пробег оказался равным $\lambda = 8,5 \pm 0,6$ м. Поскольку $\lambda = v\tau$, лабораторное время жизни τ равно $(3,8 \pm 0,3) \cdot 10^{-8}$ сек.

¹⁾ В действительности этот эксперимент ставился для определения времени жизни π -мезонов, а эффект замедления времени жизни считался известным. Однако, если считать время жизни известным, аргументация может быть обращена так, как мы это делаем здесь.

следовательно,

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{3,8 \pm 0,3}{2,56} = 1,5 \pm 0,1.$$

Эту величину следует сравнить с величиной 1,51, получающейся согласно (11.24) при $v = 0,75c$. Лабораторный опыт по определе-



Ф и г. 11.7. Схематическая зависимость числа π -мезонов, распадающихся на единице длины, от расстояния до источника.

нию замедления времени не столь эффектен, как наблюдение космических лучей, но имеет много преимуществ, так как он ставится в контролируемых условиях и в сравнительно малом объеме.

§ 4. Сложение скоростей. Аберрация и опыт Физо. Допплеровское смещение

Преобразование Лоренца (11.19) можно использовать и для нахождения закона сложения скоростей. Предположим, что в системе K' имеется вектор скорости \mathbf{u}' , образующий с осью z' полярные углы θ' и φ' (фиг. 11.8). Система K' движется относительно системы K в z -направлении со скоростью v . Мы хотим определить составляющие скорости \mathbf{u} в системе K . Из преобразования (11.19), или лучше из обратного к нему, мы получаем следующие выражения для дифференциалов dx , dy , dz и dt :

$$\begin{aligned} dx &= dx' & dy &= dy', \\ dz &= \frac{dz' + v dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & dt &= \frac{dt' + (v/c^2) dz'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Отсюда получаем составляющие скорости:

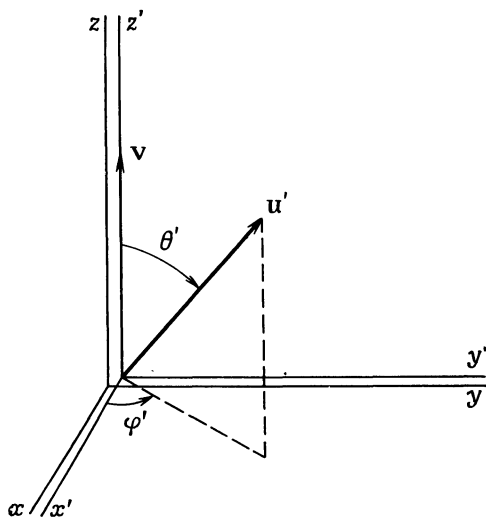
$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_z/c^2} u'_x, & u_y &= \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_z/c^2} u'_y, \\ u_z &= \frac{u'_z + v}{1 + vu'_z/c^2}. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Легко определить также абсолютную величину и углы θ и φ скорости \mathbf{u} в системе K . Так как $u'_x/u'_y = u_x/u_y$, то азимутальные углы совпадают: $\varphi = \varphi'$. Далее

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{u' \sin \theta'}{u' \cos \theta' + v}, \\ u &= \frac{\sqrt{u'^2 + v^2 + 2u'v \cos \theta' - (u'v \sin \theta'/c)^2}}{1 + (u'v/c^2) \cos \theta'}. \end{aligned} \quad (11.27)$$

Обратное представление (u', θ') через (u, θ) получается перестановкой $u \leftrightarrow u'$, $\theta \leftrightarrow \theta'$ и изменением знака v .

Выражения (11.26) и (11.27) показывают, что для скоростей u' и v , малых по сравнению со скоростью света, справедлив принцип



Ф и г. 11.8. Сложение скоростей.

относительности Галилея: $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}$. Однако если хотя бы одна из этих скоростей близка к скорости света, то появляются особенности. Скорость, большую скорости света, невозможно получить даже при сложении двух скоростей, каждая из которых близка к c . Для простейшего случая параллельных скоростей закон сложения имеет вид

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}. \quad (11.28)$$

Если $u' = c$, то, согласно (11.28), получаем, что и $u = c$. Этот результат представляет собой явное выражение второго постулата Эйнштейна.

Этот закон сложения скоростей согласуется с явлением aberrации света звезд и с результатами опыта Физо. При рассмотрении aberrации под скоростью u' следует понимать скорость света в системе K' , так что $u' = c$, а v является орбитальной скоростью Земли. Угол θ оказывается связанным с θ' соотношением

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\sin \theta'}{\cos \theta' + v/c}. \quad (11.29)$$

Для света звезды, падающего нормально на Землю, $\theta' = \pi/2$ и

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{c}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (11.30)$$

Угол θ является дополнительным к углу α в (11.1), и, следовательно, для $\operatorname{tg} \alpha$ мы получаем выражение

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (11.31)$$

полностью согласующееся с наблюдаемым (так как $v/c \sim 10^{-4}$, то отличие радикала от единицы лежит далеко за пределами точности наблюдения).

В простейшем варианте опыта Физо поток жидкости имеет скорость v , параллельную или антипараллельную направлению распространения света. Если n — показатель преломления жидкости, то свет распространяется относительно жидкости со скоростью $u' = c/n$. Согласно (11.28), скорость света, наблюдаемая в лаборатории, должна быть равна

$$u = \frac{c/n \pm v}{1 \pm v/n} \approx \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \quad (11.32)$$

Последнее выражение является разложением точного результата до членов первого порядка малости. Оно находится в согласии с формулой Френеля (11.3). Если показатель преломления зависит от длины волны, то в (11.32) появляется дополнительный член, который возникает из-за доплеровского смещения длины волны в движущейся жидкости. Приращение $\Delta\lambda$ длины волны в движущейся жидкости с точностью до членов первого порядка по v/c равно

$$\Delta\lambda = \pm \lambda n \frac{v}{c}, \quad (11.33)$$

где верхний знак соответствует случаю параллельных, а нижний — случаю антипараллельных скоростей. Следовательно, скорость света в жидкости равна

$$\frac{c}{n(\lambda + \Delta\lambda)} \approx \frac{c}{n(\lambda)} - \frac{c}{n^2} \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda.$$

Таким образом, уточненное выражение (11.32) имеет вид

$$u = \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right). \quad (11.34)$$

Добавочное изменение скорости, связанное с дисперсией, наблюдалось экспериментально.

Релятивистскую формулу для доплеровского смещения можно получить из условия инвариантности фазы световой волны. Действительно, фаза любой плоской волны инвариантна относительно преобразований Лоренца, поскольку ее определение может быть сведено к простому счету, не зависящему от координатной системы. Рассмотрим плоскую волну с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} в системе отсчета K . Пусть наблюдатель, находящийся в точке P с координатой \mathbf{x} , считает число гребней волн, которые доходят до него за определенное время. Если гребень, который прошел через начало координат при $t = 0$, зафиксирован им первым (в момент, когда он дошел до наблюдателя), то к моменту t наблюдатель насчитает

$$\frac{1}{2\pi} (\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

гребней волн. Теперь представим себе другую систему отсчета K' , движущуюся относительно системы K со скоростью \mathbf{v} , параллельной оси z , причем начала координат этих систем совпадают в момент $t = 0$. Наблюдатель, находящийся в системе K' в точке P' с координатой \mathbf{x}' , поступает аналогично наблюдателю в K . Он начинает считать, когда его достигает гребень волны, прошедший через начало координат в момент $t' = 0$, и ведет счет до момента t' . Если точка P' в конце периода счета совмещается с точкой P , то оба наблюдателя должны насчитать одинаковое количество гребней волн. Поскольку наблюдатель в K' насчитает

$$\frac{1}{2\pi} (\omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}')$$

гребней волн, где \mathbf{k}' и ω' — волновой вектор и частота плоской волны в K' , то фаза волны действительно является инвариантом. Следовательно,

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega' t' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t; \quad (11.35)$$

отсюда, согласно формулам преобразования (11.19),

$$\begin{aligned} k'_x &= k_x, & k'_y &= k_y, \\ k'_z &= \frac{k_z - (v/c^2)\omega}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & \omega' &= \frac{\omega - vk_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (11.36)$$

Для световых волн $|\mathbf{k}| = \omega/c$, а $|\mathbf{k}'| = \omega'/c$. Таким образом, полученный результат можно представить в виде

$$\begin{aligned}\omega' &= \frac{\omega}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right), \\ \operatorname{tg} \theta' &= \frac{\sin \theta \sqrt{1-v^2/c^2}}{\cos \theta - v/c},\end{aligned}\tag{11.37}$$

где θ и θ' — углы векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}' со скоростью v . Последнее из этих соотношений является обратным соотношению (11.29).

Иногда полезно выражение частоты ω' через угол θ' волны в системе K' . Его можно получить сразу из соотношения, обратного первому соотношению (11.37):

$$\omega' = \frac{\omega \sqrt{1-v^2/c^2}}{1 + (v/c) \cos \theta'}.\tag{11.38}$$

Первое соотношение (11.37) дает обычное доплеровское смещение с релятивистской поправкой (корень в знаменателе). Благодаря этой поправке имеет место поперечное доплеровское смещение даже в случае $\theta = \pi/2$. Это релятивистское поперечное доплеровское смещение наблюдалось спектроскопически на движущихся атомах (опыт Айвза — Стилвелла, 1938 г.). Оно было измерено также прецизионным методом резонансного поглощения с помощью ядерного источника γ -лучей, помещенного на оси быстро вращающегося цилиндра, с поглотителем, прикрепленным к боковой поверхности цилиндра.

§ 5. Прецессия Томаса

В 1926 г. Уленбек и Гаудсмит ввели понятие электронного спина и показали, что если положить g -фактор¹⁾ электрона равным 2, то этим можно объяснить аномальный эффект Зеемана и наличие мультиплетного расщепления. Однако при этом возникала трудность, заключающаяся в том, что наблюдаемые интервалы тонкой структуры оказывались вдвое меньше теоретически предсказываемых. Если же выбрать g -фактор равным единице, то интервалы тонкой структуры будут получаться правильными, но эффект Зеемана станет нормальным. Полное объяснение спина, включая правильный g -фактор и правильное описание тонкой структуры, дала только релятивистская теория электрона Дирака. Однако, исходя лишь из эмпирического значения спинового момента количества движения и g -фактора, равного 2, Томас показал, что причиной расхождения является релятивистский кинематический эффект, который при корректном учете дает как аномальный эффект Зеема-

¹⁾ См. гл. 5, § 6.— Прим. ред.

на, так и правильную тонкую структуру линий. Так называемая *томасовская прецессия* позволяет также качественно объяснить спин-орбитальное взаимодействие в атомном ядре и объясняет причину «обращения» дублетов в ядре.

Гипотеза Уленбека — Гаудсмита заключается в том, что электрон обладает спиновым моментом количества движения \mathbf{S} (который вдоль произвольной оси принимает квантованные значения $\pm \hbar/2$) и магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}$, связанным с \mathbf{S} соотношением

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{mc} \mathbf{S}. \quad (11.39)$$

Обычное соотношение между магнитным моментом и моментом количества движения дается формулой (5.64). Соотношение (11.39) показывает, что электрон имеет g -фактор, равный 2. Предположим, что электрон движется со скоростью \mathbf{v} во внешних полях \mathbf{E} и \mathbf{B} . Тогда уравнение изменения момента количества движения в системе координат, где электрон покоится, будет

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}', \quad (11.40)$$

где \mathbf{B}' — магнитное поле в этой системе. В § 10 будет показано, что магнитное поле в системе координат, движущейся вместе с электроном, дается выражением

$$\mathbf{B}' \approx \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}, \quad (11.41)$$

где отброшены члены порядка v^2/c^2 . Следовательно, согласно (11.40),

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \left(\mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right). \quad (11.42)$$

Уравнение (11.42) соответствует энергии взаимодействия электронного спина с полем

$$U' = -\boldsymbol{\mu} \cdot \left(\mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right). \quad (11.43)$$

Внутри атома силу действия электрического поля $e\mathbf{E}$ можно приближенно представить как отрицательный градиент сферически симметричной средней потенциальной энергии $V(r)$. Для одноэлектронного атома это представление является, конечно, точным. Таким образом,

$$e\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dV}{dr} \quad (11.44)$$

и энергия взаимодействия спина с полем записывается в виде

$$U' = -\frac{e}{mc} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{m^2 c^2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}, \quad (11.45)$$

где $\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$ — орбитальный момент количества движения электрона. Энергия взаимодействия (11.45) дает правильный аномальный эффект Зеемана, но соответствует удвоенному спин-орбитальному взаимодействию.

Ошибка в (11.45) обусловлена некорректностью уравнения движения электронного спина (11.40). Левая часть уравнения (11.40) дает скорость изменения спина в системе координат, где электрон покоится. Она равна приложенному моменту $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{V}'$ только в том случае, когда система, в которой покоится электрон, не является вращающейся системой координат. Если же координатная система вращается, то, как впервые отметил Томас, скорость изменения во времени произвольного вектора \mathbf{G} в этой системе описывается уравнением ¹⁾

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{G}}{dt} \right)_{\text{невр}} - \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{G}, \quad (11.46)$$

где $\boldsymbol{\omega}_T$ — угловая скорость вращения, найденная Томасом. В применении к электронному спину формула (11.46) приводит к следующему уравнению движения:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{S} \times \left(\frac{e\mathbf{B}'}{mc} + \boldsymbol{\omega}_T \right). \quad (11.47)$$

Соответствующая энергия взаимодействия имеет вид

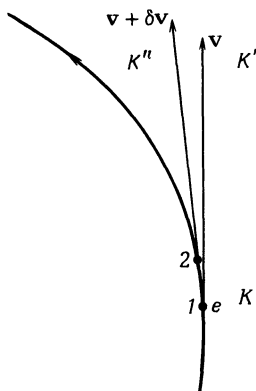
$$U = U' - \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}_T, \quad (11.48)$$

где U' — прежнее выражение (11.45) для энергии взаимодействия.

Томасовская прецессия с частотой $\boldsymbol{\omega}_T$ возникает из-за ускорения электрона при его движении по атомной орбите. На фиг. 11.9 показан электрон, который в момент времени t находится в точке 1 и имеет мгновенную скорость \mathbf{v} , а через бесконечно малый интервал времени δt попадает в точку 2, где его скорость равна $\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$. Приращение скорости связано с ускорением электрона \mathbf{a} соотношением $\delta\mathbf{v} = \mathbf{a}\delta t$. В момент t система координат K' , в которой покоится электрон, и лабораторная система K связаны преобразованием Лоренца, причем относительная скорость систем равна \mathbf{v} . Ко времени $t + \delta t$ система координат, в которой покоится электрон, изменится и станет системой K'' , связанной с K преобразованием Лоренца, где относительная скорость равна $\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$. Возникает вопрос, как связаны координатные системы K'' и K' , или, иными словами, каково поведение во времени осей системы координат, в которой покоится электрон? С точки зрения лабораторной системы электрон получает за время δt бесконечно малое приращение скорости $\delta\mathbf{v}$. Следовательно, мы могли бы ожидать, что K'' и K'

¹⁾ См., например, книгу Голдстейна [46].

связаны простым бесконечно малым преобразованием Лоренца. Если бы это было так, то выражение (11.45) было бы правильным в том виде, как оно написано. В действительности эта связь отличается от простого преобразования Лоренца. Преобразование



Ф и г. 11.9.

от K' к K'' эквивалентно двум последовательным преобразованиям Лоренца, одному для скорости $-\mathbf{v}$, а другому для скорости $\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$:

$$K' - \boxed{-\mathbf{v}} \rightarrow K - \boxed{\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}} \rightarrow K''. \quad (11.49)$$

Два последовательных преобразования Лоренца, вообще говоря, эквивалентны одному преобразованию Лоренца плюс поворот. Применяя дважды общую формулу (11.21), можно непосредственно убедиться, что временные переменные в K'' и K' связаны соотношением

$$t'' = t' - \frac{\mathbf{x}'}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[\delta\mathbf{v} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} \right], \quad (11.50)$$

которое справедливо с точностью до первого порядка по $\delta\mathbf{v}$. Это соотношение показывает, что прямое преобразование от K' к K'' содержит бесконечно малое преобразование Лоренца для скорости

$$\Delta\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[\delta\mathbf{v} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} \right]. \quad (11.51)$$

Соответствующее преобразование координат имеет вид

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \frac{\mathbf{x}' \times (\mathbf{v} \times \delta\mathbf{v})}{v^2} - \Delta\mathbf{v} t'. \quad (11.52)$$

При повороте осей координат на бесконечно малый угол $\Delta\Omega$ координаты связаны соотношением $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' + \mathbf{x}' \times \Delta\Omega$. Сравнение этого соотношения с (11.52) показывает, что координатные оси K'' повернуты относительно осей K' на угол

$$\Delta\Omega = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} \times \delta\mathbf{v}}{v^2}. \quad (11.53)$$

Отсюда следует, что координатные оси в системе, связанной с электроном, прецессируют с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}_T = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{v^2} \approx \frac{1}{2c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{a}, \quad (11.54)$$

где последнее выражение справедливо при $v \ll c$. Подчеркивая еще раз чисто кинематическое происхождение томасовской прецессии, отметим, что мы ничего не предполагали о причине ускорения. Если существует составляющая ускорения, перпендикулярная скорости \mathbf{v} , то наряду с другими эффектами, как, например, прецессия магнитного момента в магнитном поле, имеет место и томасовская прецессия.

Электрон в атоме ускоряется экранированным кулоновским полем (11.44). Поэтому томасовская угловая скорость описывается соотношением

$$\boldsymbol{\omega}_T \approx \frac{1}{2c^2} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{m} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = \frac{1}{2m^2c^2} \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}. \quad (11.55)$$

Как видно из (11.48) и (11.45), добавочный вклад в энергию, обусловленный прецессией Томаса, уменьшает спин-орбитальную связь в 2 раза (как иногда говорят, на *множитель Томаса* $1/2$), что приводит к правильному выражению для энергии спин-орбитального взаимодействия атомарного электрона

$$U = -\frac{e}{mc} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2m^2c^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}. \quad (11.56)$$

Нуклоны в атомном ядре испытывают сильные ускорения, обусловленные специфическими ядерными силами. Электромагнитные силы здесь относительно слабы. Поэтому мы можем приблизительно представлять себе, что нуклоны движутся независимо под действием короткодействующих сил притяжения в сферически симметричной потенциальной яме $V_N(r)$. При этом каждый нуклон испытывает, кроме того, спин-орбитальное взаимодействие, определяемое соотношением (11.48). В пренебрежении влиянием электромагнитных сил

$$U_N \approx -\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}_T, \quad (11.57)$$

где ускорение, входящее в $\boldsymbol{\omega}_T$, определяется потенциалом $V_N(r)$. Выражение для $\boldsymbol{\omega}_T$ получается из (11.55) простой заменой V на V_N .

Таким образом, приближенное выражение для энергии спин-орбитального взаимодействия в ядре имеет вид

$$U_N \approx -\frac{1}{2M^2c^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV_N}{dr}. \quad (11.58)$$

При сопоставлении (11.58) с формулой (11.56) учтем, что как V , так и V_N соответствуют силам притяжения (но V_N много больше); следовательно, знаки спин-орбитальных энергий противоположны. Это означает, что отдельные уровни частиц в ядре образуют «обращенные» дублеты. При разумной зависимости $V_N(r)$ выражение (11.58) находится в качественном согласии с наблюдаемым спин-орбитальным расщеплением уровней в ядре.

§ 6. Собственное время и световой конус

В предыдущих параграфах был рассмотрен ряд следствий специальной теории относительности и преобразований Лоренца. В следующих двух параграфах мы рассмотрим некоторые более формальные аспекты теории и введем ряд понятий и определений, весьма полезных при систематическом анализе физических явлений в специальной теории относительности.

При галилеевской относительности пространственные и временные координаты никак не связаны. Поэтому при преобразовании Галилея бесконечно малые элементы длины и интервалы времени порознь инвариантны

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds'^2, \quad (11.59)$$

$$dt^2 = dt'^2.$$

Наоборот, при преобразовании Лоренца временные и пространственные координаты взаимосвязаны. Из (11.21) легко показать, что инвариантным элементом «длины» является величина

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \quad (11.60)$$

Это приводит к понятию *собственного времени*, инвариантного относительно преобразований Лоренца. Рассмотрим систему, которую мы для определенности будем считать частицей, движущейся с мгновенной скоростью $\mathbf{v}(t)$ относительно некоторой координатной системы K . В системе координат K' , в которой частица в данный момент покоится, приращения координат и времени суть $dx' = dy' = dz' = 0$, $dt' = d\tau$. Отсюда получаем инвариантную длину (11.60):

$$-c^2 d\tau^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \quad (11.61)$$

Это соотношение можно записать через скорость частицы $v(t)$:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (11.62)$$

Соотношение (11.62) выражает рассмотренный выше эффект замедления времени. Однако более существенно то обстоятельство, что, как видно из вывода (11.62), время τ , называемое *собственным временем частицы*, инвариантно относительно преобразования Лоренца. Важность этого понятия выяснится ниже, когда мы начнем рассматривать скорости изменения различных величин. Если некоторая величина ведет себя определенным образом при лоренцевском преобразовании, то ее производная по собственному времени вследствие инвариантности $d\tau$ ведет себя таким же образом. Производная же по обычному времени не имеет тех же трансформационных свойств, что сама величина. Из (11.62) следует, что интервал собственного времени $\tau_2 - \tau_1$ воспринимается в системе K как интервал времени

$$t_2 - t_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2(\tau)/c^2}}, \quad (11.63)$$

где t_1 и t_2 — соответствующие времена в системе K .

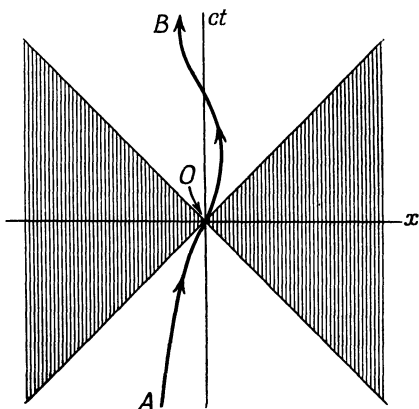
Другим плодотворным понятием в специальной теории относительности является понятие светового конуса и пространственно-подобного и времениподобного интервалов между двумя событиями. Рассмотрим фиг. 11.10, на которой ось времени (ось ct) вертикальна, а пространственные оси перпендикулярны оси времени. Пусть в момент $t = 0$ некоторая физическая система, скажем частица, находится в начале координат. Поскольку скорость света является верхней границей для всех скоростей, то всю область пространства—времени можно разделить на три области «конусом», называемым *световым конусом*, поверхность которого определяется уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$. Световой сигнал, испущенный при $t = 0$ из начала координат, будет распространяться вдоль линий, образующих на фиг. 11.10 угол 45° с осью времени. Но любая материальная система имеет скорость меньше c . Следовательно, с течением времени она может перемещаться лишь по пути (называемому ее *мировой линией*), расположенному внутри верхнего полуконуса, как, например, кривая OB . Так как пути систем лежат внутри *верхнего полуконуса* при $t > 0$, то эта область называется *областью абсолютно будущего*. Аналогично область, лежащая внутри *нижнего полуконуса*, называется *областью абсолютно прошлого*. Физическая система может прийти в точку O только по пути типа AO , лежащему внутри нижнего полуконуса. Заштрихованная область вне светового конуса называется *абсолютно удаленной областью*. Система, находящаяся внутри абсо-

лютно удаленной области, никогда не достигнет точки O , и, наоборот, система из точки O никогда не может попасть внутрь абсолютно удаленной области.

Чтобы подчеркнуть разделение пространства — времени на области абсолютно прошлого, абсолютно будущего и абсолютно уда-

Ф и г. 11.10. Мировая линия системы и световой конус.

Нижняя незаштрихованная область внутри конуса соответствует абсолютно прошлому, верхняя — абсолютно будущему, а заштрихованная область вне конуса называется «абсолютно удаленной». Точки, лежащие внутри светового конуса, отделены от начала координат времениподобным интервалом, точки вне конуса отделены пространственноподобным интервалом.



ленного, рассмотрим инвариантный интервал между двумя событиями $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ в пространстве — времени:

$$s_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2. \quad (11.64)$$

Для произвольных двух событий P_1 и P_2 имеются две возможности: либо $s_{12}^2 > 0$, либо $s_{12}^2 < 0$. Если $s_{12}^2 > 0$, то говорят, что данные два события разделены пространственноподобным интервалом, поскольку при этом всегда можно найти преобразование Лоренца к новой системе координат K' , в которой $t'_1 - t'_2 = 0$ и

$$s_{12}^2 = (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 > 0. \quad (11.65)$$

В этой новой системе оба события происходят в различных точках пространства в один и тот же момент времени. На фиг. 11.10 одно из таких событий изображается точкой O , а второе расположено в абсолютно удаленной области. Если $s_{12}^2 < 0$, то говорят, что события разделены времениподобным интервалом. При этом можно найти преобразование Лоренца, совмещающее пространственные координаты событий: $x'_1 = x'_2$, $y'_1 = y'_2$, $z'_1 = z'_2$ и

$$s_{12}^2 = -c^2(t'_1 - t'_2)^2 < 0. \quad (11.66)$$

В этой новой системе координат K' рассматриваемые события происходят в одной и той же точке пространства, но разделены во времени. На фиг. 11.10 такая пара событий соответствует одной точке

в начале координат, а другой — расположенной в области абсолютно прошлого или абсолютно будущего.

Разделение интервалов между двумя событиями на два класса пространственноподобных и времениподобных инвариантно относительно преобразований Лоренца. Два события, разделенные пространственноподобным интервалом в одной системе координат, разделены пространственноподобным интервалом и во всех других системах координат. Это означает, что такие события не могут быть причинно связанными. Поскольку физическое взаимодействие распространяется из одной точки в другую со скоростью, не превышающей скорость света, то причинно связанными могут быть только события, разделенные времениподобным интервалом. На событие, которое произошло в начале координат на фиг. 11.10, могли повлиять лишь события, соответствующие точкам в области абсолютно прошлого.

§ 7. Преобразования Лоренца как ортогональные преобразования в четырехмерном пространстве

Преобразование Лоренца (11.19) и его более общая форма (11.21) являются линейными преобразованиями пространственно-временных координат, при которых остается инвариантной квадратичная форма

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2. \quad (11.67)$$

Это свойство напоминает инвариантность известной квадратичной формы при повороте координатных осей в трехмерном пространстве. Действительно, если мы введем четыре пространственно-временные координаты

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict, \quad (11.68)$$

то квадратичная форма, инвариантная относительно преобразований Лоренца, приобретет вид

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \quad (11.69)$$

Это выражение показывает, что преобразования Лоренца являются поворотами в четырехмерном евклидовом пространстве, или, выражаясь точнее, ортогональными преобразованиями в четырех измерениях. Преобразование Лоренца (11.21) можно записать в общем виде

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} x_\nu, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (11.70)$$

где коэффициенты $a_{\mu\nu}$ — постоянные величины, характеризующие данное конкретное преобразование. Из инвариантности R^2 вытекают

условия ортогональности для коэффициентов $a_{\mu\nu}$:

$$\sum_{\mu=1}^4 a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda}. \quad (11.71)$$

Из (11.71) легко вывести, что обратным к (11.70) является преобразование

$$x_{\mu} = \sum_{\nu=1}^4 x'_{\nu} a_{\nu\mu} \quad (11.72)$$

и что

$$\sum_{\mu=1}^4 a_{\nu\mu} a_{\lambda\mu} = \delta_{\nu\lambda}. \quad (11.73)$$

Далее, если мы разрешим четыре уравнения (11.70) относительно x_{μ} и сравним это решение с (11.72), то получим, что детерминант коэффициентов $a_{\mu\nu}$ равен единице:

$$\det |a_{\mu\nu}| = 1. \quad (11.74)$$

Собственно говоря, детерминант может быть равен ± 1 , но выбор знака минус соответствовал бы не простому повороту, а повороту плюс инверсия (зеркальное отражение).

Для выяснения физического смысла приведенных выше формул выпишем явно коэффициенты преобразования $a_{\mu\nu}$ для преобразования Лоренца от системы K к системе K' , движущейся со скоростью \mathbf{v} параллельно оси z :

$$(a_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}. \quad (11.75)$$

Здесь введены удобные обозначения

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad (11.76)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Преобразование (11.70) в координатах (11.68) с коэффициентами (11.75) очевидно, в точности соответствует преобразованию Лоренца (11.19).

Легко убедиться, что преобразование (11.75) можно формально представлять как поворот осей в плоскости x_3x_4 (ось x_4 изображается, как если бы она была действительной). На фиг. 11.11 показан поворот осей на угол ψ . Координаты точки P в обеих системах коор-

динат связаны соотношениями

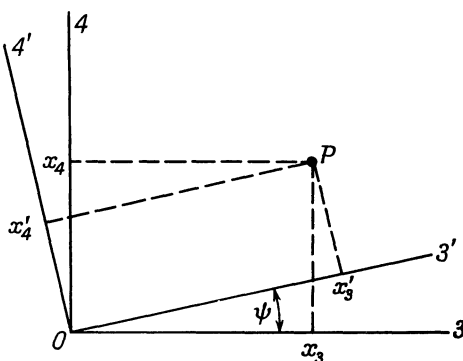
$$x'_3 = x_3 \cos \psi + x_4 \sin \psi, \quad (11.77)$$

$$x'_4 = -x_3 \sin \psi + x_4 \cos \psi.$$

Сравнение коэффициентов в (11.77) с коэффициентами преобразования (11.75) показывает, что угол поворота является мнимым углом, для которого

$$\operatorname{tg} \psi = i\beta. \quad (11.78)$$

Этот результат можно получить непосредственно из (11.77), не привлекая (11.75), если учесть, что точка $x'_3 = 0$ движется в системе K со скоростью v . Комплексность угла ψ видна и из того, что



Ф и г. 11.11. Преобразование Лоренца как поворот осей.

косинус ψ больше единицы ($\cos \psi = \gamma \geq 1$). Таким образом, представление преобразования Лоренца в виде поворота имеет чисто формальный смысл.

Несмотря на формальный характер диаграммы поворота в плоскости x_3x_4 , она дает возможность графически представить явления фицджеральд-лоренцовского сокращения и замедления времени. На фиг. 11.12 справа схематически пояснено сокращение длины, а слева — замедление времени. Расстояние L_0 в системе K' при наблюдении из системы K равно L , поскольку оно представляется горизонтальной линией, соответствующей постоянному времени t в K . Длина L кажется на фиг. 11.12 больше, чем L_0 ; это обусловлено тем, что на самом деле угол ψ мнимый; математически обе длины связаны соотношением

$$\left. \begin{aligned} L \cos \psi &= L_0 \\ L &= \frac{L_0}{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (11.79)$$

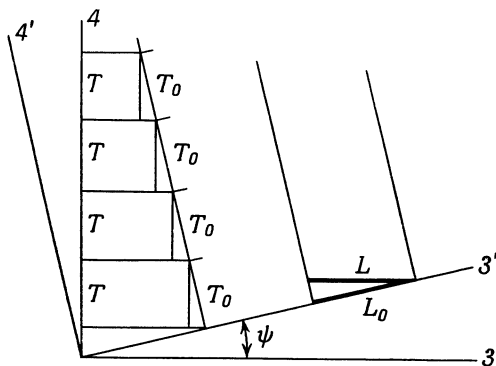
или

в согласии с (11.22). Аналогично временной интервал T_0 в системе K' представляется в системе K как интервал

$$T = T_0 \cos \psi = \gamma T_0, \quad (11.80)$$

что согласуется с (11.24).

Иногда при графическом изображении преобразования Лоренца пользуются вместо x_4 действительной временной координатой



Ф и г. 11.12. Представление замедления времени и фицджеральд-лоренцовского сокращения как поворота пространственно-временных осей координат.

$x_0 = ct$. Такое представление называется *диаграммой Минковского* и имеет то достоинство, что оно оперирует с реальными величинами. Его главный недостаток в том, что масштабы координатных сеток в системах K и K' , как это следует из (11.67), определяются гиперболической зависимостью. Интересующегося читателя мы отсылаем к работе Минковского в сборнике [39].

§ 8. Четырехвекторы и четырехтензоры. Ковариантность уравнений физики

Закон преобразования (11.70) для координат x_μ определяет трансформационные свойства векторов в четырехмерном пространстве — времени (11.68). Любая совокупность четырех величин A_μ , которые преобразуются как x_μ , называется *четырехвектором* (4-вектором). При преобразовании Лоренца ($a_{\mu\nu}$) величина A_μ преобразуется в A'_μ по формуле

$$A'_\mu = \sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} A_\nu. \quad (11.81)$$

Если величина ϕ не изменяется при преобразованиях Лоренца, то она называется *лоренц-скаляром*, или *лоренц-инвариантом*. Четыре величины, получающиеся при дифференцировании лоренц-ска-

ляра по координатам x_μ , образуют 4-вектор. Действительно, рассмотрим производные

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_\mu} = \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}. \quad (11.82)$$

Согласно (11.72),

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = a_{\mu\nu}, \quad (11.83)$$

следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_\mu} = \sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}, \quad (11.84)$$

т. е. совокупность величин $\partial \varphi / \partial x_\mu$ преобразуется как 4-вектор. Аналогичным образом легко показать, что 4-дивергенция 4-вектора является лоренц-инвариантом:

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\nu} = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}. \quad (11.85)$$

Полагая в этом соотношении $A_\mu = \partial \varphi / \partial x_\mu$, получаем, что четырехмерный оператор Лапласа является лоренц-инвариантным:

$$\square'^2 \varphi \equiv \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\nu'^2} = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu^2} \equiv \square^2 \varphi. \quad (11.86)$$

Если оператор \square^2 действует не на скаляр, а на какие-либо другие функции, скажем на 4-вектор A_μ , то получающиеся величины сохраняют трансформационные свойства тех функций, на которые действует этот оператор. Легко проверить, что скалярное произведение двух 4-векторов A_μ и B_μ является инвариантом

$$(A' \cdot B') \equiv \sum_{\mu=1}^4 A'_\mu B'_\mu = (A \cdot B). \quad (11.87)$$

Четырехвектор является тензором первого ранга в четырехмерном пространстве. Тензоры высшего ранга определяются аналогичным образом. Тензором второго ранга $T_{\mu\nu}$ является совокупность шестнадцати величин, которые преобразуются по закону

$$T'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda, \sigma=1}^4 a_{\mu\lambda} a_{\nu\sigma} T_{\lambda\sigma}. \quad (11.88)$$

Тензоры высших рангов определяются аналогичными преобразованиями с большим числом множителей $a_{\mu\nu}$. Тензором n -го ранга

является совокупность 4^n величин, закон преобразования которых является обобщением закона (11.88) и содержит произведение n коэффициентов $a_{\mu\nu}$. Подобно тому как скалярное произведение двух 4-векторов имеет ранг, на единицу меньший ранга исходных величин, тензоры более низкого ранга можно получать путем умножения тензоров более высокого ранга. Например, скалярное произведение тензора второго ранга и 4-вектора дает 4-вектор:

$$B_{\mu} = \sum_{\nu=1}^4 T_{\mu\nu} A_{\nu} = \sum_{\lambda=1}^4 a_{\mu\nu} \left(\sum_{\nu=1}^4 T_{\lambda\nu} A_{\nu} \right). \quad (11.89)$$

Это соотношение и аналогичные ему доказываются с помощью условий ортогональности (11.71) и (11.73).

Элемент объема четырехмерного пространства — времени (11.68) определяется как действительная величина

$$d^4x \equiv dx_1 dx_2 dx_3 dx_0, \quad (11.90)$$

где $dx_0 = (1/i)dx_4 = d(ct)$. Закон преобразования элемента объема имеет вид

$$d^4x' = \frac{\partial (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)}{\partial (x_1, x_2, x_3, x_4)} d^4x. \quad (11.91)$$

Поскольку якобиан в (11.91) совпадает с детерминантом матрицы коэффициентов $a_{\mu\nu}$ (11.74), элемент 4-объема d^4x является лоренц-инвариантной величиной.

Первый постулат Эйнштейна заключается в том, что законы физики должны иметь одинаковую форму в различных лоренцовых координатных системах. Это означает, что уравнения, описывающие физические законы, должны иметь *ковариантную* форму. Под ковариантностью мы понимаем то, что уравнения могут быть написаны таким образом, что обе их части будут иметь одинаковые трансформационные свойства при преобразованиях Лоренца. Следовательно, законы физики могут связывать 4-векторы, или лоренц-скаляры, или 4-тензоры одинакового ранга. Трансформационные свойства должны быть одинаковыми для того, чтобы соотношение, справедливое в одной системе координат, оставалось справедливым и при переходе к другой координатной системе. Рассмотрим, например, два неоднородных уравнения Максвелла. В следующем параграфе будет показано, что они могут быть записаны в релятивистской форме

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = \frac{4\pi}{c} J_{\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (11.92)$$

где J_{μ} и $F_{\mu\nu}$ соответственно 4-вектор тока и 4-тензор электромагнитного поля. Так как 4-дивергенция 4-тензора является 4-вектором,

то уравнения (11.92) представляют собой соотношение между двумя 4-векторами. Следует ожидать, что в другой координатной системе K' этот же физический закон имеет такую же форму:

$$\sum_{\sigma=1}^4 \frac{\partial F'_{\lambda\sigma}}{\partial x'_{\sigma}} = \frac{4\pi}{c} J'_{\lambda}, \quad \lambda = 1, 2, 3, 4. \quad (11.93)$$

С помощью преобразования (11.81) можно выразить соотношение (11.93) через величины в исходной координатной системе:

$$\sum_{\mu=1}^4 a_{\lambda\mu} \left(\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{4\pi}{c} J_{\mu} \right) = 0. \quad (11.94)$$

Это соотношение показывает, что если закон (11.92) выполняется в исходной системе отсчета, то он выполняется и во всех лоренцовых системах. Если бы обе части (11.92) не имели одинаковых трансформационных свойств, то закон не обладал бы таким свойством.

В заключение нашего формального рассмотрения введем некоторые упрощающие обозначения.

1. Греческие индексы считаются пробегающими значения от 1 до 4.

2. Латинские индексы обозначают пространственные переменные и пробегают значения от 1 до 3.

3. 4-векторы обозначаются через A_{μ} ; их составляющие (A_1, A_2, A_3) соответствуют пространственному вектору \mathbf{A} , а $A_4 = iA_0$. Иногда это соответствие будет записываться в виде

$$A_{\mu} = (\mathbf{A}, iA_0). \quad (11.95)$$

Индекс у 4-вектора может быть иногда опущен, так что $f(x)$, например, обозначает $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$.

4. Скалярное произведение 4-векторов обозначается как

$$(A \cdot B) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - A_0 B_0, \quad (11.96)$$

где $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ — обычное трехмерное скалярное произведение.

5. Введем еще обозначения суммирования. Будем считать, что по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, хотя знак суммы не написан. Если повторяются латинские индексы, то суммирование производится от 1 до 3, если же греческие — то от 1 до 4. При этом, например, (11.85) записывается в виде

$$\frac{\partial A'_{\mu}}{\partial x'_{\mu}} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\mu}},$$

а (11.89) принимает компактную форму

$$T'_{\nu\alpha} A'_{\nu} = a_{\mu\lambda} T_{\lambda\nu} A_{\nu}.$$

§ 9. Ковариантность уравнений электродинамики

Инвариантность уравнений электродинамики при преобразованиях Лоренца была установлена Лоренцом и Пуанкаре еще до того, как Эйнштейн сформулировал специальную теорию относительности. В данном параграфе мы рассмотрим это свойство ковариантности и следствия из него. При этом возможны две точки зрения. Можно положить в основу некоторый экспериментально проверенный факт, например инвариантность электрического заряда, и попытаться отсюда вывести ковариантность уравнений. Можно, наоборот, потребовать ковариантности формы уравнений и показать, что трансформационные свойства различных физических величин, например напряженности полей, зарядов и токов, могут быть выбраны таким образом, чтобы уравнения действительно были ковариантны. Хотя первый путь в некотором смысле более логичен, мы выберем второй. Уравнения классической электродинамики можно считать *точно установленными*, и их можно представить в ковариантной форме. Рассмотрим для простоты микроскопические уравнения, куда величины \mathbf{D} и \mathbf{H} не входят.

Начнем с уравнения непрерывности для заряда и плотности тока:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (11.97)$$

Ему можно придать ковариантную форму, вводя 4-вектор заряда-тока J_μ , определяемый следующим образом:

$$J_\mu = (\mathbf{J}, ic\rho). \quad (11.98)$$

При этом (11.97) принимает явно ковариантный вид

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (11.99)$$

То обстоятельство, что J_μ действительно является 4-вектором, вытекает из экспериментально установленной инвариантности электрического заряда. Инвариантность заряда подразумевает лоренц-инвариантность произведения $\rho dx_1 dx_2 dx_3$. Поскольку величина $id^4x = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ также является лоренц-инвариантом, то отсюда следует, что ρ преобразуется как четвертая составляющая 4-вектора. Трансформационные свойства \mathbf{J} как пространственного вектора очевидны.

Волновые уравнения для векторного потенциала \mathbf{A} и скалярного потенциала Φ имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \\ \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho. \end{aligned} \quad (11.100)$$

где \mathbf{A} и Φ связаны условием Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (11.101)$$

Легко видеть, что дифференциальный оператор в левых частях волновых уравнений является лоренц-инвариантным четырехмерным лапласианом (11.86). Правые части этих уравнений составляют 4-вектор. Из требования ковариантности вытекает, что векторный и скалярный потенциалы являются пространственной и временной частями 4-вектора-потенциала

$$A_\mu = (\mathbf{A}, i\Phi). \quad (11.102)$$

Следовательно, волновые уравнения записываются в виде

$$\square^2 A_\mu = -\frac{4\pi}{c} J_\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (11.103)$$

а условие Лоренца — в виде равенства 4-дивергенции нулю:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (11.104)$$

Теперь мы можем перейти к рассмотрению полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , которые определяются через потенциалы соотношениями

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (11.105)$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Выписывая явно, например, первые составляющие \mathbf{E} и \mathbf{B}

$$\begin{aligned} iE_1 &= \frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_1}, \\ B_1 &= \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (11.106)$$

мы видим, что электрическое и магнитное поля являются элементами антисимметричного тензора второго ранга $F_{\mu\nu}$, который называется *тензором электромагнитного поля*:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \quad (11.107)$$

Явное выражение для 4-тензора поля имеет вид

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.108)$$

Чтобы закончить установление ковариантности уравнений электродинамики, остается рассмотреть еще уравнения Максвелла. Два неоднородных уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (11.109)$$

Так как правые части являются составляющими 4-вектора, то левые части также должны быть составляющими 4-вектора. Учитывая определение (11.108) для тензора поля, легко убедиться, что левые части (11.109) представляют собой дивергенцию тензора электромагнитного поля. Таким образом, уравнения (11.109) принимают ковариантную форму

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} J_\mu. \quad (11.110)$$

Аналогично можно показать, что два однородных уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (11.111)$$

сводятся к четырем уравнениям

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0, \quad (11.112)$$

где λ, μ, ν — произвольная тройка чисел 1, 2, 3, 4. Каждый член в (11.112) преобразуется как 4-тензор третьего ранга, так что это уравнение имеет нужную ковариантную форму.

§ 10. Преобразование электромагнитного поля

Поскольку поля \mathbf{E} и \mathbf{B} являются элементами тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, их трансформационные свойства определяются преобразованием

$$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\sigma} F_{\lambda\sigma}. \quad (11.113)$$

Используя преобразование (11.75) от системы K к системе K' , движущейся со скоростью v вдоль оси x_3 , мы получаем следующие формулы преобразования для составляющих полей:

$$\begin{aligned} E'_1 &= \gamma (E_1 - \beta B_2), & B'_1 &= \gamma (B_1 + \beta E_2), \\ E'_2 &= \gamma (E_2 + \beta B_1), & B'_2 &= \gamma (B_2 - \beta E_1), \\ E'_3 &= E_3, & B'_3 &= B_3. \end{aligned} \quad (11.114)$$

Обратные преобразования получаются из (11.114) перестановкой штрихованных величин с нештрихованными и заменой β на $-\beta$.

При общем преобразовании Лоренца от системы K к системе K' , движущейся со скоростью v относительно K , поля преобразуются, очевидно, следующим образом:

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel}, & B'_{\parallel} &= B_{\parallel}, \\ E'_{\perp} &= \gamma \left(E_{\perp} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right), & B'_{\perp} &= \gamma \left(B_{\perp} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right). \end{aligned} \quad (11.115)$$

Здесь индексы \parallel и \perp означают параллельность и перпендикулярность к скорости \mathbf{v} . Преобразование (11.115) показывает, что \mathbf{E} и \mathbf{B} не являются независимыми величинами. Поэтому чисто электрическое или чисто магнитное поле в одной системе координат представляется совокупностью электрического и магнитного полей в другой системе. При этом имеются, конечно, некоторые ограничения (см. задачу 11.10), так что, например, чисто электростатическое поле в одной системе координат нельзя преобразовать в чисто магнитостатическое поле в другой системе. Однако электрическое и магнитное поля полностью взаимосвязаны, и более правильно говорить как о физической реальности об электромагнитном поле $F_{\mu\nu}$, а не о полях \mathbf{E} и \mathbf{B} по отдельности.

В качестве примера преобразования электромагнитного поля рассмотрим поля в системе K , создаваемые точечным зарядом q , движущимся прямолинейно со скоростью v . Этот заряд покоится в системе K' , связанной с ним; преобразование полей из системы K' в систему K дается формулами, обратными к (11.114) или (11.115). Предположим, что заряд движется в положительном направлении оси x_3 и проходит на расстоянии b от наблюдателя. Выбранные оси координат показаны на фиг. 11.13. Наблюдатель находится в точке P . При $t = t' = 0$ начала координат совмещены, а заряд q находится на наименьшем расстоянии от наблюдателя. В системе K' точка P , в которой определяются поля, имеет координаты $x'_1 = b$, $x'_2 = 0$, $x'_3 = -vt'$ и находится на расстоянии $r' = \sqrt{b^2 + (vt')^2}$ от q . Нас интересует выражение r' через координаты в системе K . Единственной координатой, которую необходимо преобразовывать, является время $t' = \gamma [t - (v/c^2)x_3] = \gamma t$, так как координата x_3 точки P в системе K равна нулю. В системе K' , в которой заряд покоится, электрическое и магнитное поля запишутся в виде

$$\begin{aligned} E'_1 &= \frac{qb}{r'^3}, & E'_2 &= 0, & E'_3 &= -\frac{qvt'}{r'^3}, \\ B'_1 &= 0, & B'_2 &= 0, & B'_3 &= 0. \end{aligned} \quad (11.116)$$

Отличные от нуля составляющие поля выражаются следующим образом через координаты системы K :

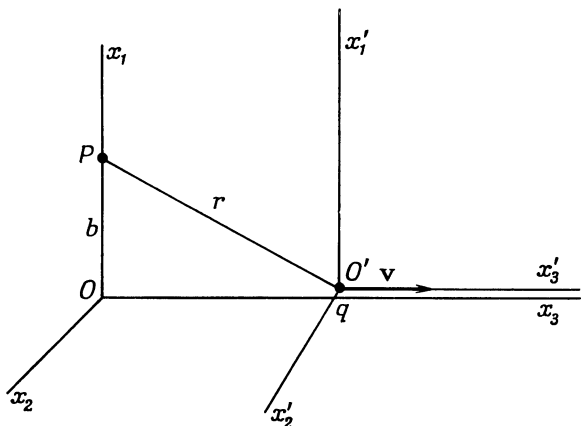
$$E'_1 = \frac{qb}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \quad E'_3 = -\frac{q\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}. \quad (11.117)$$

Теперь с помощью формул, обратных к (11.114), можно найти поля в системе K

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma E'_1 = \frac{\gamma qb}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \\ E_3 &= E'_3 = -\frac{q\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \\ B_2 &= \gamma\beta E'_1 = \beta E_1. \end{aligned} \quad (11.118)$$

Все другие составляющие поля равны нулю.

Интересно поведение полей при скорости заряда, приближающейся к скорости света. Прежде всего имеется магнитное поле,



Ф и г. 11.13. Оси координат, используемые при рассмотрении движения частицы.

Частица с зарядом q имеет постоянную скорость v и проходит точку наблюдения P с прицельным параметром b .

направленное по x_2 . При $\beta \rightarrow 1$ оно становится почти равным поперечному электрическому полю E_1 . Для нерелятивистских скоростей, когда $\gamma \approx 1$, магнитное поле равно

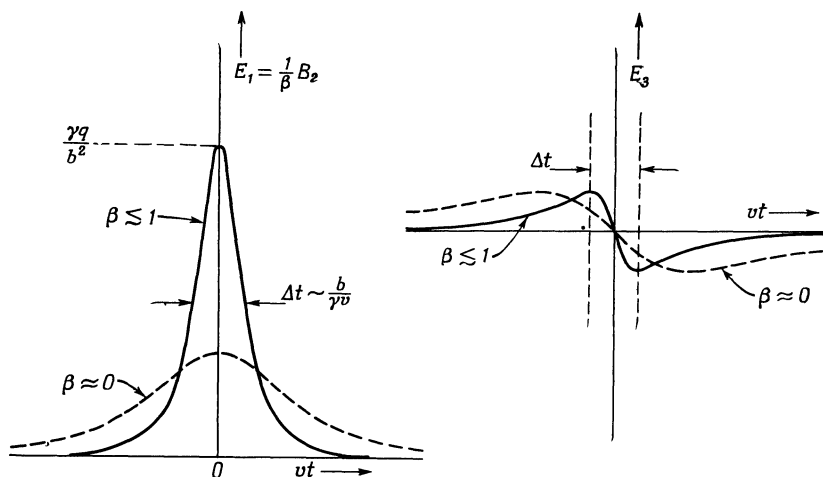
$$\mathbf{B} \approx \frac{q}{c} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (11.119)$$

что совпадает с выражением Ампера и Био — Савара для магнитного поля движущегося заряда. Его можно, очевидно, получить и непосредственно из преобразования, обратного к (11.115). При больших скоростях, когда $\gamma \gg 1$, максимальное поперечное электрическое поле E_1 (при $t = 0$) становится в γ раз больше своего нерелятивистского значения. Но в этом предельном случае уменьшается промежуток времени, в течение которого существует заметная напряженность поля в точке P . Интервал времени, в течение

которого поля имеют заметную величину, очевидно, приближенно равен

$$\Delta t \sim \frac{b}{\gamma v}. \quad (11.120)$$

Таким образом, при возрастании γ максимальные значения полей растут пропорционально γ , а их длительность убывает обратно пропорционально γ . Интеграл от поля по времени, умноженный на v , не зависит от скорости. На фиг. 11.14 показано поведение



Фиг. 11.14. Изменение полей прямолинейно движущейся заряженной частицы во времени.

поперечных электрического и магнитного полей и продольного электрического поля. При $\beta \rightarrow 1$ наблюдатель в точке P видит почти равные и взаимно перпендикулярные поперечные электрическое и магнитное поля. Они неотличимы от полей импульса плоскополяризованного излучения, распространяющегося вдоль оси x_3 . Добавочное продольное электрическое поле быстро меняет свой знак, и его интеграл по времени равен нулю. Если регистрирующий прибор наблюдателя имеет некоторую инерцию, то он не обнаружит это продольное поле. Следовательно, практически наблюдатель воспримет только поперечные поля. Эквивалентность полей релятивистской заряженной частицы и полей импульса электромагнитного излучения будет использована в гл. 15.

Из инвариантности волнового уравнения относительно преобразования Лоренца следует, что плоская электромагнитная волна в координатной системе K представляется также плоской волной

в другой координатной системе K' , движущейся с постоянной скоростью относительно K . В системе K плоская волна описывается полями

$$F_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = f_{\mu\nu} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}, \quad (11.121)$$

где $f_{\mu\nu}$ — соответствующие постоянные коэффициенты, а \mathbf{k} и ω — волновой вектор и частота волны. В системе координат K' эта плоская волна будет иметь вид

$$F'_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t') = f'_{\mu\nu} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}' - i\omega' t'}, \quad (11.122)$$

где $f'_{\mu\nu}$ — опять постоянные коэффициенты, а \mathbf{k}' и ω' — волновой вектор и частота в системе K' . В соответствии с (11.113) эти поля связаны соотношениями

$$f'_{\mu\nu} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}' - i\omega' t'} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\sigma} f_{\lambda\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}. \quad (11.123)$$

Чтобы эти соотношения удовлетворялись в любой точке пространства — времени, фазовые множители в обеих частях равенства должны быть одинаковыми

$$\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}' - \omega' t' = \mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t. \quad (11.124)$$

Инвариантность фазы означает, что \mathbf{k} и ω являются соответственно пространственной и временной составляющими 4-вектора

$$k_{\mu} = \left(\mathbf{k}, \frac{i\omega}{c} \right). \quad (11.125)$$

При этом инвариантность фазы означает инвариантность скалярного произведения $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$ двух 4-векторов. Как показано в § 4, из (11.125) вытекает релятивистская формула для доплеровского смещения.

§ 11. Ковариантность выражения для силы Лоренца и законов сохранения

В § 9 мы рассматривали ковариантность законов электродинамики для плотности зарядов и токов и создаваемых ими полей и потенциалов. Мы знаем, что заряды и токи в конечном счете обусловлены заряженными частицами, движущимися под действием полей. Следовательно, для завершения нашего анализа необходимо рассмотреть ковариантную формулировку для силы Лоренца и законов сохранения количества движения и энергии.

Силу Лоренца, действующую на единицу объема (и равную скорости изменения количества движения в единице объема), можно записать в виде

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}; \quad (11.126)$$

здесь \mathbf{J} и q — плотности тока и заряда. Выписывая явно первую составляющую f_1 , получаем

$$f_1 = qE_1 + \frac{1}{c} (J_2 B_3 - J_3 B_2) = \frac{1}{c} (F_{12} J_2 + F_{13} J_3 + F_{14} J_4), \quad (11.127)$$

где использованы обозначения (11.98) и (11.108). Другие составляющие f записываются аналогично, так что (11.126) можно представить в виде

$$f_k = \frac{1}{c} F_{kv} J_v, \quad k = 1, 2, 3. \quad (11.128)$$

Правые части (11.128) представляют собой пространственные составляющие 4-вектора. Следовательно, сила f должна быть пространственной частью 4-вектора $f_\mu = (f, if_0/c)$, где

$$f_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} J_\nu. \quad (11.129)$$

Чтобы понять смысл четвертой составляющей 4-вектора плотности силы, выпишем ее явно:

$$f_0 = \frac{c}{i} f_4 = \frac{1}{i} (F_{41} J_1 + F_{42} J_2 + F_{43} J_3) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad (11.130)$$

Но $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ — это работа, совершаемая полем над зарядами в единичном объеме в единицу времени, т. е. скорость изменения механической энергии частиц в единице объема. Таким образом, мы видим, что в записанном в ковариантной форме выражении (11.129) для силы Лоренца пространственная часть определяет скорость изменения количества движения единицы объема, а временная часть — скорость изменения механической энергии единицы объема. Иными словами, составляющие силы Лоренца определяют пространственные и временные производные некоторой величины с размерностью плотности энергии.

Законы сохранения полной энергии (механической и электромагнитной) и полного количества движения, полученные в гл. 6, можно представить в ковариантной форме в виде уравнений для пространственной и временной частей единого 4-вектора. Исключая с помощью неоднородных уравнений Максвелла (11.110) составляющие J_ν из уравнения (11.129), получаем выражение для плотности силы в виде

$$f_\mu = \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\lambda}. \quad (11.131)$$

Правую часть соотношения (11.131) можно записать в виде дивергенции тензора второго ранга. Введем симметричный тензор $T_{\mu\nu}$,

называемый *электромагнитным тензором энергии-импульса*:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right). \quad (11.132)$$

Доказательство того, что выражение (11.131) при учете однородных уравнений Максвелла можно представить в форме

$$\dot{f}_\mu = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \quad (11.133)$$

отнесено к задачам (задача 11.12). Компоненты тензора $T_{\mu\nu}$ можно явно выразить через поля, используя (11.132):

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & -icg_1 \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & -icg_2 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & -icg_3 \\ -icg_1 & -icg_2 & -icg_3 & u \end{pmatrix}. \quad (11.134)$$

Здесь T_{ik} — симметричный тензор максвелловских натяжений, определенный на стр. 221, \mathbf{g} — плотность импульса электромагнитного поля

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{g} &= \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}, \\ \text{а } u &\text{ — плотность энергии поля} \\ u &= \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2). \end{aligned} \right\} \quad (11.135)$$

Из определения (6.102) пространственной части тензора $T_{\mu\nu}$ [или из (11.132)] следует, что сумма диагональных элементов тензора энергии-импульса (след тензора) равна нулю:

$$\sum_{\mu} T_{\mu\mu} = 0. \quad (11.136)$$

Законы сохранения импульса и энергии являются просто трехмерными интегралами уравнения для силы (11.133). Чтобы убедиться в этом, выпишем пространственные составляющие \dot{f}_k :

$$\dot{f}_k = \frac{\partial T_{k\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial T_{kj}}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{k4}}{\partial x_4} = (\operatorname{div} \overleftarrow{\mathbf{T}})_k - \frac{\partial g_k}{\partial t}. \quad (11.137)$$

Если приравнять пространственный интеграл от \dot{f}_k скорости изменения k -й составляющей импульса P_k , то, интегрируя (11.137), получаем

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P} + \mathbf{G}) = \int_V \operatorname{div} \overleftarrow{\mathbf{T}} d^3x = \oint_S \overleftarrow{\mathbf{n}} \cdot \overleftarrow{\mathbf{T}} da, \quad (11.138)$$

где через \mathbf{G} обозначен полный импульс электромагнитного поля. Этот закон сохранения количества движения был получен

в гл. 6. Аналогично четвертую составляющую уравнения (11.133) можно записать в виде

$$f_0 = \frac{c}{i} f_4 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{c}{i} \frac{\partial T_{4j}}{\partial x_j} + \frac{c}{i} \frac{\partial T_{44}}{\partial x_4} = -\operatorname{div} \mathbf{S} - \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (11.139)$$

Приравнивая интеграл по объему от f_0 скорости изменения полной механической энергии T , получаем закон сохранения энергии

$$\frac{d}{dt}(T + U) = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{S} d^3x = - \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} da, \quad (11.140)$$

где U — полная электромагнитная энергия в объеме V .

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Теории относительности посвящена обширная литература. На мой взгляд, самое ясное, хотя и сжатое, изложение специальной и общей теории относительности дано в известной работе Паули [79], относящейся к 1921 г., но не утратившей своего значения и сейчас.

По специальной теории относительности имеется целый ряд учебников, рассчитанных на аспирантов, а именно книги Аарони [3], Бергмана [11], гл. 1—9, Мёллера [74], гл. 1—7.

Большое удовольствие от оригинальных методов теоретического исследования можно получить при чтении сборника работ Эйнштейна, Лоренца, Минковского и Вейля [39]. Основные эксперименты сжато и ясно описаны в книгах Мёллера [74], гл. 1, Пановского и Филиппа [78], гл. 14. Более полное описание экспериментальных основ специальной теории относительности с подробной библиографией дано в главе, написанной Хиллом в книге [48], ч. 6, гл. 8.

Томасовская прецессия рассмотрена в книге Мёллера [74], § 22 и 47, где изложение сходно с нашим. Другой подход к этому вопросу применяют Корбен и Стил [31], § 92.

Дополнение редактора. Краткое изложение основных принципов специальной теории относительности читатель может найти в первых двух главах книги Эйнштейна «Сущность теории относительности» [133].

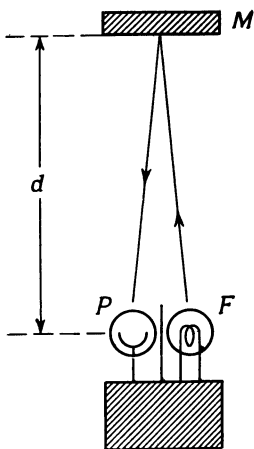
ЗАДАЧИ

11.1. На фиг. 11.15 изображен один из возможных вариантов часов. Они состоят из лампы-вспышки F и фотоэлемента P , экранированного таким образом, что он реагирует только на свет, идущий от зеркала M , расположенного на расстоянии d и жестко скрепленного с системой лампа — фотоэлемент. Внутри ящика расположено электронное устройство, которое в тот момент, когда фотоэлемент отзывается на вспышку света от зеркала, включает (с пренебрежимо малым временем запаздывания) лампу-вспышку, посылающую к зеркалу короткий импульс света. Такие часы «тикают» с интервалом $2d/c$ сек в системе координат, в которой они покоятся.

а) Предположим, что часы движутся относительно наблюдателя с постоянной скоростью v , перпендикулярной направлению от PF к M . Используя второй постулат относительности, путем прямого геометрического или

алгебраического расчета показать, что при движении часов наблюдатель заметит релятивистское замедление времени.

б) Предположим, что часы движутся со скоростью v параллельно направлению от PF к M . Проверить, что при этом наблюдаемый интервал тиканья часов также удлиняется, причем в том же отношении, что и в п. «а».



Ф и г. 11.15.

11.2. а) Показать, что два последовательных преобразования Лоренца в одном и том же направлении перестановочны и эквивалентны одному преобразованию Лоренца для относительной скорости

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}.$$

Это один из возможных путей вывода закона сложения параллельных скоростей.

б) Показать, что два последовательных преобразования Лоренца во взаимно перпендикулярных направлениях (v_1 — в x -направлении, v_2 — в y -направлении) не перестановочны. Показать также, что в каком бы порядке ни применялись эти преобразования, результат не будет совпадать с единичным преобразованием с $\mathbf{v} = i v_1 + j v_2$. Указать одно или несколько простых соображений, из которых вытекает необходимость этого результата в специальной теории относительности.

11.3. а) Найти вид волнового уравнения в системе K , если в системе K' оно имеет обычную форму, а обе системы координат связаны преобразованием Галилея: $x' = x - vt$, $t' = t$.

б) Показать непосредственным преобразованием, что форма волнового уравнения в системах K и K' одинакова, если координаты связаны преобразованием Лоренца: $x' = \gamma(x - vt)$, $t' = \gamma[t - (vx/c^2)]$.

11.4. Координатная система K' движется со скоростью v относительно другой системы K . В системе K' частица имеет скорость u' и ускорение a' . Найти закон лоренцовского преобразования ускорений и показать, что

в системе K составляющие ускорения, параллельная и перпендикулярная \mathbf{v} , имеют вид

$$\begin{aligned} a_{\parallel} &= \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'/c^2)^3} a'_{\parallel}, \\ a_{\perp} &= \frac{1 - v^2/c^2}{(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'/c^2)^3} \left[a'_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times (\mathbf{a}' \times \mathbf{u}') \right]. \end{aligned}$$

11.5. Предположим, что ракетный корабль покидает Землю в 2000 г. Пилот ракеты родился в 1980 г. Ракетный корабль устроен таким образом, что он в собственной системе координат имеет ускорение g (при этом пассажиры чувствуют себя «как дома»). Двигаясь в прямом направлении, корабль ускоряется 5 лет (по своим часам), затем замедляется с таким же ускорением в течение следующих 5 лет, после чего начинает двигаться обратно, также 5 лет ускоряясь и 5 лет замедляясь, и, наконец, попадает на Землю. Пилоту ракеты исполнилось к этому моменту 40 лет.

а) В каком году ракетный корабль вернулся на Землю?

б) Как далеко он удалялся от Земли?¹⁾

11.6. В системе отсчета K два спринтера почти одинаковой силы стартуют с оси y из положений, расположенных на расстоянии d друг от друга, и бегут вдоль оси x . Два стартера, находящиеся каждый возле своего бегуна, стреляют из своих стартовых пистолетов в слегка различные моменты времени, давая преимущество более слабому из двух бегунов. Разница времен стартов в системе K равна T .

а) Для какого интервала времени T найдется система отсчета K' , в которой ни у одного из спринтеров нет преимущества, и для какого интервала времени T существует система K' , в которой имеется действительное (не кажущееся) преимущество?

б) Для обоих указанных в п. «а» случаев провести в явном виде преобразование к найденной системе K' и определить скорость системы K' относительно K , а также координаты каждого из спринтеров в системе K' .

11.7. Используя четырехмерную форму теоремы Грина, решить неоднородное волновое уравнение

$$\square^2 A_{\mu} = -\frac{4\pi}{c} J_{\mu}.$$

а) Показать, что 4-вектор-потенциал для ограниченного распределения зарядов и токов имеет вид

$$A_{\mu} = \frac{1}{\pi c} \int \frac{J_{\mu}(\xi)}{R^2} d^4\xi,$$

где $R^2 = (x - \xi) \cdot (x - \xi)$, x означает (x_1, x_2, x_3, x_4) , а $d^4\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4$.

б) Исходя из определения напряженностей поля $F_{\mu\nu}$, показать, что

$$F_{\mu\nu} = \frac{2}{\pi c} \int \frac{(J \times R)_{\mu\nu}}{R^4} d^4\xi,$$

где $(J \times R)_{\mu\nu} = J_{\mu} R_{\nu} - J_{\nu} R_{\mu}$.

¹⁾ Для решения этой задачи необходимо предположить, что для ускоренно движущихся систем координат справедливы соотношения Лоренца между собственным временем и временем в других системах координат.— *Прим. ред.*

11.8. Трехмерная формулировка задачи излучения приводит к запаздывающему решению

$$A_{\mu}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{J_{\mu}(\boldsymbol{\xi}, t')}{r} \Big|_{t'=t-r/c} d^3\xi,$$

где $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$. Показать связь этого решения с решением, полученным в задаче 11.7, выполнив в последнем интегрирование по $d^3\xi_4$.

11.9. Точечному покоящемуся магнитному моменту $\boldsymbol{\mu}$ соответствует векторный потенциал

$$\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

и нулевой скалярный потенциал. Показать, что если магнитный момент движется со скоростью \mathbf{v} ($v \ll c$), то появляется электрический дипольный момент \mathbf{p} , совмещенный с магнитным и равный

$$\mathbf{p} = \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}).$$

Что можно сказать о случае, когда скорость \mathbf{v} не мала по сравнению с c ? Показать, что энергия взаимодействия движущегося диполя с полями \mathbf{E} и \mathbf{B} та же, что и получаемая путем расчета магнитного поля в системе, где магнитный момент неподвижен.

11.10. а) Показать, что величина $B^2 - E^2$ инвариантна относительно преобразований Лоренца. Как записать ее в четырехмерных обозначениях?
б) Символ $\varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma}$ определяется следующими свойствами:

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma} = \begin{cases} 0, & \text{если любая пара индексов совпадает,} \\ +1 & \text{для четной перестановки индексов,} \\ -1 & \text{для нечетной перестановки индексов.} \end{cases}$$

Таким образом, $\varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma}$ представляет собой полностью антисимметричный единичный тензор четвертого ранга (точнее говоря, это псевдотензор относительно пространственной инверсии). Доказать, что величина $\varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma} F_{\lambda\mu} F_{\nu\sigma}$ (где подразумевается суммирование по одинаковым индексам) является лоренц-инвариантом, и найти ее выражение через поля \mathbf{E} и \mathbf{B} .

11.11. В некоторой покоящейся системе отсчета однородное статическое электрическое поле E_0 параллельно оси x , а однородное статическое магнитное поле $B_0 = 2E_0$ лежит в плоскости xy и направлено под углом θ к оси x . Определить относительную скорость системы отсчета, в которой электрическое и магнитное поля параллельны. Каковы поля в этой системе отсчета при $\theta \ll 1$ и $\theta \rightarrow \pi/2$?

11.12. Показать, что выражение для силы $f_{\mu} = (1/c) F_{\mu\nu} J_{\nu}$ можно представить в виде

$$f_{\mu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}},$$

где

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right).$$

11.13. Импульс электромагнитного излучения имеет ограниченные размеры и распространяется в пространстве без зарядов и токов.

а) С помощью теоремы непрерывности в четырехмерном пространстве доказать, что *полный* импульс и энергия электромагнитного поля преобразуются как 4-вектор.

б) Показать, что для плоской волны этот 4-вектор имеет нулевую «длину», но что для других возможных конфигураций полей (например, для расходящейся сферической волны) это не так.

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

При изложении специальной теории относительности в гл. 11 основное внимание уделялось электромагнитным полям и ковариантности уравнений электродинамики. Только в § 11 было частично затронуто механическое движение источников заряда и тока. Действительно, поскольку специальная теория относительности в первую очередь позволила объяснить особенности явления распространения света, то естественно, что при изложении основ этой теории мы больше всего говорили об электромагнитных полях. Кроме того, в большом классе задач нет необходимости в подробном рассмотрении механического движения источников заряда и тока. Однако проблемы, в которых поля играют большую роль, чем источники, охватывают лишь часть электродинамических явлений. Существуют обратные задачи, в которых нас интересует поведение заряженных частиц под действием приложенных электромагнитных полей. Конечно, движущиеся частицы в свою очередь создают заряды и токи, которые являются источниками новых полей. Но во многих приложениях этими полями можно пренебречь либо же учесть их приближенно. В настоящей главе мы рассмотрим движение релятивистских частиц, сначала их кинематику, а затем динамику в заданных внешних полях. Обсуждение сложной задачи взаимодействия заряженных частиц с порождаемыми ими полями мы отложим до гл. 17.

§ 1. Импульс и энергия частицы

В нерелятивистской механике частица с массой m и скоростью \mathbf{v} имеет импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ и кинетическую энергию $T = 1/2 m\mathbf{v}^2$. Уравнения движения Ньютона связывают скорость изменения импульса с приложенной силой. Для заряженной частицы такой силой является сила Лоренца. Поскольку в § 11 предыдущей главы

мы уже рассмотрели трансформационные свойства плотности силы Лоренца, мы можем теперь сразу найти поведение импульса заряженной частицы при преобразованиях Лоренца. Таким образом, конечно, нельзя найти релятивистские трансформационные свойства для нейтральных частиц, электромагнитное взаимодействие между которыми пренебрежимо мало, однако имеется достаточно экспериментальных доказательств того, что кинематическое поведение заряженных и нейтральных частиц одинаково.

Заряженную частицу можно рассматривать как локализованное в малом объеме распределение заряда и массы. Для определения силы, действующей на такую частицу, мы должны проинтегрировать плотность силы Лоренца f_μ [см. (11.129)] по объему частицы. Если полный заряд равен e , а скорость частицы \mathbf{v} , то пространственный интеграл от (11.129) равен

$$\int f_\mu d^3x = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} v_\nu, \quad (12.1)$$

где $v_\nu = (\mathbf{v}, ic)$, а $F_{\mu\nu}$ следует понимать как среднее поле, действующее на частицу. Аналогично § 11 предыдущей главы мы можем приравнять (12.1) скорости изменения импульса и энергии частицы

$$\frac{dp_\mu}{dt} = \int f_\mu d^3x; \quad (12.2)$$

здесь p_k представляет собой k -ю составляющую импульса частицы, а величина $p_4 = iE/c$ пропорциональна энергии частицы. Из (12.2) вытекает, что p_μ является 4-вектором. Действительно, если проинтегрировать по времени обе части равенства, то в левой части будет стоять p_μ , в то время как правая часть равна четырехмерному интегралу от f_μ . Поскольку d^4x является лоренц-инвариантом, то величина p_μ должна иметь такие же трансформационные свойства, как f_μ . Следовательно, импульс \mathbf{p} и энергия E частицы образуют 4-вектор p_μ :

$$p_\mu = \left(\mathbf{p}, \frac{i}{c} E \right). \quad (12.3)$$

Преобразование импульса и энергии при переходе из одной лоренцевской системы отсчета K в другую систему K' , движущуюся со скоростью \mathbf{v} параллельно оси z , имеет вид

$$\begin{aligned} p_1 &= p'_1, & p_2 &= p'_2, \\ p_3 &= \gamma \left(p'_3 + \beta \frac{E'}{c} \right), \\ E &= \gamma (E' + \beta c p'_3), \end{aligned} \quad (12.4)$$

где $\beta = v/c$, а $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Обратное преобразование получается заменой $\beta \rightarrow -\beta$ и перестановкой штрихованных и нештрихованных переменных.

Длина 4-вектора p_μ является лоренц-инвариантной величиной, характеризующей частицу:

$$(p \cdot p) = (p' \cdot p') = -\frac{\lambda^2}{c^2}. \quad (12.5)$$

В системе, где частица покоится ($p' = 0$), скалярное произведение (12.5) выражается через энергию покоящейся частицы

$$E' = \lambda. \quad (12.6)$$

Для определения λ рассмотрим преобразование Лоренца (12.4) величин p_μ из системы, где частица покоится, в систему K , в которой она движется в z -направлении со скоростью v . Импульс и энергия описываются очевидными выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{\gamma \beta \lambda}{c} = \gamma \left(\frac{\lambda}{c^2} \right) \mathbf{v}, \\ E &= \gamma \lambda. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Из нерелятивистского выражения для импульса $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ находим инвариантную постоянную $\lambda = mc^2$. В нерелятивистском приближении

$$E = \gamma mc^2 \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (12.8)$$

Это выражение показывает, что E является полной энергией частицы, которая состоит из двух частей: энергии покоя mc^2 и кинетической энергии. Для релятивистской частицы кинетическая энергия T определяется как разность между полной энергией и энергией покоя:

$$T = E - mc^2 = (\gamma - 1) mc^2. \quad (12.9)$$

Итак, свободная частица с массой m , движущаяся со скоростью v в системе отсчета K , имеет в этой системе импульс и энергию, соответственно равные

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \gamma m \mathbf{v}, \\ E &= \gamma mc^2. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Отсюда видно, что энергия E может быть выражена через импульс соотношением

$$E = (c^2 p^2 + m^2 c^4)^{1/2}. \quad (12.11)$$

Скорость движения частицы выражается через импульс и энергию соотношением

$$\mathbf{v} = \frac{c^2}{E} \mathbf{p}. \quad (12.12)$$

В кинематике релятивистских частиц очень удобно пользоваться специальной, очень простой и согласованной системой единиц для импульса частицы и ее энергии. В приведенных выше формулах часто встречается скорость света. Чтобы упростить формулы и изгнать из них различные степени c , введем соглашение о том, что импульс, энергия и масса будут измеряться в энергетических единицах, а для скорости за единицу примем скорость света. При этом все степени c исчезают. Таким образом, в дальнейшем будут использованы обозначения

$$\left. \begin{array}{l} p \\ E \\ m \\ v \end{array} \right\} \text{ вместо } \left\{ \begin{array}{l} cp \\ E \\ mc^2 \\ v/c \end{array} \right. \quad (12.13)$$

В качестве энергетических единиц обычно употребляются эв (электрон-вольт), $Mэв$ (10^6 эв) и $Gэв$ (10^9 эв). Один электрон-вольт — это энергия, которую приобретает частица с зарядом, равным заряду электрона, при прохождении разности потенциалов в 1 в ($1 \text{ эв} = 1,602 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$).

§ 2. Кинематика осколков при распаде нестабильной частицы

В качестве первой иллюстрации релятивистской кинематики, в которой используется только 4-векторный характер импульса и энергии частицы, рассмотрим распад нестабильной частицы на две. Такой распад является довольно частым явлением. Приведем несколько примеров.

1. Заряженный π -мезон распадается с временем жизни $\tau = 2,6 \cdot 10^{-8}$ сек на μ -мезон и нейтрино:

$$\pi \rightarrow \mu + \nu.$$

Энергия покоя π -мезона M равна $139,6 Mэв$, а μ -мезона $m_\mu = 105,7 Mэв$. Масса покоя нейтрино m_ν равна нулю. Таким образом, при распаде π -мезона освобождается энергия, равная $33,9 Mэв$.

2. Заряженный K -мезон иногда распадается с временем жизни $\tau = 1,2 \cdot 10^{-8}$ сек на два π -мезона:

$$K^\pm \rightarrow \pi^\pm + \pi^0.$$

Заряженный K -мезон имеет энергию покоя $M = 494 Mэв$, а энергии покоя π -мезонов равны $m_\pm = 139,6 Mэв$, $m_0 = 135,0 Mэв$. Следовательно, освобождается энергия, равная $219 Mэв$.

3. Λ -гиперон распадается с временем жизни $\tau = 2,9 \cdot 10^{-10}$ сек на нейтрон или протон и π -мезон:

$$\Lambda \rightarrow \begin{cases} p + \pi^-, \\ n + \pi^0. \end{cases}$$

Энергия покоя Λ -гиперона M равна 1115 Мэв; энергии покоя протона и нейтрона составляют $m_p = 938,5$ Мэв, $m_n = 939,8$ Мэв. Массы π -мезонов приведены выше. Энергия, освобождающаяся при распаде Λ -гиперона, равна 37 Мэв для первого варианта и 40 Мэв для второго.

Распад частицы с массой покоя M на две частицы с массами m_1 и m_2

$$M \rightarrow m_1 + m_2 \quad (12.14)$$

возможен только в том случае, когда масса начальной частицы больше, чем сумма масс конечных частиц. Введем так называемый дефект массы

$$\Delta M = M - m_1 - m_2. \quad (12.15)$$

Сумма кинетических энергий двух появившихся частиц должна быть равна ΔM . Поскольку исходная система имела нулевой импульс, то обе частицы должны иметь равные и противоположно направленные импульсы $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$. Согласно (12.11), закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\sqrt{p^2 + m_1^2} + \sqrt{p^2 + m_2^2} = M. \quad (12.16)$$

Это соотношение определяет абсолютную величину импульса p и значения энергии E_1 и E_2 обеих частиц.

Вместо того чтобы решать уравнение (12.16), получим ответ с помощью полезного метода, основанного на лоренц-инвариантности скалярного произведения двух 4-векторов. Сохранение энергии и импульса в двухчастичном распаде можно записать в виде 4-векторного уравнения:

$$P = p_1 + p_2, \quad (12.17)$$

где 4-векторные индексы опущены. Квадраты 4-векторов импульса являются инвариантами

$$(P \cdot P) = -M^2, \quad (p_1 \cdot p_1) = -m_1^2, \quad (p_2 \cdot p_2) = -m_2^2. \quad (12.18)$$

Чтобы не перепутать квадраты 4-векторов с квадратами трехмерных векторов ($p^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$), будем квадраты 4-векторов записывать в виде скалярных произведений. Согласно (12.17), для квадрата 4-вектора p_2 получим

$$\begin{aligned} (p_2 \cdot p_2) &= (P - p_1) \cdot (P - p_1), \\ -m_2^2 &= -M^2 - m_1^2 - 2(P \cdot p_1). \end{aligned} \quad (12.19)$$

Скалярное произведение $(P \cdot p_1)$ лоренц-инвариантно. В системе координат, где частица M покоится, пространственная часть $(P \cdot p_1)$ равна нулю и, следовательно,

$$(P \cdot p_1) = -ME_1. \quad (12.20)$$

Отсюда полная энергия частицы с массой m_1 равна

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \quad (12.21)$$

и аналогично

$$E_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M}. \quad (12.22)$$

Обычно более полезно знать не полную энергию, а кинетическую энергию. С помощью (12.15) легко показать, что

$$T_i = \Delta M \left(1 - \frac{m_i}{M} - \frac{\Delta M}{2M} \right), \quad i = 1, 2, \quad (12.23)$$

где ΔM — дефект массы. Член $\Delta M/2M$ является релятивистской поправкой и в нерелятивистской формуле отсутствует. На первый взгляд эта поправка как будто не имеет релятивистского происхождения, однако легко видеть, что если величина $\Delta M/2M$ сравнима с единицей, то разлетающиеся частицы должны быть релятивистскими.

Для численной иллюстрации рассмотрим первый описанный выше пример распада π -мезона. Дефект массы равен $33,9$ Мэв, а массы частиц составляют $M = 139,6$ Мэв, $m_\mu = 105,7$ Мэв, $m_\nu = 0$. Следовательно, кинетические энергии μ -мезона и нейтрино имеют следующую величину:

$$T_\mu = 33,9 \left(1 - \frac{105,7}{139,6} - \frac{33,9}{2 \cdot 139,6} \right) = 4,1 \text{ Мэв},$$

$$T_\nu = 33,9 - T_\mu = 29,8 \text{ Мэв}.$$

Наличие характерной энергии μ -мезона, равной $4,1$ Мэв, в процессе распада покоящегося π -мезона и привело в 1947 г. Пауэрлла с сотрудниками к открытию π -мезона при обработке наблюдений следов в фотоэмульсии.

Впервые Λ -частица была обнаружена в движении по заряженным продуктам ее распада ($p + \pi^-$) в камере Вильсона. Треки заряженных частиц имели вид, показанный на фиг. 12.1. отождествление частиц и определение их начального импульса может быть произведено по длине и кривизне их треков в магнитном поле (либо другим способом, например счетом зерен в эмульсии). Для определения массы нерегистрируемой первичной частицы необходимо также знать угол θ между треками. Возводя в квадрат равенство (12.17), получаем

$$(P \cdot P) = (p_1 + p_2) \cdot (p_1 + p_2). \quad (12.24)$$

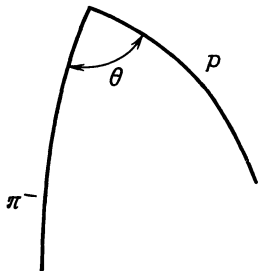
Отсюда следует, что

$$-M^2 = -m_1^2 - m_2^2 + 2(p_1 \cdot p_2). \quad (12.25)$$

Вычисляя скалярное произведение $(p_1 \cdot p_2)$ в лабораторной системе отсчета, находим

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 - 2p_1 p_2 \cos \theta, \quad (12.26)$$

где p_1 и p_2 — абсолютные величины трехмерных импульсов.



Ф и г. 12.1. Распад Λ -частицы в полете.

При распаде на три части или больше образующиеся частицы уже не имеют однозначно определенных импульсов, но их распределение по энергиям не может быть произвольным. Их энергетические спектры имеют определенные верхние границы, которые могут быть найдены с помощью кинематического рассмотрения, аналогичного приведенному здесь (см. задачу 12.2).

§ 3. Преобразование к системе центра масс и пороги реакций

Одной из общих задач ядерной физики и физики частиц высоких энергий является задача о соударении двух частиц. Налетающая частица 1 с массой m_1 , импульсом $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}$ и энергией E_1 сталкивается с частицей 2 («мишень») с массой m_2 , которая неподвижна в лабораторной системе координат. Соударение может быть простым упругим рассеянием

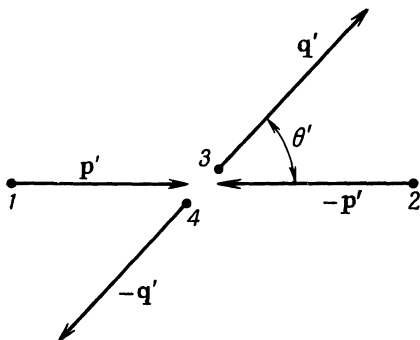
$$1 + 2 \rightarrow 1' + 2'. \quad (12.27)$$

Штрихи показывают, что направление полета частиц после соударения будет, вообще говоря, отличным от исходного. В других случаях соударение может привести к реакции

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots, \quad (12.28)$$

в которой образуются две или несколько частиц и по крайней мере одна из них отлична от налетающих частиц. Упругое рассеяние возможно всегда; что касается ядерных реакций, то возможность

их осуществления определяется различием масс частиц и начальной энергией налетающей частицы. Чтобы произвести соответствующий энергетический расчет в наиболее простой кинематической форме, удобно перейти к координатной системе K' , в которой налетающая частица и мишень имеют равные и противоположно направленные импульсы. Эта система называется (не совсем удачно) *системой центра масс* (или системой центра инерции) и обозначается как



Ф и г. 12.2. Векторы импульсов при упругом рассеянии или при двухчастичной реакции в системе ЦМ.

система ЦМ. Рассеянные частицы (или продукты реакции в двухчастичных реакциях) имеют в системе ЦМ равные и противоположные импульсы, составляющие угол θ' с направлением первоначальных импульсов. На фиг. 12.2 показаны векторы импульсов при упругом рассеянии или двухчастичной ядерной реакции. В случае упругого рассеяния $|p'| = |q'|$, а при ядерной реакции величина q' определяется из условия сохранения полной энергии (включая энергии покоя) в системе ЦМ.

Соотношение, позволяющее перейти от энергий и импульсов в лабораторной системе к соответствующим величинам в системе ЦМ, можно найти либо непосредственно с помощью преобразования Лоренца от системы K к системе K' , причем относительная скорость $v_{\text{ЦМ}}$ определяется из требования $p'_1 = p'_2 = -p'_2$, либо используя инвариантность скалярного произведения. Выбирая последний способ, рассмотрим скалярное произведение

$$(p_1 + p_2) \cdot (p_1 + p_2) = (p'_1 + p'_2) \cdot (p'_1 + p'_2). \quad (12.29)$$

Здесь левая часть равенства вычисляется в лабораторной системе, где $p_2 = 0$, а правая часть — в системе ЦМ, где $p'_1 + p'_2 = 0$. Поэтому мы получаем

$$p^2 - (E_1 + m_2)^2 = -(E'_1 + E'_2)^2. \quad (12.30)$$

Используя равенство $E_1^2 = p^2 + m_1^2$, находим, что полная энергия в системе ЦМ равна

$$E' = E'_1 + E'_2 = (m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2)^{1/2}. \quad (12.31)$$

В отдельности энергии E'_1 и E'_2 можно определить, рассматривая скалярные произведения типа

$$p_1 \cdot (p_1 + p_2) = p'_1 \cdot (p'_1 + p'_2); \quad (12.32)$$

отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} E'_1 &= \frac{E'^2 + m_1^2 - m_2^2}{2E'} \\ E'_2 &= \frac{E'^2 + m_2^2 - m_1^2}{2E'} \end{aligned} \right\} \quad (12.33)$$

и аналогично

Отметим сходство этих выражений с соотношениями (12.21) и (12.22). Величина импульса p' получается из (12.33):

$$p' = \frac{m_2}{E'} p. \quad (12.34)$$

Параметры лоренцовского преобразования $v_{\text{ЦМ}}$ и $\gamma_{\text{ЦМ}}$ можно определить, учтя, что $p'_2 = -\gamma_{\text{ЦМ}} m_2 v_{\text{ЦМ}} = -p'$, а $E'_2 = \gamma_{\text{ЦМ}} m_2$. Отсюда

$$v_{\text{ЦМ}} = \frac{p}{E_1 + m_2}, \quad \gamma_{\text{ЦМ}} = \frac{E_1 + m_2}{E'}. \quad (12.35)$$

Для нерелятивистского движения кинетическая энергия в системе ЦМ описывается выражением

$$T' = E' - (m_1 + m_2) \approx \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \frac{1}{2} m_1 v_1^2. \quad (12.36)$$

Аналогично скорость и импульс в системе ЦМ будут

$$v_{\text{ЦМ}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad p' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1. \quad (12.37)$$

Таким образом, обычные нерелятивистские результаты получаются из строгих релятивистских формул. В случае ультрарелятивистского движения ($E_1 \gg m_1$, $E_1 \gg m_2$) рассматриваемые величины принимают следующие приближенные предельные значения:

$$\begin{aligned} E' &\approx (2E_1 m_2)^{1/2}, \\ v_{\text{ЦМ}} &\approx 1 - \frac{m_2}{E_1}, \\ p' &\approx \frac{1}{2} E'. \end{aligned} \quad (12.38)$$

Мы видим, что энергия в системе ЦМ растет только как корень квадратный из энергии налетающей частицы. Отсюда следует, что в системе ЦМ очень трудно получать ультравысокие энергии при бомбардировке неподвижных мишеней. Наиболее высокоэнергетические существующие ускорители частиц [в ЦЕРН вблизи Женевы (Швейцария) и в Брукхейвене (США)] дают протоны с энергией ~ 30 Гэв. Если мишенями служат неподвижные нуклоны, то полная энергия в системе ЦМ будет ~ 7 Гэв. Для получения энергии 30 Гэв в системе ЦМ необходимо бомбардировать неподвижные нуклоны протонами с энергией свыше 300 Гэв! В связи с этим были предприняты значительные усилия для получения в ускорителях так называемых встречных, или сталкивающихся, пучков, для которых лабораторная система является системой ЦМ.

При реакции двух исходных частиц с массами m_1 и m_2 образуются две или несколько частиц с массами m_i ($i = 3, 4, \dots$). Пусть ΔM — разность между суммой масс конечных и начальных частиц ¹⁾

$$\Delta M = (m_3 + m_4 + \dots) - (m_1 + m_2). \quad (12.39)$$

Если величина ΔM положительна, то существует такая энергия $T_{\text{пор}}$ налетающей частицы, называемая *порогом* данной реакции, ниже которой реакция не происходит. Реакция энергетически возможна, если энергия достаточна для создания в системе ЦМ требуемых частиц с нулевой кинетической энергией. Отсюда следует, что

$$E'_{\text{пор}} = m_1 + m_2 + \Delta M. \quad (12.40)$$

С помощью (12.31) легко найти пороговую кинетическую энергию налетающей частицы

$$T_{\text{пор}} = \Delta M \left(1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{\Delta M}{2m_2} \right). \quad (12.41)$$

Первые два члена в скобках имеют нерелятивистское происхождение, а последний дает релятивистскую поправку. Рассмотрим для примера пороговую энергию фоторождения нейтральных π -мезонов на протонах

$$\gamma + p \rightarrow p + \pi^0.$$

Так как фотон не имеет массы покоя, то разность масс $\Delta M = m_{\pi^0} = 135,0$ Мэв, а масса мишени $m_2 = m_p = 938,5$ Мэв. Поэтому для пороговой энергии получаем

$$T_{\text{пор}} = 135,0 \left(1 + \frac{135,0}{2 \cdot 938,5} \right) = 135,0 \cdot 1,072 = 144,7 \text{ Мэв.}$$

¹⁾ Заметим, что наше определение ΔM противоположно по знаку определению, использованному в § 2 при рассмотрении процессов распада.

В качестве другого примера рассмотрим рождение пары протон — антипротон при протон-протонных соударениях

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}.$$

Разность масс $\Delta M = 2m_p = 1,877 \text{ Гэв}$. Из (12.41) находим

$$T_{\text{пор}} = 2m_p(1 + 1 + 1) = 6m_p = 5,62 \text{ Гэв}.$$

В этом примере пороговая энергия в 3 раза больше реальной разности масс, тогда как в примере с фоторождением она больше лишь на 7,2%. Расчеты порогов для других ядерных реакций отнесены к задаче 12.1 в конце главы.

§ 4. Преобразование импульса и энергии из системы центра масс в лабораторную систему

На фиг. 12.2 показаны импульсы для двухчастичного столкновения в системе ЦМ. Начальные импульсы и энергии ($\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}'$, E'_1, E'_2) были рассчитаны выше и определяются выражениями (12.33) и (12.34). Аналогично можно рассчитать и конечные импульсы и энергии ($\mathbf{p}'_3 = -\mathbf{p}'_4 = \mathbf{q}'$, E'_3, E'_4) в системе ЦМ. Так как энергия и импульс сохраняются, 4-вектор импульса удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}'_3 + \mathbf{p}'_4. \quad (12.42)$$

Отсюда легко найти энергии разлетающихся частиц

$$E'_3 = \frac{E'^2 + m_3^2 - m_4^2}{2E'}, \quad (12.43)$$

$$E'_4 = \frac{E'^2 + m_4^2 - m_3^2}{2E'},$$

где E' определяется соотношением (12.31). Следует отметить очевидное сходство выражений (12.43) и (12.33). В системе ЦМ разлетающиеся частицы имеют импульс

$$q' = \frac{E'}{2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{m_3 + m_4}{E'} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{m_3 - m_4}{E'} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}, \quad (12.44)$$

или, в несколько иной форме,

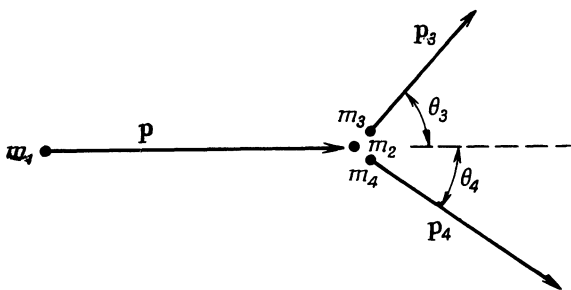
$$q' = \frac{m_2}{E'} \left[\Delta E_1 \left(\Delta E_1 + \frac{2m_3 m_4}{m_2} \right) \right]^{1/2}, \quad (12.45)$$

где ΔE_1 — превышение энергии налетающей частицы в лабораторной системе координат над пороговой энергией (12.41)

$$\Delta E_1 = T_1 - T_{\text{пор}}. \quad (12.46)$$

В случае упругого рассеяния, когда $m_3 = m_1$, $m_4 = m_2$, выражение (12.45), очевидно, сводится к (12.34).

Поскольку рассеяние и ядерные реакции фактически наблюдаются в лабораторной системе, необходимо произвести преобразование из системы ЦМ в лабораторную систему. На фиг. 12.3 показаны начальный импульс \mathbf{p} и конечные импульсы \mathbf{p}_3 и \mathbf{p}_4 в лабораторной системе координат. Фиг. 12.3 отличается от фиг. 12.2 лоренц-преобразованием импульсов. Энергию E_3 в лабораторной



Ф и г. 12.3. Векторы импульсов для двухчастичных процессов в лабораторной системе.

системе можно выразить через переменные системы ЦМ с помощью преобразования Лоренца для относительной скорости $v_{\text{ЦМ}}$, используя соотношения (12.35) и (12.4). Если θ' — угол между \mathbf{p}'_3 и направлением налетающей частицы в системе ЦМ, то

$$E_3 = \gamma_{\text{ЦМ}} (E'_3 + v_{\text{ЦМ}} q' \cos \theta'). \quad (12.47)$$

Таким образом, в явном виде E_3 дается формулой

$$E_3 = \frac{E_1 + m_2}{2} \left(1 + \frac{m_3^2 - m_4^2}{E'^2} \right) + \frac{p}{2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{m_3 + m_4}{E'} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{m_3 - m_4}{E'} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} \cos \theta', \quad (12.48)$$

где E' определяется соотношением (12.31). Для получения E_4 достаточно просто поменять местами m_3 и m_4 и заменить θ' на $\pi - \theta'$ ($\cos \theta' \rightarrow -\cos \theta'$).

Соотношение между углами θ' и θ_3 можно получить из выражения

$$\text{tg } \theta_3 = \frac{p_{3\perp}}{p_{3\parallel}} = \frac{q' \sin \theta'}{\gamma_{\text{ЦМ}} (q' \cos \theta' + v_{\text{ЦМ}} E'_3)}. \quad (12.49)$$

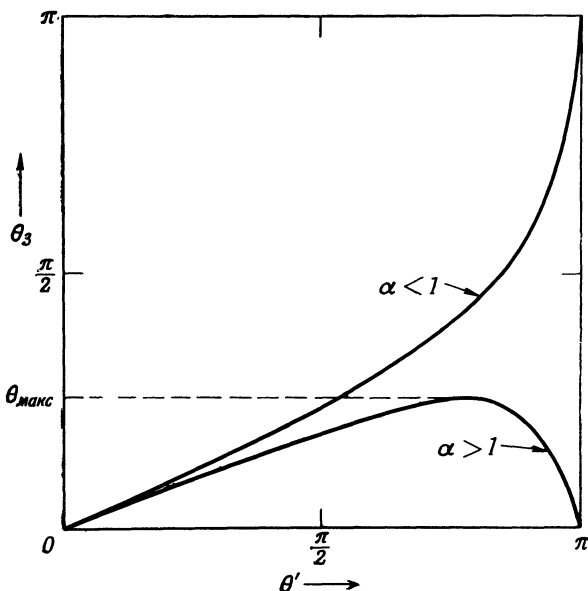
Таким образом,

$$\text{tg } \theta_3 = \frac{E' \sin \theta'}{(E_1 + m_2) (\cos \theta' + \alpha)}, \quad (12.50)$$

где

$$\alpha = \frac{v_{\text{ЦМ}} E'_3}{q'} = \frac{p}{E_1 + m_2} \frac{1 + (m_3^2 - m_4^2)/E'^2}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{m_3 + m_4}{E'} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{m_3 - m_4}{E'} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}}. \quad (12.51)$$

Заметим, что α является отношением скорости движения системы ЦМ к скорости частицы 3 в системе ЦМ. Вблизи порога реакции α значительно больше единицы. Отсюда следует, что при полном



Ф и г. 12.4. Зависимость угла θ_3 в лабораторной системе от угла θ' в системе ЦМ для $\alpha < 1$ и $\alpha > 1$.

изменении θ' от 0 до π в системе ЦМ угол θ_3 меняется лишь внутри некоторого конуса $0 \leq \theta_3 \leq \theta_{\text{макс}}$. Типичная зависимость при $\alpha > 1$ показана на фиг. 12.4. При $\alpha > 1$ угол θ_3 в лабораторной системе соответствует двум различным углам θ' в системе ЦМ: частицы, вылетающие в системе ЦМ вперед и назад, соответствуют в лабораторной системе одному и тому же углу рассеяния. Эти два типа частиц можно различить по их энергиям. Согласно (12.48), частицы, которые в системе ЦМ летят вперед, имеют большую энергию, чем частицы, летящие назад. Когда $\alpha < 1$, знаменатель в (12.50) может при некотором $\theta' > \pi/2$ обратиться в нуль, что соответствует $\theta_3 = \pi/2$, а для больших θ' он становится отрицательным. Это

означает, что угол θ_3 изменяется в полном интервале ($0 \leq \theta_3 \leq \pi$) и однозначно связан с θ' . Соответствующая кривая также изображена на фиг. 12.4.

Для получения величины E_3 в функции от θ_3 достаточно выразить в (12.48) θ' через θ_3 согласно (12.50). Иногда полезно иметь явное выражение для этой зависимости. Из закона сохранения энергии и импульса в лабораторной системе

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \quad (12.52)$$

можно путем прямых, хотя и громоздких, вычислений прийти к соотношению

$$E_3 = \frac{1}{(E_1 + m_2)^2 - p^2 \cos^2 \theta_3} \left\{ (E_1 + m_2) \left(m_2 E_1 + \frac{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - m_4^2}{2} \right) \pm \right. \\ \left. \pm p \cos \theta_3 \left[\left(m_2 E_1 + \frac{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2}{2} \right)^2 - m_3^2 m_4^2 - p^2 m_3^2 \sin^2 \theta_3 \right]^{1/2} \right\}. \quad (12.53)$$

Физический смысл имеют только те значения (12.53), которые больше m_3 . Легко убедиться, что при $\alpha > 1$ допустимы оба знака корня, а при $\alpha < 1$ — только один. Для нахождения величины E_4 следует поменять местами m_3 и m_4 и заменить θ_3 на θ_4 .

Приведенные выше соотношения существенно упрощаются для упругого рассеяния, когда $m_3 = m_1$, $m_4 = m_2$. При этом угол рассеяния в лабораторной системе определяется из соотношения (12.50), где

$$\alpha = \frac{m_1}{m_2} \frac{(m_2/m_1) E_1 + m_1}{E_1 + m_2}. \quad (12.54)$$

В нерелятивистском пределе мы получаем известный результат: $\alpha = m_1/m_2$. Потеря энергии налетающей частицы равна $\Delta E = T_4 = E_4 - m_4$. Из (12.48) можно выразить ΔE через угол рассеяния θ' :

$$\Delta E = \frac{m_2 p^2 (1 - \cos \theta')}{2m_2 E_1 + m_1^2 + m_2^2}. \quad (12.55)$$

Величину ΔE можно выразить также через угол отклонения в лабораторной системе, воспользовавшись соотношением (12.53):

$$\Delta E = \frac{2m_2 p^2 \cos^2 \theta_4}{2m_2 E_1 + m_1^2 + m_2^2 + p^2 \sin^2 \theta_4}. \quad (12.56)$$

Для лобовых соударений оба выражения дают максимальное значение

$$\Delta E_{\text{макс}} = \frac{2m_2 p^2}{2m_2 E_1 + m^2 + m_2^2}. \quad (12.57)$$

В частности, в нерелятивистском случае

$$\Delta E_{\text{макс}} \approx \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right). \quad (12.58)$$

Отсюда видно, что при лобовом соударении вся кинетическая энергия налетающей частицы может быть передана другой частице при $m_1 = m_2$ (это справедливо также и в релятивистском случае).

Важным примером передачи энергии являются соударения заряженной налетающей частицы с атомными электронами. При этом электроны можно считать покоящимися. Если налетающая частица не является электроном, то $m_1 \gg m_2$. В этом случае максимальную передаваемую энергию можно приближенно записать как

$$\Delta E_{\text{макс}} \approx 2m_2 \left(\frac{p}{m_1} \right)^2 = 2m_2 \gamma^2 \beta^2, \quad (12.59)$$

где γ и β относятся к налетающей частице. Выражение (12.59) справедливо для не слишком больших энергий налетающей частицы когда

$$E_1 \ll \left(\frac{m_1}{m_2} \right) m_1. \quad (12.60)$$

Для μ -мезонов этот предел равен 20 Гэв, для протонов — около 2000 Гэв. Для электрон-электронных соударений ($m_1 = m_2 = m$) максимальная передаваемая энергия составляет

$$\Delta E_{\text{макс}}^{(e)} = (\gamma - 1) m. \quad (12.61)$$

§ 5. Ковариантные уравнения движения. Лагранжиан и гамильтониан для релятивистской заряженной частицы

В § 1 мы рассмотрели уравнения движения под действием силы Лоренца для нахождения трансформационных свойств импульса и энергии частицы. Однако мы в явном виде не проверили ковариантность уравнений движения для частицы, движущейся во внешних полях. Теперь мы установим эту ковариантность, а также введем лагранжиан, канонические импульсы и гамильтониан. Согласно уравнениям (12.2) и (11.129), уравнение движения частицы можно записать в виде

$$\frac{dp_\mu}{dt} = \frac{1}{c} \int F_{\mu\nu} J_\nu d^3x, \quad (12.62)$$

где интегрирование производится по объему заряженной частицы. Если скорость частицы \mathbf{v} , а ее полный заряд e , то

$$\frac{dp_\mu}{dt} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} v_\nu, \quad (12.63)$$

где $v_\nu = v_k$ для $\nu = k = 1, 2, 3$ и $v_4 = ic$. Это уравнение еще не является ковариантным, поскольку v_ν не является 4-вектором, так же как и dp_μ/dt . Последний недостаток можно исправить, если взять производные не по t , а по собственному времени τ (11.62). Так как $dt = \gamma d\tau$, то мы получаем

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} \gamma v_\nu. \quad (12.64)$$

Но теперь $\gamma v_\nu = p_\nu/m$ является 4-вектором (называемым иногда 4-скоростью), и мы приходим к ковариантной форме уравнения движения частицы

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F_{\mu\nu} p_\nu. \quad (12.65)$$

Это уравнение, относящееся к дискретной частице, является аналогом уравнения (11.129) для непрерывно распределенных зарядов и токов. Теперь, установив ковариантность уравнения движения частицы (12.65), мы можем записать его в пространственно-временной форме для любой системы отсчета:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right), \\ \frac{dE}{dt} &= e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (12.66)$$

Из (12.65) следует, что коль скоро все переменные преобразуются в соответствии с присущими им законами преобразования, то нековариантная форма (12.66) будет справедлива в произвольной лоренцевской системе координат.

Уравнения (12.65) или (12.66) полностью описывают движение заряженной частицы в произвольных внешних полях. Однако иногда более удобно использовать метод уравнений Лагранжа или Гамильтона. Нахождение лагранжиана для частицы, движущейся под действием силы Лоренца, мы начнем со случая свободной релятивистской частицы. Поскольку лагранжиан должен быть функцией скоростей и координат, запишем уравнение движения для свободной частицы в виде

$$\frac{d}{dt} (\gamma m \mathbf{v}) = 0, \quad (12.67)$$

где $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Лагранжиан L должен быть выбран таким образом, чтобы уравнения движения Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (12.68)$$

совпадали с ньютоновскими уравнениями движения. Легко убедиться, что для свободной частицы подходящим лагранжианом

является функция

$$L_{\text{св}} = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}. \quad (12.69)$$

При подстановке в (12.68) этот лагранжиан приводит, очевидно, к уравнениям (12.67).

Чтобы получить лагранжиан свободной частицы более изящным способом, рассмотрим принцип Гамильтона, или принцип наименьшего действия. Согласно этому принципу, движение механической системы таково, что при переходе от состояния a , соответствующего моменту времени t_1 , к состоянию b , соответствующего моменту t_2 , должен быть экстремален (в данном случае минимален) интеграл действия A , определенный как интеграл по времени от лагранжиана вдоль пути системы:

$$A = \int_a^b L dt. \quad (12.70)$$

Рассматривая малые вариации выбранного пути и налагая условие $\delta A = 0$, мы приходим к уравнениям движения Эйлера — Лагранжа (12.68). Для нахождения лагранжиана свободной частицы мы используем теперь лоренц-инвариантность интеграла действия. Лоренц-инвариантность интеграла действия следует из первого постулата относительности, поскольку уравнения движения определяются требованием его экстремальности. При введении собственного времени $dt = \gamma d\tau$ интеграл действия принимает вид

$$A = \int_a^b \gamma L d\tau. \quad (12.71)$$

Поскольку собственное время лоренц-инвариантно, то условие лоренц-инвариантности A приводит к требованию лоренц-инвариантности γL . Это требование является общим для любого лагранжиана. Для свободной частицы $L_{\text{св}}$ может быть функцией только скорости частицы (и, возможно, ее массы). Единственной лоренц-инвариантной величиной, содержащей скорость, является произвольная функция от скалярного произведения $(1/m^2)(p \cdot p)$, где p_μ есть 4-импульс частицы. Поскольку $(p \cdot p) = -m^2$, мы видим, что $\gamma L_{\text{св}}$ для свободной частицы является постоянной величиной

$$\gamma L_{\text{св}} = -\lambda. \quad (12.72)$$

Таким образом, для свободной частицы интеграл действия пропорционален интегралу от собственного времени по пути от начальной пространственно-временной точки a до конечной пространственно-временной точки b . Этот интеграл является лоренц-инвариантом,

но зависит от выбранного пути. Для удобства расчета рассмотрим систему отсчета, в которой частица в начальный момент покоится. Из определения собственного времени (11.62) ясно, что если частица в этой системе находится в состоянии покоя, то интеграл по собственному времени будет больше, чем при ее движении с любой отличной от нуля скоростью вдоль некоторой траектории. Следовательно, для прямой мировой линии, соединяющей начальную и конечную точки пути, интеграл от собственного времени максимален, что с учетом отрицательного знака в (12.72) соответствует минимуму интеграла действия. Сравнение с уравнением Ньютона для нерелятивистского движения показывает, что $\lambda = mc^2$. Это приводит к лагранжиану для свободной частицы (12.69).

Общее требование лоренц-инвариантности величины γL позволяет определить лагранжиан для релятивистской заряженной частицы во внешних электромагнитных полях при условии, что мы знаем лагранжиан (или уравнения движения) для нерелятивистского движения в статических полях. На медленно движущуюся заряженную частицу действует в основном электрическое поле, которое определяется скалярным потенциалом Φ . Потенциальная энергия взаимодействия есть $V = e\Phi$. Так как нерелятивистский лагранжиан равен $T - V$, то часть $L_{вз}$ релятивистского лагранжиана, соответствующая взаимодействию с электромагнитным полем, должна в нерелятивистском пределе сводиться к

$$L_{вз} \rightarrow L_{вз}^{\text{нерел}} = -e\Phi. \quad (12.73)$$

Теперь наша задача заключается в том, чтобы найти лоренц-инвариантное выражение для $\gamma L_{вз}$, которое для нерелятивистских скоростей приводит к выражению (12.73). Поскольку Φ является четвертой составляющей 4-вектора-потенциала A_μ , следует ожидать, что $\gamma L_{вз}$ содержит скалярное произведение A_μ на некоторый 4-вектор. Таким 4-вектором может быть лишь вектор импульса или вектор координаты частицы. Так как произведение γL наряду с лоренц-инвариантностью должно обладать также и трансляционной инвариантностью, то оно не может явно содержать координат. Следовательно, лагранжиан взаимодействия имеет вид ¹⁾

$$L_{вз} = \frac{1}{\gamma} \frac{e}{mc} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) = \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e\Phi, \quad (12.74)$$

¹⁾ Форму $L_{вз}$ можно установить и без обращения к нерелятивистскому пределу, если потребовать, чтобы произведение $\gamma L_{вз}$ было лоренц-инвариантом, который 1) является линейной функцией заряда частицы, 2) является линейной функцией от электромагнитных потенциалов, 3) обладает трансляционной симметрией и 4) содержит производные координат частицы по времени не выше чем первого порядка. Читатель может рассмотреть возможность построения лагранжиана взаимодействия, удовлетворяющего этим условиям, но линейного не по потенциалам A_μ , а по напряженности поля $F_{\mu\nu}$.

где коэффициент при скалярном произведении выбран таким образом, чтобы при $\mathbf{v} \rightarrow 0$ это выражение переходило в (12.73).

Комбинируя (12.69) и (12.74), получаем полный релятивистский лагранжиан заряженной частицы

$$L = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \left[-mc^2 + \frac{e}{mc} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) \right], \\ -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e\Phi. \end{cases} \quad (12.75)$$

Здесь верхнее выражение дает L в 4-векторной форме, а нижнее — в явной пространственно-временной форме. Мы предоставляем читателю убедиться самостоятельно, что лагранжиан (12.75) действительно приводит к уравнениям движения (12.66) заряженной частицы под действием силы Лоренца. При этом следует учесть, что материальная производная $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}$, и воспользоваться обычными выражениями полей через потенциалы.

Канонический импульс \mathbf{P} , сопряженный с пространственной координатой \mathbf{x} , определяется соотношениями

$$P_i \equiv \frac{\partial L}{\partial v_i} = \gamma m v_i + \frac{e}{c} A_i. \quad (12.76)$$

Отсюда следует, что канонический импульс

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (12.77)$$

где $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ — импульс частицы в отсутствие полей. Гамильтониан H является функцией координаты \mathbf{x} и сопряженного импульса \mathbf{P} . Если лагранжиан не зависит явно от времени, то H является интегралом движения. Гамильтониан выражается через лагранжиан следующим образом:

$$H = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - L, \quad (12.78)$$

где скорость \mathbf{v} следует выразить через \mathbf{P} и \mathbf{x} . Согласно (12.76) или (12.77),

$$\mathbf{v} = \frac{c\mathbf{P} - e\mathbf{A}}{\sqrt{\left(\mathbf{P} - \frac{e\mathbf{A}}{c}\right)^2 + m^2c^2}}. \quad (12.79)$$

При подстановке этого выражения в (12.78) и в (12.75) гамильтониан примет вид

$$H = \sqrt{(c\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 + m^2c^4} + e\Phi. \quad (12.80)$$

Читатель может проверить, что уравнения движения Гамильтона эквивалентны обычным уравнениям движения (12.66) под действием силы Лоренца. Выражение (12.80) для гамильтониана дает также

полную энергию W частицы; оно отличается от энергии свободной частицы добавлением потенциальной энергии $e\Phi$ и заменой $p \rightarrow \mathbf{P} - (e/c) \mathbf{A}$. В 4-векторной записи оба эти добавления сводятся к одному. Действительно, перенося $e\Phi$ в левую часть равенства (12.80) и возводя обе части равенства в квадрат, получаем

$$(c\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 - (W - e\Phi)^2 = -(mc^2)^2. \quad (12.81)$$

Левая часть пропорциональна скалярному квадрату 4-вектора

$$(p \cdot p) = -(mc)^2, \quad (12.82)$$

где

$$p_\mu \equiv \left(\mathbf{p}, \frac{iE}{c} \right) = \left[\left(\mathbf{P} - \frac{e\mathbf{A}}{c} \right), \frac{i}{c} (W - e\Phi) \right]. \quad (12.83)$$

Мы видим, что полная энергия W является четвертой составляющей канонически сопряженного 4-импульса с пространственной частью (12.77). Еще одна возможная формулировка уравнений движения с релятивистски инвариантным лагранжианом, зависящим от 4-скорости $u_\mu = p_\mu/m$, рассматривается в задаче 12.5. При этом канонический 4-импульс вводится весьма естественно.

Лагранжева и гамильтонова формулировки динамики заряженной частицы были приведены здесь по ряду причин. Во-первых, мы показали, что требование лоренц-инвариантности в совокупности с другими физическими требованиями является мощным орудием систематического построения лагранжиана, позволяющим найти динамические уравнения движения. Во-вторых, лагранжиан часто используется как исходный пункт при рассмотрении динамики частиц. Наконец, идеи и методы канонически сопряженных переменных оказываются весьма полезными при непосредственном решении уравнений движения.

§ 6. Релятивистские поправки первого порядка для лагранжиана взаимодействующих заряженных частиц

Выше мы рассмотрели общий лагранжев формализм для релятивистской частицы во внешних электромагнитных полях, описываемых векторным и скалярным потенциалами \mathbf{A} и Φ . Соответствующий лагранжиан взаимодействия дается выражением (12.74). Если мы рассмотрим теперь проблему описания с помощью лагранжиана взаимодействия двух или более заряженных частиц друг с другом, то убедимся, что это можно сделать только в случае нерелятивистских скоростей. Лагранжиан должен быть функцией мгновенных скоростей и координат всех частиц. Однако при учете конечности скорости распространения электромагнитных волн такого лагранжиана не существует, поскольку величина потенциала, созда-

ваемого в точке нахождения какой-либо частицы всеми другими частицами, зависит от состояния движения других частиц в предшествующие моменты времени (отстоящие от данного момента на время запаздывания). Поэтому лагранжево описание системы отдельных частиц возможно только в том случае, когда эффекты запаздывания пренебрежимо малы. В связи с этим можно было бы ожидать, что лагранжиан можно ввести только в статическом предельном случае, т. е. в нулевом порядке по v/c . Мы, однако, покажем далее, что можно учесть релятивистские поправки первого приближения и получить приближенный лагранжиан взаимодействующих частиц с точностью до членов порядка $(v/c)^2$ включительно.

Достаточно рассмотреть две взаимодействующие частицы с зарядами q_1 и q_2 , массами m_1 и m_2 и координатами x_1 и x_2 . Расстояние между ними равно $|r| = |x_1 - x_2|$. В статическом пределе лагранжиан взаимодействия равен взятой со знаком минус электростатической потенциальной энергии

$$L_{вз}^{\text{перел}} = -\frac{q_1 q_2}{r}. \quad (12.84)$$

С точки зрения первой частицы это выражение равно взятому с обратным знаком произведению заряда частицы q_1 на скалярный потенциал Φ_{12} , создаваемый второй частицей в месте нахождения первой частицы, т. е. имеет ту же структуру, что и (12.73). Чтобы обобщить этот статический результат, мы должны в соответствии с (12.74) определить приближенно как Φ_{12} , так и A_{12} . В общем случае имеют место релятивистские поправки и к Φ_{12} , и к A_{12} . Но при *кулоновской калибровке* скалярный потенциал, определяемый мгновенными кулоновскими потенциалами, справедлив в любом порядке по v/c . Таким образом, если придерживаться кулоновской калибровки потенциалов, то скалярный потенциал уже известен, и остается найти только векторный потенциал A_{12} .

Если ограничиваться релятивистскими поправками лишь в первом исчезающем приближении, то можно при определении A_{12} пренебречь влиянием запаздывания. Это объясняется тем, что векторный потенциал входит в лагранжиан (12.74) в комбинации $q_1(\mathbf{v}_1/c) \cdot A_{12}$. Поскольку сам векторный потенциал A_{12} есть величина порядка v_2/c , то дальнейшего уточнения величины A_{12} не требуется. Таким образом, мы можем воспользоваться магнитостатическим выражением

$$A_{12} \approx \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}_t(x') d^3x'}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'|}, \quad (12.85)$$

где \mathbf{J}_t — поперечная часть тока, создаваемого второй частицей (см. гл. 6, § 5). Из соотношений (6.46) — (6.50) легко найти выра-

жение для этого тока

$$\mathbf{J}_t(\mathbf{x}') = q_2 \mathbf{v}_2 \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2) - \frac{q_2}{4\pi} \text{grad}' \left[\frac{\mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2|^3} \right]. \quad (12.86)$$

При подстановке этого выражения в (12.85) первый член сразу интегрируется, и мы получаем

$$\mathbf{A}_{12} \approx \frac{q_2 \mathbf{v}_2}{cr} - \frac{q_2}{4\pi c} \int \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_1|} \text{grad}' \left[\frac{\mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2|^3} \right] d^3 x'. \quad (12.87)$$

Вводя переменную $\mathbf{y} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}_2$ и интегрируя по частям, запишем последнее выражение в виде

$$\mathbf{A}_{12} \approx \frac{q_2 \mathbf{v}_2}{cr} - \frac{q_2}{4\pi c} \text{grad}_r \int \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{y}}{y^3} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{r}|} d^3 y. \quad (12.88)$$

Последний интеграл вычисляется непосредственно:

$$\mathbf{A}_{12} \approx \frac{q_2}{c} \left[\frac{\mathbf{v}_2}{r} - \frac{1}{2} \text{grad}_r \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r}}{r} \right) \right]. \quad (12.89)$$

Вычисляя градиент во втором члене, получаем окончательный результат

$$\mathbf{A}_{12} \approx \frac{q_2}{2cr} \left[\mathbf{v}_2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right]. \quad (12.90)$$

Найденное выражение (12.90) для векторного потенциала поля второй частицы в точке нахождения первой частицы позволяет написать лагранжиан взаимодействия двух заряженных частиц, учитывающий в первом неисчезающем приближении релятивистские эффекты:

$$L_{вз} = \frac{q_1 q_2}{r} \left\{ -1 + \frac{1}{2c^2} \left[(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) + \frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right] \right\}. \quad (12.91)$$

Этот лагранжиан впервые получен Дарвином в 1920 г. Он играет важную роль при квантовомеханическом рассмотрении релятивистских возмущений в двухэлектронных атомах. В квантовомеханических задачах векторы скорости заменяются соответствующими квантовомеханическими операторами (операторы $\boldsymbol{\alpha}$ Дирака), и рассмотренное здесь взаимодействие носит название взаимодействия Брейта (1930 г.).

§ 7. Движение в однородном статическом магнитном поле

В качестве первого примера движения заряженных частиц в электромагнитных полях рассмотрим движение в однородном

статическом магнитном поле \mathbf{B} . Уравнения движения (12.66) в этом случае имеют вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \frac{dE}{dt} = 0. \quad (12.92)$$

Так как энергия постоянна во времени, то постоянны также абсолютная величина скорости и величина γ . Тогда первое уравнение можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_B, \quad (12.93)$$

где угловая частота вращения

$$\boldsymbol{\omega}_B = \frac{e\mathbf{B}}{\gamma mc} = \frac{ec\mathbf{B}}{E}. \quad (12.94)$$

Движение, описываемое уравнением (12.93), представляет собой вращение по окружности в плоскости, перпендикулярной \mathbf{B} , на которое наложено равномерное движение, параллельное \mathbf{B} . Легко показать, что, решая это уравнение относительно скорости, мы получаем

$$\mathbf{v}(t) = v_{\parallel} \mathbf{e}_3 + \omega_B a (\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2) e^{-i\omega_B t}, \quad (12.95)$$

где \mathbf{e}_3 — единичный вектор в направлении поля, \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 — два других взаимно перпендикулярных единичных вектора, v_{\parallel} — составляющая скорости в направлении поля, а a — радиус вращения. Как обычно, следует брать действительную часть в (12.95). Выражение (12.95) показывает, что положительно заряженная частица вращается против часовой стрелки, если смотреть на нее в направлении поля \mathbf{B} . Второе интегрирование дает координату частицы

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}_0 + v_{\parallel} t \mathbf{e}_3 + ia (\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2) e^{-i\omega_B t}. \quad (12.96)$$

Траекторией заряженной частицы является спираль с радиусом a и углом наклона $\alpha = \text{arctg}(v_{\parallel}/\omega_B a)$. Величина радиуса вращения a зависит от магнитного поля \mathbf{B} и поперечного импульса p_{\perp} частицы. Из (12.94) и (12.95) получаем следующее соотношение:

$$cp_{\perp} = eBa,$$

удобное для определения импульса частицы: зная радиус кривизны траектории заряженной частицы в известном поле B , можно найти ее импульс. Для частицы с зарядом, равным по величине заряду электрона, имеет место численное соотношение

$$p_{\perp} (\text{Мэв}/c) = 3,00 \cdot 10^{-4} Ba (\text{гаусс} \cdot \text{см}). \quad (12.97)$$

§ 8. Движение в однородных статических электрическом и магнитном полях

Рассмотрим теперь движущуюся заряженную частицу, на которую одновременно действуют однородные статические электрическое и магнитное поля \mathbf{E} и \mathbf{B} , в общем случае не параллельные друг другу. Сначала рассмотрим важный частный случай *перпендикулярных полей*. Уравнение движения (12.66) показывает, что при наличии электрического поля энергия частицы уже не постоянна во времени. Поэтому выражение для скорости не может быть таким простым, как при наличии лишь статического магнитного поля. Однако уравнения движения можно существенно упростить с помощью подходящего преобразования Лоренца. Рассмотрим преобразование Лоренца к координатной системе K' , движущейся со скоростью \mathbf{u} относительно исходной системы координат. При этом уравнение движения частицы в системе K' будет иметь вид

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = e \left(\mathbf{E}' + \frac{1}{c} \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' \right),$$

где штрихованные переменные берутся в системе K' . Поля \mathbf{E}' и \mathbf{B}' определяются выражениями (11.115), в которых \mathbf{v} следует заменить на \mathbf{u} , а знаки \parallel и \perp указывают направление относительно вектора \mathbf{u} . Предположим сначала, что $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$. Если выбрать скорость \mathbf{u} перпендикулярной ортогональным векторам \mathbf{E} и \mathbf{B} и

$$\mathbf{u} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (12.98)$$

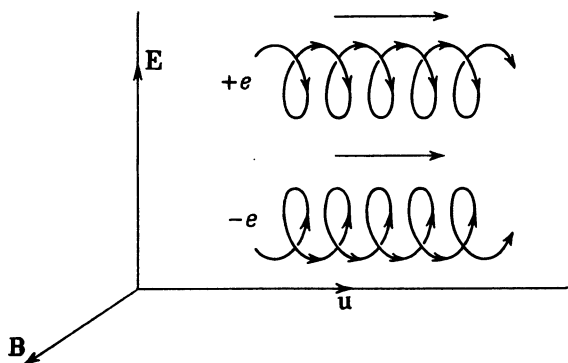
то для полей в системе K' получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= 0, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) = 0, \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= 0, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \frac{1}{\gamma} \mathbf{B} = \left(\frac{B^2 - E^2}{B^2} \right)^{1/2} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (12.99)$$

В этой системе отсчета на частицу действует только статическое магнитное поле \mathbf{B}' , которое имеет то же направление, что и \mathbf{B} , но в γ раз слабее, чем \mathbf{B} . Следовательно, как показано в предыдущем параграфе, в системе K' частица движется по спирали вокруг силовой линии. При наблюдении из исходной координатной системы это вращение сопровождается однородным «дрейфом» со скоростью \mathbf{u} , перпендикулярной \mathbf{E} и \mathbf{B} и определяющейся формулой (12.98). Этот дрейф иногда называют *электрическим дрейфом*. В гл. 10, § 3, мы уже рассматривали этот дрейф в связи с исследованием движения проводящей жидкости. Качественно дрейф можно объяснить тем, что частица, которая начинает вращаться вокруг магнитного поля

В, ускоряется электрическим полем и, набирая энергию, движется в течение полупериода по траектории с радиусом, бóльшим среднего. На втором полупериоде электрическое поле является замедляющим, частица теряет энергию и движется по дуге меньшего радиуса. Сочленение таких дуг приводит к систематическому смещению перпендикулярно **E** и **В**, как показано на фиг. 12.5. Направление дрейфа не зависит, очевидно, от знака заряда частицы.

Дрейфовая скорость **u** (12.98) имеет физический смысл только в том случае, когда она меньше скорости света, т. е. если



Ф и г. 12.5. Дрейф заряженных частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях.

$|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$. При $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$ электрическое поле столь велико, что частица непрерывно ускоряется в направлении **E** и ее средняя энергия неограниченно возрастает со временем. Действительно, рассмотрим преобразование Лоренца от исходной системы *K* к системе *K'*, движущейся относительно *K* со скоростью

$$\mathbf{u}' = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{E^2}. \quad (12.100)$$

В этой новой системе отсчета для электрического и магнитного полей имеем

$$\begin{aligned} E''_{\parallel} &= 0, & E''_{\perp} &= \frac{1}{\gamma'} \mathbf{E} = \left(\frac{E^2 - B^2}{E^2} \right)^{1/2} \mathbf{E}, \\ B''_{\parallel} &= 0, & B''_{\perp} &= \gamma' \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{u}' \times \mathbf{E}}{c} \right) = 0. \end{aligned} \quad (12.101)$$

Таким образом, в системе *K'* частица движется в чисто электростатическом поле, т. е. совершает «гиперболическое» движение с непрерывно увеличивающейся скоростью (см. задачу 12.7).

То обстоятельство, что частицы могут двигаться в скрещенных полях **E** и **B** с постоянной скоростью $u = cE/B$, можно использовать

для разделения заряженных частиц по скоростям. Если пучок частиц с некоторым разбросом скоростей падает нормально на область, в которой имеются однородные скрещенные электрическое и магнитное поля, то без отклонения через эту область будут проходить только частицы со скоростями, равными cE/B . Расположив подходящим образом щели на входе и выходе, можно вырезать очень узкий интервал скоростей проходящих частиц в окрестности cE/B . Разрешающая способность системы зависит от геометрии, скорости частиц и напряженностей полей. В сочетании с селектором импульсов, скажем типа отклоняющего магнита, рассматриваемый дрейфовый селектор скоростей позволяет выделить очень чистый и моноэнергетический пучок частиц определенной массы из первоначально смешанного потока частиц с различными массами и импульсами. Большие установки такого типа обычно используются для выделения моноэнергетических пучков частиц на выходе ускорителей больших энергий.

Если \mathbf{E} имеет составляющую, параллельную \mathbf{B} , то поведение частиц нельзя описать в такой простой форме, как это было сделано выше. Наряду с величиной $(B^2 - E^2)$ лоренц-инвариантом является также скалярное произведение $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$. При перпендикулярных полях ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$) мы могли найти такую лоренцовскую систему, в которой либо $\mathbf{E} = 0$ (при $|\mathbf{B}| > |\mathbf{E}|$), либо $\mathbf{B} = 0$ (при $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$). Описание движения частицы в таких координатных системах существенно упрощалось. Если же $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$, то во всех лоренцовых системах координат имеются как электрическое, так и магнитное поля, и угол между ними остается острым или тупым в зависимости от его величины в исходной координатной системе. Следовательно, в любой системе координат приходится рассматривать движение в комбинированных полях. В случае однородных статических полей можно непосредственно проинтегрировать уравнения движения в декартовых координатах (См. задачу 12.10.)

§ 9. Дрейф частиц в неоднородном статическом магнитном поле

В астрофизических и термоядерных задачах значительный интерес представляет поведение частиц в магнитном поле, меняющемся в пространстве. Часто это изменение достаточно слабое, и хорошим приближением является решение уравнений движения методом возмущений, впервые полученное Альфвеном. Термин «достаточно слабое» означает, что расстояние, на котором \mathbf{B} существенно изменяется по величине или по направлению, велико по сравнению с радиусом a вращения частицы. В этом случае в нулевом приближении можно считать, что частицы движутся по спирали вокруг силовых линий магнитного поля с частотой вращения, определяемой

локальной величиной магнитного поля. В следующем приближении появляются медленные изменения орбиты, которые можно представить в виде дрейфа их ведущего центра (центра вращения).

Первым типом пространственного изменения поля, которое мы рассмотрим, является изменение в направлении, перпендикулярном \mathbf{B} . Пусть имеется градиент величины поля в направлении единичного вектора \mathbf{n} , перпендикулярного \mathbf{B} , так что $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$. Тогда в первом приближении частоту вращения можно записать в виде

$$\omega_B(\mathbf{x}) = \frac{e}{\gamma mc} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{B_0} \frac{\partial B}{\partial \xi} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \right); \quad (12.102)$$

здесь ξ — координата в направлении \mathbf{n} и разложение производится в окрестности начала координат, для которого $\omega_B = \omega_0$. Поскольку \mathbf{B} не меняется по направлению, движение вдоль \mathbf{B} остается равномерным. Поэтому мы рассмотрим только изменение поперечного движения. Записав \mathbf{v}_\perp в виде $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$, где \mathbf{v}_0 — поперечная скорость в однородном поле, а \mathbf{v}_1 — малая поправка, подставим (12.102) в уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \mathbf{v}_\perp \times \omega_B(\mathbf{x}). \quad (12.103)$$

Тогда, удерживая только члены первого порядка, получаем приближенное уравнение

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \approx \left[\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0) \left(\frac{1}{B_0} \frac{\partial B}{\partial \xi} \right) \right] \times \omega_0. \quad (12.104)$$

Из соотношений (12.95) и (12.96) вытекает, что в однородном поле поперечная скорость \mathbf{v}_0 и координата \mathbf{x}_0 связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= -\omega_0 \times (\mathbf{x}_0 - \mathbf{X}), \\ \mathbf{x}_0 - \mathbf{X} &= \frac{1}{\omega_0^2} (\omega_0 \times \mathbf{v}_0), \end{aligned} \quad (12.105)$$

где \mathbf{X} — координата центра вращения в невозмущенном круговом движении (здесь $\mathbf{X} = 0$). Если в (12.104) выразить \mathbf{v}_0 через \mathbf{x}_0 , то получим

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \approx \left[\mathbf{v}_1 - \frac{1}{B_0} \frac{\partial B}{\partial \xi} \omega_0 \times \mathbf{x}_0 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0) \right] \times \omega_0. \quad (12.106)$$

Это выражение показывает, что, помимо осциллирующего слагаемого, \mathbf{v}_1 имеет отличное от нуля среднее значение, равное

$$\mathbf{v}_G \equiv \langle \mathbf{v}_1 \rangle = \frac{1}{B_0} \frac{\partial B}{\partial \xi} \omega_0 \times \langle \mathbf{x}_{0\perp} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0) \rangle. \quad (12.107)$$

Для определения средней величины $x_{0\perp}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0)$ достаточно учесть, что декартовы составляющие $x_{0\perp}$ изменяются синусоидально с амплитудой a и сдвигом фазы 90° . Поэтому на среднее значение влияет лишь составляющая $x_{0\perp}$, параллельная \mathbf{n} , так что

$$\langle x_{0\perp}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0) \rangle = \frac{a^2}{2} \mathbf{n}. \quad (12.108)$$

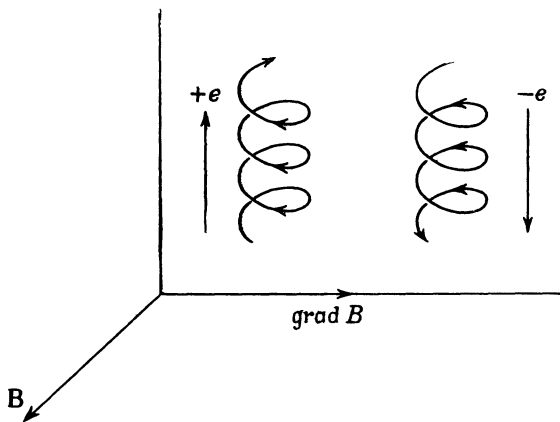
Таким образом, «градиентная» дрейфовая скорость дается выражением

$$\mathbf{v}_G = \frac{a^2}{2} \frac{1}{B_0} \frac{\partial B}{\partial \xi} (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{n}), \quad (12.109)$$

или в векторной форме

$$\frac{\mathbf{v}_G}{\omega_B a} = \frac{a}{2B^2} (\mathbf{B} \times \text{grad}_\perp B). \quad (12.110)$$

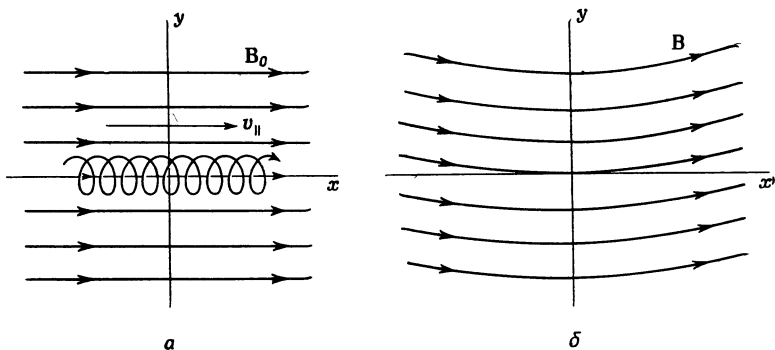
Выражение (12.110) показывает, что при достаточно малых градиентах поля, когда $|a \text{ grad } B / B| \ll 1$, дрейфовая скорость мала



Ф и г. 12.6. Дрейф заряженных частиц, обусловленный поперечным градиентом магнитного поля.

по сравнению с орбитальной скоростью $\omega_B a$. При этом частица быстро вращается вокруг ведущего центра, который медленно движется в направлении, перпендикулярном \mathbf{B} и $\text{grad } B$. Направление дрейфа положительной частицы определяется выражением (12.110). Для отрицательно заряженной частицы дрейфовая скорость имеет противоположный знак; это изменение знака связано с определением ω_B . Градиентный дрейф можно качественно объяснить, рассматривая изменение радиуса кривизны траектории при движении частицы в областях, где величина напряженности поля больше и меньше средней. На фиг. 12.6 качественно показано поведение частиц с различными знаками заряда.

Другим типом изменения поля, приводящим к дрейфу ведущего центра частицы, является кривизна силовых линий. Рассмотрим изображенное на фиг. 12.7 двумерное поле, не зависящее от z . На фиг. 12.7,а показано однородное магнитное поле \mathbf{B}_0 , параллельное оси x . Частица вращается вокруг силовой линии по окружности радиусом a со скоростью ω_{BA} и одновременно движется с постоянной скоростью v_{\parallel} вдоль силовой линии. Мы будем рассматривать это движение в качестве нулевого приближения для движения частицы в поле с искривленными силовыми линиями, показанном на фиг. 12.7,б, где локальный радиус кривизны силовых линий R велик по сравнению с a .



Ф и г. 12.7. Дрейф заряженных частиц, обусловленный кривизной силовых линий.

а — в постоянном однородном магнитном поле частица движется по спирали вдоль силовых линий; б — кривизна силовых линий магнитного поля вызывает дрейф, перпендикулярный плоскости xy .

Поправку первого приближения можно найти следующим образом. Поскольку частица стремится двигаться по спирали вокруг силовой линии, а силовая линия изогнута, то для движения ведущего центра это эквивалентно появлению центростремительного ускорения v_{\parallel}^2 / R . Можно считать, что это ускорение возникает под действием эффективного электрического поля

$$\mathbf{E}_{\text{эфф}} = \frac{\gamma m}{e} \frac{\mathbf{R}}{R^2} v_{\parallel}^2, \quad (12.111)$$

как бы добавленного к магнитному полю \mathbf{B}_0 . Но, согласно (12.98), комбинация такого эффективного электрического поля и магнитного поля приводит к *центростремительному дрейфу* со скоростью

$$\mathbf{v}_C \approx c \frac{\gamma m}{e} v_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{B}_0}{R^2 B_0^2}. \quad (12.112)$$

Используя обозначение $\omega_B = eB_0/\gamma mc$, запишем выражение для скорости центробежного дрейфа в виде

$$\mathbf{v}_C = \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_B R} \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{B}_0}{RB_0}. \quad (12.113)$$

Направление дрейфа определяется векторным произведением, в котором \mathbf{R} представляет собой радиус-вектор, направленный от центра кривизны к точке нахождения частицы. Знак в (12.113) соответствует положительному заряду частицы и не зависит от знака v_{\parallel} . Для отрицательной частицы величина ω_B становится отрицательной и направление дрейфа меняется на обратное.

Более аккуратный, но менее изящный вывод соотношения (12.113) можно получить непосредственным решением уравнений движения. Если ввести цилиндрические координаты ϱ , φ , z с началом координат в центре кривизны (см. фиг. 12.7,б), то магнитное поле будет иметь только φ -составляющую $B_{\varphi} = B_0$. Легко показать, что векторное уравнение движения сводится к следующим трем скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned} \ddot{\varrho} - \varrho \dot{\varphi}^2 &= -\omega_B \dot{z}, \\ \varrho \ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho} \dot{\varphi} &= 0, \\ \ddot{z} &= \omega_B \dot{\varrho}. \end{aligned} \quad (12.114)$$

Если в нулевом приближении траектория представляет собой спираль с радиусом a , малым по сравнению с радиусом кривизны R , то в низшем порядке $\dot{\varphi} \approx v_{\parallel}/R$, а $\varrho \approx R$. Поэтому из первого уравнения (12.114) получаем следующее приближенное выражение для z :

$$\dot{z} \approx \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_B R}. \quad (12.115)$$

Это выражение совпадает с формулой (12.113) для центробежного дрейфа.

Для области пространства, где нет токов, градиентный дрейф \mathbf{v}_G (12.110) и центробежный дрейф \mathbf{v}_C (12.113) можно объединить в одной простой общей формуле. Действительно, при условии $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ имеет место равенство

$$\frac{\text{grad}_{\perp} B}{B} = -\frac{\mathbf{R}}{R^2}. \quad (12.116)$$

Отсюда следует, что сумма \mathbf{v}_G и \mathbf{v}_C дает общую дрейфовую скорость

$$\mathbf{v}_D = \frac{1}{\omega_B R} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{B}}{RB}, \quad (12.117)$$

где $v_{\perp} = \omega_{Ba}$ — поперечная скорость вращения. Для однократно заряженных нерелятивистских частиц, находящихся в тепловом равновесии, получаем, что

$$v_D \text{ (см/сек)} = \frac{172T \text{ (}^{\circ}\text{K)}}{R \text{ (м)} B \text{ (гаусс)}} \cdot \quad (12.118)$$

Дрейф частиц (12.117) является помехой в некоторых типах термоядерных установок, сооружаемых для получения ограниченной конфигурации горячей плазмы. Одна из таких установок представляет собой тороидальную камеру с сильным продольным полем, создаваемым соленоидом, навитым на тор. При типичных параметрах $R = 1 \text{ м}$, $B = 10^3 \text{ гаусс}$ частицы плазмы с температурой 1 эВ ($T \approx 10^4 \text{ К}$) имеют дрейфовую скорость $v_D \approx 1,8 \cdot 10^3 \text{ см/сек}$. Это означает, что за малую долю секунды они вследствие дрейфа выйдут на стенки камеры. Для более горячей плазмы скорость дрейфа соответственно еще больше. Одним из способов компенсации дрейфа при тороидальной геометрии является изгибание тора в виде восьмерки. Так как частица обычно совершает много оборотов внутри такой замкнутой системы, то она проходит области, где как кривизна, так и градиент имеют различные знаки, и дрейфует поочередно в различных направлениях. Поэтому по крайней мере в первом порядке по $1/R$ результирующий средний дрейф оказывается равным нулю. Такой метод исключения дрейфа, обусловленного пространственным изменением магнитного поля, применяется в термоядерных установках типа стелларатора. Удержание плазмы в таких установках в отличие от установок, использующих пинч-эффект (см. гл. 10, § 5—7), осуществляется с помощью сильного внешнего продольного магнитного поля.

§ 10. Адиабатическая инвариантность магнитного потока сквозь орбиту частицы

В предыдущих параграфах мы рассмотрели движение частицы перпендикулярно силовым линиям магнитного поля. Это движение, обусловленное наличием электрического поля и градиента или кривизны магнитного поля, определяется спецификой лоренцовой силы. Для полноты нашего общего обзора движения частиц в магнитных полях необходимо рассмотреть еще движение вдоль силовых линий. В случае медленно меняющихся полей мощным средством исследования является метод адиабатических инвариантов. В небесной механике и в старой квантовой теории адиабатические инварианты использовались, с одной стороны, при рассмотрении возмущений движения, а с другой — для определения квантовых величин. Наше рассмотрение более тесно примыкает к задачам небесной механики, поскольку мы интересуемся поведением

заряженных частиц при медленном изменении поля, которое можно рассматривать как малое возмущение однородного статического поля, обсуждавшегося в § 7.

Понятие адиабатической инвариантности связано с интегралом действия механической системы. Если q_i и p_i представляют собой соответственно обобщенные канонические координаты и импульсы, то для каждой периодической координаты можно ввести интеграл действия

$$J_i = \oint p_i dq_i. \quad (12.119)$$

Интегрирование здесь производится по полному периоду изменения координаты q_i . Для данной механической системы с определенными начальными условиями интегралы действия остаются постоянными. Возникает вопрос, как изменяются интегралы действия, если свойства системы меняются (например, изменяется упругость пружины или масса частицы). Можно показать ¹⁾, что если свойства системы изменяются медленно по сравнению с характерным периодом движения (такие изменения называются *адиабатическими изменениями*), то интегралы действия являются инвариантами. Иными словами, если мы будем адиабатически изменять некоторую характеристику механической системы, находящейся в определенном состоянии движения, и в результате через достаточно длительное время получим уже другую механическую систему, то окончательное движение этой последней системы будет таково, что интегралы действия полученной системы будут такими же, как у исходной системы. Очевидно, это свойство интегралов действия весьма ценно при исследовании влияния малых изменений различных параметров системы.

Поперечное движение заряженной частицы в однородном статическом магнитном поле \mathbf{B} является периодическим. Интеграл действия для этого поперечного движения равен

$$J = \oint \mathbf{P}_\perp \cdot d\mathbf{l}, \quad (12.120)$$

где \mathbf{P}_\perp — поперечная составляющая канонического импульса (12.77), а $d\mathbf{l}$ — элемент длины дуги кругового пути частицы. Согласно (12.77),

$$J = \oint \gamma m v_\perp \cdot d\mathbf{l} + \frac{e}{c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (12.121)$$

Так как скорость \mathbf{v}_\perp параллельна $d\mathbf{l}$, то

$$J = \oint \gamma m \omega_B a^2 d\theta + \frac{e}{c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (12.122)$$

¹⁾ См., например, книгу Борна [15].

Вычисляя первый интеграл и применяя ко второму интегралу теорему Стокса, находим

$$J = 2\pi\gamma t\omega_B a^2 + \frac{e}{c} \int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} da. \quad (12.123)$$

Поскольку линейный элемент $d\mathbf{l}$ в (12.120) направлен против часовой стрелки, если смотреть в направлении \mathbf{V} , то единичный вектор \mathbf{n} антипараллелен \mathbf{V} . Следовательно, второй член в (12.123) вычитается из первого, так что

$$J = \gamma t\omega_B \pi a^2 = \frac{e}{c} V \pi a^2. \quad (12.124)$$

Здесь использовано соотношение $\omega_B = eV/\gamma mc$. Величина $V\pi a^2$ представляет собой поток магнитного поля сквозь орбиту частицы.

Для частицы, движущейся в области, где напряженность поля медленно изменяется как в пространстве, так и во времени, адиабатическая инвариантность J означает, что магнитный поток, пронизывающий орбиту частицы, остается постоянным. При возрастании V радиус a уменьшается таким образом, что величина $V\pi a^2$ сохраняется. Условие постоянства магнитного потока можно различными способами выразить через радиус орбиты частицы, ее поперечный импульс и магнитный момент. Приведем эти адиабатические инварианты:

$$Ba^2, \quad \frac{p_{\perp}^2}{B}, \quad \gamma\mu. \quad (12.125)$$

Здесь $\mu = e\omega_B a^2/2c$ — магнитный момент кругового тока, создаваемого движущейся по орбите частицей. В статическом магнитном поле скорость частицы постоянна и ее полная энергия не меняется. В этом случае сам магнитный момент μ является адиабатическим инвариантом. В изменяющихся во времени полях, а также при наличии статического электрического поля μ является адиабатическим инвариантом только в нерелятивистском приближении.

Рассмотрим теперь простой случай, когда статическое магнитное поле \mathbf{V} направлено в основном вдоль оси z и медленно растет вдоль этого направления. На фиг. 12.8 показано поведение силовых линий такого поля. Наряду с основной составляющей, направленной вдоль оси z , поле имеет малую радиальную составляющую, обусловленную искривлением силовых линий. Ограничимся для простоты случаем аксиальной симметрии. Предположим, что частица вращается вокруг оси z с поперечной скоростью $\mathbf{v}_{\perp 0}$ по окружности малого радиуса и имеет при $z = 0$, где напряженность продольного поля есть B_0 , скорость $\mathbf{v}_{\parallel 0}$, параллельную \mathbf{V} . Полная

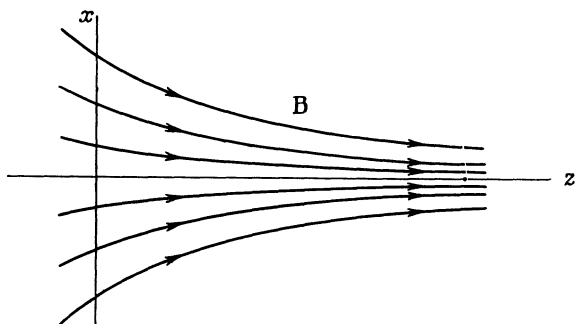
скорость частицы остается неизменной, так что в любой точке вдоль оси z

$$v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = v_0^2, \quad (12.126)$$

где $v_0^2 = v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2$ — квадрат скорости при $z = 0$. Используя инвариантность потока, мы можем, согласно (12.125), записать

$$\frac{v_{\perp}^2}{B} = \frac{v_{\perp 0}^2}{B_0}, \quad (12.127)$$

где B — напряженность магнитного поля на оси системы. Отсюда



Ф и г. 12.8.

следует, что продольная скорость в произвольной точке оси z дается выражением

$$v_{\parallel}^2 = v_0^2 - v_{\perp 0}^2 \frac{B(z)}{B_0}. \quad (12.128)$$

Уравнение (12.128) для скорости частицы вдоль оси z эквивалентно первому интегралу ньютоновского уравнения движения частицы в поле с одномерным потенциалом ¹⁾

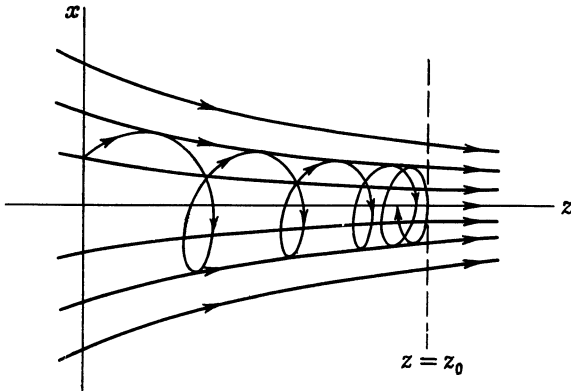
$$V(z) = \frac{1}{2} m \frac{v_{\perp 0}^2}{B_0} B(z).$$

При достаточно большом поле $B(z)$ правая часть (12.128) обратится в нуль в некоторой точке $z = z_0$. Это означает, что при движении вдоль поля частица будет вращаться по спирали со все более уменьшающимся расстоянием между витками, а энергия ее продольного движения будет переходить в энергию вращения, пока продольная

¹⁾ Отметим, однако, что наше рассмотрение полностью релятивистское, и аналогия с одномерной нерелятивистской механикой имеет чисто формальный характер.

скорость не обратится в нуль. Тогда частица повернет обратно и, продолжая вращаться в том же направлении, начнет двигаться в отрицательном направлении оси z . Такое отражение частицы от области сильного магнитного поля схематически показано на фиг. 12.9.

Выражение (12.128) вытекает из условия адиабатической инвариантности величины p_{\perp}^2/B . Для того чтобы показать, что, по крайней мере в первом приближении, эта инвариантность следует



Ф и г. 12.9. Отражение заряженной частицы от области с большой напряженностью магнитного поля.

непосредственно из уравнения движения, рассмотрим явное решение уравнения движения под действием силы Лоренца. Если магнитное поле на оси z равно $B(z)$, то радиальная составляющая поля вблизи оси может быть найдена из уравнения $\text{div } \mathbf{B} = 0$ и приближенно равна

$$B_{\rho}(\varrho, z) \approx -\frac{1}{2}\varrho \frac{\partial B(z)}{\partial z}, \quad (12.129)$$

где ϱ — расстояние от оси z . Уравнение движения в направлении оси z записывается в виде

$$\ddot{z} = \frac{e}{\gamma mc} (-\varrho \dot{\phi} B_{\rho}) \approx \frac{e}{2\gamma mc} \varrho^2 \dot{\phi} \frac{\partial B(z)}{\partial z}, \quad (12.130)$$

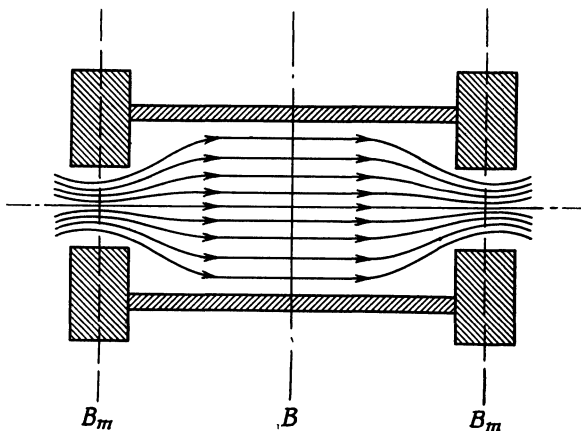
где $\dot{\phi}$ — угловая скорость вращения вокруг оси z . С точностью до первого порядка по малому изменению $B(z)$ это уравнение можно переписать в виде

$$\ddot{z} \approx -\frac{v_{\perp 0}^2}{2B_0} \frac{\partial B(z)}{\partial z}, \quad (12.131)$$

где мы использовали приближенное равенство $\varrho^2 \dot{\phi} \approx -(\alpha^2 \omega_B)_0 = -v_{\perp 0}^2/\omega_{B0}$. Первым интегралом уравнения (12.131) является

соотношение (12.128), так что с точностью до величин первого порядка малости инвариантность потока сквозь орбиту вытекает непосредственно из уравнений движения.

Адиабатическая инвариантность потока через орбиту частицы играет большую роль при рассмотрении движения частиц в любых пространственно неоднородных магнитных полях. Простой пример, описанный выше, иллюстрирует принцип «магнитных зеркал»: заряженные частицы отражаются от областей сильного магнитного



Ф и г. 12.10. Схема установки с магнитными зеркалами для удержания горячей плазмы.

поля. Это свойство поля лежит в основе предложенной Ферми теории ускорения космических заряженных частиц до очень высоких энергий в межзвездном пространстве при столкновении с движущимися магнитными облаками. Магнитные зеркала могут быть применены также для удержания горячей плазмы в термоядерных реакторах. Магнитную ловушку можно создать с помощью продольного магнитного поля, образуемого соленоидом с добавочными катушками на обоих его концах, которые служат для усиления магнитного поля на краях. Силовые линии такого поля показаны на фиг. 12.10. Частицы, создаваемые или инжектируемые в центральной области поля, будут вращаться вокруг силовых линий магнитного поля и отражаться от магнитных зеркал, расположенных на обоих концах установки. Если отношение максимального поля B_m в «магнитной пробке» к полю B в центральной области достаточно велико, то через торцы смогут уйти только частицы, имеющие очень большую составляющую скорости, параллельную оси. Выражение (12.128) показывает, что условием удержания частицы является

выполнение неравенства

$$\left| \frac{v_{\parallel 0}}{v_{\perp 0}} \right| < \left(\frac{B_m}{B} - 1 \right)^{1/2}. \quad (12.132)$$

Выполнения требования (12.132) легко добиться, соответствующим образом инжектируя частицы в установку. Тогда потери частиц будут определяться интенсивностью процессов рассеяния на атомах остаточного газа и т. п., в результате которых составляющие скорости частицы изменяются и перестают удовлетворять условию (12.132).

Другой областью применения изложенных выше принципов являются вопросы, касающиеся движения частиц в магнитных полях Земли и звезд. Движение заряженных частиц в дипольном магнитном поле Земли или Солнца может быть объяснено с помощью понятий адиабатического инварианта и дрейфовых скоростей, рассмотренных в § 9. Некоторые из этих вопросов отнесены к задачам 12.11 и 12.12, где рассматривается движение частиц в магнитных ловушках, образованных земным магнитным полем (так называемые пояса Ван Аллена).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основной областью применения релятивистской кинематики является физика высоких энергий. В руководствах по физике высоких энергий теория относительности предполагается известной, а кинематические расчеты либо опускаются, либо даются в приложениях. Исключение представляет книга Балдина, Гольданского и Розенталя [8], где вопросы релятивистской динамики подробно изложены и иллюстрированы многочисленными диаграммами.

Лагранжев и гамильтонов формализм для релятивистских заряженных частиц излагается в любом серьезном учебнике механики, а также в книгах по электродинамике. Для справок укажем книги Корбена и Стила [31], гл. 16, Голдстейна [46], гл. 6, Ландау и Лифшица [63], гл. 2 и 3.

Вопросы движения заряженных частиц во внешних электромагнитных полях, в частности в неоднородных магнитных полях, приобретают все большее значение в геофизике, физике Солнца и в термоядерных исследованиях. Классической монографией по этому вопросу является книга Альфвена [4]. Ряд основных результатов приведен также в книгах Чандрасекара [26], гл. 2 и 3, Линхарта [67], гл. 1, Спитцера [104], гл. 1.

Другим важным приложением динамики релятивистских заряженных частиц является теория ускорителей высоких энергий. Краткое изложение физических задач этого типа можно найти в книгах Корбена и Стила [31], гл. 17, и Ливингстона [68].

Для более полного знакомства с теорией ускорителей можно рекомендовать работу Куранта и Снайдера [33], где приведена соответствующая библиография.

Дополнение редактора. Вопросы движения частиц в электрических и магнитных полях хорошо изложены в книге Ленерта [134].

ЗАДАЧИ

12.1. С помощью преобразования к системе ЦМ определить пороговые кинетические энергии (в $Mэв$) для следующих процессов:

а) рождение π -мезона при нуклон-нуклонных соударениях ($m_\pi/M = 0,15$);

б) рождение π -мезона при π -мезон-нуклонных соударениях;

в) рождение пары π -мезонов при нуклон-нуклонных соударениях;

г) рождение нуклонных пар при электрон-электронных соударениях.

12.2. Пусть некоторая покоящаяся система с массой M распадается или превращается в несколько частиц, сумма масс которых меньше чем M на величину ΔM .

а) Показать, что максимально возможная кинетическая энергия i -й частицы (с массой m_i) равна

$$(T_i)_{\text{макс}} = \Delta M c^2 \left(1 - \frac{m_i}{M} - \frac{\Delta M}{2M} \right).$$

б) Определить максимальные кинетические энергии в $Mэв$, а также в отношении к $\Delta M c^2$ для каждой частицы в следующих процессах распада и превращения покоящихся частиц:

$$\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu},$$

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^+,$$

$$K^\pm \rightarrow e^\pm + \pi^0 + \nu,$$

$$K^\pm \rightarrow \mu^\pm + \pi^0 + \nu,$$

$$p + \bar{p} \rightarrow 2\pi^+ + 2\pi^- + \pi^0,$$

$$p + \bar{p} \rightarrow K^+ + K^- + 3\pi^0.$$

12.3. При соударении π -мезона ($m_\pi c^2 = 140 Mэв$) с покоящимся протоном ($m_p c^2 = 938 Mэв$) образуется K -мезон ($m_K c^2 = 494 Mэв$) и Λ -гиперон ($m_\Lambda c^2 = 1115 Mэв$). Используя законы сохранения энергии и импульса и релятивистскую кинематику, найти:

а) кинетическую энергию в $Mэв$ падающего π -мезона, соответствующую порогу образования K -мезона;

б) кинетическую энергию в $Mэв$ π -мезона, необходимую для получения K -мезона, вылетающего под углом 90° в лабораторной системе координат;

в) кинетическую энергию K -мезона, вылетающего под углом 0° в лабораторной системе, если кинетическая энергия π -мезона на 20% больше значения, найденного в п. «б»;

г) кинетическую энергию K -мезона, вылетающего под углом 90° в лабораторной системе, если падающий π -мезон имеет кинетическую энергию $1500 Mэв$.

12.4. Как известно, уравнение движения Ньютона

$$m\mathbf{a}' = e\mathbf{E}'$$

справедливо для точечной заряженной частицы с массой m и зарядом e в системе координат K' , в которой частица в данный момент покоится. Показать, что для получения релятивистского уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

достаточно использовать лоренцовские трансформационные свойства ускорения и электромагнитного поля.

12.5. При лагранжевом описании движения релятивистской заряженной частицы можно в качестве лагранжевых переменных использовать 4-вектор положения частицы x_μ и 4-скорость $u_\mu = (\gamma v, i\gamma c)$. При этом уравнения Эйлера — Лагранжа имеют явно ковариантную форму

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial u_\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_\mu} = 0,$$

где L — лоренц-инвариантный лагранжиан, а τ — собственное время.

а) Показать, что лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} m u_\mu u_\mu + \frac{q}{c} u_\mu A_\mu$$

приводит к правильным релятивистским уравнениям движения для частицы, взаимодействующей с внешним полем, описываемым 4-вектором-потенциалом A_μ .

б) Определить канонические импульсы и написать гамильтониан в ковариантной, а также в пространственно-временной форме. Гамильтониан является лоренц-инвариантом. Чему равна его величина?

12.6. а) Исходя из принципа Гамильтона, показать, что лагранжианы, отличающиеся друг от друга на полную производную по времени от произвольной функции координат и времени, эквивалентны в том смысле, что они приводят к одинаковым уравнениям движения Эйлера — Лагранжа.

б) Показать непосредственно, что калибровочное преобразование потенциалов $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial\Lambda/\partial x_\mu$ в лагранжиане заряженной частицы (12.75) переводит лагранжиан в эквивалентный.

12.7. Частица с массой m и зарядом e движется в однородном статическом электрическом поле E_0 .

а) Найти скорость и координаты частицы как явные функции времени в предположении, что начальная скорость v_0 перпендикулярна электрическому полю.

б) Исключив время, найти траекторию частицы в пространстве. Исследовать форму пути для малого и большого интервалов времени (определить понятия «большой» и «малый» интервал времени).

12.8. Для дрейфового селектора скоростей используются однородные статические скрещенные электрическое и магнитное поля на интервале L . Пусть входная и выходная щели имеют ширину Δx . Определить зависимость интервала скоростей Δu вокруг средней скорости cE/B для частиц, проходящих через установку, от массы, импульса или энергии падающих частиц, напряженностей полей, длины селектора и других существенных переменных. Краевыми эффектами пренебречь. При анализе принять следующие практические значения параметров: L порядка нескольких метров, $E_{\max} \sim 3 \cdot 10^4$ в/см, $\Delta x \sim 10^{-1} - 10^{-2}$ см, $u \sim 0,5 - 0,995$ с.

12.9. Частица с массой m и зарядом e движется в лабораторной системе координат в скрещенных статических однородных электрическом и магнитном полях, причем поле E параллельно оси x , а поле B параллельно оси y .

а) Считая, что $|E| < |B|$, произвести лоренцовское преобразование, описанное в § 8, и получить явно уравнение траектории частицы в параметрическом виде.

б) Повторить вычисления п. «а» для случая $|E| > |B|$.

12.10. Статические однородные электрическое и магнитное поля образуют между собой угол θ .

а) Выбрав подходящим образом оси координат, решить уравнение движения частицы с зарядом e и массой m в декартовых координатах.

б) Показать, что в случае параллельных полей \mathbf{E} и \mathbf{B} решение можно при соответствующем выборе постоянных интегрирования и т. п. представить в параметрической форме следующим образом:

$$x = AR \sin \varphi, \quad y = AR \cos \varphi, \quad z = \frac{R}{q} \sqrt{1 + A^2} \operatorname{ch}(\varrho \varphi),$$

$$ct = \frac{R}{q} \sqrt{1 + A^2} \operatorname{sh}(\varrho \varphi),$$

где $R = mc^2/eB$, $q = E/B$, A — произвольная постоянная, а φ — параметр, равный $c\tau/R$, где τ — собственное время.

12.11. Магнитное поле Земли можно приближенно представить как поле магнитного диполя с магнитным моментом $M = 8,1 \cdot 10^{25}$ гаусс·см³. Рассмотреть движение электронов в поле земного диполя.

а) Показать, что уравнение магнитной силовой линии имеет вид $r = r_0 \sin^2 \theta$, где θ — обычный полярный угол, отсчитываемый от оси диполя, и найти выражение для величины B вдоль силовой линии в функции от θ .

б) Положительно заряженная частица вращается вокруг силовой линии в экваториальной плоскости и имеет радиус вращения a на среднем расстоянии R от центра Земли ($a \ll R$). Показать, что азимут частицы (долгота) изменяется приблизительно линейно со временем по закону

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{3}{2} \left(\frac{a}{R} \right)^2 \omega_B (t - t_0),$$

где ω_B — частота, соответствующая магнитному полю на расстоянии R от центра Земли.

в) Пусть наряду с азимутальным движением, определенным в п. «б», частица имеет малую составляющую скорости, параллельную силовым линиям. Показать, что это приводит к малым колебаниям по θ около точки $\theta = \pi/2$ с частотой $\Omega = (3/\sqrt{2})(a/R)\omega_B$. Найти изменение долготы за один период колебаний по широте.

г) Для электрона с энергией 10 Мэв, находящегося на среднем расстоянии $R = 3 \cdot 10^9$ см от центра Земли, найти ω_B и a и определить время обращения вокруг Земли за счет дрейфа, а также период колебаний по широте. Рассчитать эти же величины для электрона с энергией 10 кэв при том же среднем радиусе.

12.12. В тот момент, когда частица находится в экваториальной плоскости магнитного поля Земли (которое предполагается дипольным полем), ее расстояние от центра Земли равно R , а вектор скорости направлен под углом α к экваториальной плоскости ($v_{||}/v_{\perp} = \operatorname{tg} \alpha$). Полагая, что радиус вращения частицы вокруг силовых линий $a \ll R$ и что поток через ее орбиту является интегралом движения, определить максимальную магнитную широту λ , достигаемую частицей. Построить график зависимости λ от угла α . Отметить на этой кривой те значения α , при которых частица, находящаяся в экваториальной плоскости на расстоянии R от центра Земли, попадает на Землю при $R/R_0 = 1,5; 2,0; 2,5; 3; 4; 6; 8; 10$ (R_0 — радиус Земли).

СОУДАРЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ. ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ. РАССЕЯНИЕ

В настоящей главе рассматриваются соударения заряженных частиц, движущихся с большой скоростью, причем особое внимание уделяется обмену энергией между частицами и изменению направления движения частиц при соударениях. Быстрая заряженная частица при прохождении через вещество испытывает соударения с электронами и ядрами атомов. Для частиц, которые тяжелее электрона (например, μ - или π -мезонов, K -мезонов, протонов и т. п.), соударения с электронами и ядрами приводят к различным последствиям. При соударениях с легкими частицами (электронами) налетающая частица может потерять значительную часть своей энергии, но при этом почти не испытывает отклонения. Наоборот, при соударениях с тяжелыми ядрами потеря энергии невелика, но при этом налетающая частица испытывает сильное рассеяние, поскольку такие ядра имеют большой заряд. Таким образом, энергия налетающей частицы теряется почти исключительно в результате соударений с электронами. Наоборот, отклонение частицы от первоначального направления падения обуславливается практически лишь упругими соударениями с атомными ядрами. Рассеяние ограничено малыми углами, так что тяжелые частицы движутся по более или менее прямолинейной траектории, теряя постепенно энергию, пока не дойдут до конца пробега. Если налетающая частица представляет собой электрон, то в результате соударений с электронами вещества происходят как потеря энергии, так и рассеяние. В итоге траектория частиц оказывается гораздо менее прямолинейной, чем для тяжелых частиц. Уже на довольно коротком расстоянии начинает проявляться диффузия электронов в веществе.

Вопросы, связанные с потерями энергии и рассеянием частиц при прохождении через вещество, имеют большое значение и рассмотрены в ряде книг¹⁾, где, в частности, приведены подробные коли-

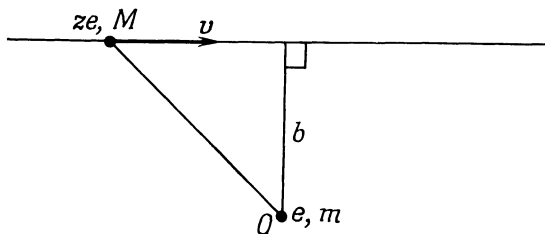
¹⁾ См. список литературы в конце главы.

чественные данные в виде таблиц и графиков. Поэтому наше внимание будет сосредоточено лишь на рассмотрении основных физических идей, а не на получении точных количественных формул. Для получения количественно точных результатов необходимо полное квантовомеханическое описание, хотя все существенные детали процессов по своему происхождению имеют классический или полуклассический характер. Как будет показано в дальнейшем, порядок величины квантовых эффектов можно легко оценить на основе принципа неопределенности.

Мы начнем с рассмотрения простой задачи о передаче энергии быстрой тяжелой частицей свободному электрону. Затем будет выяснено влияние сил связи, действующих на электроны, и получена классическая формула Бора для потерь энергии. Далее обсуждаются ее квантовые модификации, затем учитывается влияние поляризации среды, рассматриваются потери энергии в электронной плазме. Вслед за этим будет исследовано упругое рассеяние частиц на ядрах и многократное рассеяние. В конце рассматривается вопрос об электропроводности плазмы с учетом экранированного кулоновского взаимодействия.

§ 1. Передача энергии при кулоновских соударениях

Пусть быстрая частица с зарядом ze и массой M взаимодействует с атомным электроном. Если скорость частицы велика по сравнению с характерной скоростью движения электрона на орбите, то в течение «времени взаимодействия» электрон можно рассматривать как свободный и покоившийся перед соударением. Примем



Ф и г. 13.1.

далее, что передаваемый импульс Δp достаточно мал, налетающая частица практически не отклоняется от прямолинейной траектории и электрон отдачи не получает заметного смещения за время соударения. Тогда для нахождения потерь энергии при соударении необходимо лишь вычислить передачу импульса, обусловленную действием электрического поля налетающей частицы в точке распо-

ложения электрона. Влияние магнитного поля частицы пренебрежимо мало, поскольку мы предполагаем, что электрон можно считать покоящимся.

На фиг. 13.1 изображена схема соударения. Скорость налетающей частицы v , а ее энергия $E = \gamma M c^2$. Частица пролетает мимо электрона с зарядом e и массой $m \ll M$, значение прицельного параметра равно b . Поле налетающей частицы в точке расположения электрона определяется соотношениями (11.118), где $q = ze$. Интеграл по времени, очевидно, отличен от нуля лишь для поперечного электрического поля E_1 . Следовательно, приобретаемый электроном импульс Δp имеет лишь поперечную составляющую, равную

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} e E_1(t) dt = \frac{2ze^2}{bv}. \quad (13.1)$$

Следует заметить, что Δp не зависит от γ , как уже отмечалось в гл. 11, § 10. Переданная электрону энергия равна

$$\Delta E(b) = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{2z^2 e^4}{mv^2} \frac{1}{b^2}. \quad (13.2)$$

Угловое отклонение налетающей частицы при $\Delta p \ll p$ определяется равенством $\theta \approx \Delta p/p$. Таким образом, для малых отклонений

$$\theta \approx \frac{2ze^2}{pvb}. \quad (13.3)$$

Этот результат можно сравнить с известной точной формулой для резерфордовского рассеяния нерелятивистской частицы с зарядом ze в кулоновском поле заряда $z'e$:

$$2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{2zz'e^2}{pvb}. \quad (13.4)$$

Оба выражения, очевидно, согласуются в случае малых углов ¹⁾.

Выражение (13.2) для переданной энергии $\Delta E(b)$ обладает рядом интересных особенностей. Оно содержит лишь заряд и скорость налетающей частицы; масса налетающей частицы сюда не

¹⁾ В действительности при сравнении формул (13.3) и (13.4) возникает вопрос о системах отсчета. Так как соотношение (13.4) справедливо для фиксированного центра силы (т. е. для системы ЦМ), это выражение следует сравнивать с отклонением легкого электрона в системе координат, в которой покоится тяжелая частица. При этом справедливо соотношение (13.3), где $p \approx \gamma m v$ — импульс электрона в этой системе. Используя формулы (12.50) и (12.54) для преобразования углов при переходе от системы ЦМ к лабораторной системе, читатель может проверить, что соотношения (13.3) и (13.4) согласуются также и в системе отсчета, в которой покоится электрон.

входит. Передаваемая энергия обратно пропорциональна квадрату прицельного параметра и, следовательно, очень сильно возрастает для близких соударений. Конечно, существует верхний предел величины передаваемой энергии, соответствующий лобовым соударениям. Наш метод вычислений справедлив лишь для больших значений b . Приравнивая (13.2) максимально возможной величине передаваемой энергии (12.59), можно получить нижнее предельное значение прицельного параметра $b_{\text{мин}}$, при котором наше приближенное рассмотрение еще справедливо:

$$\Delta E(b_{\text{мин}}) = \Delta E_{\text{макс}} = 2m\gamma^2 v^2. \quad (13.5)$$

Отсюда находим нижнюю границу для b :

$$b_{\text{мин}} = \frac{ze^2}{\gamma m v^2}; \quad (13.6)$$

при значениях b порядка или меньших $b_{\text{мин}}$ следует заменить наш приближенный результат (13.2) более точным выражением, которое стремилось бы к (13.5) в предельном случае $b \rightarrow 0$. Как можно показать (см. задачу 13.1), соответствующее рассмотрение приводит к следующему более точному результату:

$$\Delta E(b) \approx \frac{2z^2 e^4}{m v^2} \frac{1}{b_{\text{мин}}^2 + b^2}. \quad (13.7)$$

Выражение (13.7) ведет себя требуемым образом в предельном случае $b \rightarrow 0$ и переходит в (13.2) при $b \gg b_{\text{мин}}$.

Нижнюю границу для величины b можно получить также и иным способом. При выводе выражения (13.2) предполагалось, что электрон не смещается заметно в течение времени взаимодействия. Можно ожидать, что выражение (13.2) будет справедливым до тех пор, пока действительное смещение электрона d мало по сравнению с b . Величину d можно оценить, приняв, что средняя скорость электрона при соударении равна $\Delta p/2m$, и вычисляя время взаимодействия с помощью (11.120). В результате получим следующую оценку по порядку величины для смещения электрона за время взаимодействия

$$d \approx \frac{\Delta p}{2m} \Delta t = \frac{ze^2}{\gamma m v^2} = b_{\text{мин}}. \quad (13.8)$$

До тех пор пока $b \gg d$, выражение (13.2) остается справедливым. Это же условие вытекает из соотношения (13.7).

В другом предельном случае очень дальних соударений приближенный результат (13.2) для $\Delta E(b)$ становится неверным, поскольку фактически в атомах электроны связаны, тогда как мы их считали свободными. Если время взаимодействия (11.120) мало по сравнению с периодом орбитального движения, то есте-

ственно ожидать, что для таких кратковременных соударений электроны можно рассматривать как свободные. В противоположном предельном случае, когда время соударения (11.120) очень велико по сравнению с периодом орбитального движения, электрон успеет совершить много оборотов по орбите за время прохождения налетающей частицы мимо него и действие поля частицы выразится в адиабатическом изменении этого движения без результирующей передачи энергии. Границе между указанными предельными случаями соответствует значение прицельного параметра $b_{\text{макс}}$, для которого время соударения (11.120) сравнимо с периодом орбитального движения. Если ω — характерная частота движения электрона в атоме, то указанное условие имеет вид

$$\text{или } \left. \begin{aligned} \Delta t(b_{\text{макс}}) &\sim \frac{1}{\omega}, \\ b_{\text{макс}} &= \frac{\gamma v}{\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (13.9)$$

При значениях прицельного параметра, превышающих $b_{\text{макс}}$, можно ожидать уменьшения передачи энергии по сравнению с величиной, определяемой соотношением (13.2), и быстрого убывания ее до нуля при $b \gg b_{\text{макс}}$.

Качественный характер зависимости $\Delta E(b)$ от b показан на фиг. 13.2. Пунктирная кривая соответствует приближенной формуле (13.2), а сплошная кривая представляет точный результат. В интервале $b_{\text{мин}} < b < b_{\text{макс}}$ передаваемая энергия может быть приближенно определена по соотношению (13.2). Для значений прицельного параметра, лежащих вне этого интервала, передаваемая энергия значительно ниже получаемой по приближенной оценке.

При движении в материальной среде быстрая частица «чувствует» электроны, расположенные на различных расстояниях от ее траектории. Если число атомов в единице объема равно N , а число электронов в атоме Z , то в слое вещества толщиной dx число электронов, для которых прицельный параметр лежит между b и $b + db$, равно

$$dn = NZ \cdot 2\pi b db dx. \quad (13.10)$$

Для определения потерь энергии частицы на единице длины нужно число частиц (13.10) умножить на передаваемую энергию $\Delta E(b)$ и проинтегрировать по всем значениям прицельного параметра. Таким образом, полная потеря энергии равна

$$\frac{dE}{dx} = 2\pi NZ \int \Delta E(b) b db. \quad (13.11)$$

Учитывая поведение функции $\Delta E(b)$, показанное на фиг. 13.2, можно использовать в (13.11) приближенное представление (13.2) и проинтегрировать от $b_{\text{мин}}$ до $b_{\text{макс}}$. В результате получим

$$\frac{dE}{dx} \approx 4\pi NZ \frac{z^2 e^4}{mv^2} \int_{b_{\text{мин}}}^{b_{\text{макс}}} \frac{1}{b^2} b db, \quad (13.12)$$

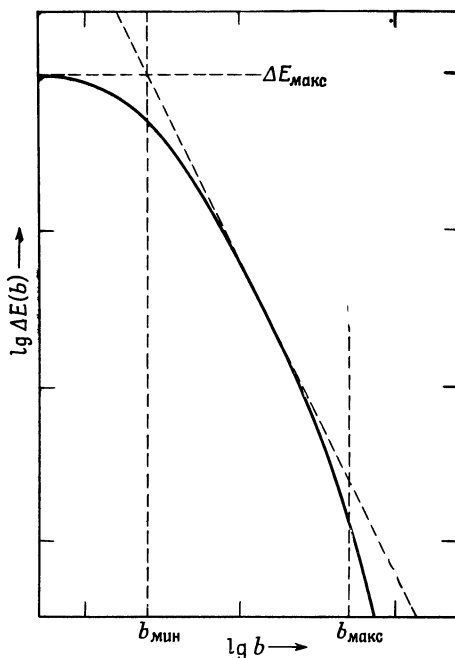
или

$$\frac{dE}{dx} \approx 4\pi NZ \frac{z^2 e^4}{mv^2} \ln B, \quad (13.13)$$

где

$$B = \frac{b_{\text{макс}}}{b_{\text{мин}}} \approx \frac{\gamma^2 m v^3}{ze^2 \omega}. \quad (13.14)$$

Это приближенное выражение для потерь энергии отражает все существенные особенности классического результата, принадле-



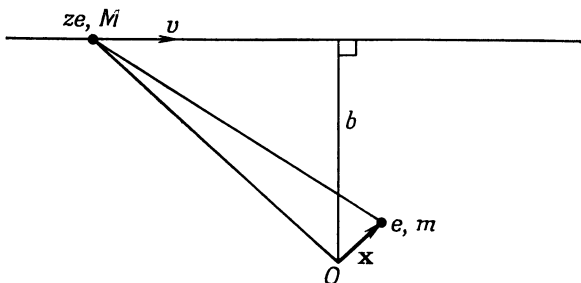
Фиг. 13.2. Зависимость передаваемой энергии от прицельного параметра.

жащего Бору (1915 г.). Метод выбора нижнего предела интегрирования в (13.12) полностью эквивалентен использованию выражения (13.7) для $\Delta E(b)$. Обрезание при $b = b_{\text{макс}}$ является довольно

произвольным. Поэтому величина B определена лишь с точностью до множителя порядка единицы. Поскольку B входит в аргумент логарифма, эта неточность весьма мало существенна. Тем не менее в § 2 мы исследуем влияние связей. Анализ формулы (13.13) и, в частности, характера зависимости потерь от энергии и сравнение ее с результатами эксперимента мы отложим до § 3 этой главы.

§ 2. Передача энергии гармоническому осциллятору

Как уже говорилось выше, по величине прицельного параметра все кулоновские соударения разделяются на два класса: соударения с $b < b_{\text{макс}}$, когда энергия передается квазисвободным электронам, и соударения с $b > b_{\text{макс}}$, которые фактически представляют



Ф и г. 13.3.

собой адиабатические соударения с незначительной передачей энергии. Постараемся теперь обосновать правильность выбора значения (13.9) для величины $b_{\text{макс}}$. Рассмотрим задачу об энергетических потерях тяжелой частицы с зарядом ze и скоростью v , пролетающей вблизи частицы с массой m и зарядом e , удерживаемой квазиупругой силой (гармонический осциллятор). Эта задача является упрощенной моделью механизма потерь при прохождении частиц через вещество. Как и ранее, будем считать, что отклонения тяжелой частицы при соударениях малы и, таким образом, ее траекторию можно приближенно рассматривать как прямую линию.

Тяжелая частица проходит возле связанного заряда на «прицельном расстоянии» b , отсчитываемом от центра O удерживающей силы, как показано на фиг. 13.3. Так как нас прежде всего интересует случай больших прицельных параметров, когда существенны эффекты связи, можно предположить, что передача энергии невелика, движение связанной частицы на протяжении времени соударения нерелятивистское, а начальная и конечная амплитуды колебаний электрона вокруг центра O малы по сравнению с b .

При этих допущениях в уравнении движения связанной частицы необходимо учитывать лишь электрическое поле налетающей частицы. Кроме того, можно пренебречь зависимостью амплитуды поля от положения связанной частицы и принять в качестве эффективного значения его величину в точке O . Это приближение называют иногда *дипольным* по аналогии с соответствующей задачей о поглощении излучения.

При сделанных допущениях уравнение движения заряда, удерживаемого квазиупругой силой, можно написать в виде

$$\ddot{\mathbf{x}} + \Gamma \dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{x} = \frac{e}{m} \mathbf{E}(t), \quad (13.15)$$

где $\mathbf{E}(t)$ — вектор напряженности электрического поля, создаваемого зарядом ze в точке O и имеющего составляющие (11.118), ω_0 — характерная частота связи, Γ — малая постоянная затухания. Наличие этого малого затухания в данном случае несущественно, но оно присуще в той или иной степени любой реальной физической системе и, кроме того, его учет позволяет устранить некоторые теоретические трудности, которые возникли бы без учета затухания. Для решения уравнения (13.15) представим $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{E}(t)$ в виде интегралов Фурье

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (13.16)$$

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (13.17)$$

Так как $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{E}(t)$ действительны, то фурье-амплитуды этих величин при положительных и отрицательных частотах связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(-\omega) &= \mathbf{x}^*(\omega), \\ \mathbf{E}(-\omega) &= \mathbf{E}^*(\omega). \end{aligned} \quad (13.18)$$

Подставляя приведенные интегральные представления в уравнение движения, получаем

$$\mathbf{x}(\omega) = \frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}(\omega)}{\omega_0^2 - i\omega\Gamma - \omega^2}. \quad (13.19)$$

Для известной функции $\mathbf{E}(t)$ легко найти фурье-амплитуду $\mathbf{E}(\omega)$. Зная $\mathbf{E}(\omega)$, можно с помощью соотношений (13.19) и (13.16) найти величину $\mathbf{x}(t)$. Задача решается до конца, если удастся провести интегрирование по частотам.

Непосредственный интерес представляют не детальные характеристики движения связанной частицы, а величина энергии, переда-

ваемой при соударении. Для ее определения нужно вычислить работу, совершаемую налетающей частицей над связанным зарядом. Работа, совершаемая в единицу времени, равна

$$\frac{dE}{dt} = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d^3x'. \quad (13.20)$$

Следовательно, полная работа, совершаемая частицей при пролете, определяется соотношением

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d^3x'. \quad (13.21)$$

Плотность тока для связанного заряда равна $\mathbf{J} = ev\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{x}(t)]$. Следовательно,

$$\Delta E = e \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} dt, \quad (13.22)$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$, а \mathbf{E} в дипольном приближении совпадает с полем налетающей частицы в точке O . Используя фурье-представления (13.16) и (13.17), аналогичное представление для δ -функции (2.52) и условия вещественности (13.18), можно переписать выражение для передаваемой энергии следующим образом:

$$\Delta E = 2e \operatorname{Re} \int_0^{\infty} -i\omega \mathbf{x}(\omega) \cdot \mathbf{E}^*(\omega) d\omega. \quad (13.23)$$

Подставляя в эту формулу выражение (13.19) для $\mathbf{x}(\omega)$, получаем

$$\Delta E = \frac{e^2}{m} \int_0^{\infty} |\mathbf{E}(\omega)|^2 \frac{2\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} d\omega. \quad (13.24)$$

При малых Γ подынтегральное выражение имеет резкий максимум вблизи $\omega = \omega_0$, соответствующий приближенно лоренцовой форме линии. Поэтому множитель подынтегрального выражения, содержащий фурье-амплитуду электрического поля, можно приближенно заменить его значением при $\omega = \omega_0$. При этом (13.24) преобразуется к виду

$$\Delta E = \frac{2e^2}{m} |\mathbf{E}(\omega_0)|^2 \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(\frac{\omega_0^2}{\Gamma^2} - x^2\right)^2 + x^2}. \quad (13.25)$$

Интеграл в приведенном выражении не зависит от величины ω_0/Γ и равен $\pi/2$. В результате для передаваемой энергии получаем

$$\Delta E = \frac{\pi e^2}{m} |\mathbf{E}(\omega_0)|^2. \quad (13.26)$$

Соотношение (13.26) выражает весьма общий результат, характеризующий передачу энергии внешнего электромагнитного поля нерелятивистскому осциллятору. В рассматриваемом нами случае поле создается пролетающей заряженной частицей. Однако в качестве внешнего поля можно представить и импульс излучения или любую другую комбинацию внешних полей.

Если частица с зарядом ze пролетает мимо центра O с прицельным параметром b и скоростью v , то возбуждаемое в точке O электромагнитное поле определяется соотношениями (11.118), причем $q = ze$. В качестве примера произведем фурье-преобразование (13.17) для составляющей $E_1(t)$. Амплитуда Фурье этой величины $E_1(\omega)$ определяется как

$$E_1(\omega) = \frac{zeb\gamma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} dt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}. \quad (13.27)$$

Производя замену переменной интегрирования $x = \gamma vt/b$, получаем

$$E_1(\omega) = \frac{ze}{\sqrt{2\pi}bv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega bx/\gamma v}}{(1+x^2)^{3/2}} dx. \quad (13.28)$$

Из таблиц фурье-преобразований¹⁾ находим, что интеграл в (13.28) пропорционален модифицированной функции Бесселя первого порядка [см. (3.101)]. Таким образом,

$$E_1(\omega) = \frac{ze}{bv} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{\omega b}{\gamma v} K_1\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) \right]. \quad (13.29)$$

Аналогично в результате фурье-преобразования составляющей $E_3(t)$, определяемой соотношениями (11.118), имеем

$$E_3(\omega) = -i \frac{ze}{\gamma vb} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{\omega b}{\gamma v} K_0\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) \right]. \quad (13.30)$$

Теперь мы можем написать явное выражение для величины энергии (13.26), передаваемой гармоническому осциллятору. Согласно (13.29) и (13.30),

$$\Delta E(b) = \frac{2z^2 e^4}{mv^2} \frac{1}{b^2} \left[\xi^2 K_1^2(\xi) + \frac{1}{\gamma^2} \xi^2 K_0^2(\xi) \right], \quad (13.31)$$

где

$$\xi = \frac{\omega_0 b}{\gamma v}. \quad (13.32)$$

Множитель перед квадратными скобками совпадает с полученным ранее приближенным результатом (13.2). При малых или боль-

¹⁾ См., например, [70], гл. 8 или [10], гл. 1—3.

ших ξ , как можно показать, используя приближенные выражения (3.103) или асимптотику (3.104), величина в квадратных скобках имеет следующие предельные значения:

$$[] = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi \ll 1, \\ \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) \frac{\pi}{2} \xi e^{-2\xi} & \text{при } \xi \gg 1 \end{cases} \quad (13.33)$$

Так как $\xi = b/b_{\text{макс}}$, то очевидно, что при $b \ll b_{\text{макс}}$ передаваемая энергия определяется приближенным результатом (13.2), тогда как при $b \gg b_{\text{макс}}$ передаваемая энергия экспоненциально убывает до нуля. Этот расчет подтверждает проведенные в § 1 качественные оценки значения верхнего предела $b_{\text{макс}}$.

§ 3. Классическое и квантовомеханическое выражения для потерь энергии

Выражение (13.31) для энергии, передаваемой гармоническому осциллятору, можно использовать для вычисления энергии, теряемой на единице длины быстрой тяжелой частицей, проходящей через вещество. Предположим, что в единице объема содержится N атомов, в каждом из которых имеется Z электронов. Эти Z электронов можно разделить на группы, отмеченные индексом j ; каждая группа содержит f_j электронов с одинаковыми частотами связи ω_j . Число f_j можно назвать *силой j -го осциллятора*. Силы осцилляторов удовлетворяют очевидному соотношению $\sum_j f_j = Z$. С помощью тривиального обобщения рассуждений, приводящих к формулам (13.11) и (13.12), легко получить следующее выражение для потерь энергии тяжелой частицей:

$$\frac{dE}{dx} = 2\pi N \sum_j f_j \int_{b_{\text{мин}}}^{\infty} \Delta E_j(b) b db, \quad (13.34)$$

где величина $\Delta E_j(b)$ определяется соотношением (13.31), причем $\xi = \omega_j b / \gamma v$, а нижний предел интегрирования $b_{\text{мин}}$ устанавливается в соответствии с (13.7). Так как функция (13.31) весьма быстро спадает до нуля для больших b , нет необходимости определять верхний предел интегрирования. Интеграл от модифицированных функций Бесселя легко вычисляется, в результате чего получим следующее выражение:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m v^2} \sum_j f_j \left\{ \xi_{\text{мин}} K_1(\xi_{\text{мин}}) K_0(\xi_{\text{мин}}) - \frac{v^2}{2c^2} \xi_{\text{мин}}^2 \left[K_1^2(\xi_{\text{мин}}) - K_0^2(\xi_{\text{мин}}) \right] \right\}, \quad (13.35)$$

где $\xi_{\text{мин}} = \omega_j b_{\text{мин}} / \gamma v$. Вообще говоря, $\xi_{\text{мин}} \ll 1$. Поэтому можно упростить (13.35) с помощью приближенных соотношений (3.103). Окончательное классическое выражение для потерь энергии имеет вид

$$\frac{dE_{\text{кл}}}{dx} = 4\pi NZ \frac{z^2 e^4}{mv^2} \left(\ln B_{\text{кл}} - \frac{v^2}{2c^2} \right), \quad (13.36)$$

где аргументом логарифма является величина

$$B_{\text{кл}} = \frac{1,123\gamma v}{\langle \omega \rangle b_{\text{мин}}} = \frac{1,123\gamma^2 m v^3}{ze^2 \langle \omega \rangle}. \quad (13.37)$$

Входящее в $B_{\text{кл}}$ среднее значение частоты $\langle \omega \rangle$ определяется как среднее геометрическое

$$Z \ln \langle \omega \rangle = \sum_j f_j \ln \omega_j. \quad (13.38)$$

Приведенный результат (13.36) — (13.38) был впервые получен Бором в его классической работе, посвященной определению потерь энергии (1915 г.). Наше приближенное выражение (13.13) совпадает с (13.36) во всех существенных деталях, так как слагаемое $-v^2/2c^2$ является малой поправкой даже при больших скоростях.

Формула Бора (13.36) верно описывает потери энергии для сравнительно медленных α -частиц и тяжелых ядер. Однако для электронов, мезонов, протонов и даже для быстрых α -частиц оно приводит к сильно завышенным значениям потерь энергии. Причина этого заключается в том, что для более легких частиц классическое рассмотрение уже неприменимо из-за квантовомеханических эффектов. Важнейшими квантовыми эффектами являются, во-первых, дискретность возможных значений передаваемой энергии, во-вторых, ограничения, связанные с волновой природой частиц и принципом неопределенности.

Влияние дискретности значений передаваемой энергии можно проиллюстрировать на примере вычисления классической величины переданной энергии (13.2) при $b \approx b_{\text{макс}}$. Это, грубо говоря, наименьшее значение переданной энергии, которое следует учитывать при анализе потерь энергии. Предположив для простоты, что имеется лишь одна частота связи ω_0 , находим

$$\Delta E(b_{\text{макс}}) \approx \frac{2}{\gamma^2} z^2 \left(\frac{v_0}{v} \right)^4 \hbar \omega_0, \quad (13.39)$$

где $v_0 = c/137$ — орбитальная скорость электрона в атоме водорода в основном состоянии. Так как $\hbar \omega_0$ по порядку величины совпадает с ионизационным потенциалом атома, то для быстрой частицы ($v \gg v_0$) передаваемая энергия, согласно классической формуле (13.39), очень мала по сравнению с ионизационным потенциалом или даже по сравнению с наименьшей энергией возбуждения

атома. Мы знаем, однако, что энергия должна передаваться определенными квантами. Столь малая величина энергии, как определяемая соотношением (13.39), просто не может быть поглощена атомом. Отсюда следует, что наше классическое рассмотрение уже неприменимо в этой области. Естественно было бы считать, что классическая формула (13.2) дает правильный результат лишь в том случае, когда вычисленная по ней передаваемая энергия велика по сравнению с характерными энергиями возбуждения атома. Это требование устанавливает совершенно иной верхний предел для значений прицельного параметра. К счастью, классический результат все же применим в статистическом смысле, если интерпретировать его содержание несколько иным образом.

Квантовое рассмотрение показывает некорректность классического утверждения о передаче сколь угодно малых количеств энергии при каждом соударении. Однако если рассмотреть большое число соударений, то окажется, что передача малых количеств энергии *может* осуществляться в среднем. При этом передача энергии происходит не при каждом соударении. В большинстве соударений она отсутствует, но некоторое малое число соударений сопровождается заметным возбуждением атомов. Результирующее среднее значение передаваемой энергии по многим соударениям оказывается малым. В указанном статистическом смысле устраняется противоречие между квантовым механизмом дискретной передачи энергии и классическим подходом, допускающим любое значение передаваемой энергии. Для получения полного количественного согласия необходимо использовать квантовомеханические выражения для сил осциллятора f_j и резонансных частот ω_j .

Второй важный квантовый эффект связан с волновой природой частиц. Принцип неопределенности накладывает известные ограничения, сужающие область применимости классических представлений об орбитальном движении. Как известно, при попытке приближенно воспроизвести классическую траекторию путем рассмотрения движения волнового пакета его путь может быть установлен лишь с точностью до неопределенности в координате $\Delta x \gtrsim \hbar/p$. Для прицельных параметров b , меньших этой неопределенности, классические понятия теряют силу. Так как частицы в силу своей волновой природы в некотором смысле «размазаны» в области с размерами порядка Δx , можно ожидать, что правильное квантовомеханическое значение потерь энергии будет при $b < \Delta x$ соответствовать гораздо меньшим значениям передаваемой энергии, чем это следует из (13.2). Таким образом, величина $\Delta x \sim \hbar/p$ является квантовым аналогом минимального прицельного параметра (13.6).

Каждая из двух соударяющихся частиц имеет волновую природу. При заданной относительной скорости неопределенность

координаты обуславливается более легкой частицей. Для тяжелой налетающей частицы, соударяющейся с электроном, импульс электрона в системе отсчета, относительно которой налетающая частица покоится (и которая почти совпадает с системой ЦМ), равен $p' = \gamma m v$, где m — масса электрона. Поэтому минимальное значение прицельного параметра, определяемое квантовомеханическими эффектами, равно

$$b_{\text{МИН}}^{(\text{КВ})} = \frac{\hbar}{\gamma m v} \quad (13.40)$$

Для случая электрон-электронных соударений следует действовать более осторожно и рассмотреть импульс (12.34) в системе ЦМ для случая равных масс. При этом для электронов получается следующее выражение для минимального прицельного параметра:

$$[b_{\text{МИН}}^{(\text{КВ})}]_{\text{эл}} = \frac{\hbar}{m c} \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}. \quad (13.41)$$

В рассматриваемом случае следует при вычислении величины B , входящей как аргумент логарифма в выражение для dE/dx , подставлять в (13.14) наибольшее из двух минимальных прицельных параметров (13.6) и (13.40). Отношение классического значения $b_{\text{МИН}}$ к квантовому равно

$$\eta = \frac{z e^2}{\hbar v}. \quad (13.42)$$

При $\eta > 1$ следует пользоваться классической формулой Бора. Это, очевидно, имеет место для медленных частиц с большим зарядом в полном согласии с наблюдениями. При $\eta < 1$ квантовомеханическое значение минимального прицельного параметра больше классического. При этом выражение для энергетических потерь следует изменить. Аргумент логарифма в формуле (13.13) принимает в этом случае вид

$$B_{\text{КВ}} = \frac{b_{\text{МАКС}}}{b_{\text{МИН}}^{(\text{КВ})}} = \eta B = \frac{\gamma^2 m v^2}{\hbar \langle \omega \rangle}. \quad (13.43)$$

Соотношение (13.13) с квантовомеханическим значением $B_{\text{КВ}}$ (13.43) является хорошим приближением к формуле Бете (1930 г.), полученной при строгом квантовомеханическом подходе. Формула Бете с учетом эффекта близких соударений имеет вид

$$\frac{dE_{\text{КВ}}}{dx} = 4\pi N Z \frac{z^2 e^4}{m v^2} \left[\ln \left(\frac{2\gamma^2 m v^2}{\hbar \langle \omega \rangle} \right) - \frac{v^2}{c^2} \right]. \quad (13.44)$$

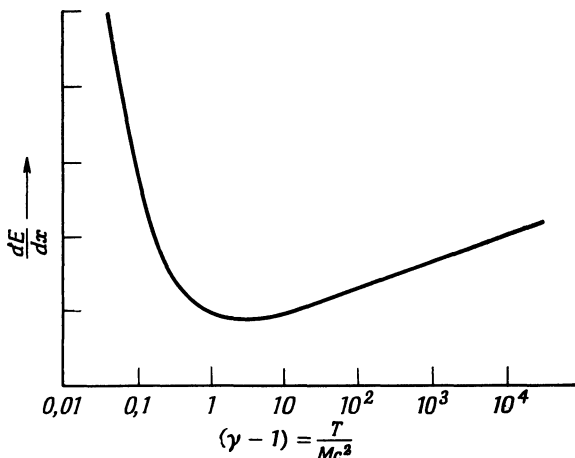
Она отличается от приближенного выражения лишь малым поправочным членом $-v^2/c^2$ и множителем 2 в аргументе логарифма.

Учет квантовых эффектов для электронов с помощью соотношения (13.41) приводит к следующему модифицированному кванто-

вомеханическому выражению для аргумента логарифма:

$$B_{\text{эл}} \approx (\gamma - 1) \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} \frac{mc^2}{\hbar \langle \omega \rangle} \rightarrow \frac{\gamma^{3/2}}{\sqrt{2}} \frac{mc^2}{\hbar \langle \omega \rangle}, \quad (13.45)$$

где последнее выражение справедливо в предельном случае больших энергий. Хотя для электронов существуют и другие квантовые



Ф и г. 13.4. Зависимость потерь энергии от кинетической энергии частицы,

эффекты, например влияние спина и обменных сил, основной квантовый эффект учитывается соотношением (13.45).

Качественно характер зависимости потерь от энергии частицы как в классическом, так и в квантовомеханическом случаях показан на фиг. 13.4. При низких энергиях изменение потерь определяется в основном зависимостью $\sim v^{-2}$, поскольку логарифм меняется медленно. При высоких энергиях, когда $v \rightarrow c$, потери вновь возрастают, изменяясь как $\ln \gamma$ при $\gamma \gg 1$. Формула Бете хорошо согласуется с экспериментом для всех быстрых частиц с $\eta < 1$, если их энергия не слишком высока (см. § 4).

Здесь уместно пояснить физический смысл квадратичной зависимости $B_{\text{кв}}$ от γ в (13.43). Одна степень γ появляется из-за увеличения максимальной энергии (13.5), которая может быть передана при лобовых соударениях. Появление второй степени γ связано с релятивистским изменением распределения электромагнитного поля (11.118) быстрой частицы, что приводит к уменьшению времени соударений (11.120) и возрастанию $b_{\text{макс}}$ (13.9). Релятивистская частица более эффективно передает энергию на больших расстояниях, чем нерелятивистская.

В ряде случаев интересно знать величину потерь энергии на единице длины, обусловленных соударениями, в которых передача энергии в одном соударении не превышает некоторой определенной величины ε . Так, например, в фотографических эмульсиях пробег электронов с энергией больше 10 кэв превышает средние линейные размеры зерен бромистого серебра. Поэтому энергия, расходуемая на почернение зерен серебра, соответствует соударениям, при которых передаваемая энергия меньше 10 кэв. В классическом приближении искомое выражение для потерь энергии можно получить из формулы Бора (13.36), выбирая минимальный прицельный параметр $b_{\text{мин}}(\varepsilon)$ таким образом, чтобы передаваемая энергия (13.2) была равна ε . В результате получаем

$$b_{\text{мин}}(\varepsilon) = \frac{2ze^2}{v(2m\varepsilon)^{1/2}}. \quad (13.46)$$

Отсюда мы приходим к формуле типа (13.36), в которой аргументом логарифма служит величина

$$B_{\text{кл}}(\varepsilon) = \frac{1,123\gamma v^2(2m\varepsilon)^{1/2}}{2ze^2 \langle \omega \rangle}. \quad (13.47)$$

Как уже говорилось выше, квантовомеханическое выражение для потерь энергии получается из классической формулы с помощью замены [см. (13.43)]

$$B_{\text{кв}} = \eta B_{\text{кл}} = \frac{ze^2}{\hbar v} B_{\text{кл}}. \quad (13.48)$$

Следовательно, квантовомеханическое выражение для потерь на единице длины, обусловленных соударениями с передачей энергии, меньшей ε , должно иметь вид

$$\frac{dE_{\text{кв}}}{dx}(\varepsilon) = 4\pi NZ \frac{z^2 e^4}{mv^2} \left[\ln B_{\text{кв}}(\varepsilon) - \frac{v^2}{2c^2} \right], \quad (13.49)$$

где

$$B_{\text{кв}}(\varepsilon) = \lambda \frac{\gamma v (2m\varepsilon)^{1/2}}{\hbar \langle \omega \rangle}. \quad (13.50)$$

Константа λ — численный множитель порядка единицы, значение которого можно определить лишь с помощью детальных квантовомеханических расчетов. Согласно расчетам Бете (1930 г.), $\lambda = 1$. Квантовомеханическое значение $B_{\text{кв}}(\varepsilon)$ можно представить следующим образом:

$$B_{\text{кв}}(\varepsilon) = \frac{b_{\text{макс}}}{b_{\text{мин}}^{(\text{кв})}(\varepsilon)}, \quad (13.51)$$

где $b_{\text{макс}}$ определяется согласно (13.9), а минимальный прицельный параметр равен

$$b_{\text{мин}}^{(\text{КВ})}(\epsilon) \approx \frac{\hbar}{\Delta p} \approx \frac{\hbar}{(2m\epsilon)^{1/2}}. \quad (13.52)$$

Таким образом, поскольку неопределенность полученного импульса Δp не должна превышать импульса, передаваемого при соударении, то классическая траектория может быть определена лишь с точностью, по порядку величины не лучшей, чем (13.52). В противном случае мы не можем быть уверены, что передаваемая энергия действительно меньше ϵ . Следовательно, соотношение (13.52) устанавливает естественный квантовомеханический нижний предел для классического представления об орбитах частиц.

§ 4. Влияние плотности на потери энергии при соударении

Экспериментально наблюдаемые потери энергии при прохождении частиц всех видов в различных материальных средах для не слишком релятивистских частиц весьма точно описываются соотношением (13.44) [или (13.36), если $\eta > 1$]. Однако для ультрарелятивистских частиц наблюдаемые потери несколько меньше рассчитываемых с помощью соотношения (13.44), особенно для веществ с большой плотностью. На графике зависимости dE/dx от энергии частиц типа фиг. 13.4 это сказывается в том, что реальная кривая потерь энергии возрастает после прохождения минимума приблизительно вдвое медленнее, чем расчетная; это соответствует зависимости аргумента логарифма в (13.44) не от второй, а от первой степени γ . Потери энергии в фотоэмульсиях, измеряемые по плотности зерен серебра, после прохождения минимума очень слабо возрастают, а затем образуют на графике плато, простирающееся до наивысших исследованных значений энергии частиц. Это также соответствует понижению степени γ на единицу, в данном случае в выражении (13.50) для $B_{\text{КВ}}(\epsilon)$.

Указанное уменьшение потерь энергии частицы, известное как эффект плотности (или поляризационный эффект), впервые было исследовано теоретически Ферми (1940 г.). До сих пор мы неявно принимали одно допущение, которое перестает выполняться для плотных сред. Мы считали возможным вычислять вначале действие поля налетающей частицы на отдельный атомный электрон, а затем простым суммированием определять передачу энергии всем электронам для всех атомов с $b_{\text{мин}} < b < b_{\text{макс}}$. Но величина $b_{\text{макс}}$ очень велика по сравнению с размерами атома, особенно при больших γ . Следовательно, при значении b , сравнимом с $b_{\text{макс}}$, в плотных средах между траекторией налетающей частицы и рассматривае-

мым атомом находится большое число атомов. Поле быстрой частицы влияет на эти атомы, что в свою очередь приводит к появлению возмущающих полей в месте расположения рассматриваемого атома. Иными словами, в плотных средах вследствие поляризации диэлектрика поле частицы в свободном пространстве заменяется характерным макроскопическим полем в диэлектрике. Это изменение поля, обусловленное поляризацией среды, следует учитывать при расчете энергии, передаваемой в дальних соударениях. В близких соударениях налетающая частица взаимодействует одновременно лишь с одним атомом. Поэтому в данном случае применимы расчеты, основанные на значении поля свободной частицы без учета поляризационных эффектов. Значение прицельного параметра, разграничивающее близкие и дальние соударения, по порядку величины совпадает с атомными размерами. Так как окончательный результат получается сопряжением двух логарифмических величин, нет необходимости определять разграничивающее значение b с большой точностью.

Определим теперь потери энергии при дальних соударениях ($b \geq a$) в предположении, что электромагнитные поля в веществе можно рассчитывать, считая среду непрерывной и имеющей макроскопическую диэлектрическую проницаемость $\epsilon(\omega)$. Если a есть величина порядка размеров атома, то это приближение перестает выполняться для дальних соударений со значениями b , близкими к нижнему пределу, но справедливо для подавляющего большинства соударений.

Задача об определении электрического поля быстрой частицы, движущейся с постоянной скоростью в среде, легче всего решается с помощью преобразования Фурье. Осуществляя в соответствии с общим правилом фурье-преобразование потенциалов $A_\mu(x)$ и плотности источников $J_\mu(x)$ по координатам и времени

$$F(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega F(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \quad (13.53)$$

приходим к следующим волновым уравнениям для спектральных амплитуд:

$$\begin{aligned} \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \Phi(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{4\pi}{\epsilon(\omega)} \varrho(\mathbf{k}, \omega), \\ \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega). \end{aligned} \quad (13.54)$$

Появление в (13.54) диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega)$ определяется тем, что в макроскопические уравнения Максвелла входит вектор электрической индукции \mathbf{D} . Фурье-преобразование плотностей заряда и тока

$$\begin{aligned} \varrho(\mathbf{x}, t) &= ze\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{v}\varrho(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (13.55)$$

легко выполняется; при этом получаем

$$\begin{aligned} \varrho(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{ze}{2\pi} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \\ \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) &= v\varrho(\mathbf{k}, \omega). \end{aligned} \quad (13.56)$$

Как следует из (13.54), фурье-преобразование потенциалов дает

$$\Phi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2ze}{\varepsilon(\omega)} \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)}, \quad (13.57)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon(\omega) \frac{v}{c} \Phi(\mathbf{k}, \omega).$$

Используя соотношения, выражающие электромагнитные поля через потенциалы, для фурье-амплитуд полей получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) &= i \left[\frac{\omega \varepsilon(\omega)}{c} \frac{v}{c} - \mathbf{k} \right] \Phi(\mathbf{k}, \omega), \\ \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) &= i \varepsilon(\omega) \mathbf{k} \times \frac{v}{c} \Phi(\mathbf{k}, \omega). \end{aligned} \quad (13.58)$$

Как видно из формулы (13.23), для вычисления потерь энергии нужно знать временное фурье-представление электрического поля на расстоянии b по нормали от траектории частицы, движущейся вдоль оси z . Очевидно,

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) e^{ibk_1}, \quad (13.59)$$

где точка наблюдения имеет координаты $(b, 0, 0)$. Чтобы проиллюстрировать метод вычисления $\mathbf{E}(\omega)$, найдем $E_3(\omega)$ — составляющую вектора $\mathbf{E}(\omega)$, параллельную вектору \mathbf{v} . Согласно (13.57) и (13.58),

$$E_3(\omega) = \frac{2ize}{\varepsilon(\omega)} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{ibk_1} \left[\frac{\omega \varepsilon(\omega) v}{c^2} - k_3 \right] \frac{\delta(\omega - vk_3)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)}. \quad (13.60)$$

Интегрирование по k_3 может быть проведено сразу. В результате имеем

$$E_3(\omega) = -\frac{2ize\omega}{(2\pi)^{3/2}v^2} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 e^{ibk_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{k_2^2 + k_1^2 + \lambda^2}, \quad (13.61)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) = \frac{\omega^2}{v^2} [1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)]. \quad (13.62)$$

Интеграл по k_2 равен $\pi/(\lambda^2 + k_1^2)^{1/2}$; таким образом, $E_3(\omega)$ можно переписать в виде

$$E_3(\omega) = -\frac{ize\omega}{\sqrt{2\pi v^2}} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibk_1}}{(\lambda^2 + k_1^2)^{1/2}} dk_1. \quad (13.63)$$

Оставшийся интеграл имеет тот же вид, что и интеграл в (13.28). Окончательно получим

$$E_3(\omega) = -\frac{ize\omega}{v^2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right] K_0(\lambda b), \quad (13.64)$$

где знак квадратного корня при определении λ с помощью (13.62) выбирается так, чтобы значение λ находилось в четвертом квадранте. Аналогичные вычисления приводят к следующим выражениям для других составляющих полей:

$$\begin{aligned} E_1(\omega) &= \frac{ze}{v} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\lambda}{\varepsilon(\omega)} K_1(\lambda b), \\ B_2(\omega) &= \varepsilon(\omega) \beta E_1(\omega). \end{aligned} \quad (13.65)$$

Как легко видеть, в предельном случае $\varepsilon(\omega) \rightarrow 1$ выражения для полей (13.64) и (13.65) переходят в ранее полученные выражения (13.30) и (13.29).

Для определения энергии, передаваемой атому при соударении с прицельным параметром b , достаточно представить (13.23) в более общем виде

$$\Delta E(b) = 2e \sum_j f_j \operatorname{Re} \int_0^{\infty} (-i\omega) \mathbf{x}_j(\omega) \cdot \mathbf{E}^*(\omega) d\omega, \quad (13.66)$$

где $\mathbf{x}_j(\omega)$ — амплитуда колебаний атомного электрона j -го типа. Вместо того чтобы воспользоваться формулой (13.19) для $\mathbf{x}_j(\omega)$, выразим сумму дипольных моментов через поляризуемость молекул и тем самым через диэлектрическую проницаемость

$$e \sum_j f_j \mathbf{x}_j(\omega) = \frac{1}{4\pi N} [\varepsilon(\omega) - 1] \mathbf{E}(\omega), \quad (13.67)$$

где N — число атомов в единице объема. При этом выражение для передаваемой энергии принимает вид

$$\Delta E(b) = \frac{1}{2\pi N} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} (-i\omega) \varepsilon(\omega) |\mathbf{E}(\omega)|^2 d\omega. \quad (13.68)$$

Потери энергии на единице длины за счет соударений с прицельными параметрами $b \geq a$ можно, очевидно, записать как

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = 2\pi N \int_a^{\infty} \Delta E(b) b db. \quad (13.69)$$

Подставляя в (13.68) и (13.69) выражения для полей (13.64) и (13.65), после ряда вычислений приходим к результату, полученному Ферми:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = \frac{2}{\pi} \frac{(ze)^2}{v^2} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} i\omega \lambda^* a K_1(\lambda^* a) K_0(\lambda a) \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right] d\omega, \quad (13.70)$$

где λ определяется соотношением (13.62). Этот же результат можно получить более изящно, вычисляя электромагнитную энергию, излученную через поверхность цилиндра радиусом a , окружающего траекторию налетающей частицы. В силу закона сохранения энергии эта величина совпадает с энергией, теряемой частицей в единицу времени. Таким образом,

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = \frac{1}{v} \frac{dE}{dt} = -\frac{c}{4\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi a B_2 E_3 dz. \quad (13.71)$$

Интеграл по dz для данного момента времени эквивалентен интегралу по всем моментам времени для фиксированной точки на цилиндре. Введя $dz = v dt$, получим

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = -\frac{ca}{2} \int_{-\infty}^{\infty} B_2(t) E_3(t) dt. \quad (13.72)$$

Обычным способом можно преобразовать его в интеграл по частотам:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = -ca \operatorname{Re} \int_0^{\infty} B_2^*(\omega) E_3(\omega) d\omega. \quad (13.73)$$

Используя выражения для полей (13.64) и (13.65), вновь приходим к результату Ферми (13.70).

Выражение Ферми (13.70) для потерь энергии внешне мало похоже на приведенные нами ранее результаты, например формулу (13.35). Однако если влияние поляризационных эффектов незначительно, то оно дает прежний результат. Например, для нерелятивистских частиц ($\beta \ll 1$), как ясно из (13.62), величина $\lambda \approx \omega/v$ не зависит от $\varepsilon(\omega)$. В этом случае модифицированные функции Бесселя в (13.70) действительны. Значение интеграла определяется лишь мнимой частью функции $\varepsilon^{-1}(\omega)$. Пренебрегая поляризацион-

ной поправкой Лоренца (4.67) для внутреннего поля в атоме, можно представить диэлектрическую проницаемость в виде

$$\varepsilon(\omega) \approx 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_j}, \quad (13.74)$$

где при вычислении дипольного момента использовано выражение (13.19). Если второй член предполагается малым, то мнимую часть функции $\varepsilon^{-1}(\omega)$ легко вычислить и подставить ее в (13.70). При этом в том же приближении, которое использовалось при выводе соотношений (13.24) — (13.26), интеграл по ω может быть преобразован к нерелятивистскому выражению (13.35). Если пренебречь отличием λ от $\omega/\gamma v$, но не делать других допущений, то (13.70) приводит точно к формуле Бора (13.35).

Поляризационный эффект проявляется, очевидно, в комплексности аргумента модифицированных функций Бесселя, что соответствует учету члена с $\varepsilon(\omega)$ в (13.62). Так как величина $\varepsilon(\omega)$ входит в (13.62) в виде произведения на β^2 , ясно, что этот эффект фактически заметен лишь при больших энергиях. Подробные вычисления для всех энергий с использованием явного выражения для $\varepsilon(\omega)$ типа (13.74) весьма сложны и не приводят к сколько-нибудь наглядным результатам. Поэтому мы ограничимся лишь рассмотрением ультрарелятивистского предельного случая ($\beta \approx 1$). Кроме того, так как в интеграле по ω наиболее важны оптические частоты, а радиус a имеет порядок атомных размеров, величина $|\lambda a| \sim (\omega a/c) \ll 1$. Следовательно, можно использовать приближенные выражения для функций Бесселя (3.103), справедливые в предельном случае малых аргументов. Выражение Ферми (13.70) в ультрарелятивистском предельном случае принимает вид

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} \approx \frac{2}{\pi} \frac{(ze)^2}{c^2} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} i\omega \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - 1 \right] \times \\ \times \left\{ \ln \left(\frac{1,123c}{\omega a} \right) - \frac{1}{2} \ln [1 - \varepsilon(\omega)] \right\} d\omega. \quad (13.75)$$

Здесь уместно подчеркнуть, что аргумент второго логарифмического члена в действительности равен $[1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)]$. В частном случае $\varepsilon = 1$ этот логарифмический член дает множитель γ под логарифмом, что соответствует ранее приведенному результату (13.36). Если же $\varepsilon(\omega) \neq 1$, то этот множитель можно переписать в виде $[1 - \varepsilon(\omega)]$, вследствие чего из аргумента логарифма исчезает одна степень γ в согласии с экспериментом.

Интеграл по положительным действительным ω в (13.75), где $\varepsilon(\omega)$ определяется согласно (13.74), легко преобразуется с помощью теоремы Коши в интеграл по положительным чисто мнимым ω .

В этом случае величина $\varepsilon(\omega)$ становится чисто действительной на пути интегрирования. Следовательно, значение действительной части интеграла будет определяться лишь фазами логарифмов. В приближении $\Gamma_j \ll \omega_j$ результат интегрирования можно представить в простом виде

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = \frac{(ze)^2\omega_p^2}{c^2} \ln\left(\frac{1,123c}{a\omega_p}\right), \quad (13.76)$$

где ω_p — электронная плазменная частота

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi NZe^2}{m}. \quad (13.77)$$

Соответствующее релятивистское выражение без учета поляризационного эффекта, как следует из (13.36), имеет вид

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = \frac{(ze)^2\omega_p^2}{c^2} \left[\ln\left(\frac{1,123\gamma c}{a\langle\omega\rangle}\right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (13.78)$$

Сравнение показывает, что учет поляризационного эффекта приводит к более простому асимптотическому выражению для потерь энергии, которые перестают зависеть от деталей структуры атома [величина $\langle\omega\rangle$, описываемая соотношением (13.38), не входит в (13.76)] и определяются лишь числом электронов в единице объема, входящим в ω_p . Потери энергии для ультрарелятивистских частиц в двух веществах с совершенно различной структурой атомов будут одинаковы, если плотность электронов в этих веществах одинакова.

Так как в литературе приведено большое число рассчитанных по формуле Бете (13.44) кривых потерь энергии, очень часто оказывается удобным знать величину уменьшения потерь, обусловленную влиянием поляризации. Это уменьшение определяется разностью выражений (13.78) и (13.76)

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \Delta\left(\frac{dE}{dx}\right) = \frac{(ze)^2\omega_p^2}{c^2} \left[\ln\left(\frac{\gamma\omega_p}{\langle\omega\rangle}\right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (13.79)$$

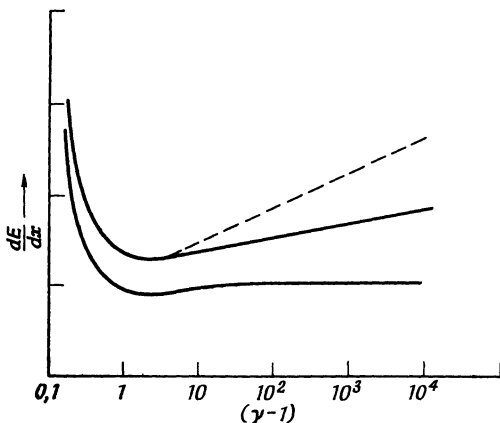
Для фотоэмульсий энергетические потери определяются соотношениями (13.49) и (13.50) с $\varepsilon \approx 10$ кэв. При учете поляризационной поправки потери при больших энергиях стремятся к постоянной величине

$$\frac{dE(\varepsilon)}{dx} \rightarrow \frac{(ze)^2\omega_p^2}{2c^2} \ln\left(\frac{2mc^2\varepsilon}{\hbar^2\omega_p^2}\right). \quad (13.80)$$

Для бромистого серебра $\hbar\omega_p \approx 48$ эв. Для однозарядных частиц отношение величины потерь (13.80) к глотности оказывается равным приблизительно $1,02$ Мэв·см²/г. Это значение потерь энергии хорошо согласуется с экспериментальными данными; оно соот-

ветствует возрастанию потерь относительно минимального значения менее чем на 10%. На фиг. 13.5 изображены типичные кривые полных потерь и потерь с передачей энергии, не превышающей 10 кэв. Пунктирная кривая соответствует формуле Бете для полных потерь без учета поляризационного эффекта.

Существует интересная связь между выражением Ферми (13.70) для потерь энергии и излучением Вавилова — Черенкова. Выражение (13.70) определяет энергию, передаваемую среде на расстояниях, больших a . Переходя к пределу $a \rightarrow \infty$, мы выясним,



Ф и г. 13.5 Зависимость потерь энергии от кинетической энергии частицы. Пунктирная кривая получена без учета поляризационного эффекта, сплошные кривые — с учетом этого эффекта (верхняя кривая изображает полные потери энергии, нижняя — потери за счет соударений с передачей энергии меньше 10 кэв).

не может ли какая-либо часть энергии уходить в бесконечность. В этом случае можно было бы говорить об излучении энергии. При $a \rightarrow \infty$ можно воспользоваться асимптотическими выражениями (3.104) для функций K . Тогда формула (13.70) приводится к виду

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{dE}{dx} \right)_{v > a} = \frac{(ze)^2}{v^2} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} i\omega \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right] \left(\frac{\lambda^*}{\lambda} \right)^{1/2} e^{-(\lambda + \lambda^*)a} d\omega. \quad (13.81)$$

Если действительная часть λ отлична от нуля, наличие экспоненциального множителя обеспечивает быстрое убывание потерь энергии до нуля на больших расстояниях. Как очевидно из (13.62), указанное условие всегда выполняется для сред с поглощением, поскольку в этом случае $\varepsilon(\omega)$ имеет положительную мнимую часть. Однако при действительных значениях $\varepsilon(\omega)$ величина λ может быть чисто мнимой для некоторых ω . Это имеет место при $\beta^2 > 1/\varepsilon(\omega)$,

т. е. в том случае, когда скорость частицы превышает фазовую скорость света в среде. В этом и состоит условие существования излучения Вавилова — Черенкова. Для таких частот $\lambda = -i | \lambda |$. При этом экспоненциальный множитель обращается в единицу и, следовательно,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{dE}{dx} \right)_{b > a} = \frac{(ze)^2}{c^2} \int_{\varepsilon(\omega) > (1/\beta^2)} \omega \left[1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon(\omega)} \right] d\omega. \quad (13.82)$$

Так как полученное выражение не зависит от радиуса цилиндра a , оно представляет собой истинное излучение. Это выражение полностью совпадает с формулой Франка и Тамма (1937 г.) для полной энергии излучения Вавилова — Черенкова на единице пути. Более детально излучение Вавилова — Черенкова как радиационный процесс будет рассмотрено в гл. 14, § 9.

Для сред, в которых поляризационные эффекты играют существенную роль в процессе потерь энергии, поглощение почти всегда столь велико, что возбуждаемое излучение Вавилова — Черенкова поглощается в непосредственной близости от траектории частицы.

§ 5. Потери энергии в электронной плазме

Для рассмотрения потерь энергии нерелятивистской частицы при прохождении через плазму можно воспользоваться методом, примененным нами при исследовании поляризационного эффекта для релятивистских частиц. Как было показано в гл. 10, § 10, в плазме следует различать две области линейных масштабов. Для размеров, больших по сравнению с дебаевским радиусом экранирования k_D^{-1} , определяемым соотношением (10.106), плазма ведет себя как непрерывная среда, в которой заряженные частицы участвуют в коллективном движении, каковыми являются, например, колебания плазмы. На расстояниях, малых по сравнению с k_D^{-1} , процессы в плазме определяются свойствами отдельных частиц, причем взаимодействие частиц описывается экранированным потенциалом двухчастичного взаимодействия (10.113). Это означает, что при вычислении потерь энергии дебаевский радиус играет ту же роль, которую играют атомные размеры при исследовании поляризационных эффектов. Для близких соударений можно пренебречь коллективными эффектами и вычислить соответствующий вклад в потери энергии, пользуясь потенциалом (10.113). Мы оставляем эту задачу читателям для самостоятельного решения (см. задачу 13.3). Для дальних соударений, соответствующих значениям прицельных параметров, для которых $bk_D > 1$, коллективные эффекты могут быть рассчитаны по формуле Ферми (13.70) с использованием соответствующего значения диэлектрической проницаемости

плазмы. Потери при дальних соударениях соответствуют возбуждению в среде плазменных колебаний.

Для нерелятивистских частиц, согласно формуле (13.70), получается следующее выражение для потерь энергии, соответствующих прицельным параметрам $b > k_D^{-1}$:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{k_D b > 1} \approx \frac{2}{\pi} \frac{(ze)^2}{v^2} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{i\omega}{\varepsilon(\omega)} \left[\frac{\omega}{k_D v} K_1\left(\frac{\omega}{k_D v}\right) K_0\left(\frac{\omega}{k_D v}\right) \right] d\omega. \quad (13.83)$$

Наиболее существенный вклад в интеграл вносят частоты $\omega \approx \omega_p$, для которых аргумент функций Бесселя имеет величину порядка

$$\frac{\omega_p}{k_D v} = \frac{\langle u^2 \rangle^{1/2}}{v}. \quad (13.84)$$

Для частиц, скорость которых меньше тепловых, значение аргумента велико по сравнению с единицей. Вследствие экспоненциального убывания функций Бесселя при больших значениях аргумента потери энергии на возбуждение плазменных колебаний такими частицами пренебрежимо малы. Энергия теряется ими лишь при близких парных соударениях. Если же скорость сравнима с тепловой или превышает ее, то частица может терять значительную энергию на возбуждение коллективных колебаний. Энергия этих колебаний концентрируется, очевидно, в окрестности траектории частицы до расстояний порядка $(v/\langle u^2 \rangle^{1/2})k_D^{-1}$ от нее.

Для частиц, движущихся со скоростями, существенно большими тепловых, можно использовать приближенные выражения для функций Бесселя при малых значениях аргумента. При этом (13.83) принимает вид

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{k_D b > 1} \approx \frac{2}{\pi} \frac{(ze)^2}{v^2} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{i\omega}{\varepsilon(\omega)} \right] \ln\left(\frac{1,123k_D v}{\omega}\right) d\omega. \quad (13.85)$$

Рассмотрим случай, когда диэлектрическая проницаемость среды, обладающей затуханием, определяется простым выражением [ср. (7.93)]

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\Gamma}. \quad (13.86)$$

Постоянная затухания Γ считается малой по сравнению с ω_p . Интересующее нас выражение

$$\operatorname{Re} \left[\frac{i\omega}{\varepsilon(\omega)} \right] = \omega_p^2 \frac{\omega^2 \Gamma}{(\omega^2 - \omega_p^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \quad (13.87)$$

имеет обычный резонансный характер [ср., например, (13.24)]. В предельном случае $\Gamma \ll \omega_p$ вычисление интеграла в (13.85) при-

водит к простому результату

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{k_D b > 1} \approx \frac{(ze)^2}{v^2} \omega_p^2 \ln\left(\frac{1,123k_D v}{\omega_p}\right) \quad (13.88)$$

Объединяя это выражение с результатом задачи 13.3, получаем значение полных потерь энергии частицы, движущейся в плазме. Наличие в аргументе логарифма величины ω_p связано с тем, что частица теряет свою энергию квантами $\hbar\omega_p$ аналогично тому, как наличие средней частоты $\langle\omega\rangle$ в выражении (13.44) указывает на то, что энергия теряется путем квантовых переходов в атомах. Дискретность потерь энергии проявляется при прохождении электронов через тонкие металлические фольги. Это явление может быть использовано для определения эффективной плазменной частоты в металлах.

§ 6. Упругое рассеяние быстрых частиц атомами

В предыдущих параграфах были рассмотрены потери энергии частицами при прохождении через вещество. При этом предполагалось, что частица движется по прямолинейной траектории. В действительности это предположение не выполняется строго. Как уже отмечалось в § 1, любая передача импульса между взаимодействующими частицами приводит к их отклонению на некоторый угол. В вводных замечаниях к настоящей главе мы уже говорили о том, что соударения с электронами обуславливают потери энергии, тогда как соударения с атомами определяют рассеяние. Если пренебречь экранированием кулоновского поля ядра атомными электронами, то угловое отклонение, испытываемое быстрой частицей с импульсом $p = \gamma Mv$ и зарядом ze при прохождении на прицельном расстоянии b от тяжелого ядра с зарядом Ze , определяется, согласно (13.3), выражением

$$\theta \approx \frac{2zZe^2}{p v b}. \quad (13.89)$$

Дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma/d\Omega$ (имеющее размерность площади на единицу телесного угла на атом) определяется соотношением

$$n b db d\varphi = n \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\varphi, \quad (13.90)$$

где n — число частиц, падающих на единичную площадку в единицу времени. Левая часть равенства (13.90) определяет число частиц со значениями прицельных параметров от b до $b + db$, попадающих за единицу времени в область азимутальных углов между φ и $\varphi + d\varphi$. В правой части стоит число частиц, рассеянных за еди-

ницу времени в направлении, определяемом полярными углами (θ, φ) в элемент телесного угла $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. Соотношение (13.90) выражает закон сохранения числа частиц, так как между θ и b имеется функциональная связь. Классическое выражение для дифференциального сечения рассеяния можно поэтому переписать в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (13.91)$$

Здесь следует брать абсолютное значение производной, так как, вообще говоря, db и $d\theta$ могут иметь противоположные знаки, а сечение рассеяния, по определению, — положительная величина. Если b является многозначной функцией θ , то в (13.91) следует взять сумму по всем значениям b .

Учитывая соотношение (13.89), связывающее b и θ , можно найти отнесенное к одному атому Резерфордское сечение рассеяния на малые углы

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \left(\frac{2zZe^2}{pv} \right)^2 \frac{1}{\theta^4}. \quad (13.92)$$

Заметим, что все Z электронов атома дают сечение рассеяния, в Z раз меньшее сечения рассеяния на ядре. Поэтому влиянием электронов можно пренебречь, за исключением их экранирующего действия. Закон Резерфорда (13.92) для рассеяния на малые углы оказывается справедливым и при квантовомеханическом рассмотрении независимо от спина падающих частиц. Для больших углов следует учитывать спиновые эффекты, но для нерелятивистских частиц и в квантовомеханическом случае остается справедливой классическая формула Резерфорда, вытекающая из (13.4):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{2Mv^2} \right)^2 \text{cosec}^4 \frac{\theta}{2}. \quad (13.93)$$

Так как наиболее интенсивное рассеяние происходит для углов $\theta \ll 1$ и даже при $\theta = \pi/2$ выражение для малых углов (13.92) не отличается от формулы Резерфорда больше чем на 30%, то выражение (13.92) дает вполне удовлетворительные по точности результаты для всех углов, для которых справедливо описание с помощью центрального неэкранированного кулоновского поля.

Отклонения от кулоновского приближения сказываются при очень больших и очень малых углах, соответствующих малым и большим прицельным параметрам. При больших значениях b вследствие экранирующего действия атомных электронов потенциал спадает быстрее, чем по закону $1/r$. Согласно модели Ферми — Томаса, потенциал можно приближенно описать выражением

$$V(r) \approx \frac{zZe^2}{r} e^{-r/a}, \quad (13.94)$$

где радиус атома a определяется соотношением

$$a \approx 1,4a_0Z^{-1/3}, \quad (13.95)$$

а $a_0 = \hbar^2/me^2$ — боровский радиус атома водорода. Для значений прицельного параметра порядка a или больших потенциал (13.94) быстро убывает, что приводит к гораздо более быстрому спаданию угла рассеяния с ростом b , чем следует из формулы (13.89). Это означает, что сечение рассеяния на малых углах не возрастает как θ^{-4} , а замедляет свой рост и стремится к постоянному значению при $\theta = 0$.

Простые вычисления с экранированным кулоновским потенциалом приводят к следующему общему выражению для сечения рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \left(\frac{2zZe^2}{pv} \right)^2 \frac{1}{(\theta^2 + \theta_{\min}^2)^2}, \quad (13.96)$$

где θ_{\min} — предельное значение угла, начиная с которого сечение рассеяния уже существенно отличается от значения, определяемого соотношением (13.92). Оно может быть определено как с классической точки зрения, так и с квантовомеханической. Так же как при нахождении b_{\min} , при исследовании энергетических потерь следует воспользоваться большим из полученных значений угла. Классическое значение θ_{\min} можно вычислить, положив в (13.89) $b = a$. В результате находим

$$\theta_{\min}^{(\text{кл})} \approx \frac{zZe^2}{pva}. \quad (13.97)$$

С точки зрения квантовой механики конечные размеры рассеивающей частицы означают, что траектория в классическом приближении локализована в пределах $\Delta x < a$; следовательно, минимальная неопределенность в поперечной составляющей импульса падающей частицы должна быть $\Delta p \gtrsim \hbar/a$.

Для соударений, в которых передаваемый импульс (13.1) велик по сравнению с \hbar/a , применима классическая формула Резерфорда. При меньших передачах импульса квантовомеханическое размывание должно сглаживать кривую сечения рассеяния. В результате приходим к следующему квантовомеханическому выражению для θ_{\min} :

$$\theta_{\min}^{(\text{кв})} \approx \frac{\hbar}{pa}. \quad (13.98)$$

Заметим здесь, что отношение классического значения предельного угла θ_{\min} к квантовомеханическому, равное $zZe^2/\hbar v$, согласуется с отношением (13.42) классического и квантового значений b_{\min} . Для быстрых частиц величина $Zze^2/\hbar v$ для всех веществ, кроме

веществ с очень большим Z , меньше единицы. Поэтому в качестве $\theta_{\text{мин}}$ следует использовать в расчетах квантовомеханический критерий (13.98). Подставляя в (13.98) выражение (13.95) для радиуса экранирования a , получаем

$$\theta_{\text{мин}}^{(\text{кв})} \approx \frac{Z^{1/3}}{192} \left(\frac{mc}{p} \right), \quad (13.99)$$

где p — импульс налетающей частицы ($p = \gamma Mv$), а m — масса электрона.

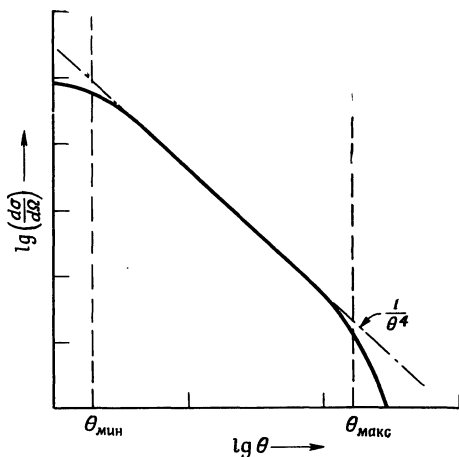
При сравнительно больших углах величина сечения рассеяния начинает заметно отличаться от значения (13.92) вследствие конечного размера ядер. Для электронов и μ -мезонов влияние размера ядра сводится к чисто электромагнитному эффекту, тогда как для π -мезонов, протонов и т. д. играют роль также специфические эффекты, связанные с природой ядерных сил. Так как все эти эффекты приводят к понижению величины сечения рассеяния по сравнению с (13.92), мы рассмотрим лишь электромагнитный эффект. Распределение заряда в ядре атома можно весьма приближенно считать однородным внутри сферы радиусом R и быстро спадающим до нуля вне этой сферы.

Это означает, что в пределах ядра электростатический потенциал меняется не как $1/r$, а по параболическому закону и имеет конечную величину при $r = 0$:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{zZe^2}{R} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2} \right) & \text{при } r < R, \\ \frac{zZe^2}{r} & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (13.100)$$

Кулоновское поле точечного заряда обладает той особенностью, что для него квантовомеханическое значение эффективного сечения рассеяния дается классической формулой Резерфорда. Поэтому для точечных ядер нет необходимости различать области углов, соответствующие прицельным параметрам, меньшим или большим квантовомеханического значения предельного прицельного параметра $b_{\text{мин}}^{(\text{кв})}$, определяемого соотношением (13.40). При учете конечного размера ядер, однако, будет сказываться конечность де-Бройлевской длины волны налетающей частицы. Если рассмотреть волновые пакеты, налетающие на ядро, которое можно считать областью с относительно постоянным (внутри сферы $r = R$) потенциалом (13.100), то результат будет существенно отличаться от простой формулы (13.92). Картина здесь весьма схожа с рассмотренной в гл. 9 дифракцией на сфере. Рассеяние происходит лишь в пределах углов, меньших $\sim \lambda/R$, где λ — соответствующая длина волны (деленная на 2π).

Для больших углов волны, идущие от различных частей рассеивающего препятствия, интерферируют, что приводит к быстрому убыванию рассеянного поля или, возможно, к появлению дополнительных максимумов и минимумов. Так как длина волны частицы



Ф и г. 13.6. Зависимость сечения рассеяния на атомах от угла, полученная с учетом экранирующего влияния электронов на малых углах и конечного размера ядер на больших углах.

$\lambda = \hbar/p$, максимальный угол рассеяния, выше которого сечение рассеяния спадает значительно быстрее, чем по закону θ^{-4} , равен

$$\theta_{\max} \approx \frac{\hbar}{\rho R}. \quad (13.101)$$

Используя простую оценку для R , а именно $R \approx \frac{1}{2} (e^2/mc^2) A^{1/3} = 1,4 A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ см, получаем для численного значения этого угла

$$\theta_{\max} \approx \frac{274}{A^{1/3}} \left(\frac{mc}{p} \right). \quad (13.102)$$

Отметим здесь, что для всех значений Z и A имеем $\theta_{\max} \gg \theta_{\min}$. Если импульс падающей частицы настолько мал, что $\theta_{\max} \gtrsim 1$, то конечность размера ядра не сказывается существенно на результатах рассеяния. Для алюминиевой мишени $\theta_{\max} = 1$ при $p \sim \sim 50$ Мэв/с, что соответствует кинетической энергии ~ 50 Мэв для электронов, 12 Мэв для μ -мезонов и 1,3 Мэв для протонов. Только при энергиях, превышающих указанные значения, конечность размеров ядер сказывается на рассеянии. Для приведенного значения импульса $\theta_{\min}^{(RV)} \sim 10^{-4}$ рад.

На фиг. 13.6 качественно показан характер зависимости сечения рассеяния от угла. Пунктирная линия соответствует приближению Резерфорда (13.92) для малых углов, сплошной линией изображена качественная зависимость сечения рассеяния с учетом экранирования и конечного размера ядер. Полное сечение рассеяния можно

определить, проинтегрировав (13.96) по всем телесным углам:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\varphi \approx 2\pi \left(\frac{2zZe^2}{\rho v} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{\theta d\theta}{(\theta_{\text{мин}}^2 + \theta^2)^2}. \quad (13.103)$$

Окончательно получим

$$\sigma \approx \pi \left(\frac{2zZe^2}{\rho v} \right)^2 \frac{1}{\theta_{\text{мин}}^2} = \pi a^2 \left(\frac{2zZe^2}{\hbar v} \right)^2, \quad (13.104)$$

причем при выводе последнего выражения было использовано значение (13.98) для $\theta_{\text{мин}}^{(\text{КВ})}$. Из полученного выражения видно, что при больших скоростях полное сечение рассеяния может быть гораздо меньше классической величины геометрической «площади сечения» атома πa^2 .

§ 7. Среднеквадратичное значение угла рассеяния и угловое распределение при многократном рассеянии

Резерфордовское рассеяние соответствует очень малым углам рассеяния даже для кулоновского поля точечного заряда; для быстрых частиц, кроме того, значение $\theta_{\text{макс}}$ мало по сравнению с единицей. Поэтому вероятность рассеяния на малые углы очень велика. Частица, проходящая слой вещества конечной толщины, испытывает многократные отклонения на малый угол и выходит из слоя под некоторым малым углом рассеяния, представляющим собой статистическую суперпозицию большого числа отклонений. Лишь весьма редко частица будет отклоняться при соударении на большой угол; так как такие события редки, частица испытывает лишь одно подобное соударение. Это обстоятельство позволяет разделить всю область углов на две части: область сравнительно больших углов, соответствующую однократно рассеянными частицам, и область очень малых углов, соответствующую частицам, подвергшимся многократному, или сложному, рассеянию. Полное угловое распределение может быть приближенно определено независимым рассмотрением обеих указанных областей. Промежуточная область так называемого множественного рассеяния дала бы плавный переход от малых углов к большим.

Для области многократного рассеяния, где происходит большое число последовательных отклонений на малые углы, симметрично распределенные относительно направления падения, важнейшей характеристикой является среднеквадратичное значение угла рассеяния для одного соударения. Оно определяется соотношением

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{\int \theta^2 (d\sigma/d\Omega) d\Omega}{\int (d\sigma/d\Omega) d\Omega}. \quad (13.105)$$

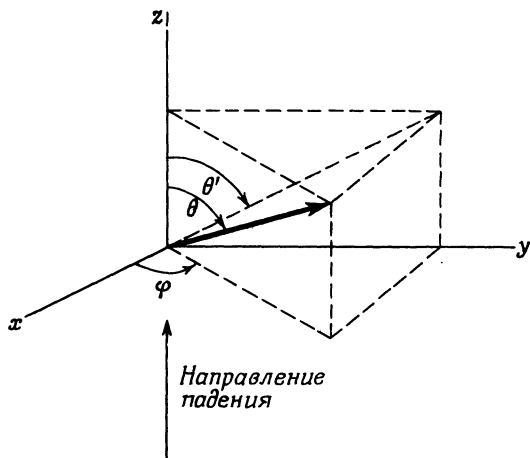
Принимая приближения, введенные в § 6, получаем

$$\langle \theta^2 \rangle = 2\theta_{\text{мин}}^2 \ln \left(\frac{\theta_{\text{макс}}}{\theta_{\text{мин}}} \right). \quad (13.106)$$

Если принять квантовое значение (13.99) для $\theta_{\text{мин}}$, а $\theta_{\text{макс}}$ определять согласно (13.102), то формулу (13.106) можно переписать в следующем виде:

$$\langle \theta^2 \rangle \approx 4\theta_{\text{мин}}^2 \ln(210Z^{-1/3}). \quad (13.107)$$

Если конечные размеры ядра незначительны (обычно это имеет место лишь для электронов, а для других частиц — только при



Ф и г. 13.7.

очень низких энергиях), то величину $\theta_{\text{макс}}$ в (13.106) следует положить равной единице. В этом случае аргумент логарифма в (13.107) принимает вид $(192Z^{-1/3}p/mc)^{1/2}$ вместо $(210Z^{-1/3})$.

Часто нас интересует проекция θ' угла рассеяния на некоторую плоскость, например плоскость фотоэмульсии или пузырьковой камеры, как показано на фиг. 13.7. Как нетрудно видеть, для малых углов

$$\langle \theta'^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle. \quad (13.108)$$

Каждое единичное отклонение описывается формулой Резерфорда (13.92), «обрезанной» должным образом при $\theta_{\text{мин}}$ и $\theta_{\text{макс}}$, со средним значением угла рассеяния или его проекции, равным нулю, и средним квадратом $\langle \theta^2 \rangle$, определяемым согласно (13.106).

Так как последовательные соударения являются независимыми событиями, то можно воспользоваться центральной предельной теоремой математической статистики, согласно которой для большого числа n таких соударений угловое распределение приближенно описывается гауссовым распределением относительно направления падения частицы со средним квадратом угла рассеяния $\langle \Theta^2 \rangle = n \langle \theta^2 \rangle$. Число соударений, претерпеваемых частицей при прохождении слоя вещества толщиной t при N атомах в единице объема, равно

$$n = N\sigma t \approx \pi N \left(\frac{2zZe^2}{pv} \right)^2 \frac{t}{\theta_{\text{мин}}^2}. \quad (13.109)$$

Отсюда для среднего квадрата угла рассеяния имеем

$$\langle \Theta^2 \rangle \approx 2\pi N \left(\frac{2zZe^2}{pv} \right)^2 \left(\ln \frac{\theta_{\text{макс}}}{\theta_{\text{мин}}} \right) t, \quad (13.110)$$

или, воспользовавшись выражением (13.107) для $\langle \theta^2 \rangle$,

$$\langle \Theta^2 \rangle \approx 4\pi N \left(\frac{2zZe^2}{pv} \right)^2 [\ln(210Z^{-1/3})] t. \quad (13.111)$$

Средний квадрат угла рассеяния линейно растет с увеличением толщины t . При этом для умеренных значений толщин, пока частица не теряет существенной доли своей энергии, основная часть гауссова распределения приходится на очень малые углы отклонения.

Распределение проекций углов отклонения при многократном рассеянии имеет вид

$$P_M(\theta') d\theta' = \frac{1}{\sqrt{\pi \langle \Theta^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{\theta'^2}{\langle \Theta^2 \rangle}\right) d\theta', \quad (13.112)$$

где рассматриваются как положительные, так и отрицательные углы θ' . Формулу Резерфорда (13.92) при малых углах рассеяния можно выразить через проекцию угла рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\theta'} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2zZe^2}{pv} \right)^2 \frac{1}{\theta'^3}. \quad (13.113)$$

Это приводит к следующему закону распределения для проекций угла отклонения при однократном рассеянии:

$$P_S(\theta') d\theta' = Nt \frac{d\sigma}{d\theta'} d\theta' = \frac{\pi}{2} Nt \left(\frac{2zZe^2}{pv} \right)^2 \frac{d\theta'}{\theta'^3}. \quad (13.114)$$

Найденный закон углового распределения для однократного рассеяния применим лишь для углов, больших по сравнению с $\langle \Theta^2 \rangle^{1/2}$, и определяет «хвост» гауссова распределения.

Вводя в качестве аргумента относительную проекцию угла отклонения

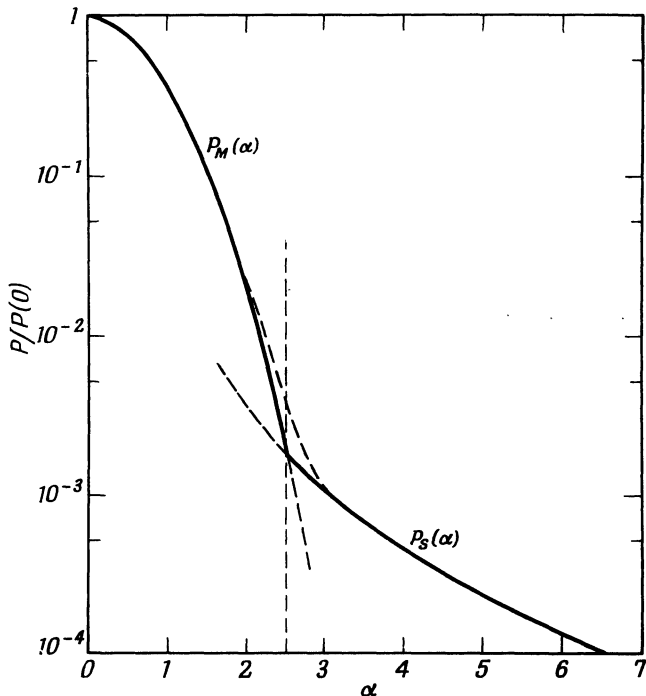
$$\alpha = \frac{\theta'}{\langle \Theta^2 \rangle^{1/2}}, \quad (13.115)$$

можно переписать угловое распределение для многократного и однократного рассеяния в виде

$$P_M(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

$$P_S(\alpha) d\alpha = \frac{1}{8 \ln(210Z^{-1/3})} \frac{d\alpha}{\alpha^3},$$
(13.116)

где использовано соотношение (13.111) для $\langle \Theta^2 \rangle$. Заметим, что в выбранных единицах относительные распределения для многократного и однократного рассеяния не зависят от толщины слоя,



Ф и г. 13.8. Распределение проекций углов отклонения при многократном и однократном рассеянии.

Плавный переход в области множественного рассеяния ($\alpha \sim 2-3$) от многократного рассеяния на малые углы (приближенно следующего гауссову закону) к упругому рассеянию на большие углы (пропорционального α^{-3}) показан пунктиром.

а определяются лишь значением Z , причем зависимость от Z тоже довольно слабая. Действительно, величина $8 \ln(210Z^{-1/3})$ равна 36,0 при $Z = 13$ (для алюминия) и 31,0 при $Z = 82$ (для свинца). Общий характер угловых распределений рассеяния показан на фиг. 13.8. Переход от многократного рассеяния к одиночным соуда-

рениям происходит вблизи $\alpha \approx 2,5$. В этой точке функция распределения Гаусса убывает примерно до $1/600$ своего максимального значения. Таким образом, распределение, соответствующее однократному рассеянию, представляет лишь весьма малый «хвост» кривой многократного рассеяния.

Имеются два обстоятельства, обуславливающие отклонение хода углового распределения от изображенных на фиг. 13.8 простых зависимостей. Закон Гаусса представляет собой предельную форму углового распределения, соответствующую очень большим n . Если толщина t такова, что определяемое соотношением (13.109) число соударений n не очень велико (скажем, $n \lesssim 100$), то распределение характеризуется кривой для однократного рассеяния (для углов, меньших $\alpha \approx 2,5$) и максимум распределения при малых углах становится более резким, чем у гауссовой кривой. Если же, наоборот, толщина слоя слишком велика, то средний квадрат угла рассеяния $\langle \Theta^2 \rangle$ становится сравнимым с углом $\theta_{\text{макс}}$ (13.102), ограничивающим угловую ширину распределения при однократном рассеянии. Для еще больших толщин кривая, соответствующая многократному рассеянию, перекрывает область углов, соответствующих однократному рассеянию, так что кривая углового распределения не имеет хвоста, характерного для однократного рассеяния (см. задачу 13.5).

§ 8. Электропроводность плазмы

Результаты исследования многократного рассеяния могут быть почти непосредственно применены к совершенно отличной на первый взгляд проблеме определения электропроводности плазмы. Для простоты мы будем рассматривать так называемый газ Лоренца, содержащий в единице объема N фиксированных ионов с зарядом Ze и NZ свободных электронов. Кроме того, пренебрежем электрон-электронными взаимодействиями. Приближение фиксированных ионов представляется разумным, по крайней мере для плазмы, у которой кинетическая температура электронов и ионов примерно одинакова. Влияние электрон-электронных соударений будет рассмотрено несколько позже.

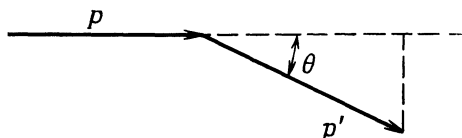
Простая теория электропроводности Друде, вкратце изложенная в гл. 7, § 8, основана на рассмотрении уравнения движения одного электрона

$$m \frac{dv}{dt} = eE - mv\nu, \quad (13.117)$$

где ν — частота соударений. Для низких частот электропроводность σ , обусловленная движением электронов, определяется равенством

$$\sigma = \frac{NZe^2}{m\nu}. \quad (13.118)$$

Для вычисления соответствующей частоты соударений заметим, что слагаемое mvv в (13.117) определяет скорость убывания продольного импульса из-за соударений с ионами при движении электрона под действием приложенного электрического поля. Если угол рассеяния при одном упругом соударении обозначить θ (фиг. 13.9), то потеря продольного импульса частицы с импульсом p будет равна $p(1 - \cos \theta)$. Среднее значение этой величины, умноженное на число соударений на единице длины, и определяет



Ф и г. 13.9.

уменьшение продольного импульса на единице длины, т. е. величину mv . Таким образом,

$$mv = N\sigma p \langle 1 - \cos \theta \rangle, \quad (13.119)$$

где σ — полное сечение рассеяния (13.104). Так как кулоновское рассеяние происходит в основном на очень малые углы, можно принять $\langle 1 - \cos \theta \rangle \approx \frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle$. Таким образом, потери продольного импульса на единице длины оказываются равными

$$mv \approx \frac{1}{2} N\sigma p \langle \theta^2 \rangle = 4\pi N \frac{(Ze^2)^2}{mv^3} \ln \left(\frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \right); \quad (13.120)$$

здесь использовано выражение (13.106) для $\langle \theta^2 \rangle$. Подставляя (13.120) в (13.118), получаем выражение для электропроводности

$$\sigma(v) \approx \frac{mv^3}{4\pi Ze^2 \ln(\theta_{\max}/\theta_{\min})}. \quad (13.121)$$

Найденный результат относится к электронам со скоростью v .

Нужно провести усреднение по тепловому распределению скоростей. Зависимость от скорости v в (13.121) определяется в основном множителем v^3 . Аргумент логарифма можно, не совершая значительной ошибки, вычислять для средней скорости. При энергиях, соответствующих даже наиболее горячей плазме, можно пренебречь влиянием размеров ядра, поэтому положим $\theta_{\max} = 1$. Выбор величины θ_{\min} несколько более сложен. Если действие атомов описывать экранированным потенциалом, то для θ_{\min} следует использовать выражение (13.97) или (13.98), где радиус атома a определяется соотношением (13.95). Взаимодействие при электрон-ионных соударениях в плазме описывается экранированным потенциалом Дебая — Хюккеля (10.113). Следовательно, в этом случае роль

радиуса атома a в формулах для $\theta_{\text{мин}}$ играет дебаевский радиус k_D^{-1} . При расчетах следует пользоваться выражением (13.97) или (13.98) в зависимости от того, какая из этих величин больше. С учетом всего сказанного аргумент логарифма в (13.121) принимает вид

$$\Lambda = \frac{\theta_{\text{макс}}}{\theta_{\text{мин}}} = \begin{cases} \frac{12\pi N}{k_D^3}, \\ \frac{Ze^2}{\sqrt{3} \hbar \langle u^2 \rangle^{1/2}} \frac{12\pi N}{k_D^3}, \end{cases} \quad (13.122)$$

где k_D определяется соотношением (10.106) или (10.112), а $\langle u^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{kT/m}$. Если средняя энергия электрона $^{3/2}kT$ меньше $13,6 Z^2 \text{ эв}$, то следует использовать верхнее значение в (13.122), если же она больше этой величины, то нижнее.

При максвелловском распределении скоростей среднее значение n -й степени скорости равно

$$\langle v^n \rangle = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma(3/2)}. \quad (13.123)$$

Следовательно, значение проводимости (13.121), усредненной по максвелловскому распределению скоростей, оказывается равным

$$\sigma \approx \frac{m}{Ze^2 \ln \Lambda} \left(\frac{2}{\pi} \frac{kT}{m} \right)^{3/2}. \quad (13.124)$$

Этот приближенный результат, полученный весьма нехитрым способом с помощью элементарной теории Друде, отличается множителем 2 от точного значения, найденного исходя из уравнения Больцмана. Физический механизм, используемый в обоих расчетах, одинаков, однако при более строгом исследовании производится усреднение не величины v^3 , а величины v^5 ¹⁾. Поэтому полученные результаты отличаются множителем $\langle v^5 \rangle / \langle v^2 \rangle \langle v^3 \rangle = 2$.

При учете электрон-электронных соударений потери продольного импульса возрастают и, следовательно, проводимость меньше, чем удвоенная величина (13.124). Относительное уменьшение

¹⁾ Появление добавочного множителя v^2 можно пояснить следующим образом. При наличии электрического поля распределение скоростей, первоначально обладавшее сферической симметрией, искажается в направлении приложенного поля. Величина этого искажения определяет ток и (в соответствии с законом Ома) проводимость. Результирующее искаженное распределение определяется равновесием между действием анизотропного электрического поля и стремлением к изотропии, обусловленным соударениями. Так как эффективное сечение рассеяния обратно пропорционально квадрату скорости, отношение высокоскоростной компоненты анизотропной части распределения к соответствующей компоненте нормального распределения пропорционально v^2 .

зависит от Z приблизительно как $Z/(1 + Z)$ и меняется от 0,58 при $Z = 1$ до 1,0 при $Z \rightarrow \infty$. Таким образом, выражение (13.124) в приведенном виде может служить хорошим приближением для расчета проводимости водородной или дейтериевой плазмы с учетом влияния электрон-электронных соударений. Используя классическое (низкоэнергетическое) значение (13.122) для Λ , можно придать формуле (13.124) следующую, весьма наглядную форму:

$$\sigma \approx \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{3/2} \frac{\Lambda}{\ln \Lambda} \omega_p. \quad (13.125)$$

Величина Λ имеет порядок 10^4 и, таким образом, для типичной водородной плазмы ($n_e \sim 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $T \sim 10^5 \text{ К}$) $\sigma \sim 200 \omega_p \approx \approx 4 \cdot 10^{14} \text{ сек}^{-1}$. Хотя эта величина и меньше проводимости металлов ($\sim 10^{16} \text{ сек}^{-1}$), но все же она достаточно велика для того, чтобы при исследовании проникновения полей в плазму можно было, как это и делалось в гл. 10, пользоваться приближением бесконечной проводимости.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Проблема прохождения частиц через вещество всю жизнь интересовала Нильса Бора. Великолепное изложение вопроса в целом с выяснением характерного взаимоотношения между классическими и квантовомеханическими эффектами представлено в его исчерпывающей обзорной статье [14], опубликованной в 1948 г. Численные таблицы и графические данные о потерях энергии, а также основные формулы приведены в книге Росси [87], гл. 2 и в главе, написанной Бете и Эшкином в книге под редакцией Сегре [92]. В книге Росси содержится также и полуклассическое исследование потерь энергии и рассеяния, сходное с нашим. В работах Штернхеймера [105] рассмотрен вопрос о влиянии поляризационных эффектов на потери энергии ультрарелятивистских частиц и приведены в виде графиков многочисленные количественные данные для различных веществ.

Корректный вывод выражения для проводимости плазмы дается в монографии Спитцера [104], гл. 5.

ЗАДАЧИ

13.1. Тяжелая частица с зарядом ze и массой M , движущаяся с нерелятивистской скоростью v , соударяется с первоначально покоившимся электроном с зарядом e и массой m . Показать, используя лишь условие $M \gg m$ и приближение нерелятивистского движения, что зависимость энергии, переданной при кулоновском соударении электрону, от прицельного параметра b определяется выражением

$$\Delta E(b) = \frac{2(ze^2)^2}{e} \frac{1}{mv^2} \frac{1}{b^2 + (ze^2/mv^2)^2}.$$

13.2. а) Приняв в квантовомеханическом выражении для потерь энергии $\hbar\langle\omega\rangle = 12Z \text{ эв}$, вычислить величину потерь (в $M\text{эв}/\text{см}$) в воздухе при нормальных температуре и давлении, в алюминии, меди и свинце для протона и μ -мезона с кинетическими энергиями 10, 100 и 1000 $M\text{эв}$.

б) Выразить полученные потери энергии в единицах $Mэв \cdot см^2/г$ и сравнить результаты для различных веществ. Объяснить, почему потери энергии, выраженные в $Mэв \cdot см^2/г$, отличаются друг от друга не более чем вдвое, тогда как в единицах $Mэв/см$ они существенно различаются.

13.3. Рассмотреть потери энергии для быстрой, но нерелятивистской тяжелой частицы с зарядом ze , проходящей через электронную плазму, описывая экранированное кулоновское взаимодействие между электронами и налетающей частицей выражением (10.113).

а) Показать, что передача энергии при соударениях с прицельным параметром b определяется приближенной формулой

$$\Delta E(b) \approx \frac{2(ze^2)^2}{mv^2} k_D^2 K_1^2(k_D b),$$

где m — масса электрона, v — скорость налетающей частицы, k_D — дебаевский радиус, определяемый согласно (10.112).

б) Определить потери на единице пути для соударений с прицельными параметрами, большими b_{\min} . Считая $k_D b_{\min} \ll 1$, записать полученный результат, используя как классическое, так и квантовомеханическое значения b_{\min} .

13.4. При допущениях, использованных при исследовании многократного рассеяния, показать, что величина проекции y поперечного смещения налетающей частицы (см. фиг. 13.7) подчиняется гауссовскому распределению

$$P(y) dy = A \exp \left[-\frac{y^2}{2 \langle y^2 \rangle} \right] dy,$$

где средний квадрат проекции смещения $\langle y^2 \rangle = (x^2/6) \langle \Theta^2 \rangle$, x — толщина пройденного слоя вещества, $\langle \Theta^2 \rangle$ — средний квадрат угла рассеяния.

13.5. Если при нахождении «хвоста» углового распределения многократного рассеяния, определяемого «однократным рассеянием», учесть конечные размеры ядер, то, начиная с некоторой критической толщины x_c , «хвост» исчезает.

а) Определить величину x_c и вычислить ее значение (в см) для алюминия и свинца, считая налетающую частицу релятивистской.

б) Для полученных значений толщин вычислить число происходящих соударений и определить, применимо ли гауссово приближение.

ИЗЛУЧЕНИЕ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

Как известно, заряды, движущиеся с ускорением, излучают электромагнитные волны. В гл. 9 уже были рассмотрены примеры излучения электромагнитных волн при изменении во времени макроскопических распределений плотности зарядов и токов, которые, по существу, представляют собой движущиеся заряды. Мы еще раз вернемся к этой задаче в гл. 16, где будет дано систематическое изложение теории излучения мультиполей. Представляет, однако, интерес исследование электромагнитного излучения, источником которого является движущийся точечный заряд или несколько таких зарядов. Для этих случаев полезно разработать методы расчета, позволяющие связать интенсивность и поляризацию излучения непосредственно с характеристиками движения и траектории заряда. В частности, представляет интерес определение полных потерь на излучение, углового распределения излучения и его частотного спектра. При нерелятивистском движении излучение описывается известной формулой Лармора (см. § 2). Однако для релятивистских частиц появляется целый ряд необычных и интересных эффектов, которым мы и будем уделять основное внимание. В настоящей главе мы получим ряд общих результатов, которые будут затем применены к рассмотрению конкретных примеров излучения зарядов, совершающих заданное движение, в частности во внешних силовых полях. Следующая глава будет посвящена исследованию излучения при атомных или ядерных соударениях.

§ 1. Потенциалы Лиенара — Вихерта и поле точечного заряда

Как было показано в гл. 6, скалярный и векторный потенциалы ограниченного распределения зарядов и токов в свободном пространстве могут быть представлены в виде

$$A_{\mu}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int \int \frac{J_{\mu}(\mathbf{x}', t')}{R} \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) d^3x' dt', \quad (14.1)$$

где $\mathbf{R} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, а наличие δ -функции обеспечивает запаздывающие свойства потенциалов в соответствии с условием причинности. Точечному заряду e , находящемуся в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}(t)$ и движущемуся со скоростью $c\boldsymbol{\beta}(t)$, соответствует распределение плотности тока

$$J_{\mu}(\mathbf{x}, t) = e c \beta_{\mu} \delta[\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)], \quad (14.2)$$

где $\beta_{\mu} = (\boldsymbol{\beta}, i)$. Для такого распределения плотности источников интегрирование по объему в (14.1) проводится сразу и дает

$$A_{\mu}(\mathbf{x}, t) = e \int \frac{\beta_{\mu}(t')}{R(t')} \delta\left[t' + \frac{R(t')}{c} - t\right] dt', \quad (14.3)$$

где теперь $R(t') = |\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|$. Хотя уже выражение (14.3) достаточно удобно для расчета полей, можно провести интегрирование и по dt' , если учесть приведенное в гл. 1, § 2, правило интегрирования выражений с δ -функцией, аргумент которой является функцией переменной интегрирования:

$$\int g(x) \delta[f(x) - a] dx = \left[\frac{g(x)}{|df/dx|} \right]_{f(x)=a}. \quad (14.4)$$

Производная функции $f(t') \equiv t' + [R(t')/c]$ равна

$$\frac{df}{dt'} \equiv \kappa = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} = 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}, \quad (14.5)$$

где $c\boldsymbol{\beta}$ — мгновенная скорость частицы, а $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ — единичный вектор, направленный из точки нахождения заряда в точку наблюдения. Подставляя (14.5) в (14.4) и (14.3), получаем потенциалы точечного заряда, называемые *потенциалами Лиенара—Вихерта*:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= e \left[\frac{1}{\kappa R} \right]_{\text{запазд}}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= e \left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa R} \right]_{\text{запазд}}. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Квадратные скобки с индексом «запазд» означают, что величины в скобках следует брать в момент времени $t' = t - [R(t')/c]$. Заметим, что для нерелятивистского движения $\kappa \rightarrow 1$. При этом выражения для потенциалов (14.6) переходят в обычные известные нерелятивистские формулы.

Для определения векторов поля \mathbf{E} и \mathbf{B} по потенциалам A_{μ} можно применить соответствующие дифференциальные операторы непосредственно к (14.6). Однако проще исходить из выражения

(14.3). Заметим, что в (14.3) координаты точки наблюдения \mathbf{x} входят лишь в величину R . Следовательно, операцию градиента можно заменить следующим образом:

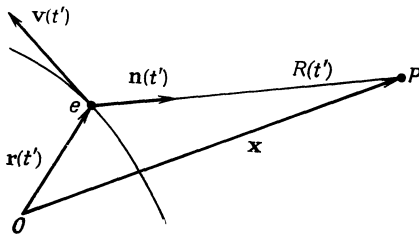
$$\text{grad} \rightarrow \text{grad } R \frac{\partial}{\partial R} = \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial R} . \quad (14.7)$$

Поэтому электрическое и магнитное поля можно представить в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = e \int \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \delta \left(t' + \frac{R}{c} - t \right) + \frac{1}{cR} (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}) \delta' \left(t' + \frac{R}{c} - t \right) \right] dt' , \quad (14.8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = e \int (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) \left\{ -\frac{\delta [t' + (R/c) - t]}{R^2} + \frac{1}{cR} \delta' \left(t' + \frac{R}{c} - t \right) \right\} dt' .$$

Штрихи у δ -функции означают дифференцирование по ее аргументу. Переходя к переменной $f(t') = t' + R(t')/c$ и интегрируя по



Ф и г. 14.1.

частям слагаемые с производной δ -функции, легко получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= e \left[\frac{\mathbf{n}}{\kappa R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\kappa R} \right) \right]_{\text{запазд}} , \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= e \left[\frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}}{\kappa R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}}{\kappa R} \right) \right]_{\text{запазд}} . \end{aligned} \quad (14.9)$$

Удобно сначала выполнить дифференцирование единичного вектора \mathbf{n} . Как видно из фиг. 14.1, скорость изменения \mathbf{n} во времени равна взятому с обратным знаком отношению нормальной составляющей \mathbf{v} к R

$$\frac{d\mathbf{n}}{c dt'} = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{R} . \quad (14.10)$$

Выполняя дифференцирование вектора \mathbf{n} всюду, где он явно входит в выражения (14.9), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= e \left[\frac{\mathbf{n}}{\kappa^2 R^2} + \frac{\mathbf{n}}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) - \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\kappa^2 R^2} - \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa R} \right) \right]_{\text{запазд}}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= e \left[\left\{ \frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa^2 R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa R} \right) \right\} \times \mathbf{n} \right]_{\text{запазд}}. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Из найденных соотношений видно, что магнитное поле связано с напряженностью электрического поля простым соотношением

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad (14.12)$$

где обе части равенства берутся с учетом запаздывания. Оставшиеся в выражениях (14.11) производные можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} \boldsymbol{\beta} &= \dot{\boldsymbol{\beta}}, \\ \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} (\kappa R) &= \beta^2 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} - \frac{R}{c} \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}. \end{aligned} \quad (14.13)$$

Окончательно электрическое поле представляется в виде

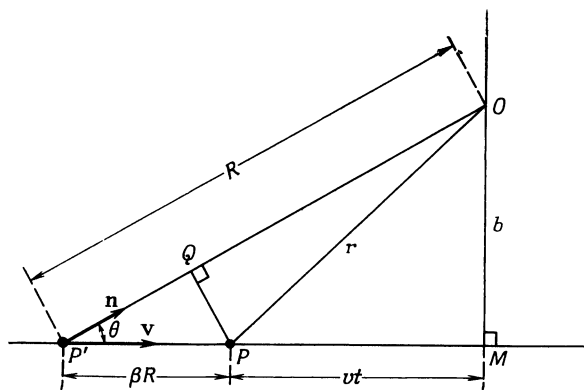
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = e \left[\frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} \right]_{\text{запазд}} + \frac{e}{c} \left[\frac{\mathbf{n}}{\kappa^3 R} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\} \right]_{\text{запазд}}, \quad (14.14)$$

а магнитное поле определяется по (14.12). Выражения для векторов поля (14.14) и (14.12), естественно, распадаются на две части: первая часть («скоростная») зависит лишь от скорости и не зависит от ускорения; вторая часть («ускорительная») линейно зависит от $\dot{\boldsymbol{\beta}}$. Первая часть имеет фактически статический характер, убывая с расстоянием как R^{-2} , тогда как поле, зависящее от ускорения, является типичным поперечным полем излучения, для которого \mathbf{E} и \mathbf{B} перпендикулярны радиусу-вектору и изменяются как R^{-1} .

Для равномерно движущейся частицы зависящее от скорости поле должно, конечно, совпадать с электромагнитным полем, полученным в гл. 11, § 10, из статического кулоновского поля заряда с помощью преобразований Лоренца. Так, например, для поперечной составляющей электрического поля E_1 в точке, расположенной на расстоянии b от прямолинейной траектории заряда, было найдено выражение

$$E_1(t) = \frac{e\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}. \quad (14.15)$$

При этом начало отсчета времени выбрано так, что в момент $t = 0$ заряд находится на кратчайшем расстоянии от точки наблюдения. Выражение для составляющей поля $E_1(t)$ (14.15) внешне сильно отличается от «скоростной» составляющей поля (14.14). Это кажущееся различие обусловлено тем, что в (14.15) поле выражено



Ф и г. 14.2. Положение равномерно движущегося заряда в данный момент и запаздывающий момент времени.

в функции положения заряда в данный момент, а не в запаздывающий момент времени. Чтобы показать эквивалентность обоих выражений, рассмотрим фиг. 14.2. Здесь O — точка наблюдения, P — точка, в которой находится заряд в данный момент t и P' — точка, где он находится в соответствующий запаздывающий момент. Расстояние $P'Q$ равно $\beta R \cos \theta = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) R$, следовательно, отрезок OQ равен κR . Из треугольников OPQ и $PP'Q$ находим

$$(\kappa R)^2 = r^2 - (PQ)^2 = r^2 - \beta^2 (R \sin \theta)^2.$$

Из треугольника OMP' видно, что $R \sin \theta = b$ и, следовательно,

$$(\kappa R)^2 = b^2 + v^2 t^2 - \beta^2 b^2 = \frac{1}{\gamma^2} (b^2 + \gamma^2 v^2 t^2). \quad (14.16)$$

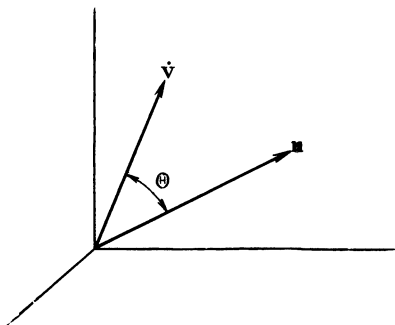
Поперечная составляющая поля, зависящего только от скорости, согласно (14.14), равна

$$E_1(t) = e \left[\frac{b}{\gamma^2 (\kappa R)^3} \right]_{\text{вниз}}. \quad (14.17)$$

Подставляя в это соотношение значение (14.16) для κR ; выраженное через положение заряда в данный момент, мы убеждаемся, что (14.17) и (14.15) эквивалентны. Выражения для остальных составляющих полей \mathbf{E} и \mathbf{B} выводятся аналогично.

**§ 2. Полная мощность,
излучаемая ускоренно движущимся зарядом.
Формула Лармора и ее релятивистское обобщение**

Если заряд, движущийся ускоренно, наблюдать в системе отсчета, в которой его скорость можно считать малой по срав-



Ф и г. 14.3.

нению со скоростью света, то в этой системе отсчета слагаемое поля (14.14), зависящее от ускорения, принимает вид

$$\mathbf{E}_a = \frac{e}{c} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{R} \right]_{\text{запад}}. \quad (14.18)$$

Мгновенный поток энергии определяется вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_a|^2 \mathbf{n}. \quad (14.19)$$

Отсюда следует, что мощность, излучаемая в единицу телесного угла, равна ¹⁾

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} |R\mathbf{E}_a|^2 = \frac{e^2}{4\pi c} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2. \quad (14.20)$$

Обозначая через Θ угол между ускорением $\dot{\mathbf{v}}$ и \mathbf{n} (фиг. 14.3), можно переписать выражение для излучаемой мощности в виде

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \sin^2 \Theta. \quad (14.21)$$

Мы получили известную характерную угловую зависимость $\sin^2 \Theta$. Из выражения (14.18) следует, что излучение поляризовано в пло-

¹⁾ В выражениях для углового распределения излучения мы будем всегда в явном виде указывать поляризацию, помещая под знаком модуля вектор, параллельный электрическому полю.

скости векторов $\dot{\mathbf{v}}$ и \mathbf{n} . Полная мгновенная мощность излучения определяется интегрированием выражения (14.21) по всем телесным углам:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3}. \quad (14.22)$$

Это известная формула Лармора для нерелятивистского заряда, движущегося с ускорением.

Используя ковариантность относительно преобразований Лоренца, можно обобщить формулу Лармора (14.22) на случай произвольной скорости заряда. Энергия электромагнитного излучения ведет себя по отношению к преобразованию Лоренца как четвертая составляющая 4-вектора (см. задачу 11.13). Так как $dE_{\text{изл}} = P dt$, то мощность P инвариантна относительно преобразований Лоренца. Если удастся найти инвариантное относительно преобразований Лоренца выражение, переходящее в формулу Лармора (14.22), при $\beta \ll 1$, то это и будет желаемое обобщение формулы Лармора. Разумеется, существует много лоренц-инвариантных величин, сводящихся к требуемому виду при $\beta \rightarrow 0$. Однако, как очевидно из (14.14), искомое выражение должно зависеть лишь от β и $\dot{\beta}$. При этом ограничении, накладываемом на порядок производных, которые могут входить в соотношение, результат определяется единственным образом. Для нахождения требуемого обобщения перепишем формулу Лармора в виде

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right), \quad (14.23)$$

где m — масса заряженной частицы, а \mathbf{p} — его импульс. Лоренц-инвариантное обобщение этого соотношения очевидно:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{dp_\mu}{d\tau} \cdot \frac{dp_\mu}{d\tau} \right), \quad (14.24)$$

где $d\tau = dt/\gamma$ — приращение собственного времени, а p_μ означает 4-вектор импульса-энергии заряженной частицы¹⁾. Чтобы убедиться, что выражение (14.24) переходит при $\beta \rightarrow 0$ в (14.23), вычислим скалярное произведение 4-векторов:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} \cdot \frac{dp_\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 = \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2 - \beta^2 \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2. \quad (14.25)$$

¹⁾ В единственности представления (14.24) можно убедиться следующим образом. Как известно, лоренц-инвариантная величина образуется в результате скалярного умножения 4-векторов или тензоров более высокого ранга. В нашем распоряжении имеются лишь 4-векторы p_μ и $dp_\mu/d\tau$. При этом только выражение (14.24) переходит при $\beta \rightarrow 0$ в формулу Лармора. Можно показать, что тензоры более высокого порядка, например $p_\mu (dp_\nu/d\tau)$, дают либо нуль, либо выражения, пропорциональные (14.24) или m^2 .

Выражая в (14.24) все величины через скорость и ускорение с помощью соотношений $E = \gamma mc^2$, $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$, получаем результат Лиенара (1898 г.)

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^6 [\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2]. \quad (14.26)$$

Релятивистское выражение для мощности излучения используется, в частности, при расчете ускорителей заряженных частиц. Потери на излучение в ряде случаев являются определяющим фактором, ограничивающим практически достижимую энергию в ускорителе. При заданной внешней силе (т. е. данной скорости изменения импульса) мощность излучения (14.24) обратно пропорциональна квадрату массы ускоряемой частицы. Следовательно, влияние этих радиационных эффектов должно быть наибольшим для электронов. Поэтому мы ограничимся в дальнейшем лишь рассмотрением излучения электронов.

В линейном ускорителе движение одномерно. Как следует из (14.25), в этом случае мощность излучения определяется соотношением

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2. \quad (14.27)$$

Скорость изменения импульса равна изменению энергии частицы на единице пути. Следовательно,

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{dE}{dx} \right)^2, \quad (14.28)$$

так что при прямолинейном движении мощность излучения зависит лишь от внешних сил, определяющих величину изменения энергии частицы с расстоянием, и не зависит от самой энергии или импульса частицы. Для отношения мощности излучения к мощности, поступающей от внешних источников, получим

$$\frac{P}{dE/dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \frac{1}{v} \frac{dE}{dx} \rightarrow \frac{2}{3} \frac{(e^2/mc^2)}{mc^2} \frac{dE}{dx}, \quad (14.29)$$

где последнее выражение справедливо для релятивистских частиц ($\beta \rightarrow 1$). Как следует из (14.29), потери на излучение незначительны, если прирост энергии на расстоянии $e^2/mc^2 = 2,82 \cdot 10^{-13}$ см не превышает $mc^2 = 0,511$ Мэв, т. е. прирост менее $2 \cdot 10^{14}$ Мэв/м! Обычно приращение энергии в линейном ускорителе меньше или порядка 10 Мэв/м. Таким образом, потери на излучение в линейных ускорителях пренебрежимо малы.

Положение коренным образом меняется для циклических ускорителей типа синхротрона или бетатрона. В таких установках при движении частицы по орбите направление импульса \mathbf{p} быстро

изменяется, а изменение энергии за оборот мало. Это означает, что

$$\left| \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right| = \gamma\omega |\mathbf{p}| \gg \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau}. \quad (14.30)$$

В этом случае мощность излучения можно приближенно представить в виде

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \omega^2 |\mathbf{p}|^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{\rho^2} \beta^4 \gamma^4, \quad (14.31)$$

где использовано соотношение $\omega = c\beta/\rho$, а ρ — радиус орбиты. Для потерь энергии на излучение за один оборот имеем

$$\delta E = \frac{2\pi\rho}{c\beta} P = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{\rho} \beta^3 \gamma^4. \quad (14.32)$$

Для электронов большой энергии ($\beta \approx 1$) численное значение потерь можно определить по формуле

$$\delta E (Mэв) = 8,85 \cdot 10^{-2} \frac{[E (Гэв)]^4}{\rho (м)}. \quad (14.33)$$

Для типичного синхротрона на небольшую энергию $\rho \approx 1$ м, $E_{\text{макс}} \approx 0,3$ Гэв. Следовательно, $\delta E_{\text{макс}} \sim 1$ кэв на оборот. Это — величина небольшая, но не пренебрежимо малая по сравнению с приростом энергии на оборот, составляющим обычно несколько килоэлектрон-вольт. Для самых больших электронных синхротронов, где максимальная энергия имеет величину порядка 5 Гэв, радиус орбиты составляет примерно 10 м. При этом потери на излучение оказываются $\sim 5,5$ Мэв на оборот. Так как практически очень трудно получить высокочастотную мощность, обеспечивающую такой прирост энергии на обороте, который был бы много больше этой величины, то значение 5—10 Гэв представляет верхний предел достижимых энергий в циклических электронных ускорителях.

Для расчета мощности излучения в циклических ускорителях удобна формула

$$P (вт) = \frac{10^6}{2\pi} \frac{\delta E (Mэв)}{\rho (м)} J(a), \quad (14.34)$$

где J — ток пучка. Она справедлива в том случае, когда излучение различных электронов циркулирующего пучка некогерентно. В крупнейших электронных синхротронах мощность излучения достигает 0,1 вт на 1 мка тока пучка. Хотя эта излучаемая мощность и очень мала, излучение может быть легко обнаружено и обладает рядом интересных особенностей, которые мы рассмотрим в § 6.

§ 3. Угловое распределение излучения ускоряемого заряда

При нерелятивистском движении ускоряемого заряда угловое распределение мощности излучения описывается простой зависимостью $\sin^2 \Theta$ [см. (14.21)], где угол Θ отсчитывается от направления ускорения. При релятивистском движении поле излучения ускоряемого заряда зависит не только от ускорения, но и от скорости, так что угловое распределение излучения носит более сложный характер. Исходя из (14.14), найдем радиальную составляющую вектора Пойнтинга

$$[\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}]_{\text{запазд}} = \frac{e^2}{4\pi c} \left[\frac{1}{\kappa^6 R^2} | \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] |^2 \right]_{\text{запазд}}. \quad (14.35)$$

Очевидно, что существует два типа релятивистских эффектов. Один эффект определяется взаимным пространственным расположением векторов $\boldsymbol{\beta}$ и $\dot{\boldsymbol{\beta}}$. Кроме того, имеется общий релятивистский эффект, связанный с переходом от системы координат, относительно которой частица покоится, к лабораторной системе отсчета и проявляющийся в появлении в знаменателе выражения (14.35) степеней множителя κ , определяемого соотношением (14.5). Для ультра-релятивистских частиц угловое распределение излучения определяется в основном последним эффектом.

Произведение $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ в формуле (14.35) дает поток энергии за единицу времени через единичную площадку, обусловленный излучением заряда в момент $t' = t - R(t')/c$ и регистрируемый в точке наблюдения в момент t . Для определения энергии, излученной за конечный период ускорения, скажем от $t' = T_1$ до $t' = T_2$, следует выполнить интегрирование

$$W = \int_{t=T_1+[R(T_1)/c]}^{t=T_2+[R(T_2)/c]} [\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}]_{\text{запазд}} dt = \int_{t'=T_1}^{t'=T_2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \frac{dt}{dt'} dt'. \quad (14.36)$$

Таким образом, желательно знать величину $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})(dt/dt')$, имеющую смысл мощности, излучаемой через единичную поверхность за единицу собственного времени заряда. Мощность, излучаемая в единицу телесного угла, определяется соотношением

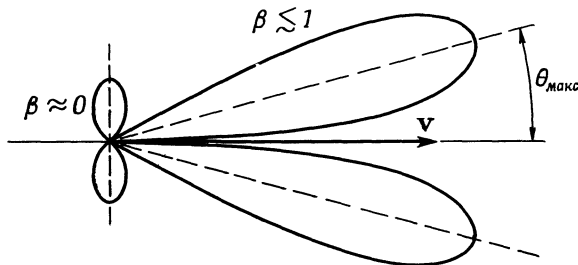
$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = R^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \frac{dt}{dt'} = \kappa R^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}. \quad (14.37)$$

Пусть заряд ускоряется лишь в течение короткого интервала времени, причем за это время $\boldsymbol{\beta}$ и $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ не изменяются существенно по направлению и величине; кроме того, пусть точка наблюдения настолько удалена от заряда, что \mathbf{n} и R меняются пренебрежимо мало за время ускорения. При этих условиях величина (14.37)

будет пропорциональной угловому распределению излучаемой энергии. Учитывая выражение (14.35) для вектора Пойнтинга, находим угловое распределение излучения

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{|\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}|^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5}. \quad (14.38)$$

Проиллюстрируем соотношение (14.38) на простейшем примере прямолинейного движения, для которого $\boldsymbol{\beta}$ и $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ параллельны.



Ф и г. 14.4. Распределение излучения заряда, испытывающего ускорение в направлении движения.

Диаграммы излучения для обеих скоростей изображены в различном масштабе: диаграмма для релятивистского движения (соответствующая $\gamma \sim 2$) уменьшена приблизительно в 10^2 раз при том же значении ускорения.

Если ввести угол наблюдения θ , отсчитываемый от направления $\boldsymbol{\beta}$ и $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, то (14.38) преобразуется к виду

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (14.39)$$

При $\beta \ll 1$ это соотношение сводится к формуле Лармора (14.21). Однако по мере приближения β к единице диаграмма углового распределения излучения все более и более вытягивается в направлении движения электрона, причем интенсивность излучения возрастает, как схематически показано на фиг. 14.4. Угол, для которого интенсивность излучения максимальна, равен

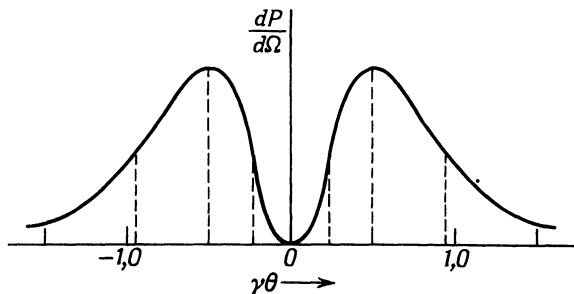
$$\theta_{\text{макс}} = \arccos \left[\frac{1}{3\beta} (\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1) \right] \rightarrow \frac{1}{2\gamma}, \quad (14.40)$$

где последнее соотношение справедливо в пределе $\beta \rightarrow 1$. В этом предельном случае интенсивность в максимуме пропорциональна γ^3 . Уже при $\beta = 0,5$, что соответствует кинетической энергии электронов порядка 80 кэВ, имеем $\theta_{\text{макс}} = 38,2^\circ$. Для релятивистских частиц угол $\theta_{\text{макс}}$ очень мал: порядка отношения энергии покоя частицы к ее полной энергии. Таким образом, все излучение

сосредоточено в очень узком конусе вокруг направления движения. Для таких малых углов угловое распределение излучения (14.39) можно описать приближенной формулой:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} \approx \frac{8}{\pi} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3} \gamma^8 \frac{(\gamma\theta)^2}{(1 + \gamma^2\theta^2)^5}. \quad (14.41)$$

Величина γ^{-1} , очевидно, может служить естественной единицей измерения угла. На фиг. 14.5 изображено угловое распределение излучения, причем угол выражен в этих единицах. Максимум распределения расположен при $\gamma\theta = 1/2$, а уровень половинной



Ф и г. 14.5. Угловое распределение излучения для релятивистской частицы.

мощности соответствует $\gamma\theta = 0,23$ и $\gamma\theta = 0,91$. Среднеквадратичное значение угла, под которым испускается излучение, в релятивистском предельном случае описывается соотношением

$$\langle \theta^2 \rangle^{1/2} = \frac{1}{\gamma} = \frac{mc^2}{E}. \quad (14.42)$$

Такая картина распределения излучения для релятивистского случая типична независимо от взаимного расположения $\mathbf{\beta}$ и $\dot{\mathbf{\beta}}$. Полную мощность излучения можно получить, проведя интегрирование выражения (14.39) по всем углам. Это приводит к соотношению

$$P(t') = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{v}^2 \gamma^6 \quad (14.43)$$

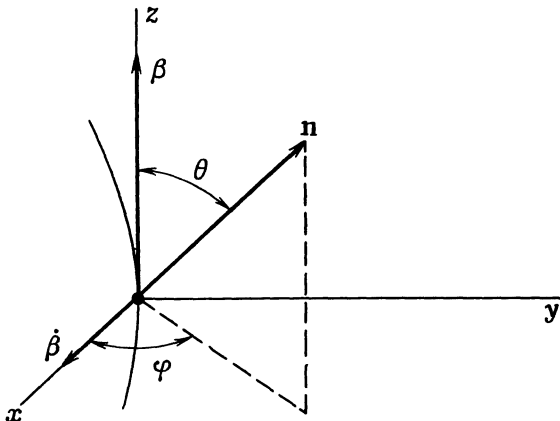
в согласии с (14.26) и (14.27).

В качестве другого примера рассмотрим угловое распределение излучения при мгновенном движении заряда по окружности, когда ускорение $\dot{\mathbf{\beta}}$ перпендикулярно скорости заряда $\mathbf{\beta}$. Выберем систему координат так, чтобы направление мгновенной скорости $\mathbf{\beta}$ совпало с осью z , а ускорение $\dot{\mathbf{\beta}}$ было направлено вдоль x . Определяя направление наблюдения обычными сферическими угловыми коор-

динатами θ , φ , как показано на фиг. 14.6, преобразуем общую формулу (14.38) к виду

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right]. \quad (14.44)$$

Заметим, что, хотя детали углового распределения излучения отличаются от распределения при прямолинейном ускоренном



Ф и г. 14.6.

движении, в данном случае тоже имеется характерная релятивистская концентрация излучения в направлении движения. В предельном релятивистском случае ($\gamma \gg 1$) угловое распределение излучения представляется приближенным выражением

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} \approx \frac{2}{\pi} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3} \gamma^6 \frac{1}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \left[1 - \frac{4\gamma^2 \theta^2 \cos^2 \varphi}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2} \right]. \quad (14.45)$$

В этом приближении среднеквадратичное значение угла, под которым испускается излучение, определяется той же формулой (14.42), что и при одномерном движении. Полную мощность излучения можно найти или интегрированием (14.44) по всем углам, или из (14.26)

$$P(t') = \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3} \gamma^4. \quad (14.46)$$

Интересно сравнить мощность излучения в случае, когда ускорение параллельно скорости [см. (14.43) или (14.27)], с мощностью излучения при ускорении, нормальном скорости [см. (14.46)], при одинаковой величине приложенной силы. При движении по ок-

ружности скорость изменения импульса (равная приложенной силе) равна $\gamma m \dot{v}$. Поэтому (14.46) можно переписать в виде

$$P_{\text{круг}}(t') = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2. \quad (14.47)$$

Сравнивая это выражение с соответствующим выражением (14.27) для прямолинейного движения, находим, что при заданной величине приложенной силы излучение при поперечном ускорении в γ^2 раз превышает излучение для случая продольного ускорения.

§ 4. Излучение заряда при произвольном ультрарелятивистском движении

В каждый момент времени излучение заряженной частицы, совершающей произвольное ультрарелятивистское движение, можно рассматривать как когерентную суперпозицию излучений, обусловленных составляющими ускорения, параллельной и перпендикулярной скорости. Как только что было показано, при одинаковом порядке величины продольной и поперечной сил излучение, обусловленное продольной составляющей, пренебрежимо мало (порядка $1/\gamma^2$) по сравнению с излучением, обусловленным поперечной составляющей. Следовательно, можно пренебречь параллельной составляющей ускорения и приближенно считать, что интенсивность излучения полностью определяется лишь его поперечной составляющей. Другими словами, излучение заряженной частицы при произвольном ультрарелятивистском движении в каждый момент времени приближенно совпадает с излучением заряда, движущегося по дуге окружности с мгновенным радиусом кривизны ϱ , определяемым формулой

$$\varrho = \frac{v^2}{\dot{v}_{\perp}} \approx \frac{c^2}{\dot{v}_{\perp}}, \quad (14.48)$$

где \dot{v}_{\perp} — поперечная составляющая ускорения. Угловое распределение излучения определяется при этом соотношениями (14.44) или (14.45). Оно представляет собой узкий иглообразный конус, направленный вдоль вектора мгновенной скорости заряда.

Концентрация излучения в узком луче, параллельном направлению скорости, весьма важна при наблюдениях со спектрально чувствительным детектором. Излучение наблюдается лишь в том случае, когда вектор скорости частицы направлен на наблюдателя. При произвольном движении частицы наблюдатель регистрирует весьма кратковременный импульс или вспышку излучения (или последовательность таких вспышек, если движение частицы перио-

дическое), как показано на фиг. 14.7. Так как угловая ширина луча есть величина порядка γ^{-1} , то частица будет освещать наблюдателя в течение интервала времени (собственного времени частицы)

$$\Delta t' \sim \frac{\varrho}{c\gamma},$$

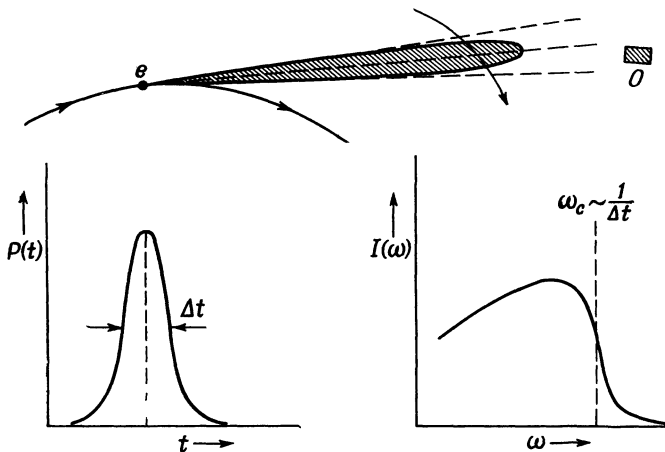
где ϱ — радиус кривизны (14.48). Для наблюдателя это соответствует интервалу

$$\Delta t \sim \left\langle \frac{dt}{dt'} \right\rangle \Delta t',$$

где $\langle dt/dt' \rangle = \langle \kappa \rangle \sim (1/\gamma^2)$. Следовательно, длительность вспышки излучения, регистрируемой детектором, равна

$$\Delta t \sim \frac{1}{\gamma^3} \frac{\varrho}{c}. \quad (14.49)$$

Согласно общим свойствам интеграла Фурье (см. гл. 7, § 3), в импульсе такой длительности заметно представлены спектральные



Ф и г. 14.7. Временные и частотные характеристики излучения движущейся частицы.

Излучение частицы попадает на детектор O в течение времени Δt . Поэтому в спектре излучения представлены частоты до максимальной частоты $\omega_c \sim (\Delta t)^{-1}$.

компоненты вплоть до критической частоты ω_c , которая по порядку величины определяется соотношением

$$\omega_c \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \left(\frac{c}{\varrho} \right) \gamma^3. \quad (14.50)$$

Для движения частицы по окружности величина c/ϱ равна угловой частоте вращения ω_0 ; при произвольном движении она также играет роль характерной частоты движения. Как следует

из (14.50), при $E \gg mc^2$ релятивистская частица излучает широкий спектр частот вплоть до частоты, в γ^3 раз превышающей основную частоту. В синхротроне на 200 Мэв величина $\gamma_{\text{макс}}$ составляет около 400. Следовательно, ω_c имеет порядок $6 \cdot 10^7 \omega_0$. Так как в этом случае частота обращения $\omega_0 \approx 3 \cdot 10^8$ гц, то спектр излучаемых частот простирается приблизительно до $2 \cdot 10^{16}$ гц, что соответствует длине волны 1000 Å. Следовательно, хотя основная частота лежит в области 100 Мгц, спектр излучаемых частот заходит в видимую область. В § 6 будет подробно рассмотрен характер углового распределения излучения для различных спектральных компонент и найдена зависимость полной энергии излучения от частоты.

§ 5. Спектральное и угловое распределения энергии, излучаемой ускоренными зарядами

В § 4 с помощью качественной оценки было показано, что энергия, излучаемая зарядом, движущимся с релятивистской скоростью, распределена по широкому диапазону частот. Ширина частотного спектра была оценена на основании свойств интегралов Фурье. Для точного количественного расчета воспользуемся теоремой Парсеваля из теории интегралов Фурье.

Соотношение для мощности излучения в единицу телесного угла имеет общий вид

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = |\mathbf{A}(t)|^2, \quad (14.51)$$

где

$$\mathbf{A}(t) = \left(\frac{c}{4\pi} \right)^{1/2} [RE]_{\text{запазд}}, \quad (14.52)$$

а E — напряженность электрического поля (14.14). В (14.51) в отличие от § 3 мгновенная мощность рассматривается в зависимости от времени в лабораторной системе отсчета, так как желательно знать частотный спектр с точки зрения наблюдателя. Для определенности будем считать, что ускорение отлично от нуля в течение некоторого конечного интервала времени или по крайней мере убывает для отдаленных прошлых и будущих моментов, так что полная излученная энергия конечна. Предположим также, что точка наблюдения настолько удалена от заряда, что область, проходимая зарядом, в течение интервала, когда он ускоряется, видна из нее под малым телесным углом.

Полная энергия, излученная в единицу телесного угла, определяется интегрированием (14.51) по времени

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(t)|^2 dt. \quad (14.53)$$

С помощью преобразования Фурье можно выразить этот результат в виде интеграла по частотам. Введем фурье-амплитуду $\mathbf{A}(\omega)$ функции $\mathbf{A}(t)$

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(t) e^{i\omega t} dt \quad (14.54)$$

и обратное преобразование

$$\mathbf{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (14.55)$$

Тогда формулу (14.53) можно переписать в виде

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \mathbf{A}^*(\omega') \cdot \mathbf{A}(\omega) e^{i(\omega' - \omega)t}. \quad (14.56)$$

Изменим порядок интегрирования по времени и по частоте. Легко убедиться, что интеграл по времени является фурье-представлением δ -функции $\delta(\omega' - \omega)$. Поэтому выражение для энергии, излучаемой в единицу телесного угла, может быть преобразовано к виду

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega. \quad (14.57)$$

Равенство выражений (14.57) и (14.53), справедливое при выполнении некоторых общих математических ограничений, накладываемых на функцию $\mathbf{A}(t)$, представляет собой частный случай теоремы Парсеваля. Так как знак частоты не имеет физического смысла, обычно проводят интегрирование лишь по положительным частотам. При этом соотношение

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} d\omega \quad (14.58)$$

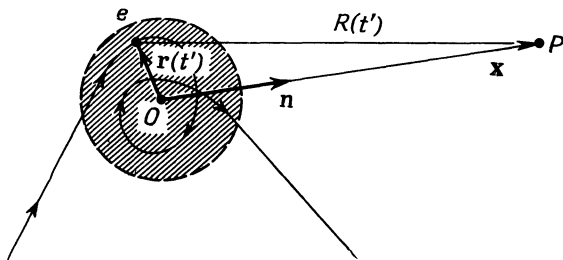
определяет величину $dI(\omega)/d\Omega$, равную энергии, излучаемой в единицу телесного угла в единичном интервале частот:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = |\mathbf{A}(\omega)|^2 + |\mathbf{A}(-\omega)|^2. \quad (14.59)$$

Если величина $\mathbf{A}(t)$ действительная, то, согласно (14.55), $\mathbf{A}(-\omega) = \mathbf{A}^*(\omega)$, так что

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = 2 |\mathbf{A}(\omega)|^2. \quad (14.60)$$

Полученное соотношение устанавливает количественную связь между изменением излучаемой энергии во времени и ее частотным спектром.



Ф и г. 14.8.

Воспользовавшись формулой (14.14) для электрического поля ускоренного заряда, можно получить общее выражение для энергии, излученной в единицу телесного угла в единичном интервале частот, в виде интеграла вдоль траектории частицы. Для этого нужно найти фурье-амплитуду (14.54) функции $\mathbf{A}(t)$, определяемой выражением (14.52). Согласно (14.14),

$$\mathbf{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{\kappa^3} \right]_{\text{запазд}} dt, \quad (14.61)$$

где индекс у скобок означает, что величина вычисляется для момента $t = t' + R(t')/c$. Заменяя переменную t на t' , получаем

$$\mathbf{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \{t' + [R(t')/c]\}} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{\kappa^2} dt'. \quad (14.62)$$

Поскольку предполагается, что точка наблюдения достаточно удалена от области пространства, в которой ускоренно движется частица, единичный вектор \mathbf{n} можно считать постоянным во времени. Кроме того, $R(t')$ можно приближенно представить в виде

$$R(t') \approx x - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t'), \quad (14.63)$$

где x — расстояние точки наблюдения P от начала отсчета O , а $\mathbf{r}(t')$ определяет положение частицы относительно O , как показано на фиг. 14.8. При этом выражение (14.62) с точностью до общего фазового множителя принимает вид

$$\mathbf{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \{t - [\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)/c]\}} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{\kappa^2} dt. \quad (14.64)$$

Здесь для сокращения записи опущены штрихи у переменной интегрирования. Соответствующее выражение для энергии (14.60), излучаемой в единичном интервале частот в единицу телесного угла, имеет вид

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^2} e^{i\omega(t - [\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)/c])} dt \right|^2. \quad (14.65)$$

При заданном законе движения известна зависимость $\mathbf{r}(t)$ и могут быть найдены $\boldsymbol{\beta}(t)$ и $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t)$, а следовательно, интеграл может быть вычислен как функция от ω и направления \mathbf{n} . При рассмотрении ускоренного движения группы заряженных частиц выражение (14.65) для амплитуды поля одного заряда следует заменить когерентной суммой амплитуд $\mathbf{A}_j(\omega)$ каждого из зарядов группы (см. задачи 14.11, 15.2 и 15.3).

Выражение (14.65) обладает тем преимуществом, что интегрирование в нем совершается лишь по интервалу времени, на котором ускорение отлично от нуля, однако в ряде случаев можно получить более простое выражение для спектральной интенсивности излучения, выполняя в (14.64) интегрирование по частям. Как легко показать, векторная часть, т. е. множитель при экспоненте в подынтегральном выражении в (14.64), представляет собой полный дифференциал

$$\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{\kappa^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{\kappa} \right]. \quad (14.66)$$

Поэтому интегрирование по частям приводит к следующему выражению для спектральной интенсивности:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) e^{i\omega(t - [\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)/c])} dt \right|^2. \quad (14.67)$$

Следует заметить, что в (14.67) и (14.65) поляризация излучения определяется направлением векторного интеграла. Для определения интенсивности излучения с некоторой заданной поляризацией следует, прежде чем вычислять квадрат модуля, найти скалярное произведение интеграла на соответствующий единичный вектор поляризации.

Если ускоренное движение совершается группой зарядов e_j , в подынтегральном выражении в (14.67) следует произвести замену

$$e\boldsymbol{\beta} e^{-i(\omega/c)\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)} \rightarrow \sum_{j=1}^N e_j \boldsymbol{\beta}_j e^{-i(\omega/c)\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_j(t)}. \quad (14.68)$$

В предельном случае непрерывного распределения движущихся зарядов сумма по j переходит в интеграл по распределению токов $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$:

$$e\beta e^{-i(\omega/c)\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)} \rightarrow \frac{1}{c} \int d^3x \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) e^{-i(\omega/c)\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}. \quad (14.69)$$

При этом распределение интенсивности излучения определяется выражением

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int dt \int d^3x \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)] e^{i\omega[t - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})/c]} \right|^2. \quad (14.70)$$

Последнее соотношение может быть получено непосредственно решением неоднородного волнового уравнения для векторного потенциала (14.1).

Представляет интерес излучение движущегося магнитного момента. Найти его легче всего, воспользовавшись установленной в гл. 5 эквивалентностью ротора вектора намагниченности $\mathcal{M}(\mathbf{x}, t)$ и тока

$$\mathbf{J}_M = c \operatorname{rot} \mathcal{M}. \quad (14.71)$$

Подставляя последнее соотношение в (14.70), получаем

$$\frac{dI_M(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{4\pi^2 c^3} \left| \int dt \int d^3x \mathbf{n} \times \mathcal{M}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega[t - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})/c]} \right|^2. \quad (14.72)$$

Если система представляет собой точечный магнитный момент $\boldsymbol{\mu}(t)$, находящийся в точке $\mathbf{r}(t)$, то

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\mu}(t) \delta[\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)] \quad (14.73)$$

и энергия, излученная в единичном интервале частот в единицу телесного угла, равна

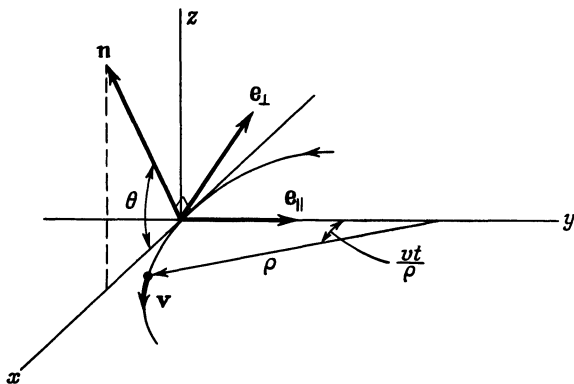
$$\frac{dI_{\boldsymbol{\mu}}(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{4\pi^2 c^3} \left| \int dt \mathbf{n} \times \boldsymbol{\mu}(t) e^{i\omega[t - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)/c]} \right|^2. \quad (14.74)$$

Отвлекаясь от частотной зависимости самих интегралов, заметим, что характерным отличием интенсивности излучения магнитного диполя от интенсивности излучения ускоренного заряда является дополнительный множитель ω^2 .

Выведенные в данном параграфе общие формулы, и в особенности (14.65) и (14.67), будут использованы далее в этой и в последующих главах при исследовании различных проблем, связанных с излучением. Выражение (14.74) для излучения магнитного момента будет применено в гл. 15 при расчете излучения, испускаемого при захвате орбитальных электронов ядром.

§ 6. Спектр излучения релятивистской заряженной частицы при мгновенном движении по окружности

Как было показано в § 4, ультрарелятивистская частица при произвольном ускоренном движении излучает так же, как заряд, движущийся с постоянной скоростью по окружности с радиусом, равным мгновенному радиусу кривизны. Излучение сконцентрировано в узком конусе, ось которого направлена вдоль вектора



Ф и г. 14.9.

скорости и регистрируется наблюдателем как короткий импульс излучения, возникающий при прохождении иглообразного луча через точку наблюдения.

Для определения частотного и углового распределения энергии необходимо вычислить интеграл в (14.67). Так как длительность импульса излучения $\Delta t' \sim \rho/c\gamma$ очень мала, необходимо знать скорость β и положение $r(t)$ частицы лишь на малой дуге траектории, на которой касательная направлена приблизительно в точку наблюдения. На фиг. 14.9 изображена принятая система отсчета. Отрезок траектории и мгновенный радиус кривизны ρ лежат в плоскости xy . Так как интеграл берется вдоль траектории, можно без потери общности рассмотрения считать, что единичный вектор \mathbf{n} расположен в плоскости xz и образует угол θ с осью x . Интенсивность излучения имеет заметную величину лишь для очень малых θ . Начало отсчета времени выбрано так, чтобы при $t = 0$ частица находилась в начале координат.

Векторный множитель подынтегрального выражения в (14.67) можно записать в виде

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \beta) = \beta \left[-\mathbf{e}_{\parallel} \sin \left(\frac{vt}{\rho} \right) + \mathbf{e}_{\perp} \cos \left(\frac{vt}{\rho} \right) \sin \theta \right], \quad (14.75)$$

где $\mathbf{e}_{\parallel} = \mathbf{e}_2$ — единичный вектор в направлении оси y , соответствующий поляризации в плоскости орбиты, $\mathbf{e}_{\perp} = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_2$ — вектор нормальной поляризации, приблизительно соответствующий поляризации, нормальной плоскости орбиты (для малых θ). Показатель экспоненты в подынтегральном выражении равен

$$\omega \left[t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)}{c} \right] = \omega \left[t - \frac{q}{c} \sin \left(\frac{vt}{q} \right) \cos \theta \right]. \quad (14.76)$$

Так как мы ограничиваемся лишь малыми углами θ и коротким интервалом времени вблизи $t = 0$, можно разложить тригонометрические функции в (14.76) по малым аргументам. В результате получим

$$\omega \left[t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)}{c} \right] \approx \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{c^2}{3Q^2} t^3 \right]; \quad (14.77)$$

величина β , где это возможно, заменена единицей. Используя оценочные соотношения $t \sim q/c\gamma$ и $\theta \sim \langle \theta^2 \rangle^{1/2}$ [см. (14.42)], легко показать, что отношение опущенных в (14.77) членов к оставленным имеет порядок γ^{-2} .

Используя в (14.75) те же приближения, как и при выводе соотношения (14.77), преобразуем выражение (14.67) для распределения энергии излучения к виду

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} | -\mathbf{e}_{\parallel} A_{\parallel}(\omega) + \mathbf{e}_{\perp} A_{\perp}(\omega) |^2, \quad (14.78)$$

где амплитуды определяются соотношениями ¹⁾

$$A_{\parallel}(\omega) \approx \frac{c}{q} \int_{-\infty}^{\infty} t \exp \left\{ i \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{c^2 t^3}{3Q^2} \right] \right\} dt, \quad (14.79)$$

$$A_{\perp}(\omega) \approx \theta \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{c^2 t^3}{3Q^2} \right] \right\} dt.$$

¹⁾ Может показаться, что значения пределов интегрирования в (14.79) $t = \pm\infty$ противоречат допущениям, принятым при переходе от (14.76) к (14.77). Однако для большинства частот фаза экспоненты такова, что подынтегральное выражение в (14.79) является очень быстро осциллирующей функцией; поэтому подынтегральное выражение практически будет отлично от нуля лишь в пределах такого интервала времени, который гораздо меньше, чем необходимо для справедливости допущений, сделанных при переходе к соотношению (14.77). Следовательно, верхний и нижний пределы интегрирования можно принять равными бесконечности, не совершая при этом существенной ошибки. Принятое приближение перестает выполняться лишь при частотах порядка $\omega \sim (c/q) \sim \omega_0$. Но, как было показано в § 4, для релятивистских частиц практически весь спектр излучения соответствует гораздо более высоким частотам.

Произведя замену переменной $x = (ct/q) [(1/\gamma^2) + \theta^2]^{-1/2}$ и вводя параметр

$$\xi = \frac{\omega q}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{3/2}, \quad (14.80)$$

можно преобразовать интегральные представления для $A_{\parallel}(\omega)$ и $A_{\perp}(\omega)$ к виду

$$A_{\parallel}(\omega) = \frac{q}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} x \exp \left[i \frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx, \quad (14.81)$$

$$A_{\perp}(\omega) = \frac{q}{c} \theta \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx.$$

Интегралы (14.81) выражаются через функции Эйри, или модифицированные функции Бесселя,

$$\int_0^{\infty} x \sin \left[\frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(\xi), \quad (14.82)$$

$$\int_0^{\infty} \cos \left[\frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{1/3}(\xi).$$

В результате энергия, излученная в единицу телесного угла в единичном интервале частот, оказывается равной

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{\omega q}{c} \right)^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 \left[K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\theta^2}{(1/\gamma^2) + \theta^2} K_{1/3}^2(\xi) \right]. \quad (14.83)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках соответствует излучению, поляризованному в плоскости орбиты, второе — излучению, поляризованному перпендикулярно этой плоскости.

Проанализируем теперь этот довольно сложный результат. Прежде всего проинтегрируем выражение по всем частотам и найдем угловое распределение энергии

$$\int_0^{\infty} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} d\omega = \frac{7}{16} \frac{e^2}{q} \frac{1}{[(1/\gamma^2) + \theta^2]^{5/2}} \left[1 + \frac{5}{7} \frac{\theta^2}{(1/\gamma^2) + \theta^2} \right]. \quad (14.84)$$

Это выражение описывает все характерные свойства излучения, рассмотренные в § 3. Соотношение (14.84) может быть, конечно, получено непосредственным интегрированием по времени несколько видоизмененного выражения (14.44) для мощности излучения

при движении по окружности. Так же как и в (14.83), первое слабое в (14.84) соответствует поляризации, параллельной орбитальной плоскости, а второе — перпендикулярной поляризации. Проинтегрировав по всем углам, мы найдем, что энергия излучения с поляризацией, параллельной орбитальной плоскости, в 7 раз превосходит энергию излучения с перпендикулярной поляризацией. Таким образом, излучение релятивистски движущегося заряда в основном, хотя и не полностью, поляризовано в плоскости движения. Для нерелятивистского движения, как очевидно из (14.65), излучение полностью поляризовано в плоскости движения.

Как следует из свойств модифицированных функций Бесселя [см. (3.103) и (3.104)], интенсивность излучения пренебрежимо мала при $\xi \gg 1$. Согласно (14.80), это соответствует случаю больших углов; чем выше частота, тем меньше критический угол, вне пределов которого интенсивность излучения пренебрежимо мала. Таким образом, излучение сосредоточено в основном вблизи плоскости движения, как видно из (14.84), причем область заметного излучения тем меньше, чем выше отношение частоты к величине c/ρ . Однако если частота ω становится очень большой, то параметр ξ будет, очевидно, большим для *всех* углов. Следовательно, на таких частотах полная излученная энергия пренебрежимо мала. Критическая частота ω_c , при превышении которой излучение в любом направлении становится пренебрежимо малым, может быть определена из условия $\xi = 1$ для $\theta = 0$. Это приводит к соотношению

$$\omega_c = 3\gamma^3 \left(\frac{c}{\rho} \right) = 3 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^3 \frac{c}{\rho}. \quad (14.85)$$

Это значение критической частоты, как легко видеть, согласуется с результатом качественной оценки (14.50) (см. § 4). При движении заряда по окружности величина c/ρ равна основной частоте вращения ω_0 . В этом случае можно определить критическую гармонику $n_c = n_c \omega_0$, номер которой равен

$$n_c = 3 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^3. \quad (14.86)$$

Так как при $\gamma \gg 1$ излучение сконцентрировано в основном в орбитальной плоскости, представляет интерес вычислить интенсивность излучения (14.83) при $\theta = 0$. Для частот, гораздо меньших критической частоты ($\omega \ll \omega_c$), получим

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} \Big|_{\theta=0} \approx \frac{e^2}{c} \left[\frac{\Gamma(2/3)}{\pi} \right]^2 \left(\frac{3}{4} \right)^{1/3} \left(\frac{\omega \rho}{c} \right)^{2/3}. \quad (14.87)$$

В противоположном предельном случае $\omega \gg \omega_c$ имеем

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} \Big|_{\theta=0} \approx \frac{3}{2\pi} \frac{e^2}{c} \gamma^2 \frac{\omega}{\omega_c} e^{-2\omega/\omega_c}. \quad (14.88)$$

Из этих предельных выражений видно, что интенсивность излучения при $\theta = 0$ возрастает приблизительно как $\omega^{2/3}$ при частотах ниже критической, достигает максимума в окрестности ω_c и экспоненциально падает до нуля на более высоких частотах.

Угловые размеры области, в которой сосредоточено излучение на данной фиксированной частоте, можно оценить, вычислив угол θ_c , для которого $\xi(\theta_c) \approx \xi(0) + 1$. Для низкочастотной области ($\omega \ll \omega_c$) величина $\xi(0)$ очень мала и, таким образом, $\xi(\theta_c) \approx 1$. Это условие дает

$$\theta_c \approx \left(\frac{3c}{\omega q} \right)^{1/3} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^{1/3}. \quad (14.89)$$

Мы видим, что ширина угловой области излучения для низкочастотных составляющих гораздо больше среднеквадратичного значения $\langle \theta^2 \rangle^{1/2} \sim \gamma^{-1}$. В высокочастотном предельном случае ($\omega > \omega_c$) величина $\xi(0)$ гораздо больше единицы. При этом интенсивность убывает с увеличением угла приблизительно по закону

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} \approx \left. \frac{dI(\omega)}{d\Omega} \right|_{\theta=0} e^{-3\omega\gamma^2\theta^2/\omega_c}. \quad (14.90)$$

Критический угол, определяемый спаданием интенсивности в e раз, оказывается равным

$$\theta_c \approx \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\omega_c}{3\omega} \right)^{1/2}. \quad (14.91)$$

Очевидно, что высокочастотные составляющие заключены в угловой области, размеры которой гораздо меньше средних. На фиг. 14.10 изображен качественный ход кривых углового распределения интенсивности для различных диапазонов частот.

Спектральное распределение полной энергии, излученной при пролете частицы, можно определить, проинтегрировав выражение (14.83) по углам:

$$I(\omega) = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} \cos \theta d\theta \approx 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} d\theta \quad (14.92)$$

(напомним, что через θ обозначен угол, дополнительный к широте).

Для низкочастотной области можно получить оценку интеграла, воспользовавшись угловым распределением (14.87) при $\theta = 0$ и значением (14.89) критического угла θ_c . При этом

$$I(\omega) \sim 2\pi\theta_c \left. \frac{dI(\omega)}{d\Omega} \right|_{\theta=0} \sim \frac{e^2}{c} \left(\frac{\omega q}{c} \right)^{1/3}. \quad (14.93)$$

Отсюда видно, что интенсивность излучения при $\omega \ll \omega_c$ возрастает как $\omega^{1/3}$. Такая зависимость приводит к очень монотонной,

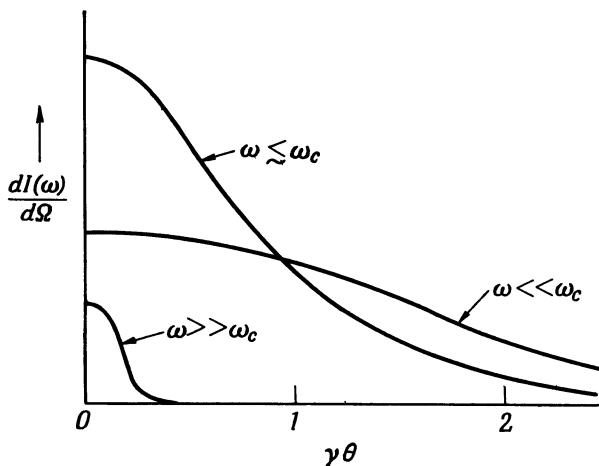
плоской форме спектра на частотах ниже ω_c . В другом предельном случае высоких частот, когда $\omega \gg \omega_c$, можно проинтегрировать (14.90) по углам и получить довольно точный результат

$$I(\omega) \approx \sqrt{3\pi} \frac{e^2}{c} \gamma \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1/2} e^{-2\omega/\omega_c}. \quad (14.94)$$

Выполняя соответствующее интегрирование по углам общего выражения (14.83) для распределения излучения, находим

$$I(\omega) \approx 2\sqrt{3} \frac{e^2}{c} \gamma \frac{\omega}{\omega_c} \int_{2\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx. \quad (14.95)$$

В пределе $\omega \ll \omega_c$ это выражение переходит в (14.93) с численным коэффициентом 3,25; для $\omega \gg \omega_c$ оно совпадает с (14.94).



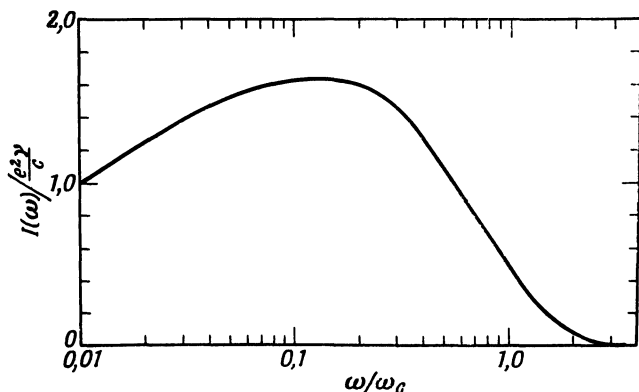
Ф и г. 14.10. Угловое распределение интенсивности излучения при разных частотах.

При частотах, сравнимых с критической частотой ω_c , излучение сосредоточено в угловой области порядка γ^{-1} . Для много меньших частот размеры угловой области больше, а для больших частот, наоборот, меньше.

Зависимость $I(\omega)$ от частоты показана на фиг. 14.11. Максимальная интенсивность по порядку величины равна $e^2\gamma/c$, а полная излученная энергия имеет порядок $e^2\gamma\omega_c/c = 3e^2\gamma^4/q$. Последняя величина согласуется со значением $4\pi e^2\gamma^4/3q$ для радиационных потерь за оборот в циклических ускорителях [см. (14.32)].

Излучение, описываемое соотношениями (14.83) и (14.95), называют *синхротронным излучением*, так как впервые оно наблюдалось в электронных синхротронах (1948 г.). Соответствующие теоретические расчеты для движения по окружности, однако, гораздо

раньше выполнил Шотт (1912 г.). При периодическом движении по окружности спектр излучения в действительности дискретен и состоит из набора частот, кратных основной частоте $\omega_0 = c/\rho$. Так как заряженная частица периодически повторяет свое движение с частотой $c/2\pi\rho$ оборотов в секунду, более удобно говорить об угловом распределении мощности излучения на n -й гармонике,



Ф и г. 14.11. Зависимость интенсивности синхротронного излучения от частоты.

Интенсивность отнесена к $\gamma e^2/c$, а частота — к ω_c [см. (14.85)].

а не об энергии излучения в единичном интервале частот при пролете частицы. Чтобы получить выражение для потери мощности на гармонике, следует лишь умножить величину $I(\omega)$, определяемую соотношением (14.95), или $dI(\omega)/d\Omega$, определяемую соотношением (14.83), на частоту вращения $c/2\pi\rho$ для перехода от энергии излучения к мощности или на $\omega_0 = c/\rho$ для перехода от интенсивности, отнесенной к единичному интервалу частот, к интенсивности, отнесенной к одной гармонике. В результате получим

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{c}{\rho} \right)^2 \frac{dI(\omega)}{d\Omega} \Big|_{\omega=n\omega_0}, \quad (14.96)$$

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{c}{\rho} \right)^2 I(\omega = n\omega_0).$$

Найденные теоретические соотношения были подробно сопоставлены с экспериментальными данными ¹⁾. Для этого было необходимо усреднить спектры излучения по периоду цикла ускорения, так как энергия электронов непрерывно возрастает (см. задачу 14.13). При максимальной энергии 80 Мэв спектр излучения занимает

¹⁾ См., например, [40] и в особенности [111].

область от основной частоты $\omega_0 \approx 10^9$ гц до $\omega_c \approx 10^{16}$ гц, ($\lambda \sim 1700$ Å). Излучение перекрывает видимую область и имеет голубовато-белый цвет. Результаты тщательных измерений полностью согласуются с теорией.

Синхротронное излучение наблюдалось также при исследовании солнечных пятен и Крабовидной туманности; кроме того, им, по-видимому, объясняется излучение Юпитера на частоте $\sim 10^3$ Мгц. Спектр излучения Крабовидной туманности простирается от области радиочастот до далекой ультрафиолетовой области, при этом излучение очень сильно поляризовано. Детальное исследование показывает, что электроны с энергией до 10^{12} эв возбуждают такое синхротронное излучение при своем движении по круговой или спиральной орбите в магнитном поле порядка 10^{-4} гаусс (см. задачу 14.15). Источником радиоизлучения Юпитера являются, по-видимому, электроны, захваченные поясами Ван Аллена, расположенными на расстоянии порядка нескольких радиусов от поверхности Юпитера. В настоящее время еще не ясно, является ли это излучение синхротронным излучением, испускаемым релятивистскими электронами, или это так называемое циклотронное излучение нерелятивистских электронов, движущихся по спиральным траекториям в магнитном поле планеты. Во всяком случае, наблюдаемое излучение сильно поляризовано параллельно экваториальной плоскости Юпитера, как и следует ожидать для частиц, захваченных полем диполя и движущихся по спиральным траекториям вдоль силовых линий.

§ 7. Рассеяние на свободных зарядах. Формула Томсона

Если плоская монохроматическая электромагнитная волна падает на свободную частицу с зарядом e и массой m , то частица испытывает ускорение и, следовательно, излучает. Направление излучения не совпадает с направлением падающей волны, частота же его при нерелятивистском движении совпадает с частотой падающего поля. В целом этот эффект можно рассматривать как рассеяние падающего излучения.

Мгновенное значение мощности излучения для частицы с зарядом e при нерелятивистском движении определяется формулой Лармора (14.21):

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \sin^2 \Theta, \quad (14.97)$$

где Θ — угол между направлением наблюдения и ускорением. Ускорение обусловлено действием падающей плоской электромагнитной волны. Обозначая волновой вектор через \mathbf{k} , а вектор поля-

ризации — через \mathbf{e} , запишем электрическое поле волны в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e} E_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}. \quad (14.98)$$

Согласно нерелятивистскому уравнению движения, ускорение равно

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{e} \frac{e}{m} E_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}. \quad (14.99)$$

Если предположить, что смещение заряда за период колебания много меньше длины волны, то средний по времени квадрат ускорения $\dot{\mathbf{v}}^2$ будет равен $1/2 \text{Re}(\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}}^*)$. При этом средняя мощность, излучаемая в единицу телесного угла, равна

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \Theta. \quad (14.100)$$

Так как описываемое явление проще всего рассматривать как рассеяние, удобно ввести эффективное дифференциальное сечение рассеяния, определив его следующим образом:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Энергия, излучаемая в единицу телесного угла за единицу времени}}{\text{Поток энергии падающей волны через единичную площадку за единицу времени}}. \quad (14.101)$$

Поток энергии падающей волны определяется средним по времени значением вектора Пойнтинга для плоской волны, т. е. равен $c|E_0|^2/8\pi$. Таким образом, согласно (14.100), для дифференциального эффективного сечения рассеяния получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \Theta. \quad (14.102)$$

Если падающая волна распространяется в направлении оси z , а вектор поляризации составляет угол ψ с осью x , как показано на фиг. 14.12, то угловое распределение определяется множителем

$$\sin^2 \Theta = 1 - \sin^2 \theta \cos^2(\varphi - \psi). \quad (14.103)$$

Для неполяризованного падающего излучения дифференциальное сечение рассеяния получается усреднением по углу ψ , что приводит к соотношению

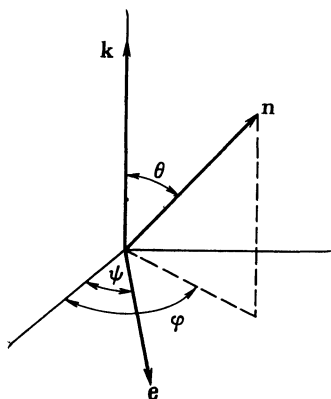
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (14.104)$$

Это — так называемая *формула Томсона* для рассеяния падающего излучения на свободном заряде. Она описывает рассеяние рентгеновских лучей на электронах или γ -лучей на протонах. Угловое

распределение излучения изображено на фиг. 14.13 (сплошная кривая). Для полного эффективного сечения рассеяния, так называемого *томсоновского сечения рассеяния*, получаем

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2. \quad (14.105)$$

Для электронов $\sigma_T = 0,665 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$. Величина $e^2/mc^2 = 2,82 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, имеющая размерность длины, называется обычно *классическим радиусом электрона*, так как однородное распределение заряда, равного заряду электрона, должно иметь радиус такого порядка, чтобы собственная электростатическая энергия была равна массе покоя электрона (см. гл. 17).



Ф и г. 14.12.

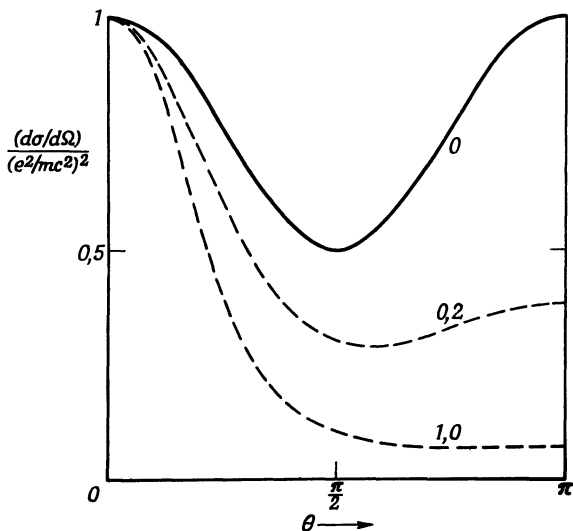
Классический результат Томсона справедлив лишь на низких частотах. Если частота ω становится сравнимой с величиной mc^2/\hbar , т. е. если энергия фотона $\hbar\omega$ сравнима или превышает энергию покоя, то начинают существенно сказываться квантовомеханические эффекты. Возможна и другая интерпретация указанного критерия: можно ожидать появления квантовых эффектов, когда длина волны излучения становится сравнимой или меньше комптоновской длины волны частицы \hbar/mc . На высоких частотах угловое распределение излучения более сконцентрировано в направлении падающей волны, как показано пунктирными кривыми на фиг. 14.13; при этом, однако, сечение излучения для нулевого угла всегда совпадает с определенным по формуле Томсона.

Полное сечение рассеяния оказывается меньше томсоновского сечения рассеяния (14.105). Это так называемое *комптоновское рассеяние*. Для электронов оно описывается формулой Клейна — Нишины. Здесь мы приведем для справок асимптотические выра-

жения полного сечения рассеяния, определяемого по формуле Клейна — Нишины:

$$\sigma_{KN} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \begin{cases} \frac{8\pi}{3} \left(1 - \frac{2l \cdot \omega}{mc^2} + \dots \right), & \hbar\omega \ll mc^2, \\ \pi \frac{mc^2}{\hbar\omega} \left[\ln \left(\frac{2l \cdot \omega}{mc^2} \right) + \frac{1}{2} \right], & \hbar\omega \gg mc^2. \end{cases} \quad (14.106)$$

Для протонов отклонения от формулы Томсона возникают при энергиях фотонов, превышающих приблизительно 100 Мэв. Эта



Ф и г. 14.13. Дифференциальное сечение рассеяния неполяризованного излучения на свободных электронах.

Сплошная кривая — классический результат Томсона. Пунктирные кривые соответствуют результатам расчета по квантовомеханической формуле Клейна — Нишины. Цифры у кривых указывают значения $\hbar\omega/mc^2$.

величина гораздо меньше критического значения $\hbar\omega \sim Mc^2 \sim 1$ Гэв, которое можно было бы ожидать, исходя из аналогии с комптон-эффектом для электронов. Это обусловлено тем, что в отличие от электрона протон нельзя рассматривать как точечную частицу, характеризуемую лишь электромагнитным взаимодействием; протон — более сложное образование с размазанным распределением заряда с радиусом порядка $0,8 \cdot 10^{-13}$ см, обусловленным сильными взаимодействиями с π -мезонами. Отличие от томсоновского рассеяния (быстрое убывание сечения рассеяния) проявляется при энергиях фотонов порядка энергии покоя π -мезона (140 Мэв).

§ 8. Когерентное и некогерентное рассеяние

При рассеянии рентгеновских лучей на атомах угловое распределение (14.104) наблюдается в широком интервале углов, по крайней мере для легких элементов. Однако в направлении падающего излучения рассеяние оказывается много больше величины, определяемой томсоновским сечением рассеяния. Объясняется это когерентным сложением амплитуд излучения для всех электронов. Как следует из соотношения (14.18), поле излучения, испускаемого системой свободных заряженных частиц, определяется формулой

$$\mathbf{E}_a = \frac{1}{c} \sum_j e_j \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}_j)}{R_j} \right]_{\text{запазд}}. \quad (14.107)$$

Воспользовавшись выражением (14.99) для ускорения, получим

$$\mathbf{E}_a = \frac{E_0}{c^2} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{e}) \sum_j \frac{e_j^2}{m_j} \frac{\exp \{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j - i\omega [t - (R_j/c)]\}}{R_j}. \quad (14.108)$$

При расчете излучения можно аппроксимировать величину R_j в показателе экспоненты выражением (14.63). Поступая далее совершенно так же, как при переходе от (14.97) к (14.102), можно найти сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \sum_j \frac{e_j^2}{m_j c^2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_j} \right|^2 \sin^2 \Theta, \quad (14.109)$$

где вектор

$$\mathbf{q} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} - \mathbf{k} \quad (14.110)$$

равен изменению волнового вектора при рассеянии.

Формула (14.109) относится к свободным заряженным частицам, мгновенное положение которых описывается вектором \mathbf{x}_j . Электроны в атомах не являются свободными. Однако если частота падающего излучения велика по сравнению с характерными частотами связи, то при ускорении импульсом конечной длительности электроны можно рассматривать как свободные частицы. Поэтому при расчете рассеяния высокочастотного (по сравнению с частотами связи) излучения на системе связанных заряженных частиц можно пользоваться выражением (14.109). Для сравнения результатов с экспериментом остается лишь усреднить (14.109) по положениям всех частиц системы. В результате для наблюдаемой величины

сечения рассеяния получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left\langle \left| \sum_j \frac{e_j^2}{m_j c^2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_j} \right|^2 \right\rangle \sin^2 \Theta, \quad (14.111)$$

где символ $\langle \rangle$ означает усреднение по всем возможным значениям \mathbf{x}_j .

Поведение сечения (14.111) очень сильно меняется в зависимости от величины $|\mathbf{q}|$. Координаты \mathbf{x}_j имеют абсолютные значения порядка линейных размеров системы, которые мы обозначим через a . Поведение сечения сильно отличается в двух областях, для которых соответственно $qa \ll 1$ и $qa \gg 1$. Если θ — угол рассеяния, то величина q равна $2k \sin(\theta/2)$. Поэтому граница между указанными двумя областями соответствует углу θ , при котором

$$2ka \sin \frac{\theta}{2} \sim 1. \quad (14.112)$$

Если частота достаточно низка, так что $ka \ll 1$, то предельный случай $qa \ll 1$ справедлив для всех углов. Если же частота такова, что $ka \gg 1$, то в области углов вблизи направления падающего излучения справедливо приближение $qa \ll 1$, а в области больших углов применимо противоположное приближение $qa \gg 1$. Размеры области, где справедливо приближение $qa \ll 1$, по порядку величины определяются соотношением

$$\theta_c \sim \frac{1}{ka}. \quad (14.113)$$

При $qa \ll 1$ показатели экспонент в (14.111) столь малы, что экспоненты можно приближенно положить равными единице. В этом случае дифференциальное сечение рассеяния принимает вид

$$\lim_{qa \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \sum_j \frac{e_j^2}{m_j c^2} \right|^2 \sin^2 \Theta = Z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \Theta \quad (14.114)$$

(последнее выражение относится к электронам в атоме с атомным номером Z). В полученном выражении ясно виден эффект когерентности рассеяния всеми частицами, интенсивность которого отличается от интенсивности рассеяния на одной частице множителем, равным *квадрату* числа частиц.

В противоположном предельном случае $qa \gg 1$ показатели экспонент велики и значительно отличаются по величине. Следовательно, среднее значение перекрестных членов в квадрате суммы равно нулю, и остаются лишь квадраты модулей отдельных сла-

гаемых. В результате для сечения рассеяния получим

$$\lim_{qa \rightarrow \infty} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_j \left(\frac{e_j^2}{m_j c^2} \right)^2 \sin^2 \Theta = Z \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \sin^2 \Theta, \quad (14.115)$$

где опять последнее выражение относится к электронам в атоме с атомным номером Z . Эта формула соответствует некогерентному сложению амплитуд рассеяния для отдельных частиц.

При рассеянии рентгеновских лучей на атомах критический угол (14.113) можно оценить, используя в качестве радиуса атома величину (13.95). При этом получаем

$$\theta_c \sim \frac{Z^{1/3}}{\hbar \omega (k\lambda)}. \quad (14.116)$$

Для углов, меньших θ_c , сечение быстро возрастает до величины порядка (14.114), для больших углов оно в Z раз превышает томсоновское сечение рассеяния (14.115), а для жестких («высоко-частотных») рентгеновских или γ -лучей — сечение, определяемое формулой Клейна — Нишины (см. фиг. 14.13).

§ 9. Излучение Вавилова — Черенкова

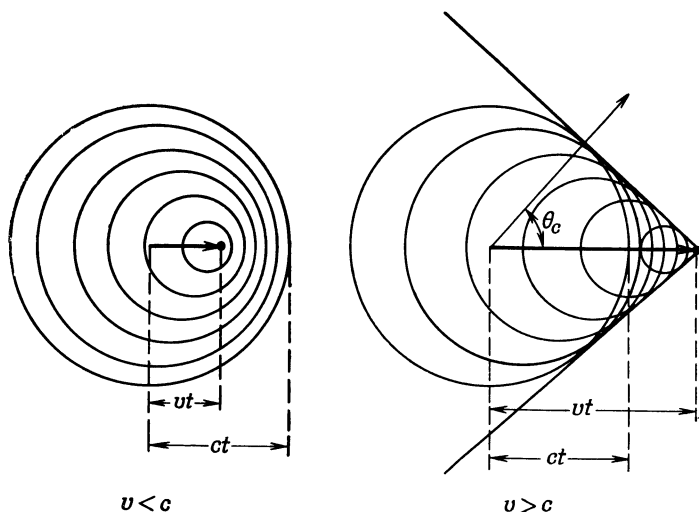
При равномерном прямолинейном движении в свободном пространстве заряженная частица не излучает. Однако частица, движущаяся с постоянной скоростью в материальной среде, может излучать, если ее скорость превышает фазовую скорость распространения электромагнитных волн в среде. Это излучение называется *излучением Вавилова — Черенкова* (или, короче, черенковским излучением) по имени открывших его ученых (1937 г.). Это излучение представляет собой коллективный эффект излучения множества атомов среды, электроны которых ускоряются полем проходящей частицы. Ввиду коллективного характера процесса удобно воспользоваться макроскопическим описанием среды, характеризуя ее свойства диэлектрической проницаемостью ϵ , а не исследовать детальные свойства отдельных атомов.

Качественное объяснение эффекта можно получить, рассматривая изменение во времени поля быстрой частицы в диэлектрической среде. Обозначим скорость света в среде через c , а скорость частицы — через v . На фиг. 14.14 изображена последовательность сферических волновых фронтов для движущейся частицы при $v < c$ и $v > c$. Лишь в случае $v > c$ отдельные сферические волновые поверхности интерферируют, обуславливая образование кильватерного волнового фронта за частицей. Нормаль к этой кильватерной волне образует угол θ_c с направлением вектора скорости, где

$$\cos \theta_c = \frac{c}{v}. \quad (14.117)$$

Она и определяет направление распространения черенковского излучения.

В гл. 13, § 4, мы уже нашли поля, соответствующие излучению Вавилова — Черенкова, и даже получили выражение (13.82) для



Ф и г. 14.14. Излучение Вавилова — Черенкова.

Окружности изображают последовательность волновых фронтов поля частицы для случаев, когда скорость меньше и больше скорости света в среде. При $v > c$ происходит образование «ударной» электромагнитной волны, движущейся в направлении, определяемом черенковским углом θ_c .

интенсивности этого излучения. Однако весьма поучительно рассмотреть эту задачу с помощью потенциалов Лиенара — Вихерта. Как следует из гл. 13, § 4, поля и энергию излучения в немагнитных средах можно рассчитать, рассматривая движение частицы со скоростью $v > c$ в свободном пространстве, производя затем в конечном результате вычислений замену

$$c \rightarrow \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}, \quad e \rightarrow \frac{e}{\sqrt{\epsilon}}, \quad (14.118)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость¹⁾. Для упрощения ана-

1) Как видно из (13.54), это соответствует применению потенциалов $\Phi' = \sqrt{\epsilon} \Phi$, $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ и полей $\mathbf{E}' = \sqrt{\epsilon} \mathbf{E}$, $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$. При этом, например, вектор Пойнтинга оказывается равным

$$\mathbf{S}' = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}' \times \mathbf{B}') \rightarrow \frac{c}{4\pi \sqrt{\epsilon}} (\mathbf{E}' \times \mathbf{B}') = \mathbf{S}.$$

лиза будем считать, что ε не зависит от частоты. Однако, поскольку наши конечные результаты будут получены для отдельных спектральных компонент, они легко смогут быть обобщены.

Потенциалы Лиенара — Вихерта для произвольно движущегося точечного заряда были получены в § 1. При этом неявно предполагалось, что скорость частицы меньше скорости света. В этом случае потенциалы (14.6) в данной пространственно-временной точке определяются поведением частицы лишь в *одной* более ранней пространственно-временной точке, а именно в соответствующей «запаздывающей» точке. На левой половине фиг. 14.14 это выражается в том, что любая заданная точка лежит лишь на одной окружности. Если же $v > c$, то, как видно из правой половины рисунка, поле в заданной пространственно-временной точке определяется *двумя* «запаздывающими» положениями. Скалярный потенциал в (14.6) следует теперь заменить выражением

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = e \left[\frac{1}{\kappa R} \right]_1 + e \left[\frac{1}{\kappa R} \right]_2, \quad (14.119)$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум моментам запаздывающего времени t'_1 и t'_2 .

Для определения t'_1 и t'_2 найдем, когда обращается в нуль аргумент δ -функции в (14.3):

$$t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|}{c} - t = 0. \quad (14.120)$$

Для частицы, движущейся с постоянной скоростью \mathbf{v} , можно положить $\mathbf{r}(t') = \mathbf{v}t'$. Вводя $\mathbf{X} = (\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$ — векторное расстояние от *истинного* положения частицы P до точки наблюдения P' , получаем

$$t - t' = \frac{1}{c} |\mathbf{X} + \mathbf{v}(t - t')|. \quad (14.121)$$

Решение этого квадратного уравнения имеет вид

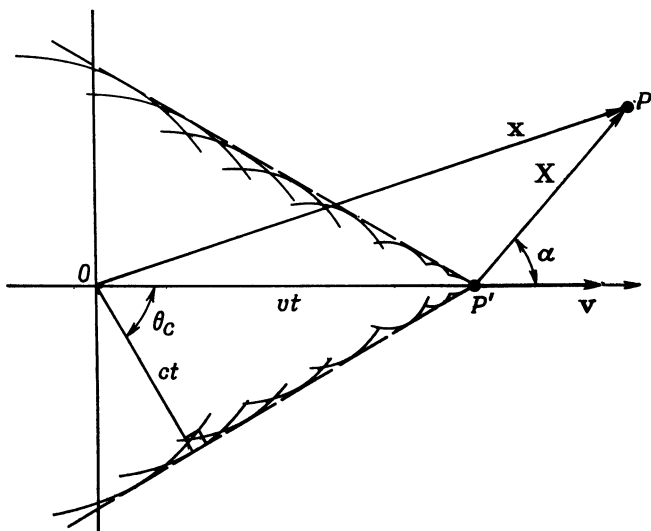
$$t - t' = \frac{-\mathbf{X} \cdot \mathbf{v} \pm \sqrt{(\mathbf{X} \cdot \mathbf{v})^2 - (v^2 - c^2) X^2}}{v^2 - c^2} \quad (14.122)$$

Физический смысл имеют лишь действительные положительные корни. При $v < c$ квадратный корень действителен и больше величины $|\mathbf{X} \cdot \mathbf{v}|$, так что существует лишь одно пригодное решение для $(t - t')$, как и отмечалось ранее. Для $v > c$ дело обстоит иначе. Во-первых, даже при действительном квадратном корне (как это имеет место для направлений, приблизительно параллельных или антипараллельных скорости \mathbf{v}), он меньше по величине, чем $|\mathbf{X} \cdot \mathbf{v}|$. Следовательно, если угол между \mathbf{X} и \mathbf{v} острый, то решения для $(t - t')$ не существует, т. е. поля перед частицей нет. Если α — угол

между \mathbf{X} и \mathbf{v} (фиг. 14.15), то при $\cos^2\alpha < (1 - c^2/v^2)$ квадратный корень, как легко видеть, принимает чисто мнимые значения. Однако для области углов, удовлетворяющих неравенствам

$$\arccos\left(-\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}\right) < \alpha < \pi,$$

существует два действительных и положительных значения $(t-t')$, удовлетворяющих (14.121). Таким образом, электромагнит-



Ф и г. 14.15.

ные потенциалы отличны от нуля лишь внутри черенковского конуса, определяемого условием

$$\cos \alpha = -\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right)^{1/2}.$$

Как легко показать, двум корням (14.122) соответствуют следующие значения κR :

$$\kappa R = \mp \frac{1}{c} [(\mathbf{X} \cdot \mathbf{v})^2 - (v^2 - c^2) X^2]^{1/2}. \quad (14.123)$$

В действительности потенциал (14.119) должен содержать лишь абсолютные величины, поскольку в (14.4) справа должна входить лишь абсолютная величина производной. Таким образом, оба слагаемых в (14.119) складываются и потенциалы могут быть запи-

саны в виде

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{2e}{X \sqrt{1 - (v^2/c^2) \sin^2 \alpha}}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{v}{c} \Phi(\mathbf{x}, t).\end{aligned}\quad (14.124)$$

Полученные выражения для потенциалов справедливы внутри черенковского конуса; на его поверхности они обращаются в бесконечность, а вне конуса равны нулю. Они описывают волновой фронт, распространяющийся со скоростью c в направлении θ_c , определяемом согласно (14.117). Обращение их в бесконечность, разумеется, физически нереально. Оно связано с исходным допущением о независимости скорости света в среде от частоты. Для достаточно высоких частот (достаточно коротких длин волн) фазовая скорость в среде приближается к скорости света в свободном пространстве. Учет такой зависимости от частоты приводит к сглаживанию на коротких расстояниях и к исключению особенностей.

Потенциалы (14.124) представляют собой частный случай потенциалов, фурье-амплитуды которых даются выражениями (13.57). В свою очередь поля, определяемые потенциалами (14.124), также являются фурье-амплитудами выражений (13.64) и (13.65), где $\varepsilon(\omega)$ следует считать действительной постоянной. Потери энергии на излучение находятся так же, как и в гл. 13, § 4, интегрированием вектора Пойнтинга по поверхности цилиндра [ср. (13.71)], что приводит к окончательному выражению (13.82) для энергии, излучаемой на единице длины.

Приведенное выше описание появления черенковской «ударной волны» при $v > c$ представляет собой адекватное макроскопическое объяснение возникновения черенковского излучения. Если же интересоваться лишь угловым и спектральным распределением излучения, а не его механизмом, то можно с помощью подстановки (14.118) простым, но нестрогим путем получить эти характеристики. Угловое и частотное распределение энергии, излучаемой движущейся частицей, определяется соотношением (14.67):

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \exp \left\{ i\omega \left[t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)}{c} \right] \right\} dt \right|^2. \quad (14.125)$$

Производя подстановку (14.118), приходим к следующему выражению для энергии, теряемой частицей, движущейся в немагнитной диэлектрической среде:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \varepsilon^{1/2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \exp \left\{ i\omega \left[t - \frac{\varepsilon^{1/2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)}{c} \right] \right\} dt \right|^2. \quad (14.126)$$

При равномерном прямолинейном движении $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t$, так что

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \varepsilon^{1/2}}{c^3} |\mathbf{n} \times \mathbf{v}|^2 \left| \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i\omega t \left(1 - \frac{\varepsilon^{1/2}}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \right) \right] dt \right|^2. \quad (14.127)$$

Интеграл в правой части есть δ -функция. Таким образом,

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \varepsilon^{1/2} \beta^2 \sin^2 \theta}{c} |\delta(1 - \varepsilon^{1/2} \beta \cos \theta)|^2, \quad (14.128)$$

где угол θ отсчитывается от направления скорости \mathbf{v} . Наличие δ -функции показывает, что энергия излучается лишь в направлении, характеризуемом черенковским углом θ_C :

$$\cos \theta_C = \frac{1}{\beta \varepsilon^{1/2}}. \quad (14.129)$$

Присутствие в угловом распределении (14.128) квадрата δ -функции означает, что полная энергия, излученная в единичном интервале частот, бесконечна. Появление этой расходимости связано с предположением, что частица движется в среде неограниченно долго. Для получения разумного результата будем считать, что частица проходит слой диэлектрика в течение времени $2T$. В этом случае расходящийся интеграл в (14.127) заменяется выражением

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_{-T}^T \exp \left[i\omega t \left(1 - \frac{\varepsilon^{1/2}}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \right) \right] dt = \frac{\omega T}{\pi} \frac{\sin [\omega T (1 - \varepsilon^{1/2} \beta \cos \theta)]}{[\omega T (1 - \varepsilon^{1/2} \beta \cos \theta)]}. \quad (14.130)$$

При $\omega T \gg 1$ квадрат модуля этой функции имеет резкий максимум при значении угла θ , равном θ_C . Предполагая, что $\beta > 1/\varepsilon^{1/2}$ (при этом угол θ_C существует), произведем интегрирование по углам:

$$\int d\Omega \left(\frac{\omega T}{\pi} \right)^2 \frac{\sin^2 [\omega T (1 - \varepsilon^{1/2} \beta \cos \theta)]}{[\omega T (1 - \varepsilon^{1/2} \beta \cos \theta)]^2} = \frac{2\omega T}{\beta \varepsilon^{1/2}}; \quad (14.131)$$

отсюда видно, что потери на излучение пропорциональны интервалу времени. Из (14.128) находим полную потерю энергии на излучение в единичном интервале частот при прохождении слоя вещества

$$I(\omega) = \frac{e^2 \omega}{c^2} 2c\beta T \sin^2 \theta_C. \quad (14.132)$$

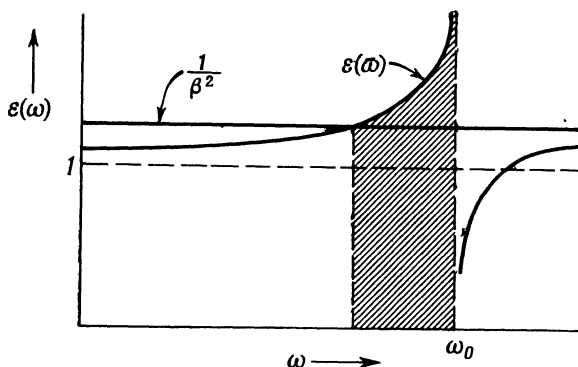
Разделив полученную величину на $2c\beta T$, определим энергию, излученную в единичном интервале частот на единице пути. Нако-

нец, учитывая значение (14.129) угла θ_C , найдем

$$\frac{dI(\omega)}{dx} = \frac{e^2 \omega}{c^2} \left[1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)} \right], \quad (14.133)$$

где частота ω такова, что $\epsilon(\omega) > 1/\beta^2$; полученный результат согласуется с (13.82).

Свойства черенковского излучения можно использовать для измерения скорости быстрых частиц. Если частицы с данной скоростью проходят через среду с известной диэлектрической проницаемостью ϵ , то свет будет испускаться под черенковским углом



Ф и г. 14.16. Область черенковского излучения.

Излучение испускается лишь в заштрихованной полосе частот, для которой выполняется условие $\epsilon(\omega) > \beta^{-2}$.

(14.129). Таким образом, измерение угла θ_C позволяет определить скорость. Так как диэлектрическая проницаемость среды ϵ , вообще говоря, зависит от частоты, световое излучение разной длины волны будет испускаться под несколько различающимися углами. На фиг. 14.16 изображена типичная кривая дисперсии $\epsilon(\omega)$ с областью аномальной дисперсии в верхнем конце интервала частот. Заштрихованная область соответствует полосе частот, в которой существует черенковское излучение. Так как в области аномальной дисперсии диэлектрические среды обладают сильным поглощением, максимум спектрального распределения черенковского излучения лежит несколько ниже резонансного значения частоты. Чтобы выделить малый интервал частот и повысить тем самым точность измерений скорости, можно применять узкополосные фильтры. Для очень быстрых частиц ($\beta \ll 1$) в качестве среды можно использовать газ; тогда диэлектрическая проницаемость мало отличается от единицы, а величину $(\epsilon - 1)$ можно менять в широких пределах, изменяя давление газа. Счетчики, использующие черенков-

ское излучение, нашли широкое применение в физике частиц высоких энергий как измерители скорости, в качестве масс-спектрометров (в сочетании с устройством для определения импульса), а также в качестве дискриминаторов, которые позволяют устранить нежелательные медленные частицы.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Все руководства по электродинамике в той или иной мере затрагивают вопросы, связанные с излучением ускоренных частиц, хотя и неодинаково подробно. Релятивистские аспекты проблемы более или менее детально рассмотрены в книгах Иваненко и Соколова [53], § 39—43, Ландау и Лифшица [63], гл. 8 и 9, Пановского и Филиппс [78], гл. 18 и 19, Зоммерфельда [102], § 29,30. Обширный расчетный материал, касающийся излучения релятивистских частиц, предвосхитивший многие результаты, вновь открытые в период 1940—1950 гг., содержится в интересной монографии Шотта [91]. Вопрос о рассеянии излучения заряженными частицами ясно изложен в книгах Ландау и Лифшица [63], гл. 9, § 11—13, и [64], гл. 14 и 15.

ЗАДАЧИ

14.1. Проверить непосредственным вычислением, что выражения для *всех* составляющих полей \mathbf{E} и \mathbf{B} равномерно движущейся частицы, получающиеся из потенциалов Лиенара — Вихерта, совпадают с выражениями, найденными в тексте с помощью преобразований Лоренца. Использовать общий метод, описанный в конце § 1.

14.2. С помощью потенциалов Лиенара — Вихерта найти среднюю по времени мощность излучения в единицу телесного угла для нерелятивистской частицы с зарядом e , если:

- частица совершает гармонические колебания вдоль оси z так, что ее мгновенное положение $z(t) = a \cos \omega_0 t$;
- частица движется с постоянной угловой частотой ω_0 по окружности радиусом R , лежащей в плоскости xy .

Построить график углового распределения излучения и определить полную мощность излучения в обоих случаях.

14.3. *Нерелятивистская* частица с зарядом ze , массой m и кинетической энергией E претерпевает лобовое соударение с фиксированным центральным полем сил конечной протяженности. Силы являются отталкивающими и описываются потенциалом $V(r)$, который превышает E на близких расстояниях.

- Показать, что полная излученная энергия определяется формулой

$$\Delta W = \frac{4}{3} \frac{z^2 e^2}{m^2 c^3} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \left| \frac{dV}{dr} \right|^2 \frac{dr}{\sqrt{V(r_{\min}) - V(r)}},$$

где r_{\min} — минимальное расстояние до центра сил, достигаемое при соударении.

- Показать, что если взаимодействие описывается кулоновским потенциалом $V(r) = zZe^2/r$, то полная излученная энергия равна

$$\Delta W = \frac{8}{45} \frac{zmv_0^5}{Zc^3},$$

где v_0 — скорость заряда на бесконечности.

14.4. Частица с массой m и зарядом q движется в плоскости, перпендикулярной однородному статическому магнитному полю B .

а) Вычислить полную энергию, излучаемую в единицу времени, выразив ее через заданные выше константы и отношение γ полной энергии частицы к ее энергии покоя.

б) Показать, что если при $t = 0$ частица имела полную энергию $E_0 = \gamma_0 mc^2$, то в момент t , определяемый соотношением

$$t \approx \frac{3m^3 c^5}{2q^4 B^2} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0} \right),$$

она будет обладать полной энергией $E = \gamma mc^2 < E_0$, если $\gamma \gg 1$.

в) Найти кинетическую энергию частицы в момент t , если первоначально частица была нерелятивистской и имела кинетическую энергию ϵ_0 при $t = 0$.

г) Пусть частица, захваченная дипольным магнитным полем Земли, движется по спирали вдоль силовой линии. Где она будет больше излучать — вблизи экватора или вблизи точки поворота? Почему? Дать количественное обоснование.

14.5. Как и в задаче 14.2, п. «а» заряд e совершает простое гармоническое движение вдоль оси z : $z(t') = a \cos \omega_0 t'$.

а) Показать, что мгновенное значение мощности, излучаемой в единицу телесного угла, равно

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 c \beta^4}{4\pi a^2} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \omega t'}{(1 + \beta \cos \theta \sin \omega_0 t')^5},$$

где $\beta = a\omega_0/c$.

б) Произведя усреднение по времени, показать, что средние потери мощности в единицу телесного угла описываются соотношением

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 c \beta^4}{32\pi a^2} \frac{4 + \beta^2 \cos^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^{7/2}} \sin^2 \theta.$$

в) Построить схематический график углового распределения излучения для нерелятивистского и релятивистского движений.

14.6. Пусть излучающая частица совершает периодическое движение с периодом T . С помощью формулы суммирования Пуассона или другим методом показать, что в этом случае непрерывный спектр излучаемых частот переходит в дискретный спектр, состоящий из частот, кратных основной частоте. Показать, что общее выражение для мощности излучения в единицу телесного угла на m -й гармонике основной частоты $\omega_0 = 2\pi/T$ имеет вид

$$\frac{dP_m}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_0^4 m^2}{(2\pi c)^3} \left| \int_0^{2\pi/\omega_0} \mathbf{v}(t) \times \mathbf{n} \exp \left\{ im\omega_0 \left[t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}(t)}{c} \right] \right\} dt \right|^2.$$

14.7. а) Показать, что для простого гармонического движения заряда, рассмотренного в задаче 14.5, средняя мощность излучения в единицу телесного угла на m -й гармонике равна

$$\frac{dP_m}{d\Omega} = \frac{e^2 c \beta^2}{2\pi a^2} m^2 \operatorname{tg}^2 \theta J_m^2(m\beta \cos \theta).$$

б) Показать, что в нерелятивистском предельном случае вся мощность излучается на основной гармонике и равна

$$P \approx \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^4 \bar{a}^2,$$

где \bar{a}^2 — средний квадрат амплитуды колебаний.

14.8. Частица с зарядом e движется с постоянной угловой частотой ω_0 по окружности радиусом R , лежащей в плоскости xy .

а) Показать, что точное выражение для углового распределения мощности излучения на m -й гармонике имеет вид

$$\frac{dP_m}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_0^4 R^2}{2\pi c^3} m^2 \left\{ \left[\frac{dJ_m(m\beta \sin \theta)}{d(m\beta \sin \theta)} \right]^2 + \frac{\text{ctg}^2 \theta}{\beta^2} J_m^2(m\beta \sin \theta) \right\},$$

где $\beta = \omega_0 R/c$, а $J_m(x)$ — функция Бесселя m -го порядка.

б) Считая движение нерелятивистским, получить приближенное выражение для $dP_m/d\Omega$. Сопоставить с результатами задачи 14.2, п. «б».

в) Считая движение ультрарелятивистским, получить характеристики, приведенные в тексте для релятивистской частицы, движущейся по окружности (при этом полезно использовать формулы из книги Ватсона [114]).

14.9. Согласно принципу соответствия Бора, в предельном случае больших квантовых чисел классическое значение мощности излучения на основной гармонике равно произведению энергии кванта $\hbar\omega_0$ на вероятность перехода (обратное среднее время жизни) между состояниями с главными квантовыми числами n и $n-1$.

а) Используя нерелятивистское приближение, показать, что для водородоподобного атома классическое выражение для вероятности перехода с круговой орбиты, характеризуемой главным квантовым числом n , на орбиту с квантовым числом $n-1$ имеет вид

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{Ze^2}{\hbar c} \right)^4 \frac{mc^2}{\hbar} \frac{1}{n^5}.$$

б) Для водорода сравнить классическое значение времени жизни, найденное в п. «а», с точным квантовомеханическим значением для переходов $2p \rightarrow 1s$ ($1,6 \cdot 10^{-9}$ сек), $4f \rightarrow 3d$ ($7,3 \cdot 10^{-8}$ сек), $6h \rightarrow 5g$ ($6,1 \cdot 10^{-7}$ сек).

14.10. При периодическом движении заряда излучение обладает дискретным спектром частот, кратных основной частоте движения. Значительное излучение на высших гармониках может иметь место либо из-за релятивистских эффектов (см. задачи 14.7 и 14.8) даже в случае, когда составляющие скорости строго синусоидальны, либо из-за того, что составляющие скорости меняются не синусоидально, хотя и периодически. Примером второго случая является нерелятивистское эллиптическое движение электрона в атоме водорода.

Орбита при этом может быть определена параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x &= a(\cos u - \varepsilon), \\ y &= a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin u, \end{aligned}$$

где

$$\omega_0 t = u - \varepsilon \sin u;$$

a — главная полуось эллипса, ε — эксцентриситет, ω_0 — угловая частота, u — угол в плоскости орбиты. Параметры эллипса можно выразить через

энергию связи B и момент количества движения L :

$$a = \frac{e^2}{2B}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2BL^2}{me^4}}, \quad \omega_0^2 = \frac{8B^3}{mc^4}.$$

а) Показать, что мощность излучения на k -й гармонике равна

$$P_k = \frac{4e^2}{3c^3} (k\omega_0)^4 a^2 \left\{ \frac{1}{k^2} \left[[J'_k(k\varepsilon)]^2 + \left(\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \right) J_k^2(k\varepsilon) \right] \right\},$$

где $J_k(x)$ — функция Бесселя k -го порядка.

б) Показать, что для круговой орбиты полученный результат согласуется с решением задачи 14.8, п. «а».

14.11. Вместо одиночного заряда e , движущегося с постоянной частотой ω_0 по окружности радиусом R (см. задачу 14.8), рассмотреть движение системы N зарядов, относительные положения которых на окружности фиксированы.

а) Показать, что мощность излучения на m -й гармонике описывается соотношением

$$\frac{dP_m(N)}{d\Omega} = \frac{dP_m(1)}{d\Omega_j} F_m(N),$$

где $dP_m(1)/d\Omega$ — мощность излучения одного заряда (см. задачу 14.8, п. «а»), а

$$F_m(N) = \left| \sum_{j=1}^N e^{im\theta_j} \right|^2,$$

где θ_j — угловая координата j -го заряда в момент $t = t_0$.

б) Показать, что при равномерном распределении зарядов по окружности излучение происходит лишь на гармониках, кратных $N\omega_0$, а интенсивность излучения возрастает в N^2 раз по сравнению с излучением одиночного заряда. Дать качественное объяснение указанных фактов.

в) Показать без подробных вычислений, что при нерелятивистском движении полная мощность излучения зависит от N приблизительно как β^{2N} и, таким образом, в пределе при $N \rightarrow \infty$ излучение отсутствует.

г) Аналогичным образом показать, что для релятивистских частиц зависимость мощности излучения от N определяется функцией $\exp(-2N/3\gamma^3)$ при $N \gg \gamma^3$, так что опять-таки в пределе $N \rightarrow \infty$ излучение отсутствует.

д) Указать связь между результатами, полученными в п. «в» и «г», и известными излучательными свойствами стационарного тока в замкнутом контуре.

14.12. Рассмотреть в качестве идеализации постоянного тока в контуре систему из N идентичных зарядов q , движущихся по произвольному замкнутому пути с постоянной по величине скоростью v . Соседние заряды находятся на малом постоянном расстоянии Δ друг от друга.

Исходя из выражений Лиенара — Вихерта для полей каждой частицы и не накладывая никаких ограничений на величину скорости v , показать, что в пределе, когда $N \rightarrow \infty$, $q \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow 0$, но $Nq = \text{const}$, $q/\Delta = \text{const}$, система не излучает, а электрическое и магнитное поля системы эквивалентны обычным статическим полям.

(Заметим, что в реальном контуре стационарные положительные ионы в проводнике создают электрическое поле, компенсирующее поле движущихся зарядов.)

14.13. Пусть мгновенный спектр мощности излучения электрона в синхротроне описывается формулой

$$P(\omega, t) \approx \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{q} \gamma(t) \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1/3} e^{-2\omega/\omega_c},$$

где $\omega_c = 3\omega_0\gamma^3(t)$.

а) Показать, что если энергия электронов растет в течение одного цикла ускорения приблизительно линейно, то усредненный по циклу спектр мощности имеет вид

$$\langle P(\omega, t) \rangle = \frac{2^{2/3}}{3\pi} \frac{e^2}{q} \gamma_{\max} x^{2/3} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y^{4/3}} dy,$$

где $x = 2\omega/\omega_{c \max}$.

б) Найти предельные выражения для спектра мощности при $x \ll 1$ и $x \gg 1$.

в) Пользуясь таблицами значений интеграла, входящего в приведенное выражение (он представляет собой неполную гамма-функцию), или с помощью графического интегрирования численно рассчитать спектр для $x = 0,1; 0,5; 1,0; 1,5$. Построить график зависимости P от $\lg(\omega/\omega_{c \max})$ и сравнить его с кривыми, приведенными в работе [40].

14.14. а) В рамках приближений, принятых в § 6 этой главы, показать, что при релятивистском движении частиц по траектории с мгновенным радиусом кривизны q интенсивность излучения с правой и левой круговой поляризацией в единицу телесного угла в единичном интервале частот определяется выражением

$$\frac{dI_{\pm}(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{6\pi^2 c} \left(\frac{\omega q}{c} \right)^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} \mp \theta^2 \right)^2 \left| K_{2/3}(\xi) \pm \frac{\theta}{(1/\gamma^2 + \theta^2)^{1/2}} K_{1/3}(\xi) \right|^2.$$

б) Используя приведенное в п. «а» выражение и формулы § 6, исследовать зависимость поляризации полного излучения от частоты и угла. В частности, определить степень поляризации: 1) на высоких частотах ($\omega > \omega_c$) для всех значений углов; 2) на средних и низких ($\omega < \omega_c$) частотах для больших углов; 3) на средних и низких частотах для очень малых углов.

в) Провести сравнение с экспериментальными результатами, приведенными в работе [56].

14.15. Рассмотреть синхротронное излучение Крбовидной туманности. Электроны с энергиями до 10^{12} эв движутся в магнитном поле порядка 10^{-4} гаусс.

а) Для $E = 10^{12}$ эв, $B = 10^{-4}$ гаусс вычислить радиус орбиты q , основную частоту $\omega_0 = c/q$ и критическую частоту ω_c .

б) Показать, что спектральное распределение мощности синхротронного излучения для релятивистских электронов с энергией E в постоянном магнитном поле может быть представлено в виде

$$P(E, \omega) = \text{const} \left(\frac{\omega}{E^2} \right)^{1/3} f \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right),$$

где $f(x)$ — функция, равная единице при $x = 0$ и быстро убывающая до нуля при $x \gg 1$ [в задаче 14.13, например, $f_i \approx \exp(-2\omega/\omega_c)$], а $\omega_c = (3eB/mc)(E/mc^2)^2 \cos \theta$, где θ — угол наклона спиральной траектории.

в) Показать, что при законе распределения электронов по энергии $N(E) dE \sim E^{-n} dE$ спектр мощности синхротронного излучения имеет вид

$$\langle P(\omega) \rangle d\omega \sim \omega^{-\alpha} d\omega.$$

где $\alpha = (n - 1)/2$.

г) Наблюдения радиоизлучения и непрерывного оптического спектра Крабовидной туманности показывают, что в интервале частот от $\omega \sim 10^8$ до $\omega \sim 6 \cdot 10^{15}$ гц постоянная $\alpha \approx 0,35$. На более высоких частотах интенсивность спектральных компонент излучения быстро убывает с показателем $\alpha \gtrsim 1,5$. Определить показатель степени n в энергетическом спектре электронов и верхнюю границу спектра. Согласуется ли эта граничная энергия с данными, приведенными в п. «а»?

д) Используя решение задачи 14.4, п. «б», определить величину интервала времени, необходимого для того, чтобы энергия электронов уменьшилась от бесконечного значения до 10^{12} эв в поле 10^{-4} гаусс. В каком отношении находится этот результат с известным временем жизни Крабовидной туманности?

14.16. Считая, что показатель преломления плексигласа в области видимого света равен 1,50, вычислить угол, под которым испускается видимое черенковское излучение электронов и протонов в зависимости от их энергии, выраженной в Мэв. Определить число квантов излучения с длиной волны в диапазоне от 4000 до 6000 Å, излучаемых в плексигласе на пути 1 см электронами с энергией 1 Мэв и протонами с энергиями 500 Мэв и 5 Гэв.

**ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ.
МЕТОД ВИРТУАЛЬНЫХ ФОТОНОВ.
ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ БЕТА-РАСПАДЕ**

В гл. 14 в общем виде исследовалось излучение заряженных частиц, движущихся с ускорением. Были выведены формулы для спектрального и углового распределений излучения для ряда случаев и рассмотрено излучение как нерелятивистских, так и релятивистских заряженных частиц во внешних полях. Настоящая глава посвящена проблемам излучения электромагнитных волн заряженными частицами в атомных и ядерных процессах.

При прохождении через вещество частицы рассеиваются и теряют энергию из-за соударений, как подробно описано в гл. 13. В процессе соударений частицы испытывают ускорение; следовательно, они должны излучать электромагнитную энергию. Излучение, сопровождающее атомные соударения, называют обычно *тормозным излучением*, так как впервые оно наблюдалось в опытах по торможению высокоэнергетического пучка электронов толстой металлической мишенью. Для нерелятивистских частиц потери энергии на излучение незначительны по сравнению с потерями энергии при соударениях, но для ультрарелятивистских частиц излучение может стать основным фактором, определяющим потери энергии. Рассмотрение тормозного излучения и связанных с ним проблем мы начнем с классического нерелятивистского случая. Затем с помощью полуклассических соображений, подобно тому как было сделано в гл. 13, получим квантовомеханические выражения. Вслед за этим будут учтены наиболее существенные релятивистские эффекты.

Процессы рождения или аннигиляции заряженных частиц также сопровождаются испусканием излучения. Эти процессы являются чисто квантовыми по своей природе. Нельзя даже пытаться дать классическое описание сущности этих явлений. Однако, отвлекаясь от физических причин процесса, мы можем поставить вопрос о спектре и интенсивности сопровождающего его электро-

магнитного излучения. Так, внезапное рождение быстрого электрона при ядерном β -распаде можно для наших целей рассматривать как ускорение первоначально покоившейся частицы до некоторой конечной скорости за очень короткий интервал времени или же как внезапное «включение» заряда движущейся частицы за тот же самый короткий интервал времени. С помощью этих моделей мы рассмотрим в § 7 и 8 ядерный β -распад и захват орбитального электрона.

При рассмотрении излучения, например в задаче о тормозном излучении или об излучении при β -распаде, существенное значение имеет волновая природа заряженных частиц. В связи с этим необходимо учитывать квантовомеханические поправки, очень сходные с введенными нами ранее при рассмотрении электрических потерь. Это можно сделать относительно просто. Существует, однако, ряд более серьезных трудностей, присущих лишь проблемам излучения. Так, очень трудно учесть изменения траектории частицы под влиянием потерь энергии и импульса при излучении. Это связано не только с трудно учитываемыми эффектами реакции излучения (см. гл. 17), но также с дискретной квантовой природой излучаемых фотонов. В результате даже с учетом квантовомеханических поправок полученные результаты оказываются применимыми в ограниченной области энергий излученных фотонов, малых по сравнению с полной энергией частиц. Поэтому для диапазона высоких частот наши полуклассические выражения будут, вообще говоря, справедливы лишь качественно.

§ 1. Излучение при соударениях

Заряженная частица испытывает при соударении ускорение и, следовательно, излучает. Если вторая соударяющаяся частица также заряжена, то они обе излучают и следует учитывать когерентную сумму излучаемых полей. Так как амплитуда поля излучения определяется (в нерелятивистском случае) произведением заряда на ускорение, то при приблизительно равных зарядах легкие частицы излучают интенсивнее. Во многих случаях масса одной из соударяющихся частиц намного превышает массу другой; тогда при исследовании излучения достаточно рассматривать соударение как взаимодействие более легкой частицы с заданным полем сил. Мы ограничимся лишь этим случаем, отнеся рассмотрение более сложных к задачам в конце главы.

Согласно формуле (14.65), для нерелятивистской частицы с зарядом e и ускорением $c\dot{\beta}(t)$ интенсивность излучения в единицу телесного угла в единичном интервале частот равна

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\beta}) \exp \left\{ i\omega \left[t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)}{c} \right] \right\} dt \right|^2. \quad (15.1)$$

При надлежащем выборе начала отсчета радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$, определяющий положение частицы, по порядку величины равен $\langle v \rangle t$, где $\langle v \rangle$ — характерная скорость частицы. Поэтому второе слагаемое в показателе экспоненты в (15.1) отличается от первого множителем порядка $\langle v \rangle / c$, которым при нерелятивистском движении можно пренебречь. Такое приближенное рассмотрение иногда называют *дипольным приближением* по аналогии с разложением по мультиполям, рассмотренным в гл. 9, § 2. В этом случае получаем приближенную формулу

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) e^{i\omega t} dt \right|^2. \quad (15.2)$$

При соударении ускорение, обусловленное действием внешнего поля сил, имеет место лишь в течение ограниченного времени τ , так называемого времени соударения:

$$\tau \approx \frac{a}{v}, \quad (15.3)$$

где a — радиус действия сил. Поэтому интеграл в (15.2) берется фактически по интервалу времени порядка τ . Величина τ представляет собой естественный параметр, позволяющий разделить диапазон излучаемых частот на область низких ($\omega\tau \ll 1$) и высоких ($\omega\tau \gg 1$) частот. На низких частотах экспонента в выражении (15.2) не меняется существенно в течение периода ускорения. Это позволяет сразу провести интегрирование

$$\int \dot{\boldsymbol{\beta}}(t) e^{i\omega t} dt \approx \int \dot{\boldsymbol{\beta}}(t) dt = \boldsymbol{\beta}_2 - \boldsymbol{\beta}_1 \equiv \Delta\boldsymbol{\beta}, \quad (15.4)$$

где $\boldsymbol{\beta}_1$ и $\boldsymbol{\beta}_2$ — начальная и конечная скорости, а $\Delta\boldsymbol{\beta}$ — изменение вектора $\boldsymbol{\beta}$. Для энергии излучения получим

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} \approx \frac{e^2}{4\pi^2 c} |\Delta\boldsymbol{\beta}|^2 \sin^2 \Theta, \quad \omega\tau \ll 1, \quad (15.5)$$

где угол Θ отсчитывается от направления вектора $\Delta\boldsymbol{\beta}$. Полная энергия, излучаемая в единичном интервале частот, в рассматриваемом предельном случае равна

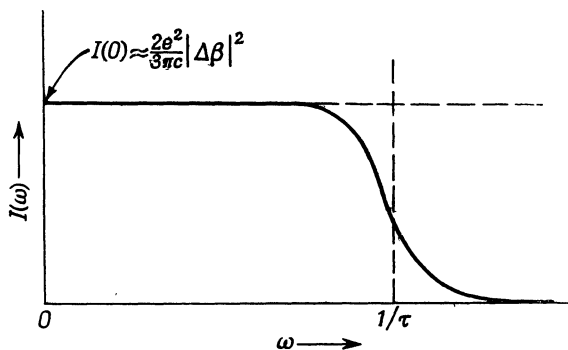
$$I(\omega) \approx \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{c} |\Delta\boldsymbol{\beta}|^2, \quad \omega\tau \ll 1. \quad (15.6)$$

В предельном случае высоких частот ($\omega\tau \gg 1$) экспоненциальный множитель в (15.2) очень быстро осциллирует по сравнению с изменением вектора $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t)$ во времени. Поэтому среднее значение подынтегрального выражения очень мало и излучение незначительно. Спектральное распределение излучения качественно изобраа-

жено на фиг. 15.1. Иногда удобно аппроксимировать спектральное распределение ступенчатой функцией

$$I(\omega) = \begin{cases} \frac{2e^2}{3\pi c} |\Delta\beta|^2, & \omega\tau < 1, \\ 0, & \omega\tau > 1. \end{cases} \quad (15.7)$$

Такое приближение мало пригодно для одиночного соударения с определенной величиной $\Delta\beta$, но оно оказывается вполне удовлетворительным в тех случаях, когда происходит усреднение по многим соударениям с различными $\Delta\beta$.

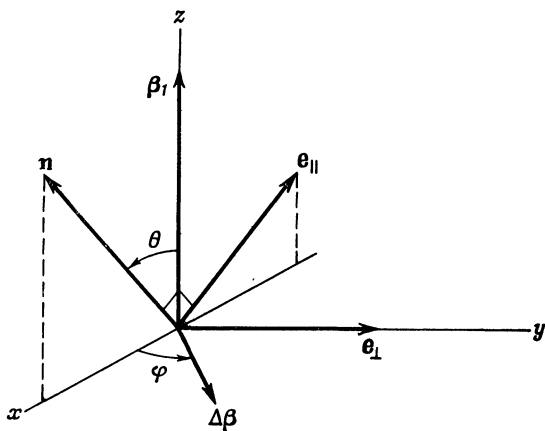


Ф и г. 15.1. Спектральное распределение излучения при соударении, характеризуемом временем соударения τ и изменением вектора скорости $\Delta\beta$.

Выражение (15.5) описывает угловое распределение всего излучения без учета поляризации. Иногда интересно вычислить интенсивность излучения для какой-либо определенной поляризации. Обычно при соударениях известны направление налетающей частицы и направление излучения, но неизвестно направление отклоненной частицы и, следовательно, неизвестна величина $\Delta\beta$. Поэтому поляризацию излучения естественно определять относительно плоскости, содержащей направление падающего пучка и направление излучения.

Для простоты рассмотрим отклонения на малый угол, для которых вектор $\Delta\beta$ приближенно можно считать перпендикулярным направлению падения. Без потери общности можно считать, что единичный вектор \mathbf{n} в направлении наблюдения лежит в плоскости xz и составляет угол θ с направлением первичного пучка (фиг. 15.2). Вектор изменения скорости $\Delta\beta$ лежит в плоскости xy , составляя угол ϕ с осью x . Так как направление движения рассеянной частицы не регистрируется, мы будем усреднять результаты

по φ . Единичные векторы \mathbf{e}_{\parallel} и \mathbf{e}_{\perp} характеризуют поляризацию, параллельную и перпендикулярную плоскости, содержащей β_1 и \mathbf{n} .



Ф и г. 15.2.

Направление поляризации излучения задается вектором $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \Delta\beta)$. Этот вектор перпендикулярен \mathbf{n} (как и должно быть) и может быть разложен на две составляющие вдоль \mathbf{e}_{\parallel} и \mathbf{e}_{\perp} :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \Delta\beta) = \Delta\beta (\mathbf{e}_{\parallel} \cos \theta \cos \varphi - \mathbf{e}_{\perp} \sin \varphi). \quad (15.8)$$

Усредняя по φ квадраты модулей составляющих в выражении (15.8), находим интенсивности излучения для двух возможных поляризаций:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\parallel}(\omega)}{d\Omega} &= \frac{e^2}{8\pi^2 c} |\Delta\beta|^2 \cos^2 \theta, \\ \frac{dI_{\perp}(\omega)}{d\Omega} &= \frac{e^2}{8\pi^2 c} |\Delta\beta|^2. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Полученные угловые распределения справедливы для всех типов нерелятивистских соударений с рассеянием на малые углы. Они были детально подтверждены при исследовании непрерывного спектра тормозного рентгеновского излучения для электронов с кинетической энергией порядка килоэлектрон-вольт. Нетрудно видеть, что сумма интенсивностей для обеих поляризаций согласуется с выражением (15.5) и приводит к значению (15.6) полной интенсивности излучения.

§ 2. Тормозное излучение при нерелятивистских кулоновских соударениях

Излучение с непрерывным спектром чаще всего испускается при соударении быстрой частицы с атомом. В качестве модели процесса рассмотрим вначале соударение быстрой, но нерелятивистской частицы, имеющей заряд ze , массу M и скорость v , с покоящимся точечным зарядом Ze . Предположим для простоты, что отклонение налетающей частицы мало. При этом справедливы приведенные в гл. 13 соображения, ограничивающие величину прицельного параметра. Фактически большая часть рассуждений, проведенных в гл. 13 при рассмотрении энергетических потерь, может быть почти полностью перенесена на наш случай.

Для малых отклонений в кулоновском поле точечного заряда Ze изменение импульса является чисто поперечным и описывается выражением (13.1), умноженным на Z . Таким образом, полное изменение скорости налетающей частицы, характеризуемой прицельным параметром b , равно

$$\Delta v = \frac{2zZe^2}{Mvb}. \quad (15.10)$$

Спектральное распределение излучения можно приближенно описать выражением (15.7) (умноженным на z^2), в котором, согласно (15.3), время соударения $\tau \approx b/v$. Спектр частот простирается от $\omega = 0$ до $\omega_{\text{макс}} \approx v/b$

$$I(\omega, b) \approx \begin{cases} \frac{8}{3\pi} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \frac{1}{b^2}, & \omega < \frac{v}{b}, \\ 0, & \omega > \frac{v}{b}. \end{cases} \quad (15.11)$$

Так же как и при рассмотрении потерь энергии, физически интересной величиной является сечение рассеяния, получаемое интегрированием по всем возможным значениям прицельных параметров. В соответствии с этим определим *сечение излучения*

$$\chi(\omega) = \int I(\omega, b) 2\pi b db; \quad (15.12)$$

оно имеет размерность [площадь·энергия/частота]. Классические значения пределов изменения прицельного параметра можно найти из соображений, аналогичных приведенным в гл. 13, § 1. Минимальное значение прицельного параметра [см. формулы (13.5) — (13.7)] равно

$$b_{\text{мин}}^{(\text{кл})} \approx \frac{zZe^2}{Mv^2}, \quad (15.13)$$

а максимальное значение определяется условием обрезания спектра (15.11). Если интересоваться значением $\chi(\omega)$ при фиксированной частоте ω , то, очевидно, заметное излучение на этой частоте возможно только в тех случаях, когда прицельный параметр меньше величины

$$b_{\text{макс}} \approx \frac{v}{\omega}, \quad (15.14)$$

так как только при выполнении этого условия ускорения будут достаточно велики. Если учесть это ограничение, накладываемое на величину b , то сечение тормозного излучения оказывается равным

$$\chi_{\text{кл}}(\omega) \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \left(\frac{\lambda M v^3}{z Z e^2 \omega} \right), \quad (15.15)$$

где λ — численный множитель порядка единицы, учитывающий неопределенность предельных значений прицельного параметра. Полученный результат справедлив лишь для частот, для которых аргумент логарифма велик по сравнению с единицей, что соответствует $b_{\text{макс}} \gg b_{\text{мин}}$. Это означает, что существует классический верхний предел $\omega_{\text{макс}}^{(\text{кл})}$ в спектре частот, определяемый формулой

$$\omega_{\text{макс}}^{(\text{кл})} \sim \frac{M v^3}{z Z e^2}. \quad (15.16)$$

Для тяжелых медленных частиц с большим зарядом справедливо классическое выражение для сечения тормозного излучения, но в полной аналогии с теорией энергетических потерь в случае быстрых слабо заряженных частиц начинает существенно сказываться их волновая природа. Квантовые модификации соответствующих формул можно ввести совершенно аналогично тому, как это было сделано в гл. 13, § 3. При учете волновой природы налетающей частицы получаем квантовомеханический нижний предел для прицельного параметра

$$b_{\text{мин}}^{(\text{кв})} \approx \frac{\hbar}{M v}. \quad (15.17)$$

Это значит, что сечение тормозного излучения вместо (15.15) описывается приближенной формулой

$$\chi_{\text{кв}}(\omega) \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \left(\frac{\lambda M v^2}{\hbar \omega} \right). \quad (15.18)$$

Заметим, что аргумент логарифма отличается от прежнего выражения множителем $Z\eta$, где η определяется выражением (13.42), а Z учитывает заряд ядра. Области применимости классической и квантовомеханической формул определяются в этом случае

по тем же правилам, как и при рассмотрении потерь. Область частот в (15.18) простирается вплоть до максимальной частоты

$$\omega_{\text{макс}}^{(\text{кв})} \sim \frac{Mv^2}{\hbar}. \quad (15.19)$$

Заметим, что эта предельная частота близка к получающейся из закона сохранения энергии $\omega_{\text{макс}} = Mv^2/2\hbar$. Так как классический результат справедлив лишь при $\eta \gg 1$, выполняется соотношение

$$\omega_{\text{макс}}^{(\text{кл})} \approx \frac{1}{\eta} \omega_{\text{макс}}^{(\text{кв})} \ll \omega_{\text{макс}}^{(\text{кв})}. \quad (15.20)$$

Оно показывает, что спектр излучения, описываемый классическими формулами, всегда ограничен лишь очень низкими частотами по сравнению с максимальным значением, определяемым из закона сохранения энергии. Поэтому классическая область представляет незначительный интерес. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь квантовомеханические соотношения.

Хотя верхний предел частоты (15.19) и соответствует приближенно получающемуся из закона сохранения энергии, квантовое выражение для сечения излучения вблизи верхней границы спектра применимо лишь качественно. Причина этого, как уже отмечалось во введении к настоящей главе, заключается в дискретной квантовой природе испускаемых фотонов. Для мягких фотонов, энергия которых значительно меньше максимальной, дискретность природы излучения несущественна, так как уносимые энергия и импульс пренебрежимо малы. Для жестких же фотонов вблизи границы спектра эти эффекты значительны. Один из очевидных возможных способов учета требования сохранения энергии состоит в том, что в определение прицельных параметров (15.14) и (15.17) вводится *средняя* скорость

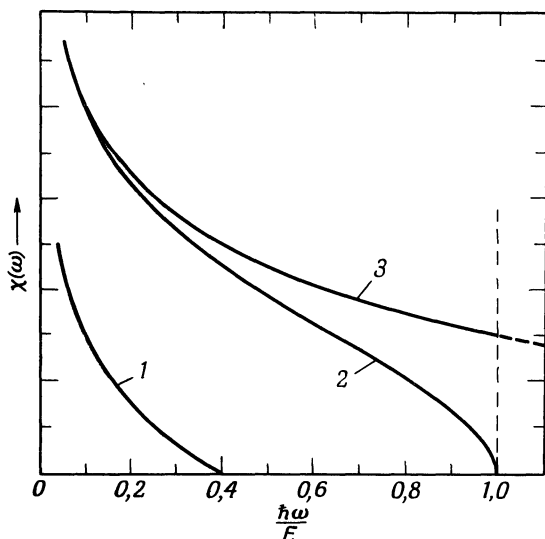
$$\langle v \rangle = \frac{1}{2} (v_{\text{нач}} + v_{\text{кон}}) = \frac{1}{\sqrt{2M}} (\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega}), \quad (15.21)$$

где $E = 1/2 Mv^2$ — начальная кинетическая энергия частицы, а $\hbar\omega$ — энергия излученного фотона. Подставляя в (15.18) вместо v эту среднюю скорость, получаем

$$\chi_{\text{кв}}(\omega) \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{Z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \left[\frac{\lambda}{2} \frac{(\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega})^2}{\hbar\omega} \right]. \quad (15.22)$$

При $\lambda = 2$ это выражение для сечения тормозного излучения в точности совпадает с квантовомеханическим результатом в борновском приближении, впервые полученным Бете и Гайтлером (1934 г.). Аргумент логарифма равен, очевидно, единице при $\hbar\omega = Mv^2/2$,

так что закон сохранения энергии удовлетворяется. На фиг. 15.3 изображены кривые зависимости сечения излучения от частоты. Приведены кривые, соответствующие формуле Бете — Гайтлера (15.22), «полуклассической» квантовой формуле (15.18) и классической формуле (15.15), в которых положено $\lambda = 2$, $\eta = 10$.



Ф и г. 15.3. Зависимость сечения тормозного излучения для кулоновских столкновений от частоты, нормированной к максимальному значению частоты E/\hbar .

Кривая 1 соответствует классическому выражению (для $\eta = 10$), применимому лишь для очень низких частот; кривая 2 — борновскому квантовомеханическому; кривая 3 — полуклассическому выражению (15.18).

Спектральное распределение тормозного излучения иногда характеризуют сечением излучения фотона, имеющим размерность [площадь/энергия]:

$$\hbar\omega\sigma_{\text{торм}}(\hbar\omega) d(\hbar\omega) = \chi(\omega) d\omega. \quad (15.23)$$

Сечение излучения фотона, очевидно, равно

$$\sigma_{\text{торм}} \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2}{\hbar c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \frac{(\dots)}{\hbar\omega}, \quad (15.24)$$

где аргумент логарифма тот же, что и в (15.15) или (15.22). Так как логарифм меняется относительно медленно в зависимости от энергии фотона, то сечение $\sigma_{\text{торм}}$ приблизительно пропорционально $(\hbar\omega)^{-1}$. Это известная характерная особенность спектра тормозного излучения.

Зависимость сечения излучения $\chi(\omega)$ от свойств частиц, участвующих в соударении, определяется множителем $Z^2 z^4 / M^2$. Очевидно, излучение наиболее велико в средах с большим атомным номером. Полная энергия, теряемая на излучение частицей при прохождении ею слоя единичной толщины вещества, содержащего N неподвижных зарядов Ze (атомных ядер) в единице объема, равна

$$\frac{dE_{\text{изл}}}{dx} = N \int_0^{\omega_{\text{макс}}} \chi(\omega) d\omega. \quad (15.25)$$

Используя выражение (15.22) для $\chi(\omega)$ и переходя к переменной интегрирования $x = \hbar\omega/E$, можно переписать формулу для потерь в виде

$$\frac{dE_{\text{изл}}}{dx} = \frac{16}{3} NZ \left(\frac{Ze^2}{\hbar c} \right) \frac{z^4 e^4}{Mc^2} \int_0^1 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \right) dx. \quad (15.26)$$

Безразмерный интеграл оказывается равным единице. Для сравнения приведем отношение потерь энергии на излучение к потерям на соударения (13.13) или (13.44):

$$\frac{dE_{\text{изл}}}{dE_{\text{суд}}} \approx \frac{4}{3\pi} z^2 \frac{Z}{137} \frac{m}{M} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \frac{1}{\ln B_{\text{РВ}}}. \quad (15.27)$$

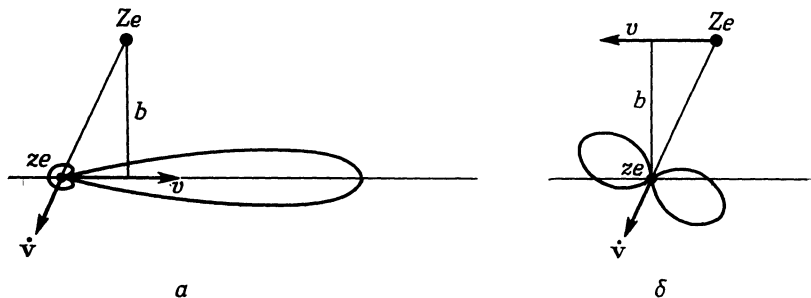
Для нерелятивистских частиц ($v \ll c$) потери на излучение пренебрежимо малы по сравнению с потерями при соударениях. Заметим, что для тех случаев, когда наряду с основным процессом (в данном случае — отклонение частицы в кулоновском поле ядра) учитывается излучение, характерно появление в выражениях постоянной тонкой структуры $e^2/\hbar c = 1/137$. Наличие множителя m/M связано с тем, что потери на излучение определяются ускорением налетающей частицы, тогда как потери при соударениях определяются ускорением электрона.

§ 3. Тормозное излучение при релятивистском движении

При расчете излучения при соударении релятивистских частиц с атомными ядрами следует ввести некоторые поправки. На первый взгляд может показаться, что нерелятивистское рассмотрение, проведенное в предыдущем параграфе, вообще теряет силу, и необходимо провести заново полностью релятивистское исследование. Однако одно из преимуществ специальной теории относительности (не говоря уже о том, что она верна и, следовательно, необходима) заключается в том, что она позволяет проводить расчет в удобной системе отсчета и лишь на заключительном этапе переходить к лабораторной системе координат. Поэтому, как мы сейчас увидим,

весь расчет тормозного излучения при релятивистском движении, кроме его заключительной части, может быть проведен нерелятивистскими методами.

Отметим два существенных обстоятельства. Прежде всего, как мы знаем, излучение ультрарелятивистской частицы сосредоточено в узком конусе с углом раствора порядка Mc^2/E , где E — полная энергия. Поэтому, если нас не интересуют очень тонкие детали



Ф и г. 15.4. Представление излучения, испускаемого релятивистской частицей при соударении: a — в лабораторной системе координат (ядро покоится); b — в собственной системе координат K' (налетающая частица покоится).

явления, достаточно рассмотреть лишь полную энергию, излучаемую на данной частоте. Далее, обычно в процессе соударения (если исключить случаи очень близких соударений) налетающая частица испытывает лишь незначительное отклонение и теряет весьма малую долю своей энергии. В системе отсчета K' , относительно которой налетающая частица первоначально покоится, а ядро движется со скоростью $v \sim c$, движение налетающей частицы в течение всего времени соударения остается нерелятивистским. Поэтому в системе K' процесс излучения может быть описан чисто нерелятивистским образом. Связь между характеристиками излучения, наблюдаемого в лабораторной системе координат и в системе отсчета K' , схематически представлена на фиг. 15.4.

Теперь мы можем почти полностью повторить все рассуждения, приведенные в § 1 и 2. Нужно лишь установить новые пределы изменения прицельных параметров. Из-за релятивистского сокращения полей (см. гл. 11, § 10) время соударения (11.120) уменьшается в γ раз, где $\gamma = E/Mc^2$. Поэтому значение максимального прицельного параметра будет равно [ср. (15.14)]

$$b_{\text{макс}} \approx \frac{\gamma v}{\omega'}, \quad (15.28)$$

где ω' — частота излучения в системе K' . Минимальное значение прицельного параметра в этом случае *не равно* предполагаемому

значению $\hbar/p = \hbar/\gamma Mv$, хотя эта величина и определяет «размазывание» частицы, обусловленное квантовыми эффектами. Правильное значение $b_{\text{мин}}$ по-прежнему дается формулой (15.17), не содержащей множителя γ , в чем легко убедиться из следующего рассуждения. При излучении все элементы распределения заряда должны испытывать одинаковое ускорение в один и тот же момент времени. В противном случае интерференционные эффекты в сильной степени ослабят излучение. Поэтому излучение может быть значительным лишь в том случае, когда протяженность ускоряющего импульса, обусловленного полем пролетающего ядра, велика по сравнению с размером «размазанного» заряда. Протяженность импульса имеет величину порядка b/γ , тогда как поперечный размер области распределения заряда есть величина порядка $\hbar/\gamma Mv$. Отсюда следует, что и при релятивистском движении нижний предел возможных значений прицельного параметра определяется соотношением (15.17).

Используя выражения (15.11) и (15.12) и новые предельные значения прицельного параметра, получаем сечение излучения $\chi'(\omega')$ в системе K'

$$\chi'(\omega') \approx \frac{16 Z^2 e^2}{3 c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \left(\frac{\lambda \gamma M v^2}{\hbar \omega'} \right). \quad (15.29)$$

Чтобы переписать полученный результат в лабораторной (нештрихованной) системе отсчета, необходимо знать трансформационные свойства сечения тормозного излучения и частоты. Размерность сечения излучения [площадь·энергия/частота]. Так как энергия и частота преобразуются при преобразовании Лоренца одинаковым образом, а поперечные размеры инвариантны, то сечение тормозного излучения лоренц-инвариантно

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega'). \quad (15.30)$$

Закон преобразования частоты определяется формулой релятивистского доплеровского смещения (11.38)

$$\omega = \gamma \omega' (1 + \beta \cos \theta'), \quad (15.31)$$

где θ' — угол, под которым излучение испускается в системе K' . Сечение $\chi'(\omega')$ представляет собой *полное* сечение, полученное интегрированием по углам в системе K' . Так как ускорение в этой системе преимущественно поперечное, распределение излучения приблизительно симметрично относительно направления $\theta' = \pi/2$. Следовательно, в среднем $\omega = \gamma \omega'^1$. Подставляя это значение ω'

¹⁾ Этот результат можно получить непосредственно из первоначального преобразования (11.37) $\omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta)$. Действительно, при $\gamma \gg 1$ и $\theta \ll 1$ имеем $\omega' \approx (\omega/2\gamma) (1 + \gamma^2 \theta^2)$. Так как среднее значение $\gamma^2 \theta^2$ в лабораторной системе имеет порядок единицы, то $\omega' \approx \omega/\gamma$.

в (15.29), получаем для сечения тормозного излучения в лабораторной системе соотношение

$$\chi(\omega) \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \left(\frac{\lambda \gamma^2 M v^2}{\hbar \omega} \right), \quad (15.32)$$

Эта формула отличается от нерелятивистской формулы (15.18) лишь множителем γ^2 в аргументе логарифма. Из закона сохранения энергии следует, что полученное выражение применимо лишь в области частот $0 < \hbar \omega < (\gamma - 1) Mc^2 \approx \gamma Mc^2$. Заметим, что кванты с энергией $Mc^2 \ll \hbar \omega \ll \gamma Mc^2$ в лабораторной системе соответствуют квантам $\hbar \omega' \ll Mc^2$ в системе K' .

Приведенный выше вывод выражения $\chi(\omega)$ в лабораторной системе координат несколько небрежен, так как не содержит строгого рассмотрения зависимости преобразованной частоты от угла. В действительности следовало бы рассмотреть дифференциальное сечение излучения в системе K' :

$$\frac{d\chi'(\omega')}{d\Omega'} = A \ln \left(\frac{\lambda \gamma M v^2}{\hbar \omega'} \right) \left[\frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta') \right], \quad (15.33)$$

где A — коэффициент при логарифме в формуле (15.32). Зависящее от угла выражение в квадратных скобках представляет собой сумму двух членов, соответствующих различным поляризациям [см. (15.9)], и нормировано так, чтобы интеграл по полному телесному углу был равен единице. Преобразуя (15.33) к лабораторной системе отсчета согласно (11.38), получаем

$$\frac{d\chi(\omega)}{d\Omega} \approx A \ln \left[\frac{2\lambda \gamma^2 M v^2}{\hbar \omega (1 + \gamma^2 \theta^2)} \right] \frac{3}{2\pi} \frac{\gamma^2 (1 + \gamma^4 \theta^4)}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^4}. \quad (15.34)$$

Угловое распределение имеет резкий максимум в направлении $\theta = 0$. Для $\theta \gamma \gg 1$ зависящий от угла множитель убывает как $(\theta \gamma)^{-4}$. Выражение (15.34), разумеется, неприменимо для углов $\theta \gtrsim 1$. Однако определяемый им порядок величины верен: интенсивность излучения в обратном направлении в γ^4 раз меньше, чем в направлении вперед, и в пределе ($\theta = \pi$) достигает значения

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{d\chi(\omega)}{d\Omega} = \frac{3}{32\pi} \frac{A}{\gamma^2} \ln \left(\frac{\lambda M v^2}{2\hbar \omega} \right). \quad (15.35)$$

Так как почти все излучение сосредоточено в области углов $\theta \ll 1$, можно без большой ошибки приближенно представить элемент телесного угла в виде $d\Omega \approx 2\pi \theta d\theta = (\pi/\gamma^2) d(\gamma^2 \theta^2)$ и провести интегрирование в интервале $0 < \gamma^2 \theta^2 < \infty$. В результате для полного сечения излучения получим

$$\chi(\omega) = A \left[\ln \left(\frac{2\lambda \gamma^2 M v^2}{\hbar \omega} \right) - \frac{13}{12} \right], \quad (15.36)$$

что несущественно отличается от прежнего результата (15.32).

§ 4. Влияние экранирования. Потери на излучение в релятивистском случае

До сих пор при рассмотрении тормозного излучения мы пренебрегали ролью атомных электронов. Их непосредственное влияние на ускорение налетающей частицы вполне можно не учитывать, так как величина соответствующего эффекта в Z раз меньше эффекта, обусловленного ядром. Однако электроны оказывают косвенное влияние, экранируя заряд ядра. Потенциальная энергия налетающей частицы в поле атома может быть приближенно описана выражением (13.94). Это означает, что при таких соударениях, когда прицельный параметр превышает радиус атома (13.95), излучение незначительно. Можно приближенно учесть этот эффект в предшествовавших вычислениях, определив максимальный прицельный параметр с учетом экранирования атомными электронами

$$b_{\text{макс}}^{(\text{экр})} \sim a \approx 1,4 \frac{a_0}{Z^{1/3}}. \quad (15.37)$$

При этом в аргументе логарифма следует использовать меньшую из величин $b_{\text{макс}}$, определяемых по формулам (15.28) и (15.37). Найдем отношение этих величин:

$$\frac{b_{\text{макс}}^{(\text{экр})}}{b_{\text{макс}}} \approx \frac{192}{Z^{1/3}} \left(\frac{v}{c} \right) \frac{\hbar \omega}{\gamma^2 m v^2}, \quad (15.38)$$

где m — масса электрона и использовано среднее значение частоты $\omega' = \omega/\gamma$. Отсюда видно, что для достаточно низких частот величина $b_{\text{макс}}^{(\text{экр})}$ всегда меньше значения $b_{\text{макс}}$, найденного с помощью соотношения (15.28). Отношение предельного значения частоты $\omega_{\text{экр}}$, ниже которого следует использовать параметр $b_{\text{макс}}^{(\text{экр})}$, к граничной частоте спектра $\omega_{\text{макс}} = (1/\hbar)(\gamma - 1)Mc^2$, равно

$$\frac{\omega_{\text{экр}}}{\omega_{\text{макс}}} \approx \frac{Z^{1/3}}{192} \left(\frac{m}{M} \right) \gamma \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{1/2} \approx \begin{cases} \frac{2Z^{1/3}}{192} \frac{m}{M} \left(\frac{c}{v} \right), \\ \frac{Z^{1/3}}{192} \frac{m}{M} \gamma, \end{cases} \quad (15.39)$$

где верхнее значение соответствует нерелятивистской частице, а нижнее — релятивистской. При $\omega < \omega_{\text{экр}}$ аргумент логарифма в выражении (15.32) для сечения излучения перестает зависеть от частоты

$$\frac{b_{\text{макс}}^{(\text{экр})}}{b_{\text{мин}}} \approx \lambda \frac{192}{Z^{1/3}} \frac{M}{m} \frac{v}{c}. \quad (15.40)$$

Поэтому сечение тормозного излучения стремится к постоянной величине

$$\chi(\omega) \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \left(\lambda \frac{192}{Z^{1/3}} \frac{M}{m} \frac{v}{c} \right) \quad (15.41)$$

при $\omega \ll \omega_{\text{экр}}$. Благодаря этому на низких частотах энергия, излучаемая в единичном интервале, остается конечной, а не расходится логарифмически. Совершенно аналогично при учете экранирования ликвидируется расходимость сечения рассеяния вида θ^{-4} , имеющая место для чисто кулоновского поля [см. (13.96)] при рассеянии на малые углы.

За исключением случая предельно низких скоростей, частота экранирования $\omega_{\text{экр}}$ очень мала по сравнению с нерелятивистским значением $\omega_{\text{макс}}$. Так, $\omega_{\text{экр}}/\omega_{\text{макс}} \approx 0,07$ для электронов с кинетической энергией 100 кэв, падающих на мишень из золота ($Z = 79$). Для более тяжелых нерелятивистских частиц отношение еще меньше. Это означает, что в нерелятивистском случае изображенные на фиг. 15.3 спектральные зависимости изменятся лишь на очень малых частотах.

Для ультрарелятивистских частиц экранирование может быть «полным». Полное экранирование возникает при $\omega_{\text{экр}} > \omega_{\text{макс}}$. Это имеет место при энергии, превышающей некоторое критическое значение

$$E_{\text{экр}} = \left(\frac{192M}{Z^{1/3}m} \right) Mc^2. \quad (15.42)$$

Для электронов $E_{\text{экр}} \approx 42$ Мэв в алюминии ($Z = 13$) и 23 Мэв в свинце ($Z = 82$). Соответствующие величины для μ -мезонов составляют $2 \cdot 10^6$ и 10^6 Мэв. Из-за наличия множителя M/m влияние экранирования существенно лишь для электронов. При $E > E_{\text{экр}}$ сечение тормозного излучения на всех частотах имеет постоянную величину (15.41). На фиг. 15.5 изображены кривая сечения тормозного излучения (15.41) в предельном случае полного экранирования и соответствующая кривая по теории Бете — Гайтлера. Квантовомеханическое рассмотрение, проведенное этими авторами, приводит к дополнительному коэффициенту, медленно меняющемуся от 1 при $\omega = 0$ до 0,75 при $\omega = \omega_{\text{макс}}$. Тормозное излучение электронной компоненты космических лучей и электронов на выходе ускорителей на большие энергии соответствует предельному случаю полного экранирования. Поэтому в этих случаях спектральное распределение фотонов описывается типичной зависимостью $(\hbar\omega)^{-1}$.

В § 2 были рассмотрены потери на излучение в нерелятивистском случае и показано, что они пренебрежимо малы по сравнению с потерями энергии при соударениях. Для ультрарелятивистских

частиц и особенно электронов этот вывод уже не верен. В предельном случае $\gamma \gg 1$ потери на излучение определяются приближенной формулой

$$\frac{dE_{\text{изл}}}{dx} \approx \frac{16}{3} N \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \int_0^{\gamma Mc^2/\hbar} \ln \left(\frac{b_{\text{макс}}}{b_{\text{мин}}} \right) d\omega, \quad (15.43)$$

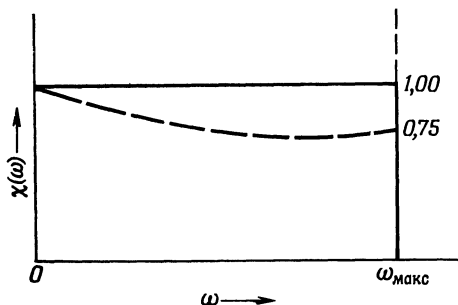
где вид аргумента логарифма зависит от того, какая из величин ω и $\omega_{\text{экр}}$ больше. При слабом экранировании ($\omega_{\text{экр}} \ll \omega_{\text{макс}}$) получаем приближенное выражение

$$\frac{dE_{\text{изл}}}{dx} \approx \frac{16}{3} N \frac{Z^2 e^2}{\hbar c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \ln(\lambda\gamma) \gamma Mc^2. \quad (15.44)$$

Для более высоких энергий, когда имеет место полное экранирование, полученное выражение заменяется формулой

$$\frac{dE_{\text{изл}}}{dx} \approx \left[\frac{16}{3} N \frac{Z^2 e^2}{\hbar c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \ln \left(\frac{\lambda \cdot 192M}{Z^{1/3} m} \right) \right] \gamma Mc^2, \quad (15.45)$$

откуда видно, что при достаточно больших энергиях потери на излучение становятся пропорциональными энергии частиц.



Ф и г. 15.5. Сечение тормозного излучения в предельном случае полного экранирования.

Постоянное значение сечения соответствует полуклассическому результату; пунктирная кривая соответствует квантовомеханическому расчету в борновском приближении.

Сравнение потерь на излучение с потерями при соударениях в последнем случае дает

$$\frac{dE_{\text{изл}}}{dE_{\text{соуд}}} \approx \frac{4}{3\pi} \left(\frac{Zz^2}{137} \right) \frac{m}{M} \frac{\ln(\lambda \cdot 192M/Z^{1/3}m)}{\ln B_{\text{КВ}}} \gamma. \quad (15.46)$$

Значение γ , для которого это отношение равно единице, зависит от вида частиц и величины Z . Для электронов $\gamma \sim 200$ для воздуха и ~ 20 для свинца. При более высоких энергиях потери на тормозное излучение превышают потери за счет соударений, а для ультрарелятивистских частиц они представляют собой основной вид потерь.

При энергиях, для которых тормозное излучение является доминирующим, применима формула (15.45), соответствующая случаю полного экранирования. Здесь удобно ввести характерную единицу пути X_0 , называемую *радиационной длиной* и равную расстоянию, при прохождении которого энергия частицы убывает в e раз. Согласно закону сохранения энергии, можно переписать (15.45) в виде

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{E}{X_0},$$

откуда следует, что

$$E(x) = E_0 e^{-x/X_0}, \quad (15.47)$$

где радиационная длина

$$X_0 = \left[\frac{16}{3} N \frac{Z^2 e^2}{\hbar c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \ln \left(\frac{\lambda \cdot 192M}{Z^{1/3} m} \right) \right]^{-1}. \quad (15.48)$$

Для электронов, например, величина X_0 равна 32 г/см^2 (270 м) в воздухе при нормальных значениях температуры и давления; 19 г/см^2 ($7,2 \text{ см}$) в алюминии и $4,4 \text{ г/см}^2$ ($0,39 \text{ см}$) в свинце¹⁾. При рассмотрении прохождения космических лучей или искусственно ускоренных частиц больших энергий через вещество удобно использовать понятие радиационной длины X_0 , так как ею определяются не только потери энергии, но и образование электрон-позитронных пар излученными фотонами и тем самым все развитие каскадных электронных ливней.

§ 5. Метод виртуальных фотонов Вейцеккера — Вильямса

При рассмотрении испускания тормозного излучения и других процессов, при которых имеет место электромагнитное взаимодействие релятивистских частиц, физическая интерпретация явлений значительно облегчается при применении так называемого *метода виртуальных фотонов*. В этом методе используется сходство поля движущейся заряженной частицы с импульсом электромагнитного поля (см. гл. 11, § 10) и устанавливается связь между эффектами, возникающими при соударениях релятивистской заряженной частицы с некоторой системой, и соответствующими эффектами, обусловленными взаимодействием излучения (виртуальных фотонов) с этой же системой. Метод был независимо разработан в 1934 г. Вейцеккером и Вильямсом.

¹⁾ Приведенные значения отличаются приблизительно на 20—30% от данных Росси [87], который при вычислениях использовал более точные коэффициенты: 4 вместо $16/3$ и $Z(Z+1)$ вместо Z^2 в (15.48).

В любом процессе соударения имеются «налетающая частица» и «система, испытывающая удар» (рассеивающая система). Возмущающее действие полей налетающей частицы заменяется эквивалентным импульсом излучения, который можно представить в виде спектрального разложения по виртуальным фотонам. Затем вычисляется взаимодействие фотонов (рассеяние или поглощение) с рассеивающей системой. Таким образом устанавливается связь между взаимодействием заряженных частиц и взаимодействием фотонов. В приводимой ниже таблице указано, какой радиационный процесс соответствует тому или иному виду взаимодействия налетающей и рассеянной частиц.

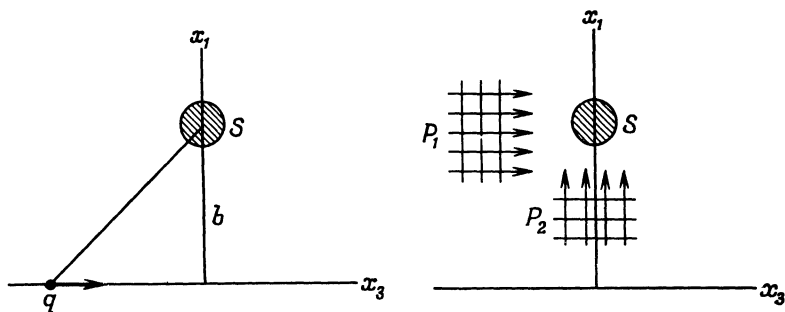
Соответствие между взаимодействием частиц и радиационными процессами

Тип взаимодействия частиц	Налетающая частица	Рассеивающая система	Соответствующий радиационный процесс	$b_{\text{мин}}$
Тормозное излучение при соударениях электрона (или легкой частицы) с ядром	Ядро	Электрон (легкая частица)	Рассеяние виртуальных фотонов кулоновского поля ядра на электроне (легкой частице)	\hbar/Mv
Ионизация атомов при соударениях (при дальних соударениях)	Ионизирующая частица	Атом	Освобождение атомных электронов виртуальными фотонами	α
Расщепление ядер	Электрон	Ядро	Фоторасщепление ядер виртуальными фотонами	} Большая из величин $\hbar/\gamma mv$ и R
Рождение π -мезонов в электрон-ядерных соударениях	Электрон	Ядро	Фоторождение π -мезонов при взаимодействии виртуальных фотонов с ядрами	

Как видно из таблицы, рассеивающая система не всегда совпадает с лабораторной мишенью. При рассмотрении тормозного излучения рассеивающей системой следует считать более легкую из соударяющихся частиц, так как для нее мощность излучения больше. При тормозном излучении в электрон-электронных столкновениях,

как следует из симметрии задачи, необходимо брать сумму двух полей, поочередно считая каждый из электронов рассеивающей системой, покоящейся в начальный момент в некоторой системе координат.

Метод виртуальных фотонов основан на предположении о том, что эффекты, обусловленные различными спектральными компонентами эквивалентного излучения, складываются некогерентно. Это утверждение справедливо в том случае, когда возмущение, обусловленное



Ф и г. 15.6. Релятивистская заряженная частица, пролетающая вблизи от рассеивающей системы S , и эквивалентный импульс излучения.

полями, можно считать малым, и непосредственно связано с принятым в § 2 допущением о малом смещении рассеивающей частицы за время соударения.

Спектральное распределение электромагнитного поля, эквивалентного налетающей частице с зарядом q и скоростью $v \approx c$, проходящей на прицельном расстоянии b от рассеивающей системы S , можно найти из выражений для полей, приведенных в гл. 11, § 10:

$$\begin{aligned} E_1(t) &= q \frac{\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \\ B_2(t) &= \beta E_1(t), \\ E_3(t) &= -q \frac{\gamma v t}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (15.49)$$

При $\beta \approx 1$ поля $E_1(t)$ и $B_2(t)$ полностью эквивалентны волновому пакету P_1 линейно поляризованного излучения, падающему на систему S в направлении x_3 , как показано на фиг. 15.6. В выражения (15.49) не входит магнитное поле, которое образовало бы вместе с полем $E_3(t)$ волновой пакет P_2 , падающий в направлении x_1 . Тем не менее если движение заряженной частицы вблизи системы S в выбранных координатах является нерелятивистским, то можно добавить требуемое магнитное поле и образовать импульс P_2 .

При этом мы не изменим физической картины, так как частицы системы S реагируют лишь на электрическое поле. Даже в том случае, когда частицы системы S подвержены действию магнитных сил, добавочное магнитное поле, которое мы вводим, заменяя поле $E_3(t)$ импульсом излучения P_2 , все равно не имеет существенного значения, поскольку относительное влияние P_2 , как будет показано, всегда мало.

Как следует из гл. 14, § 5, и в частности из соотношений (14.51), (14.52) и (14.60), спектральная плотность энергии эквивалентного импульса излучения P_1 (поток энергии через единичную площадку в единичном интервале частот) дается выражением

$$I_1(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} |E_1(\omega)|^2, \quad (15.50)$$

где $E_1(\omega)$ — фурье-амплитуда (14.54) поля $E_1(t)$, определяемого соотношением (15.49). Аналогично спектральное распределение для импульса излучения P_2 имеет вид

$$I_2(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} |E_3(\omega)|^2. \quad (15.51)$$

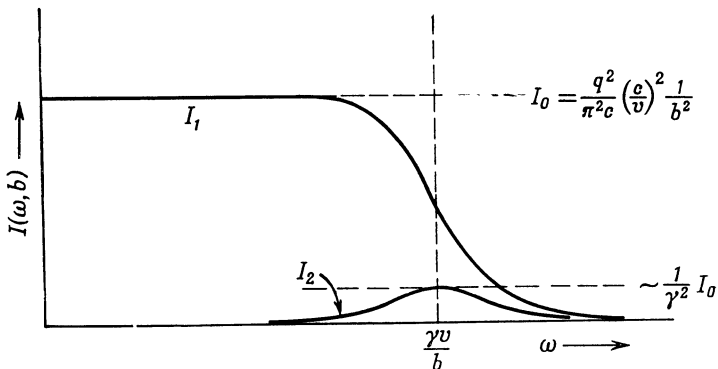
Соответствующие интегралы Фурье были вычислены в гл. 13 [см. (13.29) и (13.30)]. Таким образом, спектральные распределения можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} I_1(\omega, b) \\ I_2(\omega, b) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\pi^2} \frac{q^2}{c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \frac{1}{b^2} \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)^2 K_1^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right), \\ &\frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)^2 K_0^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right). \end{aligned} \right. \quad (15.52)$$

Мы видим, что выражение для интенсивности импульса излучения P_2 содержит множитель γ^{-2} ; таким образом, для ультрарелятивистских частиц влияние этого импульса мало. Качественно полученные спектральные распределения изображены на фиг. 15.7. Вид кривых легко понять, вспомнив, что распределение электромагнитного поля для импульса излучения P_1 имеет колоколообразную форму с характерной шириной $\Delta t \sim b/\gamma v$. Поэтому спектр излучения содержит все частоты вплоть до максимальной $\omega_{\text{макс}}$, которая имеет величину порядка $1/\Delta t$. С другой стороны, поле импульса P_2 близко по форме к волне синусоиды с частотой $\omega \sim \gamma v/b$. Поэтому его спектр состоит из узкой области частот с центром вблизи $\gamma v/b$.

При исследовании соударений следует просуммировать спектральные распределения (15.52) по различным возможным значениям прицельных параметров. В результате получим величину энергии эквивалентного поля излучения, приходящегося на единичный интервал частоты. Как всегда в подобных задачах, необходимо определить минимальное значение прицельного параметра

$b_{\text{мин}}$. Метод виртуальных фотонов дает хорошие результаты лишь в том случае, когда можно выбрать такое значение $b_{\text{мин}}$, что для $b > b_{\text{мин}}$ эффекты, обусловленные налетающей частицей, можно с достаточной точностью заменить эффектами, вызванными эквивалентным импульсом излучения, тогда как при малых b влияние полей частиц пренебрежимо мало или может быть учтено каким-либо другим способом. Предположим, что мы каким-то образом



Ф и г. 15.7. Частотные спектры двух эквивалентных импульсов излучения.

определили соответствующее значение $b_{\text{мин}}$. Тогда спектральное распределение интенсивности можно проинтегрировать по всем возможным прицельным параметрам:

$$I(\omega) = 2\pi \int_{b_{\text{мин}}} [I_1(\omega, b) + I_2(\omega, b)] b db. \quad (15.53)$$

Здесь учтено влияние обоих импульсов излучения P_1 и P_2 . Это интегрирование уже было проведено в гл. 13, § 3 [см. (13.35)]. В результате получаем

$$I(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{q^2}{c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left\{ x K_0(x) K_1(x) - \frac{v^2}{2c^2} x^2 [K_1^2(x) - K_0^2(x)] \right\}, \quad (15.54)$$

где

$$x = \frac{\omega b_{\text{мин}}}{\gamma v}. \quad (15.55)$$

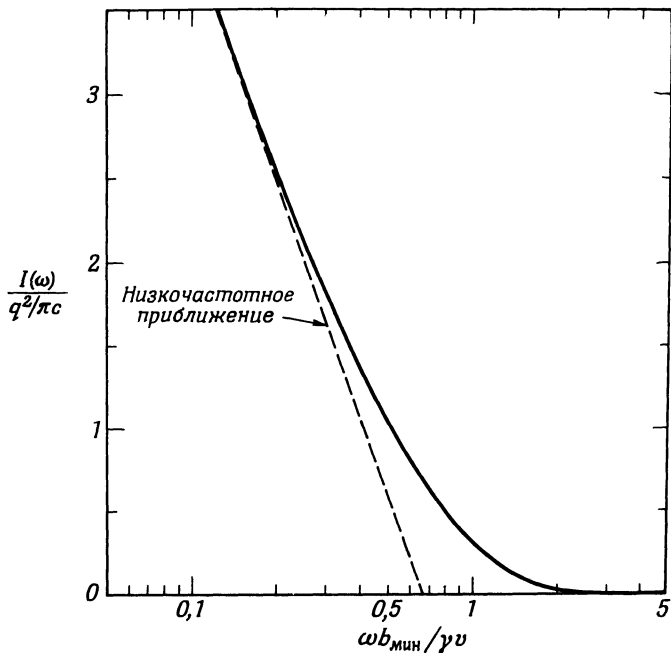
На низких частотах $\omega \ll \gamma v / b_{\text{мин}}$ энергия излучения в единичном интервале частот принимает вид

$$I(\omega) \approx \frac{2}{\pi} \frac{q^2}{c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left[\ln\left(\frac{1,123\gamma v}{\omega b_{\text{мин}}}\right) - \frac{v^2}{2c^2} \right]; \quad (15.56)$$

на высоких частотах $\omega \gg \gamma v/b_{\text{мин}}$ интенсивность излучения экспоненциально спадает

$$I(\omega) \approx \frac{q^2}{c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) e^{-2(\omega b_{\text{мин}}/\gamma v)}. \quad (15.57)$$

На фиг. 15.8 изображены зависимость $I(\omega)$ по (15.54) для случая $v \approx c$ и кривая, соответствующая низкочастотному приближению (15.56). Видно, что спектральное распределение интенсивности



Ф и г. 15.8. Спектральное распределение виртуальных фотонов для релятивистской частицы.

Энергия в единичном интервале частот отнесена к $q^2/\pi c$, частота — к $\gamma v/b_{\text{мин}}$. Число виртуальных фотонов в единичном интервале энергии можно получить, разделив значение ординаты на $\hbar^2 \omega$.

содержит главным образом низкочастотные фотоны и имеет хвост, простирающийся до частот порядка $2\gamma v/b_{\text{мин}}$.

Число $N(\hbar\omega)$ виртуальных фотонов данной частоты, приходящихся на единичный интервал энергии, определяется соотношением

$$I(\omega) d\omega = \hbar\omega N(\hbar\omega) d(\hbar\omega). \quad (15.58)$$

Для предельного случая низких частот оно равно

$$N(\hbar\omega) \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{q^2}{\hbar c}\right) \left(\frac{c}{v}\right)^2 \frac{1}{\hbar\omega} \left[\ln\left(\frac{1,123\gamma v}{\omega b_{\text{мин}}}\right) - \frac{v^2}{2c^2} \right]. \quad (15.59)$$

Остановимся теперь на вопросе о выборе минимального прицельного параметра $b_{\text{мин}}$. Для тормозного излучения, как отмечалось в § 3, $b_{\text{мин}} = \hbar/Mv$, где M — масса более легкой частицы. В задаче об ионизации атомов при соударениях $b_{\text{мин}} \approx a$, т. е. совпадает с радиусом атома; более близкие соударения следует рассматривать как соударения налетающей частицы со свободными электронами. В случае расщепления ядер электронами или рождения мезонов при взаимодействии ядер с электронами $b_{\text{мин}} = \hbar/\gamma Mv$ или $b_{\text{мин}} = R$ (радиус ядра) в зависимости от того, какая из этих величин больше. Указанные величины $b_{\text{мин}}$ приведены в таблице на стр. 572.

§ 6. Тормозное излучение как рассеяние виртуальных фотонов

Испускание тормозного излучения при соударении налетающей частицы, имеющей заряд ze и массу M , с атомным ядром с зарядом Ze , можно рассматривать как рассеяние виртуальных фотонов кулоновского поля ядра на налетающей частице в системе координат K' , относительно которой налетающая частица покоится. Спектральное распределение виртуальных фотонов определяется соотношением (15.54), где $q = Ze$. Минимальное значение прицельного параметра равно \hbar/Mv , так что спектр частот занимает область вплоть до $\omega' \sim \gamma Mc^2/\hbar$.

Рассеяние виртуальных фотонов на налетающей частице (она является рассеивающим препятствием в системе отсчета K') на малых частотах определяется томсоновским эффективным сечением (14.105), а при энергиях фотонов $\hbar\omega' \gtrsim Mc^2$ — формулой Клейна — Нишины (14.106). Таким образом, на частотах ω' , малых по сравнению с Mc^2/\hbar , сечение тормозного излучения $\chi'(\omega')$ в системе отсчета K' определяется формулой

$$\chi'(\omega') \approx \frac{8\pi}{3} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 I(\omega'). \quad (15.60)$$

Так как спектр виртуальных фотонов простирается до частот порядка $\gamma Mc^2/\hbar$, в области $\omega' < Mc^2/\hbar$ можно воспользоваться приближенным выражением (15.56) для $I(\omega')$. Это дает для сечения тормозного излучения значение

$$\chi'(\omega') \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \left[\ln \left(\frac{\lambda \gamma Mc^2}{\hbar \omega'} \right) - \frac{1}{2} \right], \quad (15.61)$$

где движение считается ультрарелятивистским ($v \approx c$).

Полученное выражение для сечения тормозного излучения практически совпадает с (15.29) и может быть преобразовано в лабораторную систему координат совершенно аналогично тому, как это было сделано в § 3. Формулы (15.60) и (15.61), полученные при

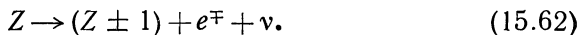
использовании томсоновского сечения рассеяния, справедливы лишь для квантов с частотами $\omega' \ll Mc^2/\hbar$ в системе K' . Для частот $\omega' \gg Mc^2/\hbar$ следует заменить постоянное сечение рассеяния Томсона (14.105) квантовомеханическим значением по формуле Клейна — Нишины (14.106), быстро убывающим с ростом частоты. Это означает, что в системе K' частоты тормозного излучения лежат в области $0 < \omega' \ll Mc^2/\hbar$, хотя сам спектр виртуальных фотонов кулоновского поля ядра простирается до гораздо более высоких частот. Физически ограничение спектра в системе K' вытекает из закона сохранения энергии, так как в лабораторной системе отсчета, где $\omega = \gamma\omega'$, спектр частот ограничен областью $0 < \omega < \gamma Mc^2/\hbar$. Детальный расчет с учетом углового распределения излучения по формуле Клейна — Нишины приводит к сечению тормозного излучения, полностью согласующемуся с формулами Бете — Гайтлера (Вейцеккер, 1934 г.).

Влияние эффекта экранирования на спектр тормозного излучения может быть также учтено методом Вейцеккера — Вильямса. Спектр виртуальных фотонов для экранированного кулоновского потенциала отличается от (15.56) тем, что аргумент логарифма заменяется на константу, как мы видели в § 4.

Рассмотрение дальнейших применений метода виртуальных фотонов в таких задачах, как ионизация атомов в соударениях и расщепление ядер электронами, мы отнесем к задачам в конце главы.

§ 7. Излучение при бета-распаде

В процессе β -распада происходит спонтанное превращение нестабильных ядер с атомным номером Z в ядра с атомным номером $(Z \pm 1)$, сопровождаемое испусканием электрона ($\mp e$) и нейтрино. Этот процесс символически можно записать следующим образом:



Освобождающаяся в процессе распада энергия почти полностью распределяется между электроном и нейтрино; на долю ядра отдачи из-за его очень большой массы приходится совершенно незначительная часть энергии. Даже не зная, почему и как происходит β -распад, можно предполагать, что внезапное образование быстро движущихся заряженных частиц должно сопровождаться испусканием излучения. Как уже отмечалось в вводных замечаниях к данной главе, можно либо представлять себе, что первоначально покоившийся электрон интенсивно ускоряется в течение короткого интервала времени, либо считать, что в течение того же интервала времени происходит быстрое «включение» заряда. Тяжелое ядро получает незначительное ускорение и поэтому его излучение несущественно.

Для расчета примем, что при $t=0$ в начале координат возникает электрон, обладающий постоянной скоростью $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta}$. В этом случае, согласно (14.67), угловое и спектральное распределение интенсивности излучения определяется зависимостью

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c} \left| \int_0^\infty \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) \exp \left\{ i\omega \left[t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)}{c} \right] \right\} dt \right|^2. \quad (15.63)$$

Так как вектор $\boldsymbol{\beta}$ постоянен, то $\mathbf{r}(t) = c\boldsymbol{\beta}t$. При этом угловое распределение интенсивности излучения принимает вид

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c} \beta^2 \sin^2 \theta \left| \int_0^\infty e^{i\omega(1-\beta \cos \theta)t} dt \right|^2, \quad (15.64)$$

где угол θ отсчитывается от направления движения испускаемого электрона. Отсюда

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2c} \beta^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1-\beta \cos \theta)^2}, \quad (15.65)$$

а интенсивность полного излучения в единичном интервале частот описывается соотношением

$$I(\omega) = \frac{e^2}{\pi c} \left[\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 2 \right]. \quad (15.66)$$

При $\beta \ll 1$ формула (15.66) принимает вид $I(\omega) \approx 2e^2\beta^2/3\pi c$, откуда видно, что для β -частиц низкой энергии излучение незначительно.

Спектральное распределение интенсивности (15.66) является типичным спектром тормозного излучения; число фотонов в единичном интервале энергии равно

$$N(\hbar\omega) = \frac{e^2}{\pi\hbar c} \left(\frac{1}{\hbar\omega} \right) \left[\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 2 \right]. \quad (15.67)$$

Это излучение называют иногда *внутренним тормозным излучением* в отличие от тормозного излучения той же самой β -частицы при прохождении через вещество. Может показаться, что в противоречии с законом сохранения энергии спектр простирается в бесконечность. Качественное согласие с законом сохранения энергии можно получить, учтя принцип неопределенности. На фиг. 15.9 качественно изображена зависимость скорости электрона от времени.

Наше вычисление основано на скачкообразном изменении скорости за бесконечно малое время ускорения τ . Однако, как известно, согласно принципу неопределенности при заданной неопределенности в энергии ΔE неопределенность во времени не может быть меньше $\Delta t \sim \hbar/\Delta E$. При рождении β -частицы $\Delta E = E = \gamma mc^2$, так что время τ должно быть по порядку величины равным \hbar/E . Это дает

для границы спектра частот значение $\omega_{\text{макс}} \sim E/\hbar$, что по крайней мере качественно согласуется с требованием, налагаемым законом сохранения энергии.

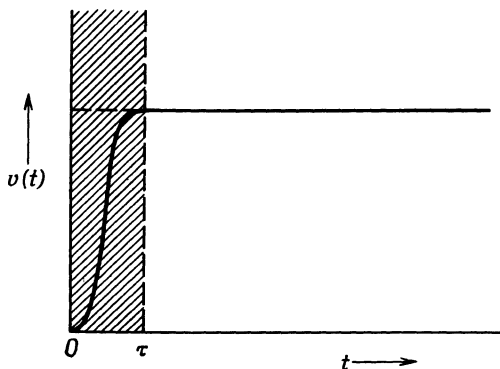
Полная энергия излучения приближенно описывается соотношением

$$E_{\text{изл}} = \int_0^{\omega_{\text{макс}}} I(\omega) d\omega \approx \frac{e^2}{\pi\hbar c} \left[\frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 2 \right] E. \quad (15.68)$$

Для очень быстрых частиц отношение энергии излучения к энергии частицы равно

$$\frac{E_{\text{изл}}}{E} \approx \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left[\ln\left(\frac{2E}{mc^2}\right) - 1 \right]. \quad (15.69)$$

Отсюда видно, что энергия излучения составляет лишь очень малую долю полной энергии, выделяемой при β -распаде, даже



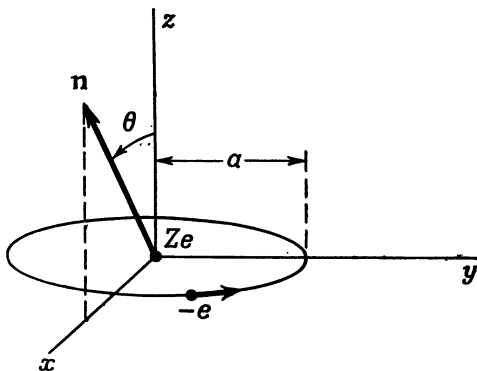
Ф и г. 15.9.

в наиболее интенсивных β -процессах ($E_{\text{макс}} \sim 30 mc^2$). Тем не менее испускаемое излучение может наблюдаться и представляет большой интерес для физиков-ядерщиков.

В реальном процессе β -распада выделяемая энергия распределяется между электроном и нейтрино, так что электроны характеризуются непрерывным спектром энергии, простирающимся до некоторой максимальной частоты. Поэтому спектр излучения (15.66) следует усреднить по энергетическому распределению β -частиц. Кроме того, учет квантовомеханических эффектов приводит к изменениям вблизи верхней границы спектра фотонов. Таковы важнейшие поправки, которые нужно учесть для количественного сравнения теории с экспериментом. Однако общий характер излучения и полукачественное его описание верно даются уже нашим классическим вычислением.

§ 8. Излучение при захвате орбитальных электронов. Исчезновение заряда и магнитного момента

При β -распаде внезапное рождение быстрого электрона приводит к возбуждению излучения. К аналогичному результату приводит исчезновение орбитального электрона при его захвате ядром. Захват орбитального электрона представляет собой процесс, в котором орбитальный электрон, движущийся вокруг нестабильного



Ф и г. 15.10.

ядра с атомным номером Z , захватывается ядром, в результате чего оно превращается в ядро нового вида с атомным номером $(Z - 1)$. При этом одновременно испускается нейтрино, уносящее избыток энергии. Символически этот процесс можно записать следующим образом:



Так как в отсутствие излучения энергию распада уносят практически неуловимые нейтрино, то спектр фотонов, излучаемых при захвате орбитальных электронов, является важным источником информации о выделяемой энергии.

Рассмотрим упрощенную модель, в которой атомный электрон движется с постоянной угловой частотой ω_0 по круговой орбите радиусом a . Орбита лежит в плоскости xy , как показано на фиг. 15.10, причем ядро расположено в центре окружности. Направление наблюдения задано вектором \mathbf{n} , который лежит в плоскости xz и характеризуется полярным углом θ . Скорость электрона равна

$$\mathbf{v}(t) = -\mathbf{e}_1 \omega_0 a \sin(\omega_0 t + \alpha) + \mathbf{e}_2 \omega_0 a \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (15.71)$$

где α — произвольная постоянная фаза. Пусть электрон исчезает в момент $t = 0$. Тогда спектральное распределение интенсивности излучения (14.67) может быть приближенно представлено в виде

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c^3} \left| \int_{-\infty}^0 \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{v}(t)] e^{i\omega t} dt \right|^2. \quad (15.72)$$

Эта формула получена в предположении $(\omega a/c) \ll 1$ (дипольное приближение); в этом случае экспоненциальный множитель, учитывающий запаздывание, можно заменить единицей. Интеграл в выражении (15.72) можно переписать следующим образом:

$$\int_{-\infty}^0 (\dots) dt = -\omega_0 a (\mathbf{e}_\perp I_1 + \mathbf{e}_\parallel I_2 \cos\theta), \quad (15.73)$$

где

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 \cos(\omega_0 t + \alpha) e^{i\omega t} dt, \quad (15.74)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^0 \sin(\omega_0 t + \alpha) e^{i\omega t} dt,$$

а \mathbf{e}_\perp и \mathbf{e}_\parallel — единичные векторы поляризации, соответственно нормальный и параллельный плоскости, проходящей через \mathbf{n} и ось z . Интегралы берутся элементарно, и в результате распределение интенсивности принимает вид

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c^3} \frac{\omega_0^2 a^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \times \\ \times [(\omega^2 \cos^2 \alpha + \omega_0^2 \sin^2 \alpha) + \cos^2 \theta (\omega^2 \sin^2 \alpha + \omega_0^2 \cos^2 \alpha)]. \quad (15.75)$$

Так как электрон может быть захвачен в любой точке орбиты, необходимо провести усреднение по всем фазовым углам α , что дает

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2c} \left(\frac{\omega_0 a}{c} \right)^2 \frac{\omega^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (15.76)$$

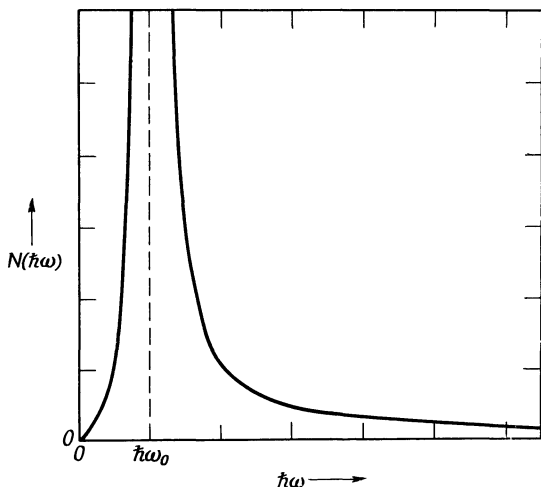
Полная энергия излучения в единичном интервале частот определяется выражением

$$I(\omega) = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{c} \left(\frac{\omega_0 a}{c} \right)^2 \left[\frac{\omega^2 (\omega_0^2 + \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right], \quad (15.77)$$

а число фотонов в единичном интервале энергии равно

$$N(\hbar\omega) = \frac{2}{3\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{\omega_0 a}{c} \right)^2 \left[\frac{\omega^2 (\omega_0^2 + \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right] \frac{1}{\hbar\omega}. \quad (15.78)$$

Для $\omega \gg \omega_0$ выражение в квадратных скобках стремится к единице и спектр принимает вид, характерный для тормозного излучения. Однако при $\omega \approx \omega_0$ интенсивность резко возрастает (в нашем приближении до бесконечности). На фиг. 15.11 изображено спектральное распределение числа фотонов. Наличие особой точки при $\omega = \omega_0$ может показаться странным, однако ее следовало ожидать. Действительно, если электрон все время находится на орбите,



Фиг. 15.11. Спектральное распределение фотонов, излучаемых в результате исчезновения заряда электрона при захвате орбитального электрона.

то его спектр излучения представляет собой резкую спектральную линию при $\omega = \omega_0$. Внезапное прекращение периодического движения приводит к уширению спектрального распределения в окрестности характеристической частоты.

С точки зрения квантовой механики излучение происходит при виртуальном радиационном переходе электрона из состояния с $l = 1$ (главным образом с $2p$ -орбиты) в состояние с $l = 0$, в котором он может быть поглощен ядром. Поэтому частоту ω_0 следует отождествить с характерной частотой рентгеновского спектра, соответствующей переходу $2p \rightarrow 1s$, т. е. $\hbar\omega_0 \approx 3Z^2e^2/8a_0$. Аналогично радиус орбиты фактически определяется соответствующим дипольным моментом. Принимая для оценки $a \approx a_0/Z$, где a_0 — боровский радиус, получаем для спектра фотонов (15.78)

$$N(\hbar\omega) \approx \frac{3}{32\pi} Z^2 \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 \frac{1}{\hbar\omega} \left[\frac{\omega^2(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right]. \quad (15.79)$$

Наиболее существенными характеристиками спектрального распределения являются наличие резкого максимума в области рентгеновского спектра и зависимость от квадрата атомного номера Z^2 .

До сих пор рассматривалось излучение, сопровождающее исчезновение заряда орбитального электрона в процессе электронного захвата. Но электрон, кроме заряда, обладает еще магнитным моментом. Исчезновение магнитного момента также приводит к появлению излучения, спектр которого имеет совершенно иной характер. Спектральное и угловое распределение интенсивности излучения, обусловленного движущимся точечным магнитным моментом, определяется формулой (14.74). Вектор магнитного момента электрона можно считать постоянным до момента исчезновения $t = 0$. Тогда в дипольном приближении распределение интенсивности излучения определяется выражением

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{4\pi^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^0 \mathbf{n} \times \boldsymbol{\mu} e^{i\omega t} dt \right|^2. \quad (15.80)$$

Отсюда получаем

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \mu^2 \sin^2 \Theta, \quad (15.81)$$

где Θ — угол между вектором $\boldsymbol{\mu}$ и направлением наблюдения \mathbf{n} .

При полуклассическом рассмотрении можно считать, что магнитный момент электрона равен по величине $\mu = \sqrt{3} (e\hbar/2mc)$, но может наблюдаться лишь его проекция $\mu_z = \pm (e\hbar/2mc)$ на произвольную ось. Примем, например, что момент прецессирует вокруг этой оси, составляя с ней угол $\alpha = \arcsin \sqrt{2}$, в результате чего в среднем отличной от нуля оказывается лишь составляющая момента вдоль оси. Как легко показать, при усреднении $\sin^2 \Theta$ в (15.81) с учетом этой прецессии получаем величину $2/3$ независимо от направления наблюдения. В результате выражение для распределения интенсивности по углам и частотам принимает вид

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{8\pi^2 c} \left(\frac{\hbar\omega}{mc^2} \right)^2. \quad (15.82)$$

Полная энергия излучения в единичном интервале частот определяется выражением

$$I(\omega) = \frac{e^2}{2\pi c} \left(\frac{\hbar\omega}{mc^2} \right)^2, \quad (15.83)$$

а соответствующее число фотонов в единичном интервале энергии равно

$$N(\hbar\omega) = \frac{e^2}{2\pi\hbar c} \frac{\hbar\omega}{(mc^2)^2}. \quad (15.84)$$

Полученные спектральные выражения характеризуются совершенно иной зависимостью от частоты, чем спектр тормозного излучения. С ростом частоты спектральная интенсивность неограниченно увеличивается. Конечно, классические результаты можно считать справедливыми лишь в предельном случае низких частот. Можно считать, что и в данной задаче, как и при рассмотрении излучения при β -распаде (см. § 7), применимы соображения, основанные на принципе неопределенности, так что во всяком случае обеспечивается выполнение закона сохранения. Фактически приходится вводить поправку, учитывающую, что процесс захвата орбитального электрона всегда сопровождается испусканием нейтрино. Как можно показать, вероятность испускания нейтрино пропорциональна квадрату его энергии E_ν . Если фотон не испускается, то вся энергия распада сообщается нейтрино: $E_\nu = E_0$. Однако если происходит излучение фотона с энергией $\hbar\omega$, то энергия нейтрино уменьшается до значения $E'_\nu = E_0 - \hbar\omega$. При этом вероятность испускания нейтрино снижается в $(E_\nu/E'_\nu)^2$ раз, причем

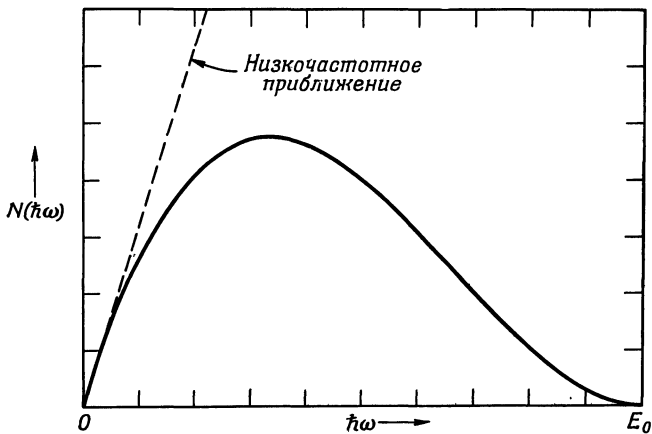
$$\left(\frac{E_\nu}{E'_\nu}\right)^2 = \left(1 - \frac{\hbar\omega}{E_0}\right)^{-2}. \quad (15.85)$$

Поэтому в полученные классические спектральные распределения (15.83) и (15.84) следует ввести поправку, умножив их на коэффициент (15.85), учитывающий кинематику испускания нейтрино. С учетом этой поправки классический фотонный спектр принимает вид

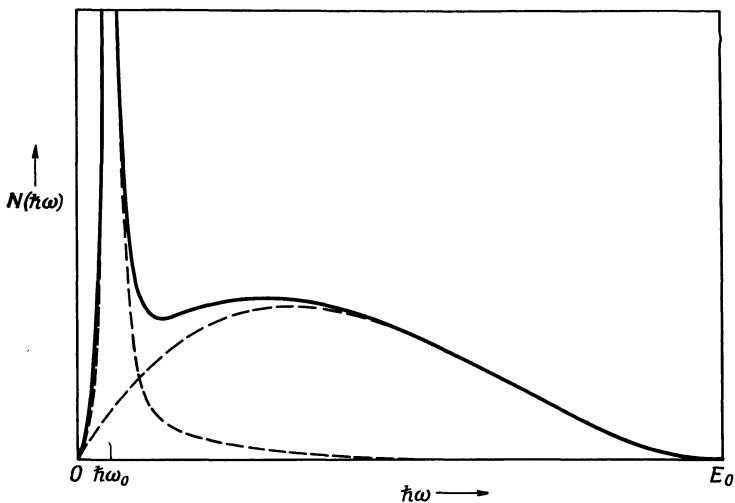
$$N(\hbar\omega) = \frac{e^2}{c} \frac{\hbar\omega}{2\pi\hbar c} \frac{\hbar\omega}{(mc^2)^2} \left(1 - \frac{\hbar\omega}{E_0}\right)^2. \quad (15.86)$$

Это выражение фактически совпадает с точным квантовомеханическим результатом. Исправленное спектральное распределение (15.86) и распределение, описываемое неисправленным классическим выражением (15.84), сопоставлены на фиг. 15.12. Очевидно, учет вероятности испускания нейтрино принципиально важен для получения правильной картины распределения фотонов по энергиям. Для обычного тормозного излучения аналогичные поправки менее важны, так как большая часть фотонов обладает энергиями, гораздо меньшими максимально допустимой величины.

Полное излучение, испускаемое при захвате орбитального электрона, определяется суммой вкладов, обусловленных исчезновением электрического заряда и магнитного момента. В соответствии с различным характером зависимостей (15.79) и (15.86) в высокочастотном конце спектра преобладает излучение, связанное с магнитным моментом, если только освобождаемая энергия не очень мала, в то время как в низкочастотной части спектра доминирует слагаемое, обусловленное исчезновением электриче-



Ф и г. 15.12. Спектральное распределение фотонов, излучаемых в результате исчезновения магнитного момента электрона при захвате орбитального электрона.



Ф и г. 15.13. Типичное спектральное распределение фотонов, излучаемых при захвате орбитального электрона, сопровождающемся выделением энергии E_0 .

Пунктирными кривыми изображены слагаемые, обусловленные исчезновением заряда электрона и его магнитного момента.

ского заряда, особенно для атомов с большим Z . На фиг. 15.13 изображено типичное полное спектральное распределение фотонов для атомов с $Z \sim 20-30$. Наблюдения, выполненные на большом числе различных ядер, подтверждают общие особенности найденных спектральных распределений и позволяют определять величину освобождаемой энергии E_0 .

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Краткое классическое рассмотрение тормозного излучения проведено в курсах Ландау и Лифшица [63], гл. 9, § 4, и Пановского и Филипс [78], гл. 19. Полуклассическое исследование, аналогичное нашему, но гораздо более сжатое, приведено в книге Росси [87], гл. 2, § 12.

Строго говоря, теория тормозного излучения требует применения квантовомеханического описания. Последнее можно найти, например, в книге Гайтлера [50]. Метод виртуальных фотонов (метод Вейцзеккера — Вильямса) достаточно хорошо описан лишь в одной работе, а именно в классической статье Вильямса [117]. Краткое изложение метода имеется в книгах Гайтлера [50] и Пановского и Филипс [78], гл. 18, § 5.

Квантовомеханическое исследование излучения при β -распаде и сравнение результатов с данными эксперимента можно найти в работах Чанга и Фалькова [27], Мартина и Глаубера [71] и в статье Ву в книге под редакцией Зигбана [94].

ЗАДАЧИ

15.1. Нерелятивистская частица с зарядом e и массой m соударяется с покоящейся гладкой жесткой сферой радиусом R . Считая соударение упругим, показать, что в дипольном приближении (в пренебрежении эффектами запаздывания) классическое выражение для дифференциального сечения излучения фотонов в единицу телесного угла в единичном интервале энергии имеет вид

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d(\hbar\omega)} = \frac{R^2}{12\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{1}{\hbar\omega} (2 + 3 \sin^2 \theta),$$

где угол θ отсчитывается от направления падения. Построить угловое распределение излучения. Найти полное сечение тормозного излучения интегрированием по всем углам. Какой фактор (или факторы) определяет верхнюю границу частотного спектра излучения?

15.2. Две частицы с зарядами q_1 и q_2 и массами m_1 и m_2 соударяются под действием электромагнитных (или каких-либо других) сил. Рассмотреть угловое и спектральное распределение излучения, сопровождающего соударение.

а) Показать, что при нерелятивистском движении энергия, излучаемая в единичном интервале частот в единицу телесного угла, для системы ЦМ выражается формулой

$$\frac{dI(\omega, \Omega)}{d\Omega} = \frac{\mu^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int e^{-i\omega t} \ddot{\mathbf{x}} \times \mathbf{n} \left\{ \frac{q_1}{m_1} \exp \left[i \frac{\omega}{c} \frac{\mu}{m_1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}(t) \right] - \frac{q_2}{m_2} \exp \left[-i \frac{\omega}{c} \frac{\mu}{m_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}(t) \right] \right\} dt \right|^2,$$

где $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ — вектор, определяющий относительное положение частиц, \mathbf{n} — единичный вектор в направлении наблюдения, $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса.

б) С помощью разложения по времени запаздывания показать, что для двух частиц с одинаковой величиной отношения заряда к массе (например, дейтрона и α -частицы) основной (дипольный) член обращается в нуль, а член следующего порядка малости равен

$$\frac{dI(\omega, \Omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^5} \left(\frac{q_1 \mu^2}{m_1^2} + \frac{q_2 \mu^2}{m_2^2} \right)^2 \left| \int e^{-i\omega t} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) (\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{n}) dt \right|^2.$$

в) Сопоставить результат, полученный в п. «б», с разложением по мультиполям, приведенным в гл. 9, § 1—3.

15.3. Пусть взаимодействие двух одинаковых точечных частиц с зарядом q и массой m характеризуется отталкиванием на близком расстоянии, эквивалентным столкновению с жесткой сферой радиусом R . Пренебрегая электромагнитным взаимодействием между двумя частицами, определить в первом неисчезающем приближении сечение излучения в системе ЦМ при соударении эквивалентных частиц. Показать, что дифференциальное сечение излучения фотонов в единицу телесного угла в единичном интервале энергии имеет вид

$$\frac{d^2\sigma}{d(\hbar\omega) d\Omega} = \frac{R^2}{60\pi} \left(\frac{q^2}{\hbar c} \right) \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{R}{\hbar c} \right)^2 \hbar\omega \left[1 + \frac{5}{14} P_2(\cos\theta) - \frac{3}{28} P_4(\cos\theta) \right],$$

где угол θ отсчитывается от направления падения. Сравнить полученную зависимость от частоты, относительную величину сечения и т. п. с результатом решения задачи 15.1.

15.4. Частица с зарядом ze , массой m и нерелятивистской скоростью v отклоняется полем с экранированным кулоновским потенциалом $V(r) = Zze^2 e^{-ar}/r$ и в результате этого излучает. Рассмотреть излучение в приближении прямолинейного движения частицы мимо силового центра.

а) Показать, что при прицельном параметре b энергия, излученная в единичном интервале частот при $\omega \ll v/b$, определяется формулой

$$I(\omega, b) = \frac{8}{3\pi} \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{z^2 e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \alpha^2 K_1^2(ab)$$

и пренебрежимо мала для $\omega \gg v/b$.

б) Показать, что сечение излучения равно

$$\chi(\omega) \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{z^2 e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \left[\frac{x^2}{2} \left(K_0^2(x) - K_1^2(x) + \frac{2K_0(x)K_1(x)}{x} \right) \right]_{x_1}^{x_2},$$

где $x_1 = \alpha b_{\min}$, $x_2 = \alpha b_{\max}$.

в) Определить сечение излучения в двух предельных случаях $x_2 \ll 1$ и $x_2 \gg 1$ при $b_{\min} = \hbar/mv$, $b_{\max} = v/\omega$ и $\alpha^{-1} = 1,4a_0 Z^{-1/3}$. Сравнить полученные результаты с приведенными в тексте формулами для случаев наличия и отсутствия экранирования.

15.5. Частица с зарядом ze , массой m и скоростью v движется в фиксированном отталкивающем кулоновском поле с потенциалом $V(r) = Zze^2/r$ по гиперболической траектории. Показать в нерелятивистском дипольном приближении (без дальнейших предположений), что

а) интенсивность излучения частицы с начальным значением прицельного параметра b в единичном интервале частот определяется выражением

$$I(\omega, b) = \frac{8}{3\pi} \frac{(zeav)^2}{c^3} e^{-\pi\omega/\omega_0} \left\{ \left[K'_{i\omega/\omega_0} \left(\frac{\omega\varepsilon}{\omega_0} \right) \right]^2 + \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2} \left[K_{i\omega/\omega_0} \left(\frac{\omega\varepsilon}{\omega_0} \right) \right]^2 \right\}.$$

б) сечение излучения равно

$$\chi(\omega) = \frac{16}{3} \frac{(zeav)^2}{c^3} e^{-\pi\omega/\omega_0} \frac{\omega}{\omega_0} K_{i\omega/\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \left[-K'_{i\omega/\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right].$$

в) полученное сечение излучения в предельном случае $\omega \ll \omega_0$ переходит в приведенное в этой главе выражение для сечения классического тормозного излучения. Найти предельное выражение для случая $\omega \gg \omega_0$.

г) Как изменятся результаты для кулоновского поля притяжения? Гиперболическая траектория может быть описана уравнениями

$$x = a(\varepsilon + \operatorname{ch} \xi), \quad y = -b \operatorname{sh} \xi, \quad \omega_0 t = \xi + \varepsilon \operatorname{sh} \xi,$$

где $a = Zze^2/mv^2$, $\varepsilon = \sqrt{1 + (b/a)^2}$, $\omega_0 = v/a$.

15.6. С помощью метода виртуальных фотонов установить связь между сечением реакции фоторасщепления ядер и реакции расщепления ядер электронами.

а) Показать, что для электронов с энергиями $E = \gamma mc^2 \gg mc^2$ сечение реакции расщепления выражается приближенной формулой

$$\sigma_{\text{эл}}(E) \approx \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \int_{\omega_T}^{E/\hbar} \sigma_{\text{фот}}(\omega) \ln \left(\frac{k\gamma^2 mc^2}{\hbar \omega} \right) \frac{d\omega}{\omega},$$

где $\hbar\omega_T$ — пороговая энергия процесса.

б) Считая, что $\sigma_{\text{фот}}(\omega)$ имеет резонансный характер

$$\sigma_{\text{фот}}(\omega) \approx \frac{A}{2\pi} \frac{e^2}{Mc} \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2},$$

где ширина Γ мала по сравнению с величиной $(\omega_0 - \omega_T)$, построить качественную зависимость $\sigma_{\text{эл}}(E)$ от энергии E и показать, что при $E \gg \hbar\omega_0$

$$\sigma_{\text{эл}}(E) \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \frac{Ae^2}{Mc} \frac{1}{\omega_0} \ln \left(\frac{kE^2}{mc^2 \hbar \omega_0} \right).$$

в) Сравнить результаты экспериментов Брауна и Вильсона [23] по возбуждению ядер тормозным излучением и моноэнергетическими электронами и показать, что введенная там величина $F_{\text{exp}}(Z, E)$ приблизительно равна $8\pi/3$ при больших энергиях, если для описания обоих процессов используется спектральное распределение Вейцзеккера — Вильямса, а сечение реакции фоторасщепления имеет резонансную форму.

15.7. Быстрая частица с зарядом ze , массой M и скоростью v соударяется с водородоподобным атомом, состоящим из одного электрона с зарядом $-e$ и массой m , связанного с центральным ядром, имеющим заряд Ze . Все соударения можно разделить на два типа: близкие соударения, при которых частица проходит сквозь атом ($b < d$), и дальние соударения, когда частица пролетает вне атома ($b > d$). За радиус атома d можно принять величину a_0/Z . При близких соударениях взаимодействие падающей частицы с электроном можно рассматривать как проблему соударения двух тел и рассчиты-

вать передаваемую энергию, исходя из сечения рассеяния Резерфорда. При дальних соударениях возбуждение и ионизацию атома можно считать результатом фотоэлектрического эффекта под действием виртуальных фотонов, связанных с полем налетающей частицы.

Будем для простоты считать, что для фотонов с энергией Q , превышающей ионизационный потенциал I , сечение фотоэффекта равно

$$\sigma_{\gamma}(Q) = \frac{8\pi^2}{137} \left(\frac{a_0}{Z}\right)^2 \left(\frac{I}{Q}\right)^3.$$

(При этом справедлив эмпирический закон $Z^4\lambda^3$ для поглощения рентгеновских лучей, а численный коэффициент выбран так, чтобы выполнялось правило дипольных сумм $\int \sigma_{\gamma}(Q) dQ = 2\pi^2 e^2 \hbar / mc$.)

а) Вычислить сечения передачи энергии Q при близких и дальних соударениях (выделить, где это возможно, зависимость от Q/I и использовать единицы $2\pi^2 e^4 / mv^2 I^2$). Построить оба распределения при $Q/I > 1$ для нерелятивистского движения налетающей частицы, считая $1/2 mv^2 = 10^3 I$.

б) Показать, что число дальних соударений намного превышает число близких, но передача энергии за одно соударение гораздо меньше. Показать, что потери энергии приблизительно поровну делятся между обоими типами соударений, и убедиться, что получающиеся полные потери фактически совпадают с результатом расчета по формуле Бете (13.44).

15.8. При распаде неподвижного π -мезона образуются μ -мезон и нейтрино. Освобождающаяся при этом полная кинетическая энергия равна $(m_{\pi} - m_{\mu}) c^2 = 34 \text{ Мэв}$. Кинетическая энергия μ -мезона $4,1 \text{ Мэв}$. Определить число квантов, излучаемых в единичном интервале энергии при мгновенном рождении μ -мезона. Считая, что излучение фотонов происходит лишь по нормали к направлению движения μ -мезона (в действительности угловое распределение описывается функцией $\sin^2 \theta$), показать, что максимальная энергия фотона равна 17 Мэв . Определить число квантов, излучаемых с энергией, большей $0,1$ от максимального значения, и сравнить найденный результат с величиной, экспериментально наблюдаемой при распаде π -мезона на μ -мезон и нейтрино (см. [44, 81]).

15.9. При внутренней конверсии ядро совершает переход из одного состояния в другое и испускает орбитальный электрон. Кинетическая энергия электрона равна разности между энергией перехода и энергией связи электрона. Определить число излученных в единичном интервале энергии квантов для конверсионной линии с энергией 1 Мэв при мгновенном испускании электрона. У какой части электронов энергия меньше чем 99% полной энергии? Можно ли экспериментально наблюдать этот низкоэнергетический хвост конверсионной линии?

ПОЛЯ МУЛЬТИПОЛЕЙ

В гл. 3 и 4, посвященных электростатике, при исследовании задач с определенными свойствами симметрии относительно начала координат широко использовалось разложение потенциала по сферическим гармоникам. Этот метод полезен не только при решении граничных задач в сферической системе координат, он вообще дает систематический способ представления потенциала в виде разложения по мультипольным моментам плотности заряда при заданных источниках. Для электромагнитных полей, зависящих от времени, разложение по скалярным сферическим гармоникам можно обобщить, используя векторные сферические волны. Эти векторные сферические волны удобно применять при решении краевых задач электромагнитного поля, обладающих сферической симметрией, и при рассмотрении мультипольного излучения ограниченного распределения источников. Простейшие излучающие мультипольные системы уже рассматривались в гл. 9. В настоящей главе будет дано систематическое изложение этого вопроса.

§ 1. Собственные функции скалярного волнового уравнения

Исследование векторной волновой задачи со сферической симметрией мы начнем с решения скалярного волнового уравнения. Скалярное поле $\psi(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющее однородному волновому уравнению

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (16.1)$$

можно разложить в интеграл Фурье по времени

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (16.2)$$

где каждая фурье-компонента удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(x, \omega) = 0 \quad (16.3)$$

с $k^2 = \omega^2/c^2$. В задачах, обладающих симметрией относительно некоторого центра, удобно использовать фундаментальную систему решений в сферических координатах. В гл. 3 мы уже приводили оператор Лапласа в сферических координатах [см. (3.1)]. Разделяя переменные, зависящие от угла и радиуса, получаем известное разложение

$$\psi(x, \omega) = \sum_{l, m} f_l(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (16.4)$$

где сферические гармоники Y_{lm} определены соотношением (3.53). Радиальные функции $f_l(r)$ удовлетворяют радиальному уравнению

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f_l(r) = 0. \quad (16.5)$$

С помощью подстановки

$$f_l(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} u_l(r) \quad (16.6)$$

можно привести уравнение (16.5) к виду

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2} \right] u_l(r) = 0. \quad (16.7)$$

Это — уравнение Бесселя (3.75) порядка $\nu = l + 1/2$. Поэтому линейно независимые решения для $f_l(r)$ имеют вид

$$f_l(r) \approx \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+1/2}(kr), \quad \frac{1}{\sqrt{r}} N_{l+1/2}(kr). \quad (16.8)$$

Обычно вводят так называемые *сферические функции Бесселя и Ханкеля*, обозначаемые через $j_l(x)$, $n_l(x)$, $h_l^{(1, 2)}(x)$ и определяемые следующими выражениями:

$$\begin{aligned} j_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x), \\ n_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+1/2}(x), \\ h_l^{(1, 2)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} [J_{l+1/2}(x) \pm iN_{l+1/2}(x)]. \end{aligned} \quad (16.9)$$

Для действительных x функции $h_l^{(2)}(x)$ и $h_l^{(1)}(x)$ комплексно сопряжены. Как можно показать из разложений (3.82) и (3.83), имеют

место соотношения

$$j_l(x) = (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left(\frac{\sin x}{x} \right),$$

$$n_l(x) = -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left(\frac{\cos x}{x} \right).$$
(16.10)

Явные выражения сферических функций для нескольких низших значений l имеют вид

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}, \quad h_0^{(1)}(x) = \frac{e^{ix}}{ix},$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \quad n_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x},$$

$$h_1^{(1)}(x) = -\frac{e^{ix}}{x} \left(1 + \frac{i}{x} \right),$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3 \cos x}{x^2},$$

$$n_2(x) = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \cos x - 3 \frac{\sin x}{x^2},$$

$$h_2^{(1)}(x) = \frac{ie^{ix}}{x} \left(1 + \frac{3i}{x} - \frac{3}{x^2} \right).$$
(16.11)

Из приближенных представлений (3.89) — (3.91) следует, что при малых значениях аргумента $x \ll l$

$$j_l(x) \approx \frac{x^l}{(2l+1)!!},$$
(16.12)

$$n_l(x) \approx -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}},$$

где $(2l+1)!! = (2l+1)(2l-1)(2l-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1$. При больших аргументах ($x \gg l$) имеем

$$j_l(x) \approx \frac{1}{x} \sin \left(x - \frac{l\pi}{2} \right),$$

$$n_l(x) \approx -\frac{1}{x} \cos \left(x - \frac{l\pi}{2} \right),$$
(16.13)

$$h_l^{(1)}(x) \approx (-i)^{l+1} \frac{e^{ix}}{x}.$$

Сферические функции Бесселя удовлетворяют следующим рекуррентным формулам:

$$\frac{2l+1}{x} z_l(x) = z_{l-1}(x) + z_{l+1}(x),$$
(16.14)

$$z_l'(x) = \frac{1}{2l+1} [lz_{l-1}(x) - (l+1)z_{l+1}(x)],$$

где $z_l(x)$ — любая из функций $j_l(x)$, $n_l(x)$, $h_l^{(1)}(x)$, $h_l^{(2)}(x)$. Определитель Вронского для пары различных сферических функций Бесселя имеет вид

$$W(j_l, n_l) = \frac{1}{l} W(j_l, h_l^{(1)}) = -W(n_l, h_l^{(1)}) = \frac{1}{x^2}. \quad (16.15)$$

Общее решение уравнения Гельмгольца (16.3) в сферических координатах можно записать как

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{l,m} [A_{lm}^{(1)} h_l^{(1)}(kr) + A_{lm}^{(2)} h_l^{(2)}(kr)] Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (16.16)$$

где коэффициенты $A_{lm}^{(1)}$ и $A_{lm}^{(2)}$ определяются граничными условиями.

В качестве примера найдем разложение по сферическим гармоникам функции Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, которая соответствует расходящейся волне и удовлетворяет во всем пространстве уравнению

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (16.17)$$

Как было показано в гл. 9, эта функция Грина имеет вид

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \quad (16.18)$$

Разложение функции $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ по сферическим гармоникам можно получить совершенно аналогично тому, как это было сделано при решении уравнения Пуассона в гл. 3, § 8 и 10 [см., в частности, выражения (3.117) и далее и (3.138) и далее]. Подставляя в уравнение (16.17) разложение

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l,m} g_l(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (16.19)$$

получаем следующее уравнение для $g_l(r, r')$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] g_l = -\frac{1}{r^2} \delta(r - r'). \quad (16.20)$$

Решение этого уравнения, ограниченное вблизи начала координат и представляющее расходящиеся волны на бесконечности, имеет вид

$$g_l(r, r') = A j_l(kr_{<}) h_l^{(1)}(kr_{>}). \quad (16.21)$$

Полагая $A = ik$, получаем правильное значение скачка производной. Окончательно приходим к следующему разложению для функции Грина:

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = ik \sum_{l=0}^{\infty} j_l(kr_{<}) h_l^{(1)}(kr_{>}) \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (16.22)$$

До сих пор мы интересовались главным образом радиальными функциями, соответствующими скалярному волновому уравнению. Чтобы ввести некоторые понятия, используемые при решении векторного волнового уравнения, вернемся к рассмотрению угловых функций. Угловыми собственными функциями являются сферические гармоники $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ (3.53), удовлетворяющие уравнению

$$-\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}. \quad (16.23)$$

Как известно из квантовой механики, это уравнение можно представить в операторном виде

$$L^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}. \quad (16.24)$$

Дифференциальный оператор $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, где

$$\mathbf{L} = \frac{1}{i} (\mathbf{r} \times \text{grad}), \quad (16.25)$$

совпадает с оператором орбитального момента количества движения в волновой механике.

Составляющие оператора \mathbf{L} удобно выразить через величины

$$\begin{aligned} L_+ &= L_x + iL_y = e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ L_- &= L_x - iL_y = e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ L_z &= -i \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (16.26)$$

Заметим, что оператор \mathbf{L} действует лишь на угловые переменные и не зависит от r . Из определения (16.25) очевидно, что справедливо операторное уравнение

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = 0. \quad (16.27)$$

Как легко проверить с помощью явных выражений (16.26), оператор L^2 действительно эквивалентен оператору в левой части уравнения (16.23).

Используя (16.26) и рекуррентные формулы для Y_{lm} , можно установить следующие полезные соотношения:

$$\begin{aligned} L_+ Y_{lm} &= \sqrt{(l-m)(l+m+1)} Y_{l, m+1}, \\ L_- Y_{lm} &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)} Y_{l, m-1}, \\ L_z Y_{lm} &= m Y_{lm}. \end{aligned} \quad (16.28)$$

Наконец, приведем еще следующие операторные уравнения, выражающие коммутативные свойства \mathbf{L} , L^2 и ∇^2 :

$$\begin{aligned} L^2\mathbf{L} &= \mathbf{L}L^2, \\ \mathbf{L} \times \mathbf{L} &= i\mathbf{L}, \\ L_j\nabla^2 &= \nabla^2L_j, \end{aligned} \quad (16.29)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r) - \frac{L^2}{r^2}. \quad (16.30)$$

§ 2. Разложение электромагнитных полей по мультиполям

В области, где источники отсутствуют, уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (16.31)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

При гармонической зависимости величин от времени ($e^{-i\omega t}$) эти уравнения записываются в форме

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{B}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = -ik\mathbf{E}, \quad (16.32)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Исключая из первых двух уравнений \mathbf{E} , приходим к следующим уравнениям для вектора \mathbf{B} :

$$\left. \begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \text{и соотношению, определяющему } \mathbf{E}, \\ \mathbf{E} &= -\frac{i}{k} \operatorname{rot} \mathbf{B}. \end{aligned} \right\} \quad (16.33)$$

Если же мы исключим вектор \mathbf{B} , то получим уравнения для вектора \mathbf{E} :

$$\left. \begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\mathbf{E} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \\ \text{и добавочное соотношение, определяющее вектор } \mathbf{B}, \\ \mathbf{B} &= -\frac{i}{k} \operatorname{rot} \mathbf{E}. \end{aligned} \right\} \quad (16.34)$$

Совокупность трех формул (16.33) или (16.34) эквивалентна уравнениям Максвелла (16.32).

Определим теперь мультипольные поля \mathbf{E} и \mathbf{V} . Из (16.33) очевидно, что каждая *декартова* составляющая \mathbf{V} удовлетворяет уравнению Гельмгольца (16.3). Поэтому общее решение для каждой составляющей \mathbf{V} можно представить в виде (16.16). Объединяя эти выражения, приходим к векторному решению:

$$\mathbf{V} = \sum_{l, m} [\mathbf{A}_{lm}^{(1)} h_l^{(1)}(kr) + \mathbf{A}_{lm}^{(2)} h_l^{(2)}(kr)] Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (16.35)$$

где \mathbf{A}_{lm} — произвольные постоянные векторы.

Векторные коэффициенты \mathbf{A}_{lm} в (16.35) не вполне произвольны, поскольку должно выполняться условие обращения в нуль дивергенции $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$. Так как радиальные функции линейно независимы, то условие $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ должно порознь выполняться для обеих сумм в (16.35). Таким образом, коэффициенты \mathbf{A}_{lm} должны удовлетворять соотношению

$$\operatorname{div} \sum_{l, m} h_l(kr) \mathbf{A}_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0. \quad (16.36)$$

Оператор дивергенции может быть заменен операторным множителем

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r^2} \mathbf{r} \times \mathbf{L}, \quad (16.37)$$

где \mathbf{L} — оператор, определяемый согласно (16.25). Подставляя (16.37) в (16.36), приходим к условию

$$\mathbf{r} \cdot \sum_l \left[\frac{\partial h_l}{\partial r} \sum_m \mathbf{A}_{lm} Y_{lm} - \frac{i h_l}{r} \mathbf{L} \times \sum_m \mathbf{A}_{lm} Y_{lm} \right] = 0. \quad (16.38)$$

Из рекуррентных формул (16.14) очевидно, что в общем случае коэффициенты \mathbf{A}_{lm} с данным l связаны с коэффициентами $\mathbf{A}_{l'm}$, где $l' = l \pm 1$. Эта связь отсутствует лишь в том случае, когда $(2l + 1)$ векторных коэффициента для каждого значения l подобраны так, что

$$\mathbf{r} \cdot \sum_m \mathbf{A}_{lm} Y_{lm} = 0. \quad (16.39)$$

В этом частном случае окончательное условие на коэффициенты накладывается вторым членом уравнения (16.38):

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{L} \times \sum_m \mathbf{A}_{lm} Y_{lm}) = 0. \quad (16.40)$$

Условие (16.39), означающее поперечность поля относительно радиуса-вектора, в сочетании с уравнением (16.40) позволяет однозначно определить системы векторных угловых функций порядка l для каждого заданного значения m . Эти функции могут

быть найдены непосредственно из (16.39) и (16.40) с учетом общих свойств функций Y_{lm} . Однако нетрудно заметить, что угловое решение имеет вид

$$\sum_{m'} A_{lm'} Y_{lm'} = \sum_m a_{lm} L Y_{lm}. \quad (16.41)$$

Из соотношения (16.27) видно, что условие поперечности поля (16.39) удовлетворяется. Аналогично, используя второе из коммутационных соотношений (16.29) и формулу (16.27), можно показать, что выполняется и второе условие (16.40). А то, что функции $f_l(r) L Y_{lm}$ удовлетворяют волновому уравнению (16.3), следует из последнего соотношения (16.29).

Итак, принимая условие (16.39), мы приходим к следующей системе частных решений, или электромагнитных мультипольных полей:

$$\mathbf{B}_{lm} = f_l(kr) L Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (16.42)$$

$$\mathbf{E}_{lm} = \frac{i}{k} \operatorname{rot} \mathbf{B}_{lm},$$

где

$$f_l(kr) = A_l^{(1)} h_l^{(1)}(kr) + A_l^{(2)} h_l^{(2)}(kr). \quad (16.43)$$

Любая линейная комбинация этих полей с различными индексами l и m удовлетворяет системе уравнений (16.33). Характерной особенностью полученных решений является ортогональность вектора магнитной индукции радиусу-вектору ($\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_{lm} = 0$). Поэтому подобные волны не представляют общего решения уравнений (16.33). Это сферический аналог *поперечных магнитных* (ТМ), или, иначе говоря, *электрических* цилиндрических волн, рассмотренных в гл. 8.

Если бы мы исходили из системы уравнений (16.34), а не (16.33), мы пришли бы к другой системе мультипольных полей, в которой радиусу-вектору ортогонален вектор \mathbf{E} :

$$\mathbf{E}_{lm} = f_l(kr) L Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (16.44)$$

$$\mathbf{B}_{lm} = -\frac{i}{k} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{lm}.$$

Эти сферические волны являются аналогом *поперечных электрических* (ТЕ), или *магнитных*, цилиндрических волн.

Точно так же, как в случае цилиндрических волноводов, можно показать, что полученные две системы мультипольных полей (16.42) и (16.44) образуют полную систему векторных решений уравнений Максвелла. Мы будем называть эти мультипольные поля

соответственно электрическими и магнитными (а не поперечно магнитными и т. п.), так как они определяются, как мы увидим, соответственно плотностью электрического заряда и распределением магнитного момента. Ввиду важной роли векторных сферических гармоник удобно ввести нормированные функции¹⁾

$$\mathbf{X}_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{L}Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (16.45)$$

с условием ортогональности

$$\int \mathbf{X}_{l'm'}^* \cdot \mathbf{X}_{lm} d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (16.46)$$

Комбинируя оба типа полей, можно написать общее решение уравнений Максвелла (16.32) в виде

$$\mathbf{B} = \sum_{l, m} \left[a_E(l, m) f_l(kr) \mathbf{X}_{lm} - \frac{i}{k} a_M(l, m) \operatorname{rot}(g_l(kr) \mathbf{X}_{lm}) \right], \quad (16.47)$$

$$\mathbf{E} = \sum_{l, m} \left[\frac{i}{k} a_E(l, m) \operatorname{rot}(f_l(kr) \mathbf{X}_{lm}) + a_M(l, m) g_l(kr) \mathbf{X}_{lm} \right],$$

где коэффициенты $a_E(l, m)$ и $a_M(l, m)$ определяют амплитуды электрических и магнитных мультипольных полей, соответствующих индексам (l, m) . Радиальные функции $f_l(kr)$ и $g_l(kr)$ имеют вид (16.43). Значения коэффициентов $a_E(l, m)$ и $a_M(l, m)$, так же как и амплитуды в (16.43), определяются источниками и граничными условиями.

§ 3. Свойства полей мультиполей. Энергия и момент количества движения мультипольного излучения

Прежде чем устанавливать связь общего решения уравнений (16.47) с характеристиками ограниченного распределения источников, исследуем свойства полей отдельных мультипольных гармоник (16.42) и (16.44). В ближней зоне ($kr \ll 1$) радиальная функция $f_l(kr)$ пропорциональна функции n_l , определяемой соотношением (16.12), если, конечно, коэффициент перед n_l не обращается в нуль. Не рассматривая этого случая, мы заключаем, что при $kr \rightarrow 0$ магнитное поле для электрического (l, m) -мультиполя стремится к значению

$$\mathbf{B}_{lm} \approx -\frac{k}{l} \mathbf{L} \frac{Y_{lm}}{r^{l+1}}, \quad (16.48)$$

¹⁾ Для $l = 0$ считаем, по определению, $\mathbf{X}_{lm} = 0$. Сферически симметричные решения однородных уравнений Максвелла существуют лишь в предельном случае статики $k \rightarrow 0$.

где коэффициент пропорциональности выбран из соображений удобства последующих вычислений. Для нахождения электрического поля нужно вычислить ротор от правой части в (16.48). Приведем здесь полезное операторное тождество

$$i \operatorname{rot} \mathbf{L} = r \nabla^2 - \operatorname{grad} \left(1 + r \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (16.49)$$

Согласно (16.42), напряженность электрического поля имеет предельное значение

$$\mathbf{E}_{lm} \approx -\frac{i}{l} \operatorname{rot} \mathbf{L} \left(\frac{Y_{lm}}{r^{l+1}} \right). \quad (16.50)$$

Так как функция Y_{lm}/r^{l+1} удовлетворяет уравнению Лапласа, то первое слагаемое в (16.49) равно нулю. Второй член в (16.49) эквивалентен в данном случае оператору $l \operatorname{grad}$. В результате получаем следующее выражение для напряженности электрического поля (l, m) -мультиполя электрического типа на близких расстояниях:

$$\mathbf{E}_{lm} \approx -\operatorname{grad} \left(\frac{Y_{lm}}{r^{l+1}} \right). \quad (16.51)$$

Это поле в точности совпадает с полученным в гл. 4, § 1, электростатическим мультипольным полем. Заметим, что величина вектора магнитного поля \mathbf{B}_{lm} меньше величины электрического поля \mathbf{E}_{lm} в kr раз. Следовательно, в ближней зоне магнитное поле мультиполя электрического типа всегда гораздо меньше электрического поля. Для мультипольных полей магнитного типа [см. (16.44)]; очевидно, векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} меняются ролями в соответствии с подстановкой

$$\mathbf{E}_E \rightarrow -\mathbf{B}_M, \quad \mathbf{B}_E \rightarrow \mathbf{E}_M. \quad (16.52)$$

В дальней, или волновой, зоне ($kr \gg 1$) вид полей мультиполей зависит от наложенных граничных условий. Для определенности рассмотрим случай расходящихся волн, соответствующий излучению ограниченного источника. При этом радиальная функция $f_l(kr)$ пропорциональна сферической функции Ханкеля $h_l^{(1)}(kr)$. Из асимптотических выражений (16.13) следует, что в волновой зоне магнитное поле электрического (l, m) -мультиполя принимает значение

$$\mathbf{B}_{lm} \approx (-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \mathbf{L} Y_{lm}. \quad (16.53)$$

Электрическое поле можно представить в виде

$$\mathbf{E}_{lm} = \frac{(-i)^l}{k^2} \left[\operatorname{grad} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \times \mathbf{L} Y_{lm} + \frac{e^{ikr}}{r} \operatorname{rot} \mathbf{L} Y_{lm} \right]. \quad (16.54)$$

Так как мы уже воспользовались асимптотическими выражениями для сферических функций Ханкеля, было бы неоправданным удерживать степени $1/r$ выше первой. Учитывая это и используя тождество (16.49), получаем

$$\mathbf{E}_{lm} = -(-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \left[\mathbf{n} \times \mathbf{L}Y_{lm} - \frac{1}{k} (\mathbf{r}\nabla^2 - \text{grad}) Y_{lm} \right], \quad (16.55)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор, направленный вдоль радиуса. Второй член, равный произведению некоторой безразмерной функции углов на $1/kr$, очевидно, может быть опущен в предельном случае $kr \gg 1$. В результате для вектора напряженности электрического поля в волновой зоне получаем

$$\mathbf{E}_{lm} = \mathbf{V}_{lm} \times \mathbf{n}, \quad (16.56)$$

где вектор \mathbf{V}_{lm} дается соотношением (16.53). Эти выражения характерны для поля излучения, векторы которого нормальны радиусу и убывают с расстоянием по закону $1/r$. Для установления соответствующих соотношений для магнитных мультиполей достаточно воспользоваться подстановкой (16.52).

Мультипольным разложением поля, создаваемого источником излучения, удобно пользоваться для вычисления энергии и момента количества движения, уносимых излучением. Для определенности рассмотрим (l, m) -мультиполь электрического типа. Согласно (16.47), поля записываются в виде

$$\mathbf{V}_{lm} = a_E(l, m) h_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{lm} e^{-i\omega t}, \quad (16.57)$$

$$\mathbf{E}_{lm} = \frac{i}{k} \text{rot } \mathbf{V}_{lm}.$$

Для монохроматических полей среднее по времени значение плотности энергии равно

$$u = \frac{1}{16\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^*). \quad (16.58)$$

В волновой зоне оба слагаемых равны между собой. Следовательно, в сферическом слое между r и $r + dr$ (при $kr \gg 1$) заключена энергия

$$dU = \frac{|a_E(l, m)|^2}{8\pi} |h_l^{(1)}(kr)|^2 r^2 dr \int \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \mathbf{X}_{lm} d\Omega. \quad (16.59)$$

Используя условие нормировки (16.46) и асимптотические выражения (16.13) для сферической функции Ханкеля, найдем

$$\frac{dU}{dr} = \frac{|a_E(l, m)|^2}{8\pi k^2}; \quad (16.60)$$

величина dU/dr не зависит от радиуса. Случай (l, m) -мультиполя магнитного типа отличается лишь заменой $a_E(l, m)$ на $a_M(l, m)$.

Среднее по времени значение плотности момента количества движения определяется выражением

$$\mathbf{m} = \frac{1}{8\pi c} \operatorname{Re} [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*)]. \quad (16.61)$$

Раскрывая тройное векторное произведение и подставляя выражение (16.57) для электрического поля, получаем для мультиполя электрического типа

$$\mathbf{m} = \frac{1}{8\pi\omega} \operatorname{Re} [\mathbf{B}^* (\mathbf{L} \cdot \mathbf{B})]. \quad (16.62)$$

Для момента количества движения излучения в сферическом слое между r и $r + dr$ получаем

$$d\mathbf{M} = \frac{|a_E(l, m)|^2}{8\pi\omega} |h_l^{(1)}(kr)|^2 r^2 dr \int \operatorname{Re} [\mathbf{X}_{lm}^* (\mathbf{L} \cdot \mathbf{X}_{lm})] d\Omega. \quad (16.63)$$

В волновой зоне (16.63) с учетом явных выражений (16.45) для \mathbf{X}_{lm} приводится к виду

$$\frac{d\mathbf{M}}{dr} = \frac{|a_E(l, m)|^2}{8\pi\omega k^2} \int \operatorname{Re} [Y_{lm}^* \mathbf{L} Y_{lm}] d\Omega. \quad (16.64)$$

Используя соотношения (16.28) для составляющих $\mathbf{L} Y_{lm}$ и ортогональность сферических гармоник, можно убедиться, что отлична от нуля лишь составляющая $d\mathbf{M}$ в направлении z , причем

$$\frac{dM_z}{dr} = \frac{m}{\omega} \frac{|a_E(l, m)|^2}{8\pi k^2}. \quad (16.65)$$

Сравнивая этот результат с величиной энергии излучения (16.60), получаем, что отношение z -составляющей момента количества движения к энергии равно

$$\frac{M_z}{U} = \frac{m}{\omega} = \frac{m\hbar}{\hbar\omega}. \quad (16.66)$$

Очевидная квантовая интерпретация этого соотношения состоит в том, что излучаемый (l, m) -мультиполем фотон с энергией $\hbar\omega$ уносит $m\hbar$ единиц z -составляющей момента количества движения. Продолжая квантовомеханическую аналогию, следует ожидать, что отношение абсолютного значения момента количества движения к энергии должно быть равно

$$\frac{M_{\text{KB}}}{U} = \frac{(M_x^2 + M_y^2 + M_z^2)_{\text{KB}}^{1/2}}{U} = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\omega}. \quad (16.67)$$

Однако из соотношений (16.64) и (16.65) следует классический результат

$$\frac{M_{\text{к.п.}}}{U} = \frac{|M_z|}{U} = \frac{|m|}{\omega}. \quad (16.68)$$

Это расхождение обусловлено квантовой природой электромагнитного поля отдельного фотона. Если z -составляющая момента количества движения точно определена, то, согласно принципу неопределенности, точные значения остальных составляющих неизвестны, а среднеквадратичное значение момента количества движения выражается формулой (16.67). Если же поле излучения содержит большое число фотонов (классический предел), то среднеквадратичные значения поперечных составляющих момента количества движения могут быть сколь угодно малыми по сравнению со среднеквадратичным значением составляющей вдоль оси z . В этом случае справедлив классический результат (16.68)¹⁾.

В квантовомеханической интерпретации величины излученного момента количества движения, приходящейся на один фотон в мультипольных полях, используются правила отбора для мультипольных переходов между квантовыми состояниями. Мультипольный переход порядка (l, m) связывает начальное квантовое состояние, характеризуемое полным моментом количества движения J и z -составляющей момента M , с конечным квантовым состоянием, для которого J' лежит в диапазоне $|J - l| \leq J' \leq J + l$ и $M' = M - m$. Наоборот, для двух состояний (J, M) и (J', M') возможны лишь такие мультипольные переходы порядка (l, m) , при которых $|J - J'| \leq l \leq (J + J')$ и $m = M - M'$.

Для завершения квантовомеханического описания мультипольного перехода остается установить, сохраняется или изменяется при переходе четность состояния. Четность начального состояния равна произведению четности конечного состояния на четность поля мультиполя. Для определения четности поля мультиполя достаточно рассмотреть поведение вектора магнитного поля \mathbf{V}_{lm} при преобразовании инверсии относительно центра ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$). Чтобы убедиться, что четность поля мультиполя определяется вектором \mathbf{V}_{lm} , напомним, что взаимодействие заряженной частицы и электромагнитного поля определяется скалярным произведением $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$. Вектор \mathbf{A}_{lm} обладает четностью, противоположной четности вектора \mathbf{V}_{lm} , так как применение оператора ротора изменяет четность. Поэтому, поскольку \mathbf{v} — нечетный полярный вектор, состояния, связанные оператором взаимодействия $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$, будут отличаться по четности на четность вектора магнитной индукции \mathbf{B}_{lm} .

¹⁾ Детальное обсуждение этого круга вопросов дано в статье [75]. В этой работе показано, что для поля мультиполя, содержащего N фотонов, квадрат момента количества движения равен $[N^2 m^2 + Nl(l+1) - m^2] \hbar^2$

Для мультиполей электрического типа магнитное поле дается выражением (16.57). Преобразование инверсии ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$) эквивалентно замене ($r \rightarrow r, \theta \rightarrow \pi - \theta, \varphi \rightarrow \varphi + \pi$) в сферических координатах. Оператор \mathbf{L} инвариантен относительно преобразования инверсии. Следовательно, свойства четности \mathbf{V}_{lm} для мультиполей электрического типа определяются поведением функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Согласно (3.53) и (3.50), четность Y_{lm} равна $(-1)^l$. Таким образом, четность мультипольных полей электрического типа порядка (l, m) равна $(-1)^l$. В частности, четность вектора магнитного поля \mathbf{B}_{lm} равна $(-1)^l$, а четность электрического поля \mathbf{E}_{lm} равна $(-1)^{l+1}$, так как $\mathbf{E}_{lm} \sim \text{rot } \mathbf{B}_{lm}$.

Четность мультиполя магнитного типа порядка (l, m) равна $(-1)^{l+1}$. В этом случае напряженность электрического поля \mathbf{E}_{lm} выражается так же, как \mathbf{B}_{lm} для электрических мультиполей. Следовательно, четности полей мультиполей в данном случае противоположны четностям соответствующих мультипольных полей электрического типа того же порядка.

Связав изменения четности с изменениями момента количества движения при квантовом переходе, мы видим, что могут осуществляться лишь определенные комбинации мультипольных переходов. Так, например, для состояний с $J = 1/2$ и $J' = 3/2$ разрешены мультипольные переходы порядка $l = 1, 2$. Если четность обоих состояний одинакова, то условие сохранения четности ограничивает возможности перехода, так что оказываются возможными лишь магнитные дипольные переходы и электрические квадрупольные переходы. Для состояний с различной четностью могут иметь место электрические дипольные или магнитные квадрупольные переходы с излучением или поглощением.

§ 4. Угловое распределение мультипольного излучения

Для произвольного ограниченного распределения источников поле в волновой зоне описывается суперпозицией

$$\mathbf{B} \approx \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}}{kr} \sum_{l, m} (-i)^{l+1} [a_E(l, m) \mathbf{X}_{lm} + a_M(l, m) \mathbf{n} \times \mathbf{X}_{lm}], \quad (16.69)$$

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{B} \times \mathbf{n}.$$

Связь коэффициентов $a_E(l, m)$ и $a_M(l, m)$ со свойствами источника будет установлена в следующем параграфе. Среднее по времени значение мощности излучения в единицу телесного угла равно

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi k^2} \left| \sum_{l, m} (-i)^{l+1} [a_E(l, m) \mathbf{X}_{lm} \times \mathbf{n} + a_M(l, m) \mathbf{X}_{lm}] \right|^2. \quad (16.70)$$

Поляризация излучения определяется направлениями векторов, входящих под знак модуля. Мы видим, что угловые распределения излучения для мультипольных моментов электрического и магнитного типов с одинаковыми (l, m) совпадают, тогда как поляризация излучения в этих случаях отличается поворотом векторов на угол 90° . Таким образом, порядок мультиполя может быть определен из измерений углового распределения излучаемой мощности, а характер излучения (электрический или магнитный тип) можно установить лишь на основе поляризационных измерений.

Для отдельного мультиполя порядка (l, m) выражение для углового распределения (16.70) сводится к одному члену

$$\frac{dP(l, m)}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi k^2} |a(l, m)|^2 |X_{lm}|^2. \quad (16.71)$$

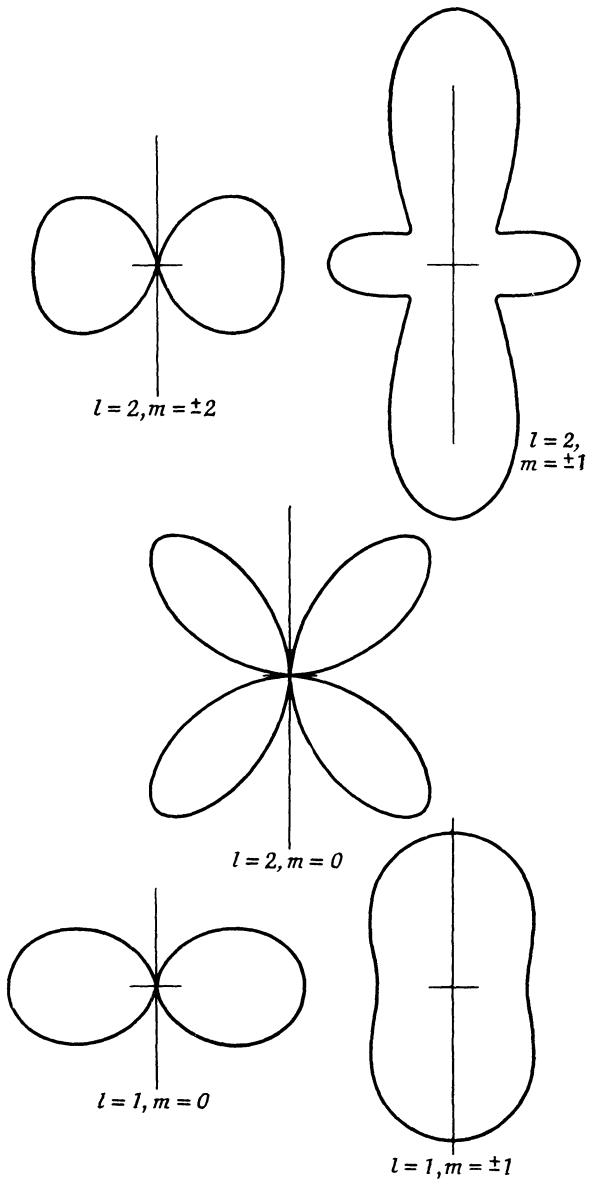
Используя определение (16.45) для X_{lm} и соотношения (16.28), последнее выражение можно развернуть:

$$\begin{aligned} \frac{dP(l, m)}{d\Omega} = \frac{c |a(l, m)|^2}{8\pi k^2 l(l+1)} \left\{ \frac{1}{2} (l-m)(l+m-1) |Y_{l, m+1}|^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (l+m)(l-m-1) |Y_{l, m-1}|^2 + m^2 |Y_{lm}|^2 \right\}. \quad (16.72) \end{aligned}$$

Простейшие угловые распределения представлены в следующей таблице.

	$ X_{lm}(\theta, \varphi) ^2$		
	$m=0$	$m=\pm 1$	$m=\pm 2$
$l=1$ (диполь)	$\frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta$	$\frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta)$	
$l=2$ (квадруполь)	$\frac{15}{8\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta$	$\frac{5}{16\pi} (1 - 3 \cos^2 \theta + 4 \cos^4 \theta)$	$\frac{5}{16\pi} (1 - \cos^4 \theta)$

Как ясно из таблицы, дипольные распределения соответствуют диполю, осциллирующему параллельно оси z ($m=0$), или двум диполям, колеблющимся соответственно вдоль осей x и y со сдвигом фазы на 90° ($m=\pm 1$). На фиг. 16.1 представлены кривые распределения интенсивности дипольного и квадрупольного излучения в зависимости от полярного угла. Приведены угловые распределения мультиполей с $l=1$ и $l=2$. Общее распределение излучения



Ф и г. 16.1. Распределение дипольного и квадрупольного излучения (диаграмма излучения).

мультиполя порядка l определяется, согласно (16.70), когерентной суперпозицией $(2l + 1)$ гармоник, соответствующих различным m .

С помощью формулы (3.69) легко убедиться, что квадраты модулей векторных сферических гармоник удовлетворяют правилу сумм

$$\sum_{m=-l}^l |\mathbf{X}_{lm}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}. \quad (16.73)$$

Отсюда следует, что если источник состоит из набора мультиполей порядка l с коэффициентами $a(l, m)$, не зависящими от m , и излучение этих мультиполей складывается некогерентным образом, то угловое распределение излучения будет изотропным. Такое положение обычно имеет место в атомных и ядерных радиационных переходах, если начальное состояние системы не подобрано специальным образом.

Полная мощность излучения мультиполя порядка (l, m) определяется интегрированием выражения (16.71) по всем углам. Так как векторы \mathbf{X}_{lm} нормированы к единице, мощность излучения равна

$$P(l, m) = \frac{c}{8\pi k^2} |a(l, m)|^2. \quad (16.74)$$

В общем случае угловое распределение излучения источника определяется когерентной суммой (16.70). Как легко показать с помощью интегрирования по углам, интерференционные члены не дают вклада в полное излучение. Поэтому полная мощность излучения равна просто некогерентной сумме мощностей излучения отдельных мультиполей

$$P = \frac{c}{8\pi k^2} \sum_{l, m} [|a_E(l, m)|^2 + |a_M(l, m)|^2]. \quad (16.75)$$

§ 5. Источники мультипольного излучения. Мультипольные моменты

После того как рассмотрены свойства полей мультиполей, найдено угловое распределение излучения, найдена величина энергии излучения и момента количества движения, обратимся к установлению связи между полями и создающими их источниками. Пусть имеется ограниченное распределение заряда $q(\mathbf{x}, t)$, тока $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ и вектора намагниченности $\mathcal{M}(\mathbf{x}, t)$. Будем, кроме того, считать, что все временные зависимости могут быть разложены в ряд или интеграл Фурье, и ограничимся рассмотрением источников, гармонически меняющихся во времени:

$$q(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \quad \mathcal{M}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad (16.76)$$

(подразумевается, что мы берем действительную часть от соответствующих комплексных величин). Более общая зависимость от времени может быть получена линейной суперпозицией.

Так как мы рассматриваем случай, когда плотность намагниченности отлична от нуля, следует различать векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} . Уравнения Максвелла в случае гармонических источников записываются в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= ik\mathbf{B}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} + ik\mathbf{E} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \end{aligned} \quad (16.77)$$

а уравнение непрерывности имеет вид

$$i\omega\rho = \operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (16.78)$$

Чтобы воспользоваться полученным выше представлением (16.47) общего решения однородных уравнений Максвелла, запишем уравнения относительно полей

$$\mathbf{B} \text{ и } \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{4\pi i}{\omega} \mathbf{J}. \quad (16.79)$$

При этом мы приходим к следующим двум системам уравнений, аналогичным системам (16.33) и (16.34):

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c} (\operatorname{rot} \mathbf{J} + c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathcal{M}), \quad (16.80)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{E}' = \frac{i}{k} (\operatorname{rot} \mathbf{B} - 4\pi \operatorname{rot} \mathcal{M})$$

и

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{E}' = -\frac{4\pi ik}{c} \left(c \operatorname{rot} \mathcal{M} + \frac{1}{k^2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{J} \right), \quad (16.81)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}' = 0, \quad \mathbf{B} = -\frac{i}{k} \left(\operatorname{rot} \mathbf{E}' - \frac{4\pi i}{\omega} \operatorname{rot} \mathbf{J} \right).$$

Для областей вне источников эти системы уравнений переходят, очевидно, в (16.33) и (16.34). Следовательно, общее решение для векторов \mathbf{B} и \mathbf{E}' вне источников имеет вид (16.47). Далее, даже в областях, содержащих источники, дивергенция обоих рассматриваемых полей равна нулю. Поэтому и здесь решения будут иметь вид (16.47) с той разницей, что изменится лишь вид радиальных функций $f_l(r)$ и $g_l(r)$, подобно тому как это имеет место в скалярных задачах, например в электростатике или волновой механике.

Рассмотрим, например, вектор магнитной индукции

$$\mathbf{B} = \sum_{l, m} \left[f_{lm}(r) \mathbf{X}_{lm} - \frac{i}{k} \operatorname{rot} g_{lm}(r) \mathbf{X}_{lm} \right]. \quad (16.82)$$

Вне источников в соответствии с (16.57) и (16.69)

$$\begin{aligned} f_{lm}(r) &\approx a_E(l, m) h_l^{(1)}(kr), \\ g_{lm}(r) &\approx a_M(l, m) h_l^{(1)}(kr). \end{aligned} \quad (16.83)$$

Чтобы определить уравнение, которому удовлетворяет радиальная функция $f_{lm}(r)$ для мультиполей электрического типа в области, содержащей источники, подставим (16.82) в первое из уравнений системы (16.80), умножим скалярно обе стороны уравнения на вектор \mathbf{X}_{lm}^* и проинтегрируем по всем углам. В силу ортогональности все члены левой части уравнения, содержащие $g_{lm}(r)$, обращаются в нуль и остается лишь одно слагаемое, содержащее $f_{lm}(r)$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f_{lm}(r) = \\ = -\frac{4\pi}{c} \int \mathbf{X}_{lm}^* \cdot (\text{rot } \mathbf{J} + c \text{ rot rot } \mathcal{M}) d\Omega. \end{aligned} \quad (16.84)$$

Подставляя аналогичное разложение для \mathbf{E}' в первое уравнение системы (16.81) и проводя такие же вычисления, приходим к уравнению для функции $g_{lm}(r)$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] g_{lm}(r) = \\ = -4\pi ik \int \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \left(\text{rot } \mathcal{M} + \frac{1}{ck^2} \text{ rot rot } \mathbf{J} \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (16.85)$$

Полученные неоднородные уравнения для $f_{lm}(r)$ и $g_{lm}(r)$ можно решить методом функций Грина. Подходящая функция Грина, удовлетворяющая уравнению (16.20), определяется соотношением (16.21). Обозначив правую часть уравнения (16.84) через $-K_E(r)$, можно представить $f_{lm}(r)$ в виде

$$f_{lm}(r) = ik \int_0^{\infty} r'^2 j_l(kr_{<}) h_l^{(1)}(kr_{>}) K_E(r') dr'. \quad (16.86)$$

В области вне источников $r_{<} = r'$, а $r_{>} = r$, так что

$$f_{lm}(r) \approx ik h_l^{(1)}(kr) \int_0^{\infty} r'^2 j_l(kr') K_E(r') dr'. \quad (16.87)$$

Путем сравнения полученного выражения с (16.83) мы можем определить коэффициент $a_E(l, m)$ для мультиполя электрического типа. Подставляя в явном виде значение $K_E(r)$, определяемое правой частью уравнения (16.84), получаем

$$a_E(l, m) = \frac{4\pi ik}{c} \int j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}^* \cdot (\text{rot } \mathbf{J} + c \text{ rot rot } \mathcal{M}) d^3x. \quad (16.88)$$

Аналогично для коэффициента $a_M(l, m)$ для мультиполя магнитного типа получим

$$a_M(l, m) = -4\pi k^2 \int j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \left(\text{rot } \mathcal{M} + \frac{1}{ck^2} \text{rot rot } \mathbf{J} \right) d^3x. \quad (16.89)$$

Выражения (16.88) и (16.89) можно преобразовать к более удобному виду с помощью тождества

$$\begin{aligned} & \int j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \text{rot } \mathbf{A} d^3x = \\ & = \frac{i}{\sqrt{l(l+1)}} \int Y_{lm}^* \left\{ \text{div } \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(kr)] - k^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} j_l(kr) \right\} d^3x. \end{aligned} \quad (16.90)$$

Здесь \mathbf{A} — произвольный вектор с достаточно хорошими аналитическими свойствами, обращающийся на бесконечности в нуль быстрее, чем r^{-2} . Для доказательства тождества (16.90) выполним интегрирование по частям, в результате чего оператор ротора переносится на вектор \mathbf{X}_{lm} , применим операторное соотношение (16.49) и снова проинтегрируем по частям. Полагая \mathbf{A} равным \mathbf{J} , \mathcal{M} , $\text{rot } \mathbf{J}$, $\text{rot } \mathcal{M}$, можно преобразовать различные слагаемые в формулах (16.88) и (16.89) и прийти к окончательным выражениям

$$\begin{aligned} a_E(l, m) = & \frac{4\pi k^2}{i\sqrt{l(l+1)}} \int Y_{lm}^* \left\{ \varrho \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(kr)] + \right. \\ & \left. + \frac{ik}{c} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}) j_l(kr) - ik \text{div} (\mathbf{r} \times \mathcal{M}) j_l(kr) \right\} d^3x \end{aligned} \quad (16.91)$$

и

$$\begin{aligned} a_M(l, m) = & \frac{4\pi k^2}{i\sqrt{l(l+1)}} \int Y_{lm}^* \left\{ \text{div} \left(\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{J}}{c} \right) j_l(kr) + \right. \\ & \left. + \text{div } \mathcal{M} \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(kr)] - k^2 (\mathbf{r} \cdot \mathcal{M}) j_l(kr) \right\} d^3x. \end{aligned} \quad (16.92)$$

Полученные формулы дают точные выражения для мультипольных коэффициентов, справедливые для произвольной частоты и любых размеров источника.

Для многих приложений в атомной и ядерной физике размеры источника очень малы по сравнению с длиной волны ($kr_{\text{макс}} \ll 1$). В этом случае выражения для мультипольных коэффициентов могут быть значительно упрощены. Для этого можно воспользоваться приближенными выражениями (16.12) для сферических функций Бесселя, справедливыми при малых значениях аргумента. Оставляя в разложениях лишь члены низшего порядка по kr в слагаемых, содержащих ϱ , \mathbf{J} и \mathcal{M} , получаем, что коэффициент для мультиполя электрического типа приближенно равен

$$a_E(l, m) \approx \frac{4\pi k^{l+2}}{i(2l+1)!!} \left(\frac{l+1}{l} \right)^{1/2} (Q_{lm} + Q'_{lm}), \quad (16.93)$$

где мультипольные моменты определяются равенствами

$$\begin{aligned} Q_{lm} &= \int r^l Y_{lm}^* \varrho d^3x, \\ Q'_{lm} &= -\frac{ik}{l+1} \int r^l Y_{lm}^* \operatorname{div} (\mathbf{r} \times \mathcal{M}) d^3x. \end{aligned} \quad (16.94)$$

Момент Q_{lm} совпадает, очевидно, с выражением (4.3) для электростатического мультипольного момента q_{lm} . Момент Q'_{lm} — наведенный электрический мультипольный момент, обусловленный наличием намагниченности. Величина его обычно по крайней мере в kr раз меньше момента Q_{lm} .

Выражение коэффициента $a_M(l, m)$ для мультиполя магнитного типа в длинноволновом приближении имеет вид

$$a_M(l, m) \approx \frac{4\pi ik^{l+2}}{(2l+1)!!} \left(\frac{l+1}{l}\right)^{1/2} (M_{lm} + M'_{lm}), \quad (16.95)$$

где магнитные мультипольные моменты определяются равенствами

$$\begin{aligned} M_{lm} &= -\frac{1}{l+1} \int r^l Y_{lm}^* \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{J}}{c}\right) d^3x, \\ M'_{lm} &= -\int r^l Y_{lm}^* \operatorname{div} \mathcal{M} d^3x. \end{aligned} \quad (16.96)$$

В противоположность электрическим мультипольным моментам Q_{lm} и Q'_{lm} , для системы с отличной от нуля собственной намагниченностью магнитные моменты M_{lm} и M'_{lm} , вообще говоря, имеют один порядок величины.

В предельном случае больших длин волн мультипольные поля электрического типа, очевидно, определяются плотностью электрического заряда ϱ , а поля мультиполей магнитного типа — плотностями магнитных моментов $(1/2c)(\mathbf{r} \times \mathbf{J})$ и \mathcal{M} .

§ 6. Мультипольное излучение атомных и ядерных систем

Полный анализ вопроса о мультипольном излучении атомов и ядер требует применения последовательных квантовомеханических методов исследования ¹⁾, хотя существенные детали могут быть выявлены и при элементарном рассмотрении. В соответствии с формулой (16.74) и выражениями для мультипольных коэффициентов

¹⁾ Квантовомеханические определения мультипольных моментов можно найти в книге Блатта и Вайскопфа [13]. Следует отметить, что значения моментов в указанной книге и у нас отличаются множителем 2, что обусловлено принятыми Блаттом и Вайскопфом определениями плотности источников (см. соотношения (3.1) и (3.2) в книге [13]) в отличие от нашего определения (16.76).

(16.93) и (16.95) полная мощность, излучаемая мультиполем порядка (l, m) , равна

$$\begin{aligned} P_E(l, m) &= \frac{2\pi c}{[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{l+1}{l}\right) k^{2l+2} |Q_{lm} + Q'_{lm}|^2, \\ P_M(l, m) &= \frac{2\pi c}{[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{l+1}{l}\right) k^{2l+2} |M_{lm} + M'_{lm}|^2. \end{aligned} \quad (16.97)$$

С квантовомеханической точки зрения представляет интерес вероятность перехода (величина, обратная времени жизни), которая определяется как отношение мощности излучения к энергии фотона:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{P}{\hbar\omega}. \quad (16.98)$$

Так как нас интересует лишь оценка порядка величин, примем следующую схематическую модель источника. Предположим, что распределение плотности осциллирующего заряда определяется формулами

$$\varrho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{3e}{a^3} Y_{lm}(\theta, \varphi) & \text{при } r < a, \\ 0 & \text{при } r > a. \end{cases} \quad (16.99)$$

Тогда для электрического мультипольного момента Q_{lm} приближенно получим

$$Q_{lm} \approx \frac{3}{l+3} ea^l \quad (16.100)$$

независимо от m . Аналогично примем следующий закон распределения дивергенции вектора намагниченности:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathcal{M} + \frac{1}{l+1} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{J}}{c} \right) &= \\ &= \begin{cases} \frac{2g}{a^3} Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{e\hbar}{mcr}, & r < a, \\ 0 & r > a. \end{cases} \end{aligned} \quad (16.101)$$

Здесь через g обозначен эффективный g -фактор для магнитных моментов частиц в атомной или ядерной системе, а $e\hbar/mc$ — удвоенное значение магнетона Бора для этих частиц. При этом сумма магнитных мультипольных моментов оказывается приближенно равной

$$M_{lm} + M'_{lm} \approx -\frac{2}{l+2} ea^l \frac{g\hbar}{mca}. \quad (16.102)$$

Из определения Q'_{lm} (16.94) следует, что

$$Q'_{lm} \sim g \frac{\hbar\omega}{mc^2} Q_{lm}. \quad (16.103)$$

Так как энергии радиационных переходов в атомах и ядрах всегда малы по сравнению с энергиями покоя частиц в этих системах, величины Q'_{lm} всегда пренебрежимо малы по сравнению с Q_{lm} .

Для электрических мультипольных переходов порядка l на основе оценки (16.100) получаем следующее выражение для вероятности перехода (16.98):

$$\frac{1}{\tau_E(l)} \approx \frac{e^2}{\hbar c} \frac{2\pi}{[(2l+1)!!]^2} \frac{l+1}{l} \left(\frac{3}{l+3}\right)^2 (ka)^{2l} \omega. \quad (16.104)$$

Вероятность перехода для магнитных мультиполей с точностью до множителей порядка единицы оказывается, согласно (16.102), равной

$$\frac{1}{\tau_M(l)} \approx \left(\frac{g\hbar}{mca}\right)^2 \frac{1}{\tau_E(l)}. \quad (16.105)$$

Из пропорциональности вероятности перехода (16.104) величине $(ka)^{2l}$ следует, что в длинноволновом пределе ($ka \ll 1$) вероятность перехода быстро убывает при фиксированной частоте с ростом порядка мультиполя. Это значит, что, вообще говоря, лишь низший отличный от нуля мультиполь существен в атомных и ядерных переходах. Отношение вероятностей соседних мультипольных переходов электрического или магнитного типа (при одинаковом значении частоты) равно

$$\frac{[\tau(l+1)]^{-1}}{[\tau(l)]^{-1}} \sim \frac{(ka)^2}{4l^2}, \quad (16.106)$$

где опущены численные множители порядка $(l+1)/l$.

В атомных системах радиационные процессы обуславливаются электронами. В качестве размеров источника можно принять величину $a \sim (a_0/Z_{эфф})$, где a_0 — боровский радиус, а $Z_{эфф}$ — эффективный заряд ядра ($Z_{эфф} \sim 1$ для переходов валентных электронов; $Z_{эфф} \leq Z$ для переходов, соответствующих рентгеновскому излучению). Для оценки величины ka заметим, что энергия атомного перехода, вообще говоря, имеет величину порядка

$$\hbar\omega \leq Z_{эфф}^2 \frac{e^2}{a_0}, \quad (16.107)$$

так что

$$ka \leq \frac{Z_{эфф}}{137}. \quad (16.108)$$

Как следует из (16.106), отношение вероятностей соседних мультипольных переходов равно $\sim (Z_{эфф}/137)^2$. Отношение вероятностей перехода для мультиполей магнитного и электрического типов можно оценить по (16.105). Для электронов g -фактор есть вели-

чина порядка единицы. При $a \approx a_0/Z_{\text{эфф}} = 137(\hbar/mcZ_{\text{эфф}})$ интенсивность магнитного мультипольного перехода порядка l в $(137/Z_{\text{эфф}})^2$ раз меньше интенсивности соответствующего электрического перехода. Можно заключить таким образом, что в атомах наиболее интенсивными должны быть дипольные электрические переходы, а электрические квадрупольные и магнитные дипольные переходы приблизительно в $(137/Z_{\text{эфф}})^2$ раз слабее. Лишь при рентгеновских переходах в тяжелых элементах может оказаться, что, кроме электрического мультиполя низшего порядка, следует учитывать и другие мультиполи.

Обратимся теперь к радиационным переходам в атомных ядрах. Так как энергии ядерных радиационных переходов меняются в широком диапазоне (от ~ 10 кэв до нескольких Мэв), значения ka перекрывают широкую область. Это значит, что вероятность перехода (или среднее время жизни) для мультиполя заданного порядка меняется в зависимости от выделяемой энергии чрезвычайно сильно, так что одной и той же вероятности соответствуют мультиполи различных порядков. Несмотря на это, при систематизации ядерных мультипольных переходов оказываются полезными оценочные формулы (16.104) и (16.105), так как при фиксированном значении выделяемой энергии вероятности переходов значительно различаются для разных мультиполей.

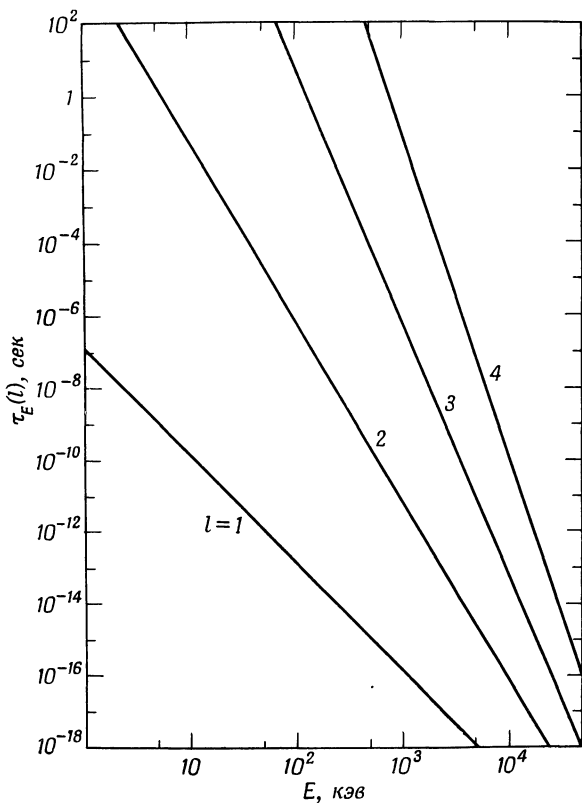
На фиг. 16.2 в логарифмическом масштабе представлены приближенные зависимости времени жизни от энергии для электрических мультипольных переходов, рассчитанные по (16.104), причем заряд e принят равным заряду протона и $a \approx 5,6 \cdot 10^{-13}$ см, что соответствует радиусу ядра с массовым числом $A \approx 100$. Мы видим, что хотя кривые и сближаются при высоких энергиях, тем не менее времена жизни для различных мультиполей при одинаковой энергии отличаются в среднем в 10^5 раз. Это означает, что, хотя действительные значения мультипольных моментов в отдельных переходах могут сильно отличаться от вычисленных по простым оценочным формулам, последние сохраняют свою силу при определении порядков мультиполей. Экспериментально полученные диаграммы зависимости времени жизни от энергии представляют собой широкие, но четко ограниченные полосы, лежащие вблизи изображенных на фиг. 16.2 прямых линий. Обычно приближенные соотношения (16.104) соответствуют нижней границе времени жизни, откуда следует, что (16.100) дает верхнюю границу для соответствующего мультипольного момента, однако для некоторых так называемых *вынужденных* электрических квадрупольных переходов время жизни может быть раз в 100 меньше, чем показано на фиг. 16.2.

Для сравнения магнитных и электрических мультиполей одного порядка можно воспользоваться соотношением (16.105). Эффективный g -фактор для нуклонов имеет величину порядка 3, что обусло-

влено их аномальным магнитным моментом. Поэтому для источника с размерами $a \sim R = 1,2A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ см получаем

$$\frac{1}{\tau_M(l)} \sim \frac{0,3}{A^{2/3}} \frac{1}{\tau_E(l)} ; \quad (16.109)$$

здесь численный множитель изменяется в пределах от $4 \cdot 10^{-2}$ до $0,8 \cdot 10^{-2}$ при $20 < A < 250$. Таким образом, можно ожидать,



Ф и г. 16.2. Зависимость времени жизни возбужденных ядерных состояний от энергии фотона для электрических мультипольных переходов при $l=1, 2, 3, 4$.

что электрические переходы для мультиполя данного порядка будут в 25—120 раз интенсивней соответствующих магнитных переходов. Для большинства мультиполей это утверждение верно. Однако при $l=1$ для ядер имеет место особый случай: из-за наличия больших сил притяжения, не зависящих от заряда, электрические

дипольные переходы оказываются подавленными (по крайней мере при малых энергиях). Тогда приближенная оценка (16.109) неприменима. Магнитные дипольные переходы в этом случае значительно более вероятны и столь же интенсивны, как и электрические дипольные переходы.

В § 3 были установлены правила отбора по четности и моменту количества движения; при этом отмечалось, что в переходах между двумя квантовыми состояниями могут осуществляться смешанные мультипольные переходы, соответствующие, например, магнитным мультиполям порядка l , $(l + 2)$, ... и электрическим мультиполям порядка $(l + 1)$, $(l + 3)$, ... В длинноволновом приближении следует учитывать лишь мультиполи низшего порядка для каждого из типов. Комбинируя формулы (16.105) и (16.106), можно вычислить отношение вероятностей переходов для электрического мультиполя порядка $(l + 1)$ и магнитного мультиполя порядка l (чаще всего встречается случай $l = 1$):

$$\frac{[\tau_E(l+1)]^{-1}}{[\tau_M(l)]^{-1}} \sim \left(\frac{A^{1/3} E}{200l} \right)^2, \quad (16.110)$$

где E — энергия фотона в $Mэв$. Для высокоэнергетических переходов в тяжелых элементах амплитуда электрического квадрупольного составляет $\sim 5\%$ от амплитуды магнитного диполя. Если, как это имеет место для редкоземельных и трансурановых элементов, эффективный квадрупольный момент приблизительно в 10 раз больше нормального, то электрический квадрупольный переход становится сравнимым с магнитным дипольным переходом.

Для смеси магнитного мультиполя порядка $(l + 1)$ и электрического мультиполя порядка l отношение вероятностей переходов равно

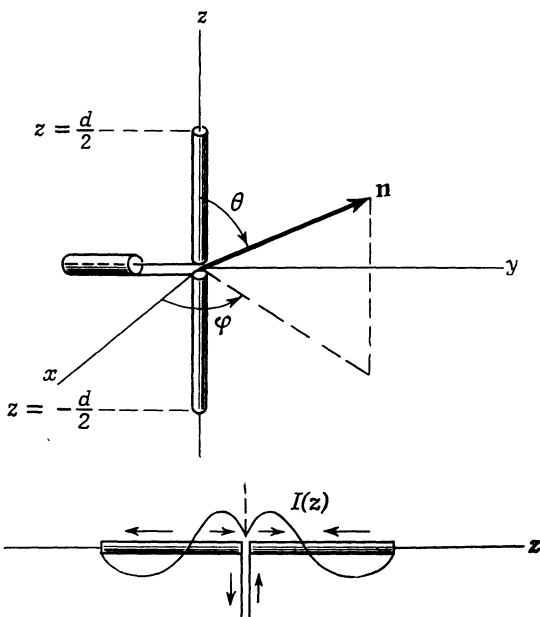
$$\frac{[\tau_M(l+1)]^{-1}}{[\tau_E(l)]^{-1}} \sim \left(\frac{E}{600l} \right)^2. \quad (16.111)$$

Очевидно, что даже для самых больших энергий переходов вероятность магнитного мультипольного перехода порядка $(l + 1)$ будет всегда много меньше вероятности электрического мультипольного перехода l -го порядка.

§ 7. Излучение линейной антенны с центральным возбуждением

В качестве иллюстрации применения метода разложения по мультиполям в случае, когда размеры источника сравнимы с длиной волны, рассмотрим излучение возбуждаемой в центре тонкой линейной антенны (фиг. 16.3). В гл. 9 уже были найдены поля при синусоидальном распределении тока. Это точное решение

послужит нам для сопоставления при оценке сходимости разложения по мультиполям. Пусть антенна, расположенная вдоль оси z на участке $-d/2 \leq z \leq d/2$, имеет в центре малый зазор, служащий для ее возбуждения. Распределение тока в антенне



Ф и г. 16.3. Линейная антенна с возбуждением в центре.

должно быть четной функцией z и обращаться в нуль на концах антенны. Не конкретизируя пока распределения тока, можно написать

$$I(z, t) = I(|z|) e^{-i\omega t}, \quad I\left(\frac{d}{2}\right) = 0. \quad (16.112)$$

Так как токи радиальные, то $(\mathbf{r} \times \mathbf{J}) = 0$. Кроме того, в этой задаче собственная намагничённость тоже отсутствует. Поэтому все коэффициенты возбуждения (т. е. мультипольные коэффициенты) полей магнитных мультиполей $a_M(l, m)$ оказываются равными нулю. Для определения коэффициентов возбуждения полей электрических мультиполей $a_E(l, m)$, согласно (16.91), необходимо знать распределение плотности токов и зарядов. Плотность тока \mathbf{J} соответствует радиальному току вдоль оси z . В сферических координатах для $r < d/2$ ее можно представить в виде

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_r \frac{I(r)}{2\pi r^2} [\delta(\cos \theta - 1) - \delta(\cos \theta + 1)], \quad (16.113)$$

где δ -функции обеспечивают наличие тока лишь на оси z . Распределение плотности зарядов можно найти из уравнения непрерывности (16.78):

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{i\omega} \frac{dI(r)}{dr} \left[\frac{\delta(\cos\theta - 1) - \delta(\cos\theta + 1)}{2\pi r^2} \right]. \quad (16.114)$$

Подставляя эти выражения для \mathbf{J} и ρ в (16.91), получаем

$$a_E(l, m) = \frac{2k^2}{\sqrt{l(l+1)}} \int_0^{d/2} dr \left\{ \frac{k}{c} r j_l(kr) I(r) - \frac{1}{\omega} \frac{dI}{dr} \frac{d}{dr} [r j_l(kr)] \right\} \times \\ \times \int d\Omega Y_{lm}^* [\delta(\cos\theta - 1) - \delta(\cos\theta + 1)]. \quad (16.115)$$

Выполним интегрирование в последнем интеграле

$$\int (\dots) d\Omega = 2\pi \delta_{m0} [Y_{l0}(0) - Y_{l0}(\pi)], \quad (16.116)$$

откуда следует, что возбуждаются лишь мультиполи с $m = 0$. Это, конечно, очевидно из цилиндрической симметрии антенны. Полиномы Лежандра являются четными функциями угла (относительно значения $\theta = \pi/2$) для четных l и нечетными — для нечетных l . Следовательно, возбуждаются лишь нечетные мультиполи, а последний интеграл равен

$$\int d\Omega = \sqrt{4\pi(2l+1)}, \quad l \text{ нечетно}, \quad m = 0. \quad (16.117)$$

После некоторых преобразований (16.115) можно записать в виде

$$a_E(l, 0) = \frac{2k}{c} \left[\frac{4\pi(2l+1)}{l(l+1)} \right]^{1/2} \int_0^{d/2} \left\{ -\frac{r}{dr} \left[r j_l(kr) \frac{dI}{dr} \right] + \right. \\ \left. + r j_l(kr) \left(\frac{d^2 I}{dr^2} + k^2 I \right) \right\} dr. \quad (16.118)$$

Для вычисления интеграла в (16.118) следует задаться распределением тока $I(z)$ вдоль антенны. Если бы не было излучения, то синусоидальному изменению тока во времени с частотой ω соответствовало бы синусоидальное пространственное изменение с волновым числом $k = \omega/c$. Наличие излучения несколько изменяет пространственное распределение тока. Для нахождения истинного пространственного распределения тока вдоль антенны следовало бы рассмотреть граничную задачу для суммарного поля антенны и излучения. Эта весьма сложная задача встает перед нами в тех случаях, когда необходимо иметь точное решение. К счастью, влияние излучения на распределение тока не очень существенно, и им можно пренебречь. Достаточно хороший результат получается

уже, если считать распределение тока синусоидальным. Поэтому мы примем, что

$$I(z) = I \sin \left(\frac{kd}{2} - k|z| \right), \quad (16.119)$$

где I — максимальное значение тока, а фаза выбрана так, чтобы ток обращался в нуль на краях антенны. При синусоидальном распределении тока второе слагаемое в подынтегральном выражении в (16.118) обращается в нуль. Остающаяся часть представляет собой полный дифференциал, так что при $I(z)$, описываемом соотношением (16.119), сразу получаем

$$a_E(l, 0) = \frac{4I}{cd} \left[\frac{4\pi(2l+1)}{l(l+1)} \right]^{1/2} \left(\frac{kd}{2} \right)^2 j_l \left(\frac{kd}{2} \right), \quad l \text{ нечетно.} \quad (16.120)$$

Поскольку мы хотим исследовать разложение по полям мультиполей при размерах источника, сравнимых с длиной волны, рассмотрим частные случаи полуволновой ($kd = \pi$) и полноволновой ($kd = 2\pi$) антенн. Для этих двух значений kd в приведенной ниже таблице даны значения коэффициента возбуждения для $l = 1$, а также относительные значения коэффициентов для $l = 3$ и $l = 5$.

kd	$a_E(1, 0)$	$a_E(3, 0)/a_E(1, 0)$	$a_E(5, 0)/a_E(1, 0)$
π	$4 \sqrt{6\pi} \frac{I}{cd}$	$4,95 \cdot 10^{-2}$	$1,02 \cdot 10^{-3}$
2π	$4\pi \sqrt{6\pi} \frac{I}{cd}$	$0,325$	$3,09 \cdot 10^{-2}$

Из приведенной таблицы следуют очевидные выводы: а) с ростом l коэффициенты быстро убывают по величине, б) коэффициенты, соответствующие большим значениям l , тем более существенны, чем больше размеры источника. Однако даже для полноволновой антенны, очевидно, вполне достаточно удержать в угловом распределении лишь моменты с $l = 1$ и $l = 3$ и наверняка достаточно учета лишь этих членов при нахождении полной мощности излучения (в выражение для которой входят квадраты коэффициентов).

Удерживая в угловом распределении лишь дипольный и октупольный моменты, получаем из выражения (16.70) для мощности излучения в единицу телесного угла

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c |a_E(1, 0)|^2}{16\pi k^2} \left| \text{LY}_{1,0} - \frac{a_E(3, 0)}{\sqrt{6} a_E(1, 0)} \text{LY}_{3,0} \right|^2. \quad (16.121)$$

С учетом соотношений

$$\begin{aligned} |LY_{1,0}|^2 &= \frac{3}{4\pi} \sin^2 \theta, \\ |LY_{3,0}|^2 &= \frac{63}{16\pi} \sin^2 \theta (5 \cos^2 \theta - 1)^2, \\ (LY_{1,0})^* \cdot (LY_{3,0}) &= \frac{3\sqrt{21}}{8\pi} \sin^2 \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned} \quad (16.122)$$

формула (16.121) может быть приведена к виду

$$\frac{dP}{d\Omega} = \lambda \frac{12I^2}{\pi^2 c} \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta \left| 1 - \sqrt{\frac{7}{8}} \frac{a_E(3,0)}{a_E(1,0)} (5 \cos^2 \theta - 1) \right|^2, \quad (16.123)$$

где коэффициент λ равен 1 для полуволновой и $\pi^2/4$ — для полноволновой антенн. Коэффициент при выражении $(5 \cos^2 \theta - 1)$ в (16.123) равен соответственно 0,0463 и 0,304 для полуволновой и полноволновой антенн.

Полученные в гл. 9 точные угловые распределения (для синусоидального возбуждающего тока) имеют вид

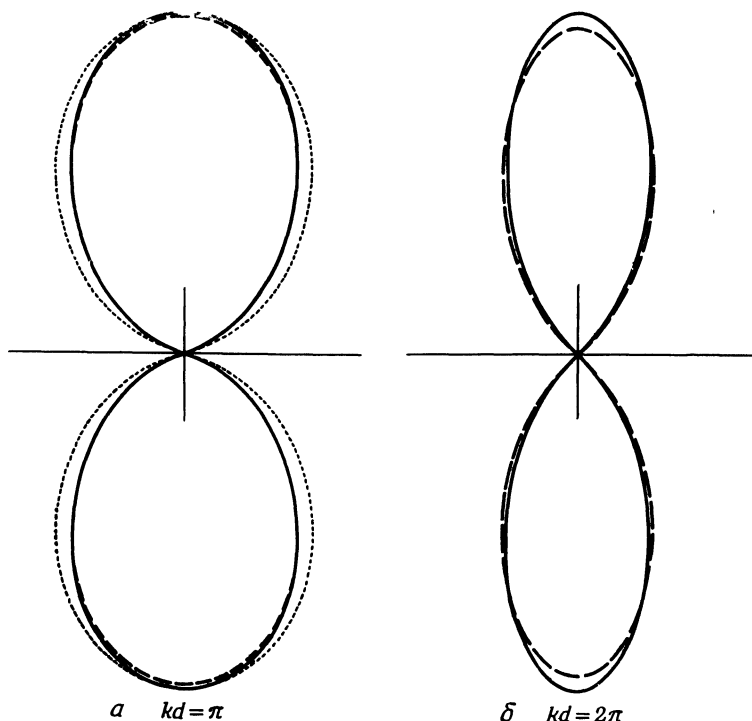
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I^2}{2\pi c} \begin{cases} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta}, & kd = \pi, \\ 4 \frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta}, & kd = 2\pi. \end{cases} \quad (16.124)$$

Результаты численного сравнения точного и приближенного угловых распределений представлены на фиг. 16.4. Сплошные кривые относятся к точным результатам, штриховые кривые соответствуют разложениям по мультиполям с учетом двух низших членов. Для полуволновой антенны (фиг. 16.4, а) пунктиром изображено также распределение в простом дипольном приближении, соответствующем учету лишь первого члена в (16.123). При $kd = \pi$ кривая, соответствующая мультипольному разложению с учетом двух членов, почти неотличима от точного результата. В этом случае даже простейшее (дипольное) приближение не слишком отличается от точного решения. Для полноволновой антенны (фиг. 16.4, б) точность дипольного приближения, очевидно, недостаточна. Однако учет двух членов разложения по мультиполям приводит уже к достаточно хорошему распределению, отличающемуся от точного меньше чем на 5% в области максимума излучения.

Полная излучаемая мощность, согласно (16.75), равна

$$P = \frac{c}{8\pi k^2} \sum_{l_{\text{неч}}} |a_E(l, 0)|^2. \quad (16.125)$$

Как следует из приведенной на стр. 619 таблицы, для полуволновой антенны излучаемая мощность в 1,00245 раза превышает мощность



Фиг. 16.4. Угловое распределение излучения полуволновой ($kd = \pi$) и полноволновой ($kd = 2\pi$) линейной антенны с возбуждением в центре.

Сплошные кривые — точное решение; штриховые кривые получены при учете двух членов разложения по мультиполям. Для полуволновой антенны показано также простое дипольное приближение (пунктирная кривая). Диаграмма излучения с учетом двух членов превосходно согласуется с точными результатом, особенно для случая $kd = \pi$.

излучения простого диполя, равную $12I^2/\pi^2 c$. Для полноволновой антенны мощность излучения в 1,114 раза больше, чем для соответствующего диполя, для которого она равна $3I^2/c$.

§ 8. Разложение векторной плоской волны по сферическим волнам

При исследовании рассеяния или поглощения электромагнитного излучения сферическими телами или вообще ограниченной системой полезно иметь разложение плоской электромагнитной волны по сферическим волнам.

Для скалярного поля $\psi(\mathbf{x})$, удовлетворяющего волновому уравнению, такое разложение можно получить, используя свойства ортогональности собственных сферических волновых функций $j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Можно также получить это разложение, исходя из разложения по сферическим волнам (16.22) функции Грина $e^{ikR}/4\pi R$. Пусть $|\mathbf{x}'| \rightarrow \infty$ в обеих частях выражения (16.22). Тогда в левой части равенства можно приближенно считать $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx r' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$, где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{x}' . В правой части равенства $r_> = r'$, а $r_< = r$. Функции $h_l^{(1)}(kr')$ можно заменить их асимптотическими выражениями (16.13). В результате получаем

$$\frac{e^{ikr'}}{4\pi r'} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} = ik \frac{e^{ikr'}}{kr'} \sum_{l, m} (-i)^{l+1} j_l(kr) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (16.126)$$

Сокращая множители $e^{ikr'}/r'$ в обеих частях равенства и беря комплексно сопряженное выражение, получаем искомое разложение плоской волны

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} i^l j_l(kr) \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta', \varphi'), \quad (16.127)$$

где \mathbf{k} — волновой вектор, имеющий в сферических координатах составляющие k, θ', φ' . Используя теорему сложения (3.62), можно представить это разложение в более компактной форме

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \gamma), \quad (16.128)$$

где γ — угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{x} . Последнюю формулу можно, воспользовавшись соотношением (3.57) для функции $P_l(\cos \gamma)$, переписать также в виде

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kr) Y_{l0}(\gamma). \quad (16.129)$$

Получим теперь эквивалентное разложение для падающей вдоль оси z плоской волны с круговой поляризацией:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) e^{ikz}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E} = \mp i\mathbf{E}. \end{aligned} \quad (16.130)$$

Так как амплитуда плоской волны везде конечна, то ее разложение по мультиполям (16.47) содержит лишь конечные радиальные функции $j_l(kr)$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{l, m} \left[a_{\pm}(l, m) j_l(kr) \mathbf{X}_{lm} + \frac{i}{k} b_{\pm}(l, m) \operatorname{rot} j_l(kr) \mathbf{X}_{lm} \right], \quad (16.131)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \sum_{l, m} \left[-\frac{i}{k} a_{\pm}(l, m) \operatorname{rot} j_l(kr) \mathbf{X}_{lm} + b_{\pm}(l, m) j_l(kr) \mathbf{X}_{lm} \right].$$

Для определения коэффициентов $a_{\pm}(l, m)$ и $b_{\pm}(l, m)$ воспользуемся ортогональностью векторных сферических гармоник \mathbf{X}_{lm} . Для удобства выпишем условия ортогональности (16.46) и некоторые другие полезные соотношения, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем:

$$\begin{aligned} \int [f_l(r) \mathbf{X}_{l'm'}]^* \cdot [g_l(r) \mathbf{X}_{lm}] d\Omega &= f_l^* g_l \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \\ \int [f_l(r) \mathbf{X}_{l'm'}]^* \cdot [\operatorname{rot} g_l(r) \mathbf{X}_{lm}] d\Omega &= 0, \\ \frac{1}{k^2} \int [\operatorname{rot} f_l(r) \mathbf{X}_{l'm'}]^* \cdot [\operatorname{rot} g_l(r) \mathbf{X}_{lm}] d\Omega &= \\ &= \delta_{ll'} \delta_{mm'} \left\{ f_l^* g_l + \frac{1}{k^2 r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r f_l^* \frac{\partial}{\partial r} (r g_l) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (16.132)$$

В этих соотношениях $f_l(r)$ и $g_l(r)$ — линейные комбинации сферических функций Бесселя, удовлетворяющих уравнению (16.5). Второе и третье соотношения могут быть доказаны с помощью операторного тождества (16.49), представления (16.37) и дифференциального уравнения (16.5) для радиальных функций.

Для определения коэффициентов $a_{\pm}(l, m)$ и $b_{\pm}(l, m)$ умножим обе стороны равенств (16.131) скалярно на \mathbf{X}_{lm}^* и проинтегрируем по углам. Используя при этом первые два соотношения (16.132), находим

$$a_{\pm}(l, m) j_l(kr) = \int \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (16.133)$$

и

$$b_{\pm}(l, m) j_l(kr) = \int \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (16.134)$$

Подставляя в (16.133) напряженность электрического поля в виде (16.130), получаем

$$a_{\pm}(l, m) j_l(kr) = \int \frac{(L_{\mp} Y_{lm})^*}{\sqrt{l(l+1)}} e^{ikhz} d\Omega, \quad (16.135)$$

где операторы L_{\pm} определяются формулами (16.26), а результат их применения — соотношениями (16.28). Таким образом,

$$a_{\pm}(l, m) j_l(kr) = \frac{\sqrt{(l \pm m)(l \mp m + 1)}}{\sqrt{l(l+1)}} \int Y_{l, m \mp 1}^* e^{ikhz} d\Omega. \quad (16.136)$$

Подставляя разложение (16.129) для функции e^{ikhz} и используя свойство ортогональности функций Y_{lm} , окончательно находим

$$a_{\pm}(l, m) = i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \delta_{m, \pm 1}. \quad (16.137)$$

Как следует из формул (16.134) и (16.130),

$$b_{\pm}(l, m) = \mp i a_{\pm}(l, m). \quad (16.138)$$

В итоге приходим к следующему разложению плоской волны (16.130) по мультиполям:

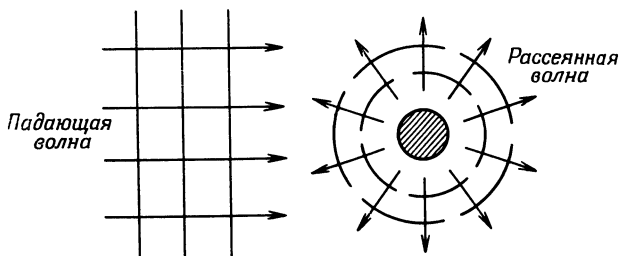
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[j_l(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \pm \frac{1}{k} \text{rot } j_l(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \right], \quad (16.139)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[-\frac{i}{k} \text{rot } j_l(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \mp i j_l(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \right].$$

Для рассматриваемой волны с круговой поляризацией значения $m = \pm 1$ можно, очевидно, интерпретировать как приходящуюся на один фотон составляющую момента количества движения в направлении распространения волны. Это обстоятельство уже было ранее установлено в задаче 6.12.

§ 9. Рассеяние электромагнитных волн на проводящей сфере

При падении плоской электромагнитной волны на сферическое препятствие (фиг. 16.5) она рассеивается, так что вдали от рассеивающего тела поле представляется суммой плоской волны и расходящихся сферических волн. Препятствие может не только рассеивать, но и поглощать. В этом случае полный поток энергии от препятствия будет меньше полного потока по направлению к нему; разность потоков равна поглощаемой энергии. Мы рассмотрим простейший пример рассеяния на идеально проводящей сфере радиусом a .



Ф и г. 16.5. Рассеяние плоской электромагнитной волны на препятствии.

Представим электромагнитные поля вне сферы в виде суммы падающей и рассеянных волн:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \mathbf{B}_{\text{пад}} + \mathbf{B}_{\text{расс}}, \end{aligned} \quad (16.140)$$

где $\mathbf{E}_{\text{пад}}$ и $\mathbf{B}_{\text{пад}}$ описываются выражениями (16.139). Так как в бесконечности поля рассеяния представляют собой расходящиеся волны, их разложение должно иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{расс}} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[\alpha_{\pm}(l) h_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \pm \right. \\ \left. \pm \frac{\beta_{\pm}(l)}{k} \text{rot } h_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \right], \end{aligned} \quad (16.141)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{расс}} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[-\frac{i\alpha_{\pm}(l)}{k} \text{rot } h_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \mp \right. \\ \left. \mp i\beta_{\pm}(l) h_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \right]. \end{aligned}$$

Коэффициенты разложения $\alpha_{\pm}(l)$ и $\beta_{\pm}(l)$ определяются граничными условиями на поверхности сферы.

Для идеально проводящей сферы граничные условия на поверхности $r = a$ имеют вид

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (16.142)$$

Для применения этих граничных условий следует уточнить характер векторных слагаемых в разложениях (16.141). Как известно, векторы \mathbf{X}_{lm} перпендикулярны радиусу-вектору. Что касается

векторных слагаемых другого типа, то они пропорциональны

$$\operatorname{rot} f_l(r) \mathbf{X}_{lm} = \frac{\operatorname{in} \sqrt{l(l+1)}}{r} f_l(r) Y_{lm} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r f_l(r)] \mathbf{n} \times \mathbf{X}_{lm}, \quad (16.143)$$

где $f_l(r)$ — произвольная сферическая функция Бесселя, удовлетворяющая уравнению (16.5). Накладывая на *полное* поле (16.140) граничные условия (16.142), находим условия, которым должны удовлетворять коэффициенты $\alpha_{\pm}(l)$ и $\beta_{\pm}(l)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha_{\pm}(l) h_l^{(1)}(ka) + j_l(ka) &= 0, \\ \left\{ \frac{1}{2} \beta_{\pm}(l) \frac{\partial}{\partial r} [r h_l^{(1)}(kr)] + \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(kr)] \right\}_{r=a} &= 0. \end{aligned} \quad (16.144)$$

Заметим, что для обоих типов круговой поляризации коэффициенты одинаковы. Учитывая равенство $2j_l(kr) = h_l^{(1)}(kr) + h_l^{(2)}(kr)$, можно записать коэффициенты разложения в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm}(l) &= - \left[\frac{h_l^{(2)}(ka)}{h_l^{(1)}(ka)} + 1 \right], \\ \beta_{\pm}(l) &= - \left\{ \frac{(d/dr) [r h_l^{(2)}(kr)]}{(d/dr) [r h_l^{(1)}(kr)]} \Big|_{r=a} + 1 \right\}. \end{aligned} \quad (16.145)$$

Входящие сюда отношения представляют собой частные двух комплексно сопряженных величин и, следовательно, являются комплексными числами, равными по модулю единице. Удобно ввести два угла, называемые обычно *фазовыми сдвигами*, определив их равенствами

$$\begin{aligned} e^{2i\delta_l} &= - \frac{h_l^{(2)}(ka)}{h_l^{(1)}(ka)}, \\ e^{2i\delta'_l} &= - \frac{(d/dr) [r h_l^{(2)}(kr)]}{(d/dr) [r h_l^{(1)}(kr)]} \Big|_{r=a} \end{aligned} \quad (16.146)$$

или эквивалентными соотношениями

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_l &= \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}, \\ \operatorname{tg} \delta'_l &= \frac{(d/dr) [r j_l(kr)]}{(d/dr) [r n_l(kr)]} \Big|_{r=a}. \end{aligned} \quad (16.147)$$

Коэффициенты разложения принимают при этом вид

$$\alpha_{\pm}(l) = (e^{2i\delta_l} - 1), \quad \beta_{\pm}(l) = (e^{2i\delta'_l} - 1). \quad (16.148)$$

Предельные значения введенных фазовых сдвигов при $ka \ll 1$ и $ka \gg 1$ можно найти с помощью приближенных выражений

(16.12) и асимптотических выражений (16.13):

$$ka \ll 1$$

$$\begin{aligned} \delta_l &\approx -\frac{(ka)^{2l+1}}{(2l+1)[(2l-1)!!]^2}, \\ \delta'_l &\approx -\left(\frac{l+1}{l}\right)\delta_l; \end{aligned} \quad (16.149)$$

$$ka \gg 1$$

$$\begin{aligned} \delta_l &\approx \frac{l\pi}{2} - ka, \\ \delta'_l &\approx (l+1)\frac{\pi}{2} - ka. \end{aligned} \quad (16.150)$$

Коэффициент разложения $\alpha(l)$ и фазовый сдвиг δ_l можно назвать *магнитными* параметрами, так как они относятся к магнитным мультипольным полям в разложениях (16.141). Аналогично $\beta(l)$ и δ'_l можно назвать *электрическими* параметрами.

Магнитное поле рассеянной волны с учетом выражений (16.148) для коэффициентов преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{расс}} = \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[\frac{e^{i\delta_l} \sin \delta_l}{k} \text{rot } h_l^{(1)} \mathbf{X}_{l, \pm 1} \pm \right. \\ \left. \pm e^{i\delta'_l} \sin \delta'_l h_l^{(1)} \mathbf{X}_{l, \pm 1} \right]. \end{aligned} \quad (16.151)$$

Асимптотически при $kr \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{расс}} \approx \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} [e^{i\delta_l} \sin \delta_l (\mathbf{n} \times \mathbf{X}_{l, \pm 1}) \mp \\ \mp e^{i\delta'_l} \sin \delta'_l \mathbf{X}_{l, \pm 1}]. \end{aligned} \quad (16.152)$$

Рассеянное поле (16.152) обладает в общем случае эллиптической поляризацией. Лишь в том случае, когда δ_l и δ'_l равны между собой, излучение будет поляризовано по кругу. Таким образом, при падении линейно поляризованного излучения рассеянное излучение будет поляризовано эллиптически. Если же падающее излучение не поляризовано, то рассеянное излучение будет все равно обладать частичной поляризацией, зависящей от угла наблюдения.

При рассмотрении интенсивности рассеянного поля удобно пользоваться понятием сечения рассеяния. Оно уже было определено ранее соотношением (14.101). Мощность, рассеиваемая в единицу телесного угла, равна

$$\frac{dP_{\text{расс}}}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} |r\mathbf{V}_{\text{расс}}|^2, \quad (16.153)$$

а поток энергии падающей волны

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{E}_{\text{пад}} \times \mathbf{B}_{\text{пад}}^*] = \frac{c}{4\pi} \mathbf{e}_z. \quad (16.154)$$

Следовательно, для сечения рассеяния получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi}{k^2} \left| \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{2l+1} [e^{i\delta_l} \sin \delta_l (\mathbf{n} \times \mathbf{X}_{l, \pm 1}) \mp ie^{i\delta'_l} \sin \delta'_l \mathbf{X}_{l, \pm 1}] \right|^2. \quad (16.155)$$

Найденная угловая зависимость излучения весьма сложна и упрощается лишь в предельном случае больших длин волн (см. ниже). Однако полное сечение рассеяния можно вычислить непосредственно. Как видно из второго соотношения (16.132) и формулы (16.143), перекрестные члены в (16.155) при интегрировании по углам обращаются в нуль. В результате для полного сечения рассеяния нетрудно получить выражение

$$\sigma = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) (\sin^2 \delta_l + \sin^2 \delta'_l). \quad (16.156)$$

Мы видим, что в полном сечении рассеяния поля электрических и магнитных мультиполей складываются некогерентным образом.

В длинноволновом пределе ($ka \ll 1$) выражение для сечения рассеяния становится относительно простым, так как фазовые сдвиги (16.149) быстро убывают с ростом l . Сохраняя лишь члены разложения с $l = 1$, находим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{2\pi}{3} a^2 (ka)^4 |\mathbf{n} \times \mathbf{X}_{1, \pm 1} \pm 2i\mathbf{X}_{1, \pm 1}|^2. \quad (16.157)$$

Согласно таблице на стр. 605,

$$|\mathbf{n} \times \mathbf{X}_{1, \pm 1}|^2 = |\mathbf{X}_{1, \pm 1}|^2 = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta). \quad (16.158)$$

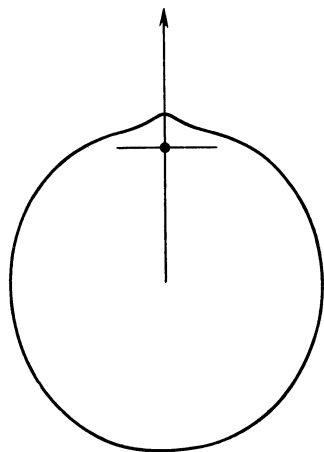
Перекрестные произведения также легко могут быть вычислены

$$\operatorname{Re} [\pm i (\mathbf{n} \times \mathbf{X}_{1, \pm 1})^* \cdot \mathbf{X}_{1, \pm 1}] = -\frac{3}{8\pi} \cos \theta. \quad (16.159)$$

Окончательно для дифференциального сечения рассеяния в длинноволновом приближении имеем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx a^2 (ka)^4 \left[\frac{5}{8} (1 + \cos^2 \theta) - \cos \theta \right]. \quad (16.160)$$

Это выражение не зависит от типа поляризации падающего поля. Угловое распределение рассеянного излучения показано на фиг. 16.6. Рассеяние происходит главным образом в направлении, противоположном направлению падающей волны; заметная асимметрия



Ф и г. 16.6. Угловое распределение излучения, рассеянного на идеально проводящей сфере, в длинноволновом приближении ($ka \ll 1$).

относительно нормали к направлению падения обусловлена интерференцией полей электрического и магнитного дипольных моментов.

Полное сечение рассеяния в приближении больших длин волн оказывается равным

$$\sigma = \frac{10\pi}{3} a^2 (ka)^4. \quad (16.161)$$

Этот известный результат впервые был получен Дебаем и Ми (1908—1909 гг.). Зависимость сечения рассеяния от четвертой степени частоты, известная как закон рассеяния Рэлея, характерна для всех систем, обладающих дипольным моментом.

§ 10. Решение граничных задач с помощью разложений по мультиполям

Рассеяние электромагнитного излучения на проводящей сфере является примером решения граничной задачи с помощью разложений по мультиполям. В качестве других примеров можно рассмотреть свободные колебания проводящей сферы, сферической резонансной полости и рассеяние на диэлектрической сфере. Наличие в проводниках омических потерь добавляет к списку задач определение величины добротности резонатора Q и сечения поглощения. Общие методы рассмотрения этих задач аналогичны описанным в § 9 и в гл. 8. Эти вопросы отнесены нами к задачам.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Подробное рассмотрение теории векторных сферических гармоник и мультипольных векторных полей можно найти в книгах Блатта и Вайскопфа [13], Морса и Фешбаха [77], гл. 13, § 3. Приложения теории мультипольного излучения к ядерным задачам рассматриваются в книге Блатта и Вайскопфа [13], гл. 12, а также в главах, написанных Машковским (гл. 13) и Гольдхабером и Саньяром (гл. 16) в книге [94].

В списке литературы к гл. 9 было указано большое число работ по теории антенн. Однако ни в одной из них не приводится строгого рассмотрения разложения по мультиполям. Рассмотрение рассеяния электромагнитного излучения на идеально проводящей сфере кратко проведено в книгах Морса и Фешбаха [77] и Пановского и Филипс [78], гл. 12, § 9.

Гораздо более детальное рассмотрение при произвольных диэлектрических и проводящих свойствах сферы содержится в книгах Борна и Вольфа [16], гл. 13, § 5, и Стрэттона [106], гл. 9, § 25.

Математические сведения о сферических функциях Бесселя можно найти в книге Морса и Фешбаха [77].

ЗАДАЧИ

16.1. Три заряда расположены вдоль оси z , причем заряд $2q$ находится в начале координат, а заряды $-q$ — при $z = \pm a \cos \omega t$. Определить низшие отличные от нуля мультипольные моменты, угловое распределение излучения и полную излучаемую мощность. Считать, что $ka \ll 1$.

16.2. Тело, ограниченное весьма близкой к сфере поверхностью, описываемой уравнением

$$R(\theta) = R_0 [1 + \beta P_2(\cos \theta)],$$

заряжено с постоянной объемной плотностью, причем полный заряд равен Q . Малый параметр β гармонически меняется во времени с частотой ω . Это соответствует поверхностным волнам на сфере. Удерживая лишь низшие члены разложения по β , вычислить в длинноволновом приближении отличные от нуля мультипольные моменты, угловое распределение излучения и полную излучаемую мощность.

16.3. В задаче 16.2 заменить постоянную плотность распределения заряда постоянной плотностью намагниченности, считая, что намагниченность параллельна оси z и полный магнитный момент тела равен M . В том же приближении вычислить отличные от нуля мультипольные моменты, угловое распределение излучения и полную излучаемую мощность.

16.4. Излучающая антенна имеет форму расположенного в плоскости xy кругового витка радиусом a с центром в начале координат. Ток в проводе меняется по закону

$$I = I_0 \cos \omega t = \operatorname{Re} I_0 e^{-i\omega t}.$$

а) Найти выражения для векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} в волновой зоне, не налагая ограничений на величину ka . Определить мощность, излучаемую в единицу телесного угла.

б) Какой из отличных от нуля мультипольных моментов имеет наименьший порядок (Q_{lm} или M_{lm})? Вычислить этот момент в приближении $ka \ll 1$.

16.5. Два электрических диполя с дипольными моментами p расположены на расстоянии $2a$ друг от друга; оси обоих диполей параллельны друг

другу, но дипольные моменты ориентированы в противоположных направлениях. Диполи вращаются с постоянной угловой частотой ω вокруг параллельной им оси, расположенной посредине между ними ($\omega \ll c/a$).

а) Вычислить составляющие квадрупольного момента.

б) Показать, что угловое распределение излучения определяется функцией $(1 - 3 \cos^2 \theta + 4 \cos^4 \theta)$, а полная излучаемая мощность равна

$$P = \frac{2cp^2a^2}{5} \left(\frac{\omega}{c} \right)^6.$$

16.6. В длинноволновом приближении вычислить отличные от нуля электрические мультипольные моменты для распределения плотности зарядов

$$\rho = Cr^3 e^{-5r/6} Y_{1,1}(\theta, \varphi) Y_{2,0}(\theta, \varphi) e^{-i\omega_0 t}$$

и определить угловое распределение излучения и полную излучаемую мощность для каждого мультиполя. Приведенное распределение заряда соответствует переходу между состояниями $n = 3, l = 2$ ($3d$) и $n = 2, l = 1$ ($2p$) в атоме водорода.

16.7. Поля поперечных магнитных волн, распространяющихся в цилиндрическом волноводе, имеющем круглое сечение радиусом R , описываются формулами

$$\begin{aligned} E_z &= J_m(\gamma r) e^{im\varphi} e^{i\beta z - i\omega t}, & H_z &= 0, \\ E_\varphi &= -\frac{m\beta}{\gamma^2} \frac{E_z}{r}, & H_r &= -\frac{k}{\beta} E_\varphi, \\ E_r &= \frac{i\beta}{\gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial r}, & H_\varphi &= \frac{k}{\beta} E_r, \end{aligned}$$

где m — индекс, определяющий зависимость от угла, β — постоянная распространения, $\gamma^2 = k^2 - \beta^2$ ($k = \omega/c$), причем γ таково, что $J_m(\gamma R) = 0$. Вычислить отношение z -составляющей электромагнитного момента количества движения к энергии поля. При выводе удобно произвести несколько раз интегрирование по частям и использовать дифференциальное уравнение для составляющей поля E_z .

16.8. Сферическая полость радиусом a в проводящей среде может служить электромагнитным резонатором.

а) В случае бесконечной проводимости стенок найти трансцендентные уравнения для собственных частот ω_{ln} волн ТЕ- и ТМ-типов в резонаторе.

б) Определить численные значения длин волн λ_{ln} (отнесенных к радиусу a) для первых четырех волн ТЕ- и ТМ-типов.

в) Найти явные выражения для электрического и магнитного полей в резонаторе, соответствующих низшим волнам ТЕ- и ТМ-типов.

16.9. Проводимость немагнитных стенок полости, описанной в задаче 16.8, велика, но конечна. Считая толщину скин-слоя δ малой по сравнению с радиусом полости a , показать, что определяемая соотношением (8.82) добротность Q резонатора равна

$$Q = \frac{a}{2\pi\delta} \quad \text{для всех волн ТЕ-типа}$$

и

$$Q = \frac{a}{2\pi\delta} \left[1 - \frac{l(l+1)}{x_{ln}^2} \right] \quad \text{для волн ТМ-типа,}$$

где

$$x_{ln} = (a/c) \omega_{ln} \quad \text{для ТМ-волн.}$$

16.10. Рассмотреть собственные колебания идеально проводящей твердой сферы радиусом a в свободном пространстве.

а) Определить дисперсионные уравнения для собственных частот колебаний ТЕ- и ТМ-типов. Показать, что при временной зависимости вида $e^{-i\omega t}$ корни ω всегда имеют отрицательную мнимую часть.

б) Вычислить собственные частоты для волн ТЕ- и ТМ-типов с $l = 1$ и $l = 2$. Составить таблицу отношений длин волн (определяемых действительной частью собственных частот) к радиусу a и отношений декрементов затухания (определяемых как время, в течение которого энергия убывает в e раз от своего начального значения) к времени установления (a/c) для каждого типа волн.

16.11. Плоская электромагнитная волна частотой $\omega = ck$ с круговой поляризацией падает на немагнитную проводящую сферу радиусом a .

а) В длинноволновом приближении ($ka \ll 1$) получить выражения для электрического и магнитного полей вблизи поверхности и на поверхности сферы, считая ее идеально проводящей.

б) Используя методы, развитые в гл. 8, вычислить долю мощности падающей волны, поглощаемую сферой, считая проводимость большой, но конечной. Определить зависимость сечения поглощения от волнового числа k , радиуса сферы a и толщины скин-слоя δ . При расчете считать $ka \ll 1$.

16.12. Рассмотреть рассеяние плоской электромагнитной волны на немагнитной сфере радиусом a с диэлектрической проницаемостью ϵ .

а) Определив поля внутри сферы и сшивая их с полным полем (сумма падающего и рассеянного полей) вне сферы, вычислить коэффициенты разложения рассеянной волны по мультиполям. Найти сдвиги фаз для рассматриваемой задачи.

б) Рассмотреть длинноволновое приближение ($ka \ll 1$) и получить явные выражения для дифференциального и полного сечений рассеяния. Построить угловое распределение излучения в случае $\epsilon = 2$.

в) Сравнить результаты, получающиеся в предельном случае $\epsilon \rightarrow \infty$, с соответствующими результатами для идеально проводящей сферы.

ВЛИЯНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ЧАСТИЦЫ НА ЕЕ ДВИЖЕНИЕ. СОБСТВЕННОЕ ПОЛЕ ЧАСТИЦЫ

§ 1. Вводные замечания

Рассмотренные в предыдущих главах электродинамические задачи можно разделить на два класса. В одних задачах были известны источники, т. е. заряды и токи, и вычислялись результирующие электромагнитные поля, в других — задавалось внешнее электромагнитное поле и определялось движение заряженных частиц или токов в нем. Теория антенн и излучение мультипольных источников служат примерами задач первого типа, а исследование движения зарядов в электрических и магнитных полях и явлений, связанных с потерями энергии, — пример задач второго типа. Изредка, как, например, при рассмотрении тормозного излучения, задача носила комбинированный характер. Но и здесь рассмотрение проводилось по этапам: сначала определялось движение заряженной частицы в заданном внешнем поле (без учета излучения), а затем вычислялось излучение, возникающее при ее движении по полученной траектории в приближении заданного распределения источников.

Очевидно, что подобный подход к решению проблем электродинамики справедлив лишь приближенно. Ускоренное движение заряженных частиц во внешних силовых полях неизбежно сопровождается излучением. Возбуждаемое излучение приводит к потере энергии, импульса и момента количества движения и поэтому должно влиять на последующее движение заряженных частиц. Следовательно, само движение источников излучения определяется в какой-то мере характером возникающего излучения. Корректная постановка задачи должна включать учет реакции излучения¹⁾ на движение источников.

¹⁾ Здесь и далее автор имеет в виду влияние поля, излучаемого частицей, на саму частицу. Существует большой круг задач, также не сводимых к указанным двум классам, где существенна реакция частиц на суммарное поле, создаваемое группой частиц (например, в клистродах или лампах бегущей волны). Трудности, встречающиеся в решении задач такого типа, носят лишь чисто математический характер. В настоящей главе (да и во всей книге) задачи этого типа не рассматриваются.— *Прим. ред.*

Почему же мы до сих пор не учитывали в нашем рассмотрении этот факт? И почему решения многих рассмотренных нами задач, которые были получены на первый взгляд некорректным путем, так хорошо согласуются с опытом? Частичный ответ на первый вопрос заключен уже во втором вопросе. Существует целый ряд электродинамических задач, которые можно с пренебрежимо малой ошибкой отнести к одному из двух классов, описанных выше. При их решении можно обойтись без дополнительного излишнего усложнения, связанного с учетом реакции излучения. Добавим еще, что полностью удовлетворительной трактовки эффектов реакции излучения не существует. Трудности этой проблемы затрагивают наиболее фундаментальные вопросы физики, связанные с природой элементарных частиц. Хотя частные решения, справедливые в определенных ограниченных пределах, и могут быть получены, основная проблема остается нерешенной. Можно было надеяться, что переход от классического рассмотрения к квантовомеханическому позволит снять эти трудности. Физики еще не потеряли надежды на то, что это в конечном счете произойдет, хотя в настоящее время квантовомеханическое рассмотрение наталкивается даже на более серьезные трудности, чем соответствующее классическое. Значительный успех был достигнут сравнительно недавно (1948—1950 гг.), когда с помощью разумного использования понятий лоренц-ковариантности и калибровочной инвариантности удалось обойти указанные трудности в квантовой электродинамике. Это дало возможность рассчитывать весьма малые радиационные эффекты с исключительно высокой точностью в полном согласии с экспериментом. Однако фундаментальные трудности теории все еще остаются. В настоящей главе будет рассматриваться лишь классическая теория, но по ходу изложения мы укажем и ряд квантовомеханических аналогий.

Ответ на вопрос, почему во многих проблемах можно, по-видимому, пренебрегать реакцией излучения, очевидно, заключается в том, что влияние этих эффектов незначительно. Чтобы иметь возможность хотя бы качественно судить о том, когда это действительно имеет место, и производить полуколичественную оценку области значений параметров, в которой эффекты излучения несут существенны, необходим простой критерий. Один из таких критериев можно получить из энергетических соображений. Если частица с зарядом e испытывает во внешнем поле ускорение порядка a , то энергия, излученная за время T по формуле Лармора (14.22), равна по порядку величины

$$E_{\text{изл}} \sim \frac{2e^2 a^2 T}{3c^3}. \quad (17.1)$$

Если эти потери энергии на излучение малы по сравнению с характерной для рассматриваемой задачи энергией E_0 , то можно ожи-

дать, что радиационные эффекты окажутся несущественными. Однако если $E_{\text{изл}} \gtrsim E_0$, то реакция излучения будет играть значительную роль. Таким образом, критерий, определяющий границу, начиная с которой уже сказываются радиационные эффекты, может быть выражен соотношением

$$E_{\text{изл}} \sim E_0. \quad (17.2)$$

Определение характерной энергии E_0 требует некоторой осторожности. Будем различать два случая: 1) частица первоначально покоится и подвергается действию приложенной силы лишь в течение конечного интервала времени T ; 2) частица непрерывно ускоряется, как, например, при квазипериодическом движении с некоторой характерной частотой ω_0 . Характерной энергией для первоначально покоившейся частицы является ее кинетическая энергия в конце периода ускорения, так что

$$E_0 \sim m (aT)^2.$$

Критерий (17.2) в этом случае принимает вид

$$\frac{2}{3} \frac{e^2 a^2 T}{c^3} \sim m a^2 T^2,$$

или

$$T \sim \frac{2}{3} \frac{e^2}{m c^3}.$$

Здесь полезно ввести характерное время

$$\tau = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m c^3}. \quad (17.3)$$

Таким образом, для интервалов времени T , больших по сравнению с τ , радиационные эффекты несущественны. Лишь в том случае, когда сила прикладывается столь внезапно и действует в течение такого короткого времени, что $T \sim \tau$, реакция излучения существенно влияет на движение. Полезно заметить, что наибольшим характерным временем τ из заряженных частиц обладают электроны: для них $\tau = 6,26 \cdot 10^{-24}$ сек. За это время свет проходит расстояние порядка 10^{-13} см. Лишь для явлений, содержащих такие расстояния или интервалы времени, радиационные эффекты могут играть серьезную роль.

Если заряженная частица совершает квазипериодическое движение с амплитудой d и характерной частотой ω_0 , то в качестве энергии E_0 можно принять механическую энергию движения:

$$E_0 \sim m \omega_0^2 d^2.$$

Для такого движения характерная величина ускорения $a \sim \omega_0^2 d$, а интервал времени $T \sim \omega_0^{-1}$. Следовательно, критерий (17.2) записывается в виде

$$\frac{2e^2\omega_0^4 d^2}{3c^3\omega_0} \sim m\omega_0^2 d^2,$$

или

$$\omega_0\tau \sim 1, \quad (17.4)$$

где τ описывается соотношением (17.3). Так как величина ω_0^{-1} определяет характерный период механического движения, мы вновь приходим к тому же результату, что для интервалов времени, больших по сравнению с характерным временем τ (17.3), излучение практически не будет влиять на движение.

Как видно из рассмотренных двух примеров, можно ожидать существенного влияния излучения на движение заряженной частицы, если внешние силы таковы, что движение заметно изменяется за время порядка τ или на расстояниях порядка ct . Таков общий критерий в классической электродинамике. При более плавном движении влияние излучения достаточно мало и им можно пренебречь, если рассматриваемый интервал времени не очень велик. Накапливающиеся эффекты, проявляющиеся при рассмотрении движения в течение длительного времени, могут быть учтены приближенно, как будет показано ниже.

§ 2. Определение силы реакции излучения из закона сохранения энергии

Возникает вопрос, как включить эффекты реакции излучения в уравнения движения заряженной частицы. Мы начнем с простых и не очень строгих рассуждений, основанных на законе сохранения энергии для нерелятивистской заряженной частицы. Более строгий вывод и учет релятивистских эффектов будут приведены в последующих параграфах.

Если не учитывать излучения, то движение заряженной частицы с массой m и зарядом e под действием внешней силы $F_{\text{внеш}}$ описывается уравнением движения Ньютона

$$m\dot{\mathbf{v}} = F_{\text{внеш}}. \quad (17.5)$$

Так как частица ускоряется, она излучает, причем мощность излучения определяется формулой Лармора (14.22):

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\mathbf{v}}^2. \quad (17.6)$$

Чтобы учесть потери энергии на излучение и их влияние на движение частицы, дополним уравнение Ньютона (17.5) силой реакции излучения $\mathbf{F}_{\text{изл}}$

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{внеш}} + \mathbf{F}_{\text{изл}}. \quad (17.7)$$

Хотя сила $\mathbf{F}_{\text{изл}}$ пока еще не определена, мы можем сформулировать некоторые требования, которым она «должна» удовлетворять. Сила $\mathbf{F}_{\text{изл}}$ «должна»

1) обращаться в нуль при $\dot{\mathbf{v}} = 0$, так как в этом случае излучение отсутствует;

2) быть пропорциональной e^2 , так как а) мощность излучения пропорциональна e^2 и б) действие излучения не должно зависеть от знака заряда;

3) зависеть от характерного времени τ (17.3), так как, по-видимому, это единственный важный параметр.

Мы найдем вид функции $\mathbf{F}_{\text{изл}}$, если потребуем, чтобы работа этой силы, совершаемая в течение интервала времени $t_1 < t < t_2$, была равна излученной за это время энергии, взятой с обратным знаком. При этом, по крайней мере в целом за интервал времени (t_1, t_2) , будет выполняться закон сохранения энергии. Учитывая соотношение (17.6), можно записать требуемое условие в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{изл}} \cdot \mathbf{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} dt.$$

Беря второй интеграл по частям, получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{изл}} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Если движение периодическое или такое, что скалярное произведение $(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})$ равно нулю при $t = t_1$ и $t = t_2$, то последнее соотношение можно переписать в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F}_{\text{изл}} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}} \right) \cdot \mathbf{v} dt = 0.$$

Таким образом, в качестве силы реакции излучения можно принять величину

$$\mathbf{F}_{\text{изл}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}} = m\tau\ddot{\mathbf{v}}. \quad (17.8)$$

Модифицированное уравнение движения при этом принимает вид

$$m(\dot{\mathbf{v}} - \tau \ddot{\mathbf{v}}) = \mathbf{F}_{\text{внеш}}. \quad (17.9)$$

Уравнение (17.9) называют иногда *уравнением движения Абра-гама — Лоренца*. Оно учитывает реакцию излучения в некотором приближении и в среднем по времени. Полученное уравнение не вполне удовлетворительно с той точки зрения, что оно не первого, а второго порядка по времени, и поэтому приводит к противоречиям с известными требованиями к динамическому уравнению движения. Это противоречие проявляется прежде всего в наличии так называемых «самоускоряющихся» решений. При отсутствии внешней силы уравнение (17.9), очевидно, имеет два возможных решения:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{cases} 0, \\ \mathbf{a}e^{t/\tau}, \end{cases} \quad (17.10)$$

где \mathbf{a} — ускорение в момент $t = 0$. Лишь первое решение имеет смысл. Как видно из нашего вывода, второе решение неприемлемо, поскольку $(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) \neq 0$ для моментов времени t_1 и t_2 . Полученное уравнение, очевидно, применимо лишь в той области, где реакция излучения является малой поправкой. В этом случае ее можно рассматривать как возмущение, приводящее к медленным или малым изменениям состояния движения частицы. Трудности, связанные с наличием «самоускоряющихся» решений, можно обойти, заменив уравнение (17.9) интегро-дифференциальным уравнением (см. § 7).

В качестве примера применения уравнения (17.9) для учета малых радиационных эффектов рассмотрим движение частицы в консервативном центральном поле сил притяжения. В отсутствие реакции излучения энергия и момент количества движения частицы сохраняются и полностью определяют движение. Вследствие испускания излучения эти величины изменяются. Если ускорения не слишком велики, то значительное изменение энергии и импульса может произойти лишь за интервалы времени, существенно превышающие характерный период движения. Поэтому мгновенное движение будет фактически таким же, как и в отсутствие излучения. Медленные же изменения можно учесть, производя усреднение по невозмущенной орбите частицы.

Если консервативное центральное поле сил притяжения описывается потенциалом $V(r)$, то ускорение без учета реакции излучения равно

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{1}{m} \left(\frac{dV}{dr} \right) \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (17.11)$$

В соответствии с законом сохранения энергии скорость изменения полной энергии частицы равна взятой с обратным знаком мощности излучения

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\dot{\mathbf{v}})^2 = -\frac{2e^2}{3m^2c^3} \left(\frac{dV}{dr} \right)^2.$$

Учитывая определение (17.3) величины τ , это соотношение можно переписать в виде

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\tau}{m} \left(\frac{dV}{dr} \right)^2. \quad (17.12)$$

Так как предполагается, что изменение энергии за один цикл движения по орбите мало, то выражение в правой части уравнения можно заменить его средним значением на невозмущенной орбите

$$\frac{dE}{dt} \approx -\frac{\tau}{m} \left\langle \left(\frac{dV}{dr} \right)^2 \right\rangle. \quad (17.13)$$

Секулярное изменение момента количества движения можно определить, умножив уравнение (17.9) векторно на радиус-вектор \mathbf{r} . Так как момент количества движения \mathbf{L} равен $m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, то

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{внеш}} + m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{v}}. \quad (17.14)$$

Внешний вращающий момент равен нулю, поскольку внешняя сила обладает центральной симметрией, что касается вращающего момента, обусловленного излучением, то он может быть представлен в виде

$$m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{v}} = \tau \left(\frac{d^2\mathbf{L}}{dt^2} - m\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}} \right). \quad (17.15)$$

Мы предположили, что момент количества движения медленно меняется во времени (т. е. мало меняется за время порядка τ). Поэтому в выражении (17.15) можно пренебречь второй производной \mathbf{L} по t , а в качестве ускорения $\dot{\mathbf{v}}$ следует взять его значение из невозмущенного уравнения движения (17.11). В результате скорость изменения момента количества движения можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \approx -\frac{\tau}{m} \left\langle \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right\rangle \mathbf{L}, \quad (17.16)$$

где, так же как и в (17.13), произведено усреднение по времени для мгновенной орбиты.

Уравнения (17.13) и (17.16) определяют закон изменения во времени параметров орбиты частицы из-за реакции излучения. Хотя детальное поведение зависит от конкретного вида силы, можно сделать некоторые общие качественные выводы. Если

характерная частота движения есть ω_0 , то с точностью до безразмерного численного коэффициента порядка единицы получаем следующую оценку для усредненной величины в выражении (17.16):

$$\frac{\tau}{m} \left\langle \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right\rangle \sim \frac{\tau}{m} m \omega_0^2 = \omega_0^2 \tau.$$

Отсюда видно, что характерное время изменения момента количества движения по порядку величины равно $(1/\omega_0 \tau) \omega_0^{-1}$. При $\omega_0 \tau \ll 1$ это время много больше периода орбитального движения $2\pi/\omega_0$. К аналогичному выводу можно прийти и исходя из соотношения (17.12).

Приведенные соотношения, учитывающие радиационные эффекты, применимы при исследовании ряда конкретных задач, например для вычисления времени каскадного перехода μ - или π -мезонов с уровня с очень большим значением квантового числа на более низкие уровни. В течение большей части времени квантовые числа в этом случае достаточно велики, и, таким образом, классическое описание движения допустимо. Рассмотрение примеров такого рода дано в задачах к этой главе.

§ 3. Вычисление силы реакции излучения по Абрагаму и Лоренцу

Приведенный в предыдущем параграфе вывод силы реакции излучения, хотя и нагляден, но не является совершенно строгим. Задача состоит в том, чтобы получить удовлетворительную оценку силы реакции, с которой действует на заряженную частицу ее собственное поле излучения. Поэтому любое систематическое исследование должно включать рассмотрение структуры заряда частицы и ее собственного поля. Первая попытка такого исследования на основании чисто электромагнитной модели заряженной частицы была предпринята Абрагамом (1903 г.) и Лоренцом (1904 г.). Мы будем следовать рассмотрению Лоренца, приведенному в его книге [69].

Рассмотрим малую одиночную заряженную частицу с полным зарядом e и плотностью заряда $\rho(\mathbf{x})$ в системе, где частица покоится. Частица находится во внешнем электромагнитном поле $\mathbf{E}_{\text{внеш}}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{B}_{\text{внеш}}(\mathbf{x}, t)$. Как было показано в гл. 6, § 9, и гл. 11, § 11, сумма механического и электромагнитного импульсов в некотором объеме не изменяется во времени, если отсутствует поток импульса в указанный объем или из него. Абрагам и Лоренц предположили, что механический импульс заряженной частицы имеет в действительности электромагнитное происхождение. Таким образом, закон сохранения импульса может быть записан в виде

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = 0,$$

или в эквивалентной записи с использованием выражения для силы Лоренца

$$\int \left(q\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right) d^3x = 0. \quad (17.17)$$

В последнем уравнении векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} представляют собой *полные* поля, а интегрирование совершается по объему частицы.

Чтобы придать соотношению (17.17) форму уравнения движения Ньютона

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внеш}},$$

разобьем полное поле на внешнее поле $\mathbf{E}_{\text{внеш}}$, $\mathbf{B}_{\text{внеш}}$ и собственное поле $\mathbf{E}_{\text{соб}}$, $\mathbf{B}_{\text{соб}}$, обусловленное распределением плотности собственного заряда q и плотности тока \mathbf{J} :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{внеш}} + \mathbf{E}_{\text{соб}}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_{\text{внеш}} + \mathbf{B}_{\text{соб}}. \end{aligned} \quad (17.18)$$

Теперь соотношение (17.17) можно записать в виде уравнения движения Ньютона, в котором внешняя сила определяется следующим образом:

$$\mathbf{F}_{\text{внеш}} = \int \left(q\mathbf{E}_{\text{внеш}} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}_{\text{внеш}} \right) d^3x, \quad (17.19)$$

а производная по времени от импульса частицы равна

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = - \int \left(q\mathbf{E}_{\text{соб}} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}_{\text{соб}} \right) d^3x. \quad (17.20)$$

Если внешние поля мало меняются на протяжении размеров частицы, то внешняя сила (17.19) совпадает с обычной силой Лоренца, действующей на частицу с зарядом e и скоростью \mathbf{v} .

Для вычисления силы самодействия [интеграл в правой части уравнения (17.20)] необходимо задаться моделью заряженной частицы. Примем для простоты следующие предположения:

- а) частица в данный момент покоится;
- б) распределение заряда неизменно (модель «жесткого» электрона) и обладает сферической симметрией.

Полученные при этих допущениях результаты справедливы лишь для нерелятивистского движения и не обладают инвариантностью относительно преобразований Лоренца. В дальнейшем этот недостаток будет исправлен.

Для частицы, покоящейся в данный момент, уравнение (17.20) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = - \int q(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}_{\text{соб}}(\mathbf{x}, t) d^3x. \quad (17.21)$$

Собственное поле частицы можно выразить через соответствующие потенциалы \mathbf{A} и Φ :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int \varrho(\mathbf{x}, t) \left[\text{grad } \Phi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right] d^3x. \quad (17.22)$$

Указанные потенциалы образуют 4-вектор $A_\mu = (\mathbf{A}, i\Phi)$:

$$A_\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{[J_\mu(\mathbf{x}', t')]_{\text{запазд}}}{R} d^3x', \quad (17.23)$$

где

$$J_\mu = (\mathbf{J}, ic\rho), \quad \mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'.$$

В (17.23) 4-ток J_μ следует вычислять для запаздывающего времени t' . Последнее отличается от истинного времени t на интервал порядка $\Delta t \sim a/c$, где a — характерный размер частицы. Для распределения заряда, сосредоточенного в малом объеме, этот интервал времени весьма мал. Можно считать, что за это время движение частицы меняется мало. Поэтому естественно воспользоваться в (17.23) разложением подынтегрального выражения в ряд Тейлора в окрестности $t' = t$. Так как символ $[]_{\text{запазд}}$ означает, что выражение в скобках вычисляется при $t' = t - R/c$, то любую величину, вычисляемую с учетом запаздывания, можно представить разложением

$$[]_{\text{запазд}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{R}{c} \right)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} []. \quad (17.24)$$

Используя такое разложение для 4-тока в (17.23), преобразуем (17.22) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!c^n} \int d^3x \int d^3x' \varrho(\mathbf{x}, t) \times \\ \times \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\varrho(\mathbf{x}', t) \text{grad } R^{n-1} + \frac{R^{n-1}}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{\partial t} \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим члены с $n = 0$ и $n = 1$ в разложении скалярного потенциала в правой части выражения (первое слагаемое в квадратных скобках). Слагаемое с $n = 0$ пропорционально интегралу

$$\int d^3x \int d^3x' \varrho(\mathbf{x}, t) \varrho(\mathbf{x}', t) \text{grad } \frac{1}{R}.$$

Это слагаемое определяет электростатическую силу самодействия. Для сферически симметричного распределения заряда эта сила равна нулю. Слагаемое с $n = 1$ также равно нулю, так как содержит $\text{grad } R^{-1}$. Таким образом, первое отличное от нуля слагаемое, определяемое скалярным потенциалом, соответствует $n = 2$.

Поэтому сумму можно, изменив индекс суммирования, представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!c^{n+2}} \int d^3x \int d^3x' \varrho(\mathbf{x}, t) R^{n-1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \left\{ \quad \right\}, \\ \text{где} \quad \left\{ \quad \right\} &= \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) + \frac{\partial \varrho}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \frac{\text{grad } R^{n+1}}{(n+1)(n+2)R^{n-1}}. \end{aligned} \right\} \quad (17.25)$$

Используя уравнение непрерывности, связывающее плотности заряда и тока, можно записать выражение в фигурных скобках в (17.25) следующим образом:

$$\left\{ \quad \right\} = \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) - \frac{\mathbf{R}}{n+2} \text{div}' \mathbf{J}(\mathbf{x}', t).$$

Вычисляя по частям интеграл по x' от второго члена, получаем

$$\begin{aligned} - \int d^3x' R^{n-1} \frac{\mathbf{R}}{n+2} \text{div}' \mathbf{J} &= + \frac{1}{n+2} \int d^3x' (\mathbf{J} \cdot \text{grad}') R^{n-1} \mathbf{R} = \\ &= - \frac{1}{n+2} \int d^3x' R^{n-1} \left[\mathbf{J} + (n-1) \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{R}}{R^2} \mathbf{R} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение в фигурных скобках в (17.25) можно записать в виде

$$\left\{ \quad \right\} = \left(\frac{n+1}{n+2} \right) \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) - \left(\frac{n-1}{n+2} \right) \frac{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R}}{R^2}. \quad (17.26)$$

При «жестком» распределении заряда плотность тока равна

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}', t) = \varrho(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}(t).$$

Если распределение заряда обладает сферической симметрией, то единственным выделенным направлением задачи является направление вектора скорости $\mathbf{v}(t)$. Поэтому после интегрирования по x и x' останется лишь составляющая векторного выражения (17.26) вдоль направления $\mathbf{v}(t)$. Таким образом, выражение (17.26) можно заменить следующим:

$$\left\{ \quad \right\} = \varrho(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}(t) \left[\frac{n+1}{n+2} - \frac{n-1}{n+2} \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{Rv} \right)^2 \right].$$

Далее, все направления вектора \mathbf{R} равновероятны. Поэтому величину $(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}/Rv)^2$ можно заменить ее средним значением, равным $1/3$. В результате получаем окончательное простое выражение для величины в фигурных скобках в (17.25):

$$\left\{ \quad \right\} = \frac{2}{3} \varrho(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}(t). \quad (17.27)$$

Подставляя (17.27) в (17.25) и пренебрегая нелинейными членами в производных \mathbf{v} по времени (которые появляются при $n \geq 4$), приходим к следующему выражению для силы самодействия:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^{n+2}} \frac{2}{3n!} \frac{\partial^{n+1}\mathbf{v}}{\partial t^{n+1}} \int d^3x' \int d^3x \varrho(\mathbf{x}') \varrho(\mathbf{x}) R^{n-1}. \quad (17.28)$$

Для выяснения смысла формулы (17.28) рассмотрим несколько первых членов в полученном разложении:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_0 &= \frac{2}{3c^2} \dot{\mathbf{v}} \int d^3x \int d^3x' \frac{\varrho(\mathbf{x}') \varrho(\mathbf{x})}{R}, \\ \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_1 &= -\frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \int d^3x \int d^3x' \varrho(\mathbf{x}) \varrho(\mathbf{x}') = -\frac{2e^2 \ddot{\mathbf{v}}}{3c^3}, \\ \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_n &\sim \frac{e^2}{n! c^{n+2}} \mathbf{v}^{(n+1)} a^{n-1}. \end{aligned} \quad (17.29)$$

В последнем выражении a означает характерную протяженность распределения заряда частицы. Заметим, что члены разложения с $n \geq 2$ обращаются в нуль в предельном случае точечного заряда ($a \rightarrow 0$). Поэтому для сосредоточенных распределений заряда необходимо рассмотреть лишь члены разложения с $n = 0$ и $n = 1$. Слагаемое с $n = 1$ совпадает с найденной ранее силой реакции излучения (17.9). Эта сила не зависит от структуры частицы и определяется лишь величиной полного заряда. Настоящий вывод можно считать более глубоким обоснованием выражения для силы реакции по сравнению с рассмотрением, проведенным в § 2.

Член в (17.29), соответствующий $n = 0$, заслуживает специального рассмотрения. Входящий в него двойной интеграл пропорционален собственной электростатической энергии U распределения заряда

$$U = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \frac{\varrho(\mathbf{x}) \varrho(\mathbf{x}')}{R}, \quad (17.30)$$

так что член, соответствующий $n = 0$, можно записать в виде

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_0 = \frac{4}{3} \frac{U}{c^2} \dot{\mathbf{v}}. \quad (17.31)$$

Это соотношение имеет вид обычного закона изменения импульса во времени. Отношение собственной электростатической энергии к c^2 можно отождествить с электромагнитной массой частицы

$$m_e = \frac{U}{c^2}. \quad (17.32)$$

Если пренебречь высшими членами разложения (17.28), то уравнение движения Ньютона для модели Абрагама — Лоренца принимает вид

$$\left(\frac{4}{3} m_e\right) \dot{\mathbf{v}} - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{внеш.}} \quad (17.33)$$

Это уравнение совпадает с (17.9), за исключением численного множителя $4/3$ при электромагнитной массе.

§ 4. Трудности модели Абрагама—Лоренца

Хотя подход Абрагама — Лоренца представляет собой значительный шаг вперед в физическом описании заряженной частицы, в некоторых отношениях он несовершенен.

1. Очевидным недостатком является нерелятивистская природа модели. Выражение для силы реакции излучения легко обобщить на случай релятивистского движения (см. задачу 17.4), но одного этого еще недостаточно.

2. Электромагнитная масса входит в уравнение (17.33) с неверным коэффициентом. В этом проявляются присущие модели нарушения свойств лоренцевской ковариантности, что станет более ясно из следующего параграфа.

3. Чтобы иметь возможность пренебречь высшими членами разложения в выражении для силы самодействия, необходимо перейти к пределу $a \rightarrow 0$. Однако электромагнитная масса по порядку величины равна $e^2/c^2 a$. Следовательно, в пределе $a \rightarrow 0$ масса неограниченно возрастает. Если же потребовать, чтобы масса по порядку величины оставалась равной наблюдаемой массе частицы m , то мы получаем, что размер области, занятой зарядом, должен быть порядка $a \sim r_0$, где

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2}.$$

Для электронов эта величина, названная *классическим радиусом электрона*, равна $2,82 \cdot 10^{-13}$ см. Хотя этот размер и очень мал, можно представить себе такие достаточно резкие движения, для которых влияние этой конечной величины в высших членах разложения становится весьма существенным¹⁾. В результате развитую «усеченную» теорию для частицы конечных размеров следует рассматривать лишь как приближенное описание.

¹⁾ Легко видеть, что отношение соседних членов разложения имеет порядок $[(a/c)(d^{n+2}v/dt^{n+2})]/(d^{n+1}v/dt^{n+1})$. Это значит, что движение должно претерпевать заметное изменение за интервал времени a/c . При $a \sim e^2/mc^2$ этот интервал совпадает с временем τ , определенным согласно (17.3). В результате мы вновь приходим к полученному прежде критерию.

4. Чтобы ограниченное распределение заряда было устойчиво, необходимы силы неэлектромагнитного характера. Поэтому в рамках уравнений Максвелла и специальной теории относительности следует отказаться от чисто электромагнитной модели материи. Нам известны сильные неэлектромагнитные взаимодействия, существующие в природе. Однако внутренняя структура частиц в настоящее время остается в основном неизвестной. Единственные исключения представляют нейтрон и протон. Их электромагнитная структура исследовалась с помощью рассеяния электронов высоких энергий, причем электроны рассматривались как точечные частицы и считалось, что законы электродинамики не изменяются на малых расстояниях, характерных для рассматриваемой задачи. Было найдено, что размер области, занятой распределением заряда и магнитного момента, по порядку величины равен $(0,5—1,0) \cdot 10^{-13}$ см¹). Эта величина одного порядка с классическим радиусом электрона r_0 , хотя и несколько меньше него. Не следует, однако, отыскивать какой-либо глубокий смысл в этом факте. Структура элементарной частицы в значительной мере определяется квантовомеханическими законами. Из величин с размерностью длины гораздо более близкое отношение к размерам нейтрона и протона имеет комптоновская длина волны π -мезона ($\hbar/m_{\pi}c \approx 1,4 \cdot 10^{-13}$ см), играющего роль кванта поля ядерных сил, подобно тому как фотон является квантом электромагнитного поля²).

Наличие неэлектромагнитных сил должен соответствовать добавочный вклад m_0 в массу частицы. В рамках обсуждавшейся до сих пор модели Абрагама — Лоренца эта дополнительная масса проявляется лишь в появлении коэффициента при ускорении в уравнении (17.33).

§ 5. Трансформационные свойства модели Абрагама — Лоренца. Натяжения Пуанкаре

Странный и труднообъяснимый коэффициент $4/3$ при члене, характеризующем инерцию электромагнитной энергии, был впервые получен Дж. Дж. Томсоном (1881 г.). Чтобы ясно понять его происхождение, рассмотрим не уравнение движения, а собственную электромагнитную энергию и импульс в модели Абрагама — Лоренца. В гл. 6, § 9, и гл. 11, § 11, были рассмотрены законы сохранения энергии и импульса. При этом мы интерпретировали элементы четвертого столбца (или строки) тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$

¹) Обсуждение экспериментов можно найти в статье Хофштадтера [52].

²) То обстоятельство, что $(\hbar/m_{\pi}c) \approx (1/2)(e^2/m_e c^2)$, т. е. что масса π -мезона превышает массу электрона в 2×137 раз, является еще одним из числовых совпадений, которое, возможно, и заключает в себе глубокий смысл.

(11.134) как плотность импульса и энергии электромагнитного поля. Поэтому естественно в исследуемой модели заряженной частицы отождествить собственную электромагнитную энергию и импульс с соответствующим интегралом по объему от некоторого тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ *собственного* поля. Таким образом, 4-импульс частицы представляется в виде

$$P_{\mu} = \frac{i}{c} \int d^3x T_{\mu 4}, \quad (17.34)$$

где интегрирование производится по всему пространству. В развернутом виде для электромагнитной энергии и импульса частицы получим соотношения

$$\begin{aligned} E_e &= \int d^3x T_{44} = \int d^3x u_s, \\ p_{ek} &= \frac{i}{c} \int d^3x T_{k4} = \int d^3x g_{sk}, \end{aligned} \quad (17.35)$$

где u_s и g_s —соответственно плотность собственной энергии и плотность импульса.

В системе координат, относительно которой частица покоится, соотношения (17.35) дают $p_e = 0$ (так как $g_s = 0$ тождественно) и

$$E_e = \int d^3x^{(0)} T_{44}^{(0)} = U. \quad (17.36)$$

Индекс (0) означает систему координат, связанную с частицей; U — собственная электростатическая энергия (17.30).

Исходя из этих значений энергии и импульса в собственной системе отсчета частицы, можно получить соответствующие величины в другой лоренцовой системе координат и выявить таким образом их трансформационные свойства. Пусть 4-импульс электромагнитного поля в системе отсчета, движущейся со скоростью $-\mathbf{v}$ относительно покоящейся системы координат, определяется формулой (17.34). В этой лоренцовой системе отсчета заряженная частица движется со скоростью \mathbf{v} . Чтобы выразить (17.34) через величины в покоящейся системе отсчета, следует преобразовать подынтегральное выражение. Так как γd^3x есть лоренц-инвариантный элемент объема, то $\gamma d^3x = \gamma^{(0)} d^3x^{(0)} = d^3x^{(0)}$. Далее, тензор $T_{\mu\nu}$ преобразуется в соответствии с (11.88). В результате (17.34) можно переписать в виде

$$P_{\mu} = \frac{i}{\gamma c} a_{\mu\lambda} a_{4\sigma} \int d^3x^{(0)} T_{\lambda\sigma}^{(0)}.$$

Считая для удобства скорость \mathbf{v} параллельной оси x_3 , можно использовать в качестве $a_{\mu\nu}$ коэффициенты преобразования, обратного (11.75). В этом случае, как легко показать, энергия и импульс рав-

ны соответственно

$$E_e = \gamma \int d^3x^{(0)} [T_{44}^{(0)} - \beta^2 T_{33}^{(0)}], \quad (17.37)$$

$$cp_e = \gamma\beta \int d^3x^{(0)} [T_{44}^{(0)} - T_{33}^{(0)}].$$

Полученные результаты отличаются от ожидаемых появлением добавочных членов, содержащих составляющую $T_{33}^{(0)}$ тензора натяжений Максвелла. Таким образом, мы приходим к выводу, что часть энергии и импульса частицы, обусловленная собственным электромагнитным полем, не преобразуется ожидаемым образом, если тензор натяжений собственного поля не обращается в нуль в покоящейся системе отсчета. Для модели Абрагама — Лоренца собственный тензор натяжений, очевидно, *не обращается* в нуль. Действительно, в случае сферической симметрии можно из условия обращения в нуль суммы диагональных элементов тензора $T_{\mu\nu}$ [см. (11.136)] вывести, что добавочный импульс в формуле (17.37), обусловленный собственными натяжениями, составляет ровно $1/3$ импульса, обусловленного собственной электромагнитной энергией. Это и приводит к появлению коэффициента $4/3$ в выражении (17.31) даже в случае нерелятивистских скоростей.

Нарушение лоренц-ковариантных свойств в соотношениях (17.37) связано с отличием от нуля собственного тензора натяжений Максвелла. В свою очередь наличие собственных натяжений является следствием нестабильности распределения заряда при чисто электромагнитных силах взаимодействия. Утверждение о неравенстве нулю тензора натяжений Максвелла для собственного поля есть лишь иное выражение того факта, что электростатические силы стремятся разрушить локализованное распределение заряда. Для стабильной конфигурации материи *полные* натяжения, обусловленные действием всех видов сил, должны обращаться в нуль.

В 1906 г. Пуанкаре обнаружил, что можно снять сразу две трудности модели Абрагама — Лоренца, постулировав существование соответствующих сил неэлектромагнитного характера, так называемых *натяжений Пуанкаре*, компенсирующих натяжения Максвелла и обеспечивающих стабильность распределения заряда частицы и обращение в нуль *полного* тензора натяжений в собственной системе координат частицы. Итак, в дополнение к электромагнитному тензору $T_{\mu\nu}$ введем неэлектромагнитный тензор энергии-импульса $P_{\mu\nu}$, так что *полный* тензор энергии-импульса будет равен

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + P_{\mu\nu}. \quad (17.38)$$

При этом 4-вектор энергии-импульса частицы будет вместо (17.34) определяться выражением

$$P_\mu = \frac{i}{c} \int d^3x S_{\mu 4}. \quad (17.39)$$

Эта величина является лоренц-ковариантной, если тензор Пуанкаре в собственной системе координат частицы имеет вид

$$P_{\mu\nu}^{(0)} = \begin{pmatrix} P_{11}^{(0)} & P_{12}^{(0)} & P_{13}^{(0)} & 0 \\ P_{21}^{(0)} & P_{22}^{(0)} & P_{23}^{(0)} & 0 \\ P_{31}^{(0)} & P_{32}^{(0)} & P_{33}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{44}^{(0)} \end{pmatrix} \quad (17.40)$$

и, кроме того,

$$\int P_{ij}^{(0)} d^3x^{(0)} = - \int T_{ij}^{(0)} d^3x^{(0)}. \quad (17.41)$$

Последнее равенство математически выражает то требование, что для обеспечения стабильности заряда силы притяжения, описываемые натяжениями Пуанкаре, должны компенсировать электростатические силы отталкивания.

Модель Пуанкаре показывает, что в выражении для собственной энергии или массы не следует отделять электромагнитную часть от части, обусловленной силами другой природы, так как взятые в отдельности они не являются лоренц-ковариантными. Физический смысл имеет лишь *полная* собственная энергия или масса

$$m = \frac{1}{c^2} \int [T_{44}^{(0)} + P_{44}^{(0)}] d^3x^{(0)}. \quad (17.42)$$

Постулат Пуанкаре обеспечивает одновременно требуемые релятивистские ковариантные свойства полной энергии и импульса частицы и стабильность распределения заряда частицы. Поэтому его можно рассматривать как приемлемое решение проблемы в рамках классической теории. Происхождение и физическая природа натяжений Пуанкаре, разумеется, неизвестны. Наличие этих натяжений постулируется лишь для того, чтобы согласовать теорию с очевидным экспериментальным фактом существования устойчивых заряженных частиц, энергия и импульс которых обладают определенными твердо установленными трансформационными свойствами лоренц-инвариантности. Так как классическая электродинамика не может сама по себе обеспечить нулевые собственные натяжения, мы вынуждены выйти за ее границы.

В квантовой электродинамике (строго говоря, в теории взаимодействия фотонов с электронами и позитронами, а не с любыми заряженными частицами) возникают, по существу, те же самые трудности, хотя и в другом виде. Теория оперирует с точечными заряженными частицами, обладающими «только» зарядом $\pm e_0$ и «только» массой m_0 . Частицы, так же как и электромагнитное поле, описываются квантованным полем. Таким образом, квантовая теория описывает взаимодействие двух полей, тогда как классическая теория рассматривает взаимодействие поля с «материей».

В приближении точечных частиц вычисление собственной энергии частицы приводит к расходящемуся результату. Однако в отличие от классического результата

$$m_e^{(\text{кл})} \sim \frac{e^2}{ac^2},$$

где масса обратно пропорциональна размеру частицы, в квантовой механике мы имеем логарифмическую особенность

$$m_e^{(\text{кв})} \sim \frac{e^2}{\hbar c} m \ln \left(\frac{\hbar}{mca} \right);$$

здесь a — характерный линейный размер, стремящийся к нулю для точечных частиц. Замена линейной расходимости на логарифмическую связана со взаимной компенсацией членов, обусловленных электромагнитным и электрон-позитронным полями. Кроме того, введение электрон-позитронного поля приводит к эффекту, отсутствующему в классической теории, — расходимости полного заряда частицы. Эти вклады в массу и заряд частицы, представляемые расходящимися интегралами, можно включить в величины наблюдаемых массы и заряда, если описывающим их расходящимся интегралам приписать надлежащие релятивистски ковариантные свойства. Указанная процедура обычно называется *перенормировкой*. Метод перенормировки оказался довольно плодотворным, поскольку а) перенормировка может быть проделана релятивистски ковариантным образом, б) необходима перенормировка лишь нескольких величин (фактически лишь трех — массы, заряда и волновой функции) и в) метод приводит к четко определенной схеме вычислений. Рассчитанные этим методом слабые радиационные эффекты, например лэмбовский сдвиг и аномальный магнитный момент электрона, полностью согласуются с опытом. При этом достигается точность порядка 10^{-6} или 10^{-7} .

При квантовомеханических расчетах собственных натяжений также возникает трудность, связанная с наличием расходящихся интегралов. Один из способов решения этой проблемы состоит в использовании связи между обращением в нуль дивергенции тензора натяжений и 4-векторным характером энергии-импульса (см. задачу 11.13). Вычисление электродинамических вкладов в дивергенцию тензора натяжений и собственные натяжения показывают, что в обоих случаях появляются одинаковые расходящиеся интегралы. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что дополнительный вклад в дивергенцию тензора натяжений должен отсутствовать. На этом основании расходящиеся интегралы формально следует положить равными нулю. Так как в выражении для собственных натяжений появляются *те же самые* интегралы, можно сказать, что их следует опустить, исходя из закона сохранения энергии и импульса. Другой метод обхода указанных труд-

ностей состоит в том, что в дополнение к электромагнитному полю формально вводятся одно или несколько векторных полей, описывающих взаимодействие с частицей, а константы связи (зарядов) выбираются так, чтобы вклад дополнительных полей в собственные натяжения и дивергенцию тензора натяжений погасил соответствующие электродинамические слагаемые¹⁾. Этот метод сведения собственных натяжений к нулю по своей сути аналогичен классическим методам натяжений Пуанкаре, хотя и сильно отличается в деталях.

§ 6. Ковариантное определение собственной электромагнитной энергии и импульса заряженной частицы

В предыдущем рассмотрении имеется один странный момент. Классическая электродинамика является релятивистски ковариантной теорией. Поэтому правомерно ожидать, что при правильном вычислении любой величины требования инвариантности относительно преобразований Лоренца не будут нарушаться. Тем не менее в модели Абрагама — Лоренца — Пуанкаре, по-видимому, имеется такое нарушение. Нековариантная электромагнитная часть собственной энергии и импульса заряженной частицы уравнивается в этой модели нековариантной частью, обусловленной натяжениями Пуанкаре, так что результат остается релятивистски ковариантным.

Можно, конечно, сказать, как и было сделано в § 5, что поскольку для обеспечения стабильной конфигурации ограниченного распределения заряда необходимы удерживающие силы неэлектромагнитного характера и соответствующие собственные поля, то лишь полные силы и натяжения имеют физический смысл. Тем не менее вполне законен вопрос, можно ли так определить чисто электромагнитную часть собственной энергии и импульса частицы, чтобы она была релятивистски ковариантной. Такое определение имело бы не только эстетическую ценность, но отделило бы, по крайней мере формально, вопрос об устойчивости от вопроса об инвариантности относительно преобразований Лоренца.

Задача определения 4-вектора энергии-импульса собственного электромагнитного поля весьма проста. Следует лишь образовать 4-вектор, сводящийся к собственной электростатической энергии частицы (17.36) в системе координат, относительно которой она покоится²⁾. Очевидно, что для получения 4-вектора следует ска-

¹⁾ Обсуждение указанных квантовомеханических подходов можно найти в статье Боровица и Кона [17].

²⁾ Впервые это было сделано, по-видимому, Квалем [61]. См. также работу Рорлиха [83].

лярно умножить тензор $T_{\mu\nu}$ на некоторый 4-вектор n_ν . Умножая произведение на инвариантный элемент объема γd^3x и интегрируя, получаем требуемое ковариантное обобщение выражения (17.36)

$$P_{e\mu} = \frac{\gamma}{c} \int d^3x T_{\mu\nu} n_\nu, \quad (17.43)$$

где n_ν представляет собой 4-вектор с составляющими $(0, i)$ в собственной системе отсчета. С помощью преобразований Лоренца (11.75) легко найти выражение для n_ν в общем случае

$$n_\nu = \left(\gamma \frac{v}{c}, i\gamma \right). \quad (17.44)$$

В развернутом виде собственная энергия и импульс, выраженные через плотность энергии и импульса и тензор натяжений Максвелла, запишутся так:

$$\begin{aligned} E_e &= \gamma^2 \int d^3x (u - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}), \\ \mathbf{p}_e &= \gamma^2 \int d^3x \left(\mathbf{g} + \frac{\mathbf{v} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}}{c^2} \right). \end{aligned} \quad (17.45)$$

Полученные выражения отличаются от соотношений Абрагама — Лоренца (17.35) множителями γ^2 и дополнительными слагаемыми $-\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}$ и $\mathbf{v} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} / c^2$.

Физический смысл полученных ковариантных определений E_e и \mathbf{p}_e можно установить следующим образом. Рассмотрим, например, собственную энергию. Можно сказать, что величина, которую следует отождествлять с собственной электромагнитной энергией движущегося ограниченного распределения заряда, не равна полной энергии поля, а отличается от нее на работу, совершенную электромагнитными силами (натяжениями Максвелла), которые в конечном счете компенсируются некоторыми силами неэлектромагнитного типа. В собственной системе отсчета частицы эти силы не производят работы. В результате собственная энергия и определяется формулой Абрагама — Лоренца (17.36). В движущейся же системе отсчета работа, производимая этими силами в единицу времени, равна

$$\int \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right) d^3x$$

(не существенный для наших рассуждений множитель γ опускаем). Интеграл по времени от этой величины дает как раз слагаемое, вычитаемое из полной энергии электромагнитного поля в (17.45). Совершенно аналогично слагаемое, содержащее натяжения Максвелла в выражении для импульса (17.45), представляет собой взятую с обратным знаком часть импульса, обусловленную переносом чисто электромагнитных натяжений.

Так как выражение для энергии-импульса (17.45) по самому построению представляет собой 4-вектор, нет необходимости в проверке этого факта. Тем не менее интересно, что коэффициент $4/3$ в выражении для импульса исчезает. В нерелятивистском предельном случае выражение для собственного магнитного поля имеет вид

$$\mathbf{B}_s \approx \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}_s. \quad (17.46)$$

При этом первое слагаемое в выражении для импульса (17.45) оказывается равным

$$\mathbf{p}_{e1} \approx \int \mathbf{g} d^3x \approx \frac{1}{4\pi c^2} \int \mathbf{E}_s \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_s) d^3x,$$

или

$$\mathbf{p}_{e1} \approx \frac{1}{4\pi c^2} \int [E_s^2 \mathbf{v} - (\mathbf{E}_s \cdot \mathbf{v}) \mathbf{E}_s] d^3x. \quad (17.47)$$

Это — выражение для импульса в модели Абрагама — Лоренца. При сферической симметрии поля второе слагаемое можно усреднить по углам. Усредненное слагаемое равно $1/2$ от величины первого члена, так что в результате получаем значение $(4/3)(U/c^2)\mathbf{v}$, как уже было показано ранее [см. соображения, приведенные после соотношений (17.37)].

Второе слагаемое в выражении для импульса равно

$$\mathbf{p}_{e2} \approx \frac{1}{c^2} \int \mathbf{v} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} d^3x \approx \frac{1}{4\pi c^2} \int \left[(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_s) \mathbf{E}_s - \frac{1}{2} E_s^2 \mathbf{v} \right] d^3x. \quad (17.48)$$

Если даже *не предполагать* сферической симметрии для суммарной величины импульса, то, согласно (17.47) и (17.48), получим

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_{e1} + \mathbf{p}_{e2} = \frac{\mathbf{v}}{8\pi c^2} \int E_s^2 d^3x = \frac{U}{c^2} \mathbf{v}, \quad (17.49)$$

как и следовало ожидать на основании лоренц-ковариантности.

При помощи модифицированных определений (17.45) можно с формальной точки зрения получить заведомо ковариантные выражения для энергии и импульса собственного электромагнитного поля, не рассматривая силы иного типа и вопросы устойчивости. Однако, как мы видели, эти ковариантные выражения получаются, если опустить работу и импульс, обусловленные электромагнитными силами, которые в конечном счете компенсируются силами притяжения неэлектромагнитного характера, необходимыми для устойчивости. Поэтому, по крайней мере для классического протяженного распределения заряда, мы можем либо считать вполне удовлетворительным подход Пуанкаре, либо же требовать, чтобы различные части собственной энергии и импульса были определены порознь ковариантным образом; выбор здесь является делом вкуса.

Внешне отличающееся, но весьма близкое решение вопроса о потере ковариантности, приводящей к появлению коэффициента $4/3$ в уравнении движения Абрагама — Лоренца (17.33), было найдено Ферми [41] в 1922 г. Ферми показал, что использование ковариантной формулировки принципа Гамильтона приводит к требуемой модификации выражения для силы самодействия (17.20), в результате чего коэффициент $4/3$ заменяется на единицу. Рассмотрение, в некоторых отношениях сходное с проведенным нами, было предложено также Вильсоном [119].

§ 7. Интегро-дифференциальное уравнение движения с учетом радиационного затухания

В § 2 проведено качественное рассмотрение уравнения Абрагама — Лоренца (17.9). При этом указывалось, что если радиационные эффекты в некотором смысле считать слабыми, то для описания движения можно успешно использовать метод последовательных приближений. Однако уравнение движения в дифференциальной форме допускает существование решений, не имеющих физического смысла [см., например, второе решение (17.10)], так как это уравнение содержит производные по времени более высокого порядка, чем обычное уравнение движения механики. Желательно было бы получить эквивалентное уравнение движения, имеющее правильный порядок, не приводящее к решениям, заведомо лишенным физического смысла, и позволяющее применять обычный метод последовательных приближений для нахождения решений. Мы ограничимся в дальнейшем лишь нерелятивистским движением, хотя обобщение на релятивистский случай получить нетрудно.

Основная идея преобразования уравнения (17.9) в эквивалентное уравнение заключается в том, что решение нового уравнения должно непрерывно переходить в соответствующее решение для нейтральной частицы в пределе, когда заряд частицы стремится к нулю. Чем меньше заряд частицы, тем меньше сила самодействия и радиационные эффекты при прочих неизменных условиях. Если считать внешнюю силу заданной функцией времени, то уравнение (17.9) можно один раз проинтегрировать по времени с помощью интегрирующего множителя. Положив

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = e^{t/\tau} \mathbf{u}(t),$$

из (17.9) получим

$$m\dot{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \mathbf{F}(t).$$

Первый интеграл имеет, следовательно, вид

$$m\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{e^{t/\tau}}{\tau} \int_t^C e^{-t'/\tau} \mathbf{F}(t') dt'. \quad (17.50)$$

Знак минус, стоящий в предыдущей формуле, здесь отсутствует, поскольку мы считаем неопределенным нижний предел интегрирования. Постоянная интегрирования C должна быть найдена из физических соображений.

Интегро-дифференциальное уравнение (17.50) отличается от обычных уравнений движения механики тем, что в нем ускорение частицы в любой заданный момент времени зависит не от мгновенного значения действующей силы, а от ее среднего по времени значения, взятого с некоторым весом. Наличие в выражении для силы множителя $e^{-(t'-t)/\tau}$ означает, что существен лишь малый интервал времени порядка τ . Так как τ пропорционально e^2 , то этот интервал становится бесконечно малым в пределе $e^2 \rightarrow 0$. Потребуем, чтобы в этом случае уравнение движения переходило в уравнение Ньютона: $m\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{F}(t)$. Этому требованию можно удовлетворить, выбрав верхний предел интегрирования в (17.50) равным бесконечности. Чтобы убедиться в этом, введем новую переменную интегрирования

$$s = \frac{1}{\tau}(t' - t).$$

Тогда уравнение (17.50) примет вид

$$m\dot{\mathbf{v}}(t) = \int_0^{\infty} e^{-s} \mathbf{F}(t + \tau s) ds. \quad (17.51)$$

Если сила мало меняется за время порядка τ , то можно ожидать, что разложение ее в ряд Тейлора вблизи $s = 0$ быстро сходится. Положим поэтому

$$\mathbf{F}(t + \tau s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau s)^n}{n!} \frac{d^n \mathbf{F}(t)}{dt^n} \quad (17.52)$$

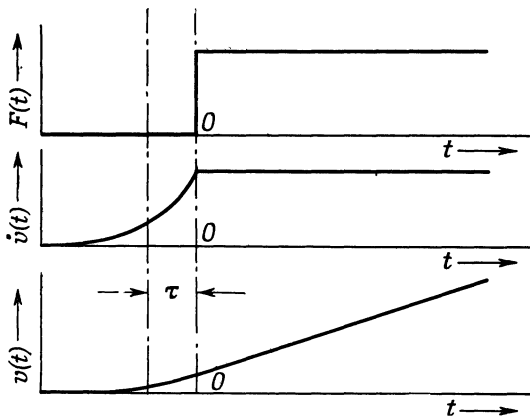
и подставим это выражение для силы в (17.51); тогда

$$m\dot{\mathbf{v}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \frac{d^n \mathbf{F}(t)}{dt^n}. \quad (17.53)$$

В пределе $\tau \rightarrow 0$ отличен от нуля лишь член ряда с $n = 0$. При этом мы приходим к обычному уравнению движения для незаряженной

частицы. Члены суммы более высокого порядка представляют собой поправки, учитывающие радиационный эффект для заряженной частицы; эти слагаемые существенны лишь при достаточно быстром изменении силы во времени.

Интегро-дифференциальное уравнение (17.51) можно считать физически оправданным эквивалентом уравнения движения Абрагама — Лоренца (17.9). Все решения уравнения (17.51) удовлетворяют и уравнению (17.9). Но при этом физически нереальные «самоускоряющиеся» решения типа (17.10) не появляются. Однако уравнению (17.51) все еще присущи некоторые недостатки. Основной



Ф и г. 17.1. «Предускорение» заряженной частицы.

из них — это нарушение традиционного принципа причинности. Как очевидно из (17.51), ускорение в момент t зависит от значения силы в моменты времени, более *поздние*, чем t . Это противоречит нашим представлениям о связи причины и результата действия. Типичный пример такого нарушения причинности проиллюстрирован на фиг. 17.1. Постоянная сила действует на частицу, начиная с момента времени $t > 0$. Из уравнения движения следует, что «предускорение» имело место еще до того, как сила «действительно» была приложена.

Чтобы понять, действительно ли указанные эффекты противоречат известным фактам, следует уточнить временные масштабы. Эффект нарушения принципа причинности ограничен во времени интервалом $\tau \sim e^2/mc^3 \sim 10^{-24}$ сек. За это время свет проходит расстояние порядка «размера» элементарных частиц. Интервалы времени такой продолжительности невозможно обнаружить макроскопическими средствами. В частности, силы, действующие на частицы, также не могут быть включены или выключены столь быстро, как показано на фиг. 17.1. Следовательно, нарушение принципа при-

чинности, заложенное в выражении (17.51), фактически не может быть обнаружено на опыте. Можно сказать, что, хотя уравнение (17.51) противоречит микроскопической причинности, оно не противоречит требованиям макроскопической причинности.

Существенное значение имеет и то обстоятельство, что рассматриваемая модель является чисто классической и фактически неприменима уже при расстояниях и временах, много больших соответственно e^2/mc^2 и τ . Действительно, согласно принципу неопределенности, включение внешней силы на интервале времени Δt соответствует неопределенности в энергии порядка $\Delta E \sim \hbar/\Delta t$. Если указанная неопределенность энергии по порядку величины равна энергии покоя частицы mc^2 , то поведение последней уже будет далеко не классическим. Это накладывает квантовомеханическое ограничение на интервалы времени: $\tau_{\text{KB}} \sim \hbar/mc^2 \sim 137 \tau$. Поскольку $\tau_{\text{KB}} \gg \tau$, то можно предполагать, что в области, в которой должно быть применимо классическое описание, движение частиц происходит достаточно плавно, поэтому эффекты нарушения принципа причинности весьма мало существенны и реакция излучения лишь незначительно изменяет основное движение.

Если приложенная сила F задается не как функция времени, а как функция координат, то решение интегро-дифференциального уравнения становится несколько более сложным, хотя принципиальных трудностей не возникает.

§ 8. Ширина линии и сдвиг уровня для осциллятора

Реакция излучения существенно влияет на характеристики атомных систем. Хотя полный анализ требует разработки довольно сложного формализма квантовой электродинамики, качественные характеристики видны уже из классического рассмотрения. В качестве типичного примера рассмотрим заряженную частицу, удерживаемую одномерной линейной восстанавливающей силой с коэффициентом упругости $k = m\omega_0^2$. В отсутствие радиационного затухания частица совершает колебания с постоянной амплитудой и частотой ω_0 . Наличие реакции излучения приводит к постепенному затуханию амплитуды колебаний, так как энергия движения преобразуется в энергию излучения.

Если обозначить смещение заряженной частицы от положения равновесия через $x(t)$, то уравнение движения (17.51) для рассматриваемой задачи запишется в виде

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \int_0^{\infty} e^{-s} x(t + \tau s) ds = 0. \quad (17.54)$$

Так как при $\tau = 0$ решение имеет вид $x(t) \sim e^{-i\omega_0 t}$, естественно искать решение в виде

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t}. \quad (17.55)$$

На основании физических соображений можно ожидать, что мнимая часть α будет близка к ω_0 , по крайней мере при $\omega_0 \tau \ll 1$, но что α имеет также положительную действительную часть, описывающую затухание, обусловленное излучением. Подставляя (17.55) в (17.54), получаем кубическое уравнение для α

$$\tau \alpha^3 + \alpha^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (17.56)$$

Это уравнение имеет три корня: два комплексно сопряженных и один действительный. Действительный корень всегда отрицателен и должен быть отброшен [он соответствует «самоускоряющемуся» решению уравнения (17.9)]. Оба корня, соответствующие физически реализуемым процессам, могут быть представлены в замкнутом виде при произвольных τ и ω_0 , однако окончательная формула довольно сложна и пригодна лишь для численных расчетов. Нас интересует область параметров, для которой $\omega_0 \tau \ll 1$. При этом легко убедиться непосредственно из уравнения (17.56), что с точностью до членов порядка $(\omega_0 \tau)^2$ включительно α определяется соотношением

$$\alpha = \frac{\Gamma}{2} \pm i(\omega_0 + \Delta\omega), \quad (17.57)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma &= \omega_0^2 \tau, \\ \Delta\omega &= -\frac{5}{8} \omega_0^3 \tau^2. \end{aligned}$$

Величину Γ называют обычно *постоянной затухания*, а $\Delta\omega$ — *сдвигом уровня*.

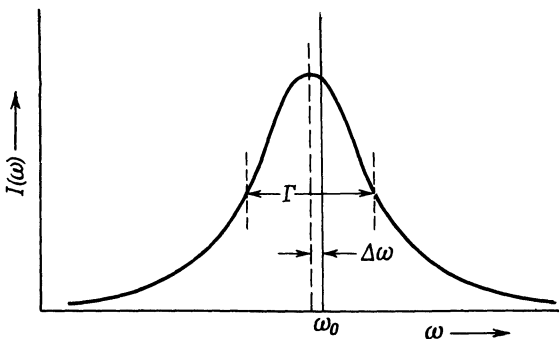
Вследствие радиационного затухания энергия осциллятора экспоненциально убывает как $e^{-\Gamma t}$. Это означает, что излучение испускается в виде цугов волн с эффективной длиной порядка c/Γ . Такие импульсы излучения конечной протяженности не являются уже строго монохроматическими, а характеризуются спектром частот, занимающим интервал порядка Γ . Точный вид спектрального распределения определяется квадратом фурье-амплитуды электрического поля или ускорения. Если пренебречь начальным процессом установления (имеющим длительность τ), то спектральная амплитуда $E(\omega)$ пропорциональна величине

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\alpha - i\omega}.$$

Отсюда для энергии, излучаемой в единичном интервале частот, получим

$$I(\omega) = I_0 \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad (17.58)$$

где I_0 — полная излученная энергия. Такое спектральное распределение называют иногда *лоренцевой формой линии*. Ширину распределения на уровне половинной интенсивности, равную Γ , принято называть *шириной линии* (иногда применяют неудачное название «полуширина»). Такая спектральная линия изображена на



Ф и г. 17.2. Уширение и сдвиг спектральной линии, обусловленные реакцией излучения.

Γ — ширина лоренцевой спектральной линии; $\Delta\omega$ — сдвиг уровня.

фиг. 17.2. Наличие реакции излучения обуславливает *уширение линии* и *сдвиг* ее по частоте.

Классическая ширина линии для электронного осциллятора, выраженная в длинах волн, является универсальной постоянной

$$\Delta\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega_0^2} \Gamma = 2\pi c\tau = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ \AA}.$$

При квантовомеханическом рассмотрении естественная ширина спектральной линии оказывается различной. Иногда для установления связи с классическим рассмотрением ширину линии в квантовой механике записывают в виде

$$\Gamma_{\text{кв}} = f_{ij}\Gamma,$$

где f_{ij} — «сила осциллятора» для перехода $i \rightarrow j$. Величина силы осциллятора может существенно меняться от значений, близких к единице для сильных одноэлектронных переходов, до гораздо меньших значений в других случаях.

В классической теории сдвиг уровня $\Delta\omega$ пропорционален ширине линии Γ с малым коэффициентом $\omega_0\tau \ll 1$ и таким образом гораз-

до меньше ширины. В квантовомеханическом рассмотрении (и на опыте) это не так. Расхождение объясняется тем, что механизм сдвига уровня в квантовой и классической теории различен, хотя по-прежнему определяется электромагнитным полем. Для квантованного поля излучения даже в отсутствие фотонов среднее значение *квадратов* напряженностей векторов электромагнитного поля отлично от нуля (флуктуации вакуума). Действие этих флуктуирующих полей (наряду с флуктуациями электрон-позитронного поля) на заряженную частицу и обуславливает сдвиг ее энергетического уровня. Квантовомеханическое рассмотрение приводит к следующей оценке для сдвига уровня осциллятора:

$$\frac{\Delta\omega_{\text{кв}}}{\omega_0} \sim \omega_0\tau \ln\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega_0}\right),$$

тогда как для классического сдвига уровня, обусловленного испусканием излучения, имеем

$$\frac{|\Delta\omega_{\text{кл}}|}{\omega_0} \sim (\omega_0\tau)^2.$$

Очевидно, квантовомеханический сдвиг уровня по величине сравним с шириной линии или даже превышает ее. Впервые малый сдвиг энергетических уровней атома, обусловленный излучением, наблюдался в 1947 г. Лэмбом [62] и был назван поэтому *лэмбовским сдвигом*. Квантотеоретическое рассмотрение этого вопроса, требующее знания лишь основ квантовой теории поля, приведено в книге Вайскопфа [115].

§ 9. Рассеяние и поглощение излучения осциллятором

Рассеяние излучения свободными заряженными частицами было исследовано в гл. 14, § 7 и 8. Рассмотрим теперь рассеяние и поглощение излучения связанными зарядами. В качестве первого примера обсудим рассеяние излучения, имеющего частоту ω , на одиночной нерелятивистской частице с массой m и зарядом e , удерживаемой сферически симметричной линейной восстанавливающей силой $m\omega_0^2x$. Поскольку нас будут интересовать установившиеся колебания, можно пользоваться вместо интегро-дифференциального уравнения (17.51) уравнением Абрагама — Лоренца (17.9). Уравнение движения имеет, таким образом, вид

$$m(\ddot{x} - \tau\dddot{x} + \omega_0^2x) = F(t).$$

Если мы хотим учесть и другие процессы диссипации (соответствующие с квантовомеханической точки зрения другим причинам затуха-

ния, существующим наряду с излучением фотонов), то нужно добавить в левой части уравнения слагаемые вида $m\Gamma'\dot{\mathbf{x}}$, где Γ' — постоянная затухания, имеющая размерность частоты и характеризующая величину неэлектромагнитных диссипативных эффектов. Падающее электромагнитное поле является возбуждающей внешней силой. В дипольном приближении уравнение движения принимает вид

$$\ddot{\mathbf{x}} + \Gamma'\dot{\mathbf{x}} - \tau\ddot{\ddot{\mathbf{x}}} + \omega_0^2\mathbf{x} = \frac{e}{m}\mathbf{e}E_0e^{-i\omega t}, \quad (17.59)$$

где E_0 — значение напряженности электрического поля в точке $\mathbf{x} = 0$, а \mathbf{e} — вектор поляризации падающего поля. Установившееся решение уравнения движения имеет вид

$$\mathbf{x} = \frac{e}{m} \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_t} \mathbf{e}, \quad (17.60)$$

где величину

$$\Gamma_t(\omega) = \Gamma' + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \Gamma \quad (17.61)$$

можно назвать *полной постоянной затухания*, или *полной шириной линии*. Постоянная затухания, обусловленного излучением, есть $\Gamma = \omega_0^2\tau$. Ускоренное движение, описываемое решением (17.60), приводит к излучению электромагнитного поля. Напряженность электрического поля излучения описывается формулой (14.18):

$$\mathbf{E}_{\text{изл}} = \frac{e}{c^2} \frac{1}{r} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{x}})]_{\text{запазд.}}$$

Следовательно, выражение для составляющей поля излучения с поляризацией \mathbf{e}' имеет вид

$$\mathbf{e}' \cdot \mathbf{E}_{\text{изл}} = \frac{e^2}{mc^2} \omega^2 \frac{E_0 e^{-i\omega t} e^{ikr}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_t} \left(\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}'}{r}\right). \quad (17.62)$$

Согласно определению (14.101), дифференциальное сечение рассеяния для частоты ω и поляризации \mathbf{e}' равно

$$\frac{d\sigma(\omega, \mathbf{e}')}{d\Omega} = \left| \frac{r\mathbf{e}' \cdot \mathbf{E}_{\text{изл}}}{E_0} \right|^2 = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}')^2 \left[\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma_t^2} \right]. \quad (17.63)$$

Множитель перед квадратной скобкой совпадает с томсоновским сечением рассеяния для свободной частицы.

Для частот, много меньших частоты связи ($\omega \ll \omega_0$), дифференциальное сечение рассеяния принимает вид

$$\frac{d\sigma(\omega, \mathbf{e}')}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}')^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4. \quad (17.64)$$

Таким образом, интенсивность рассеяния длинноволнового излучения обратно пропорциональна четвертой степени длины волны (закон рассеяния Рэлея). Как уже отмечалось в гл. 16, § 9, таким свойством обладают все системы с электрической дипольной поляризуемостью.

В области частот, близких к частоте связи ω_0 , имеется характерный резонанс и интенсивность рассеяния сильно возрастает. Вблизи резонанса дифференциальное сечение рассеяния определяется приближенным выражением

$$\frac{d\sigma(\omega, \mathbf{e}')}{d\Omega} \approx \frac{9}{16} \lambda_0^2 \frac{\Gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma_t/2)^2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}')^2, \quad (17.65)$$

где $\lambda_0 = c/\omega_0$ — резонансная длина волны (деленная на 2π), $\Gamma = \omega_0^2 \tau$ — постоянная затухания, обусловленного излучением, и $\Gamma_t \approx \Gamma + \Gamma'$. Проводя суммирование по поляризациям рассеянного поля и интегрирование по всем углам, находим полное сечение рассеяния

$$\sigma_{\text{расс}}(\omega) \approx \frac{3\pi}{2} \lambda_0^2 \frac{\Gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma_t/2)^2}. \quad (17.66)$$

Полученное распределение интенсивности типично для лоренцевой формы линии с шириной Γ_t и максимальным значением сечения рассеяния

$$\sigma_{\text{расс}}(\omega_0) = 6\pi \lambda_0^2 \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_t} \right)^2. \quad (17.67)$$

На высоких частотах ($\omega \gg \omega_0$) дифференциальное сечение рассеяния (17.63) приближается к томсоновскому сечению для свободной частицы, если не учитывать множителя $(1 + \omega^2 \tau^2)^{-1}$, обусловленного радиационным торможением. В классической области этот множитель можно положить равным единице: $\omega \tau \sim 1$ соответствует энергиям фотонов $\hbar \omega \sim 137 mc^2$. Квантовые эффекты становятся существенными уже при $\hbar \omega \sim mc^2$, как было показано в гл. 14, § 7, и § 7 настоящей главы.

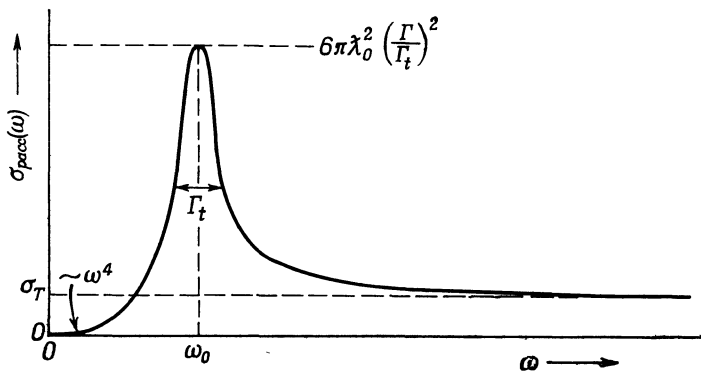
На фиг. 17.3 изображена кривая изменения полного сечения рассеяния во всем диапазоне частот, описываемом классическими формулами.

Резко выраженное резонансное рассеяние при $\omega = \omega_0$ называется *резонансной флуоресценцией*. С квантовомеханической точки зрения этот резонанс соответствует поглощению электромагнитного излучения атомом, молекулой или ядром, переходящими из основного состояния в возбужденное с последующим излучением электромагнитной энергии во всех направлениях. Множитель $6\pi \lambda_0^2$ в выражении для максимального значения сечения рас-

сеяния при квантовомеханическом расчете заменяется статистическим коэффициентом

$$6\pi\lambda_0^2 \rightarrow 4\pi\lambda_0^2 \frac{2J_{\text{возб}} + 1}{2(2J_{\text{осн}} + 1)},$$

где $J_{\text{осн}}$ и $J_{\text{возб}}$ — моменты количества движения основного и возбужденного состояний, $4\pi\lambda_0^2$ — максимальное возможное сечение рассеяния для любого отдельного квантового состояния. Остальные множители представляют результат суммирования по всем



Ф и г. 17.3. Зависимость полного сечения рассеяния для осциллятора от частоты.

σ_T — томсоновское сечение рассеяния для свободной частицы.

конечным магнитным подсостояниям и усреднения по начальным состояниям, а множитель 2 — статистический вес, обусловленный возможностью различной поляризации падающего излучения. Классический результат соответствует $J_{\text{осн}} = 0$ и $J_{\text{возб}} = 1$.

Поглощение излучения осциллятором уже рассматривалось в гл. 13, § 2. Роль внешнего возбуждающего поля при этом играло поле быстрой заряженной частицы, но рассмотрение [от уравнения (13.15) до (13.24)] проводилось в достаточно общем виде и может быть прямо перенесено на наш случай. Единственное отличие состоит в том, что величину Γ , которая использовалась в гл. 13, § 2, следует заменить на Γ_t [см. (17.61)], а падающее электрическое поле следует считать монохроматическим. Согласно (13.24), в дипольном приближении энергия, поглощаемая в единичном интервале частот, равна

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{e^2}{m} |E_0(\omega)|^2 \frac{2\omega^2\Gamma_t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma_t^2}. \quad (17.68)$$

Можно определить сечение поглощения как отношение энергии, поглощенной в единичном интервале частот, к величине энергии

в этом частотном интервале, падающей на единицу поверхности., Падающий поток энергии равен $(c/2\pi) |E_0(\omega)|^2$. Следовательно, сечение поглощения оказывается равным

$$\sigma_{\text{погл}}(\omega) = 4\pi \frac{e^2}{mc} \frac{\omega^2 \Gamma_t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_t^2}. \quad (17.69)$$

Учитывая, что $\Gamma = \omega_0^2 \tau$, можно последнее выражение переписать в виде

$$\sigma_{\text{погл}}(\omega) = 6\pi \lambda_0^2 \frac{\omega^2 \Gamma \Gamma_t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_t^2}. \quad (17.70)$$

В трех областях частот $\omega \ll \omega_0$, $\omega \sim \omega_0$ и $\omega \gg \omega_0$ сечение поглощения можно описать приближенными выражениями

$$\sigma_{\text{погл}}(\omega) \approx \begin{cases} 6\pi \lambda_0^2 \frac{\omega^2 \Gamma \Gamma_t}{\omega_0^4} & \text{при } \omega \ll \omega_0, \\ \frac{3\pi}{2} \lambda_0^2 \frac{\Gamma \Gamma_t}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\Gamma_t/2)^2} & \text{при } \omega \sim \omega_0, \\ 6\pi \lambda_0^2 \frac{\Gamma \Gamma_t}{\omega^2} & \text{при } \omega \gg \omega_0. \end{cases} \quad (17.71)$$

Мы видим, что вблизи резонансной частоты ω_0 кривая сечения поглощения, как и кривая сечения рассеяния, имеет лоренцову форму, но по величине сечение поглощения превышает сечение рассеяния в Γ_t/Γ раз. На высоких частотах $\Gamma_t \approx \omega^2 \tau$, и, таким образом, величина сечения поглощения стремится к постоянному томсоновскому сечению (мы вновь пренебрегаем величиной $\omega \tau$ по сравнению с единицей).

Сечение поглощения иногда называют *полным* сечением, так как оно учитывает влияние всех процессов, как рассеяния, так и других диссипативных эффектов, характеризующихся величиной Γ' . Для нахождения сечения поглощения следует лишь вычислить энергию, поглощенную осциллятором, не интересуясь, будет ли она затем испущена в виде электромагнитных волн или рассеется каким-либо иным способом. Сечение процессов, отличных от рассеяния, называют *сечением реакции* $\sigma_r(\omega)$. Оно может быть вычислено просто как разность полного сечения и полного сечения рассеяния. Можно предложить следующую единообразную форму записи трех введенных сечений, сходную с выражением (17.70):

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\text{расс}}(\omega) \\ \sigma_r(\omega) \\ \sigma_{\text{погл}}(\omega) \end{array} \right\} = 6\pi c^2 \frac{(\omega^2/\omega_0^2) \Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_t^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Gamma, \\ \Gamma', \\ \Gamma_t. \end{array} \right. \quad (17.72)$$

В выражения для всех трех сечений входит одинаковый характерный резонансный знаменатель. Интенсивность радиационных процессов пропорциональна $(\omega^2/\omega_0^2) \Gamma = \omega^2 \tau$. Прочие диссипативные процессы пропорциональны Γ' . Общий множитель $(\omega^2/\omega_0^2) \Gamma$ характеризует падающее излучение. В выражении для сечения рассеяния появляется второй множитель $(\omega^2/\omega_0^2) \Gamma$, а в сечении реакции — множитель Γ' . Полное сечение (сечение поглощения) определяется полной шириной линии Γ_t . К такому же характерному произведению постоянных затухания или ширин линий, соответствующих начальному и конечному состояниям процесса, приводит и квантовомеханическое рассмотрение теории резонансных реакций.

Интегрируя сечение поглощения по всем частотам и пренебрегая сечением рассеяния, получаем соотношение, известное как *правило дипольных сумм*. Пренебрежение рассеянием эквивалентно предположению о том, что полная ширина линии Γ_t в (17.70) постоянна для всех частот. Как легко показать, в этом приближении интеграл от $\sigma_{\text{погл.}}(\omega)$ по всем частотам оказывается равным

$$\int_0^{\infty} \sigma_{\text{погл.}}(\omega) d\omega = \frac{2\pi^2 e^2}{mc}. \quad (17.73)$$

Мы видим, что результат интегрирования содержит лишь массу и заряд частицы и не зависит от иных характеристик, например от ω_0 и Γ' . Полученное соотношение эквивалентно выражению (13.26) для полной энергии, поглощенной системой из поля пролетающей частицы.

Правило дипольных сумм представляет собой общий результат, справедливый как в классической, так и в квантовой теории и не зависящий от частотных характеристик системы. Для его справедливости необходимо выполнение лишь двух физических требований: а) нормальные типы колебаний системы затухают во времени (хотя бы весьма медленно) из-за наличия потерь и б) на высоких частотах влияние связи несущественно и частица ведет себя как свободная (см. задачу 17.8).

Для системы независимых частиц с зарядами e_j и массами m_j , связанных с фиксированным центром сил, правило сумм обобщается очевидным образом:

$$\int_0^{\infty} \sigma_{\text{погл.}}(\omega) d\omega = \frac{2\pi^2}{c} \sum_j \frac{e_j^2}{m_j}. \quad (17.74)$$

Если частицы удерживаются в системе силами взаимодействия, следует исключить движение общего центра масс. Как легко показать, это достигается вычитанием из суммы (17.74) члена Q^2/M ,

где Q — полный заряд системы частиц, а M — полная масса. Для ядер с Z протонами и $N (= A - Z)$ нейтронами, согласно правилу сумм, получаем

$$\int_0^{\infty} \sigma_{\text{погл}}(\omega) d\omega = \frac{2\pi^2 e^2}{mc} \frac{NZ}{A}, \quad (17.75)$$

где e — заряд протона, а m — масса одного нуклона¹⁾.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

История попыток создания классических моделей заряженных частиц и связанные с этим вопросы приводятся в книге Уиттекера [116]. Идеи Абрагама, Лоренца, Пуанкаре и других в четкой и изящной форме изложены Лоренцом [69], § 26—37, 179—184. Рассуждения Лоренца представляются несколько старомодными с современной точки зрения, но для своего времени они могли служить примером ясного физического мышления.

Ясное, хотя и краткое, рассмотрение вопроса о собственной энергии и реакции излучения дано в книгах Беккера [6], § 13, 14, 66, Ландау и Лифшица [63], гл. 9, § 9, Пановского и Филипс [78], гл. 20, 21, Зоммерфельда [102], § 36.

Классическая теория релятивистского точечного электрона впервые разработана Дираком [36]. Интегро-дифференциальное уравнение движения (17.51), по-видимому, впервые опубликовано в книге Иваненко и Соколова [53], § 35. Многие аспекты классической релятивистской теории исследованы Рорлихом [82, 83].

Примеры решения интегро-дифференциального уравнения движения приведены в работе Пласса [80].

ЗАДАЧИ

17.1. Нерелятивистская частица с зарядом e и массой m удерживается линейной изотропной восстанавливающей силой с коэффициентом упругости $m\omega_0^2$.

С помощью уравнений (17.13) и (17.16) показать, что энергия и момент количества движения частицы экспоненциально убывают как $e^{-\Gamma t}$ от их начального значения, где $\Gamma = \omega_0^2 \tau$.

17.2. Нерелятивистский электрон с зарядом $-e$ и массой m , удерживаемый кулоновским потенциалом притяжения ($-Ze^2/r$), движется при отсутствии реакции излучения по круговой орбите.

а) Показать, что уравнения изменения энергии (17.13) и момента количества движения (17.16) приводят к следующему закону медленного изме-

¹⁾ В действительности, правило сумм для ядерного фотоэффекта содержит еще добавочный множитель $(1+x)$, где $x \sim 1/2$ учитывает обменные силы в ядре. Физически это увеличение можно объяснить, представляя обменные силы как результат переноса виртуальных заряженных π -мезонов между нуклонами. Эти виртуальные заряженные мезоны вносят вклад в полный ядерный ток. Так как отношение e/m для них больше, чем для нуклонов, происходит увеличение дипольной суммы по сравнению с ее обычным значением (17.75).

нения радиуса орбиты:

$$r^3(t) = r_0^3 - 9Z(\text{ст})^3 \frac{t}{\tau},$$

где r_0 — значение $r(t)$ при $t = 0$.

б) Для круговых орбит в атоме Бора радиусы и главные квантовые числа n связаны соотношением $r = n^2 a_0 / Z$. Определив вероятность переходов $n \rightarrow (n-1)$ как $-dn/dt$, показать, что полученный в п. «а» результат согласуется с решением задачи 14.9.

в) На основании решения, приведенного в п. «а», получить численные оценки времени перехода μ -мезонов с массой $m = 207m_e$ с круговой орбиты, характеризуемой главным квантовым числом $n_1 = 10$, на орбиты с $n_2 = 4$, $n_2 = 1$. Полученные величины дают разумную оценку для времени перехода μ -мезонов на низшую орбиту после захвата их изолированным атомом.

17.3. Электрон с энергией связи ε и моментом количества движения L движется в кулоновском поле ($-Ze^2/r$) притяжения по эллиптической орбите

$$\frac{1}{r} = \frac{Ze^2 m}{L} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon L^2}{Z^2 e^4 m}} \cos(\theta - \theta_0) \right],$$

причем эксцентриситет ξ эллипса равен квадратному корню перед косинусом.

а) Производя соответствующие усреднения по времени для мгновенной орбиты, показать, что медленные изменения энергии и момента количества движения определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{2^{3/2}}{3} \frac{Z^3 e^8 m^{1/2}}{c^3} \frac{\varepsilon^{3/2}}{L^5} \left(3 - \frac{2\varepsilon L^2}{Z^2 e^4 m} \right), \\ \frac{dL}{dt} &= -\frac{2^{5/2}}{3} \frac{Ze^4}{m^{1/2} c^3} \frac{\varepsilon^{3/2}}{L^2}. \end{aligned}$$

б) Показать, что при начальных значениях ε и L , равных ε_0 и L_0 ,

$$\varepsilon(L) = \frac{Z^2 e^4 m}{2L^2} \left[1 - \left(\frac{L}{L_0} \right)^3 \right] + \frac{\varepsilon_0}{L_0} L.$$

Вычислить эксцентриситет эллипса и убедиться, что он убывает пропорционально $(L/L_0)^{3/2}$, и, таким образом, форма орбиты стремится с течением времени к круговой.

в) Сравнить полученные результаты с решением для частного случая круговой орбиты в задаче 17.2.

Указание. При усреднении по времени воспользоваться законом равных площадей Кеплера ($dt = mr^2 d\theta/L$) для преобразования интегралов по времени в интегралы по углу.

17.4. Согласно теории Дирака (1938 г.), релятивистское уравнение движения классического точечного электрона имеет вид

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = F_\mu^{\text{внеш}} + F_\mu^{\text{изл}},$$

где p_μ представляет собой 4-импульс частицы, τ — ее собственное время, а $F_\mu^{\text{изл}}$ — ковариантное обобщение силы реакции излучения (17.8).

Учитывая требование, что любая сила должна удовлетворять соотношению $F_{\mu} p_{\mu} = 0$, показать, что

$$F_{\mu}^{\text{изл}} = \frac{2e^2}{3mc^3} \left[\frac{d^2 p_{\mu}}{d\tau^2} - \frac{p_{\mu}}{m^2 c^2} \left(\frac{dp_{\nu}}{d\tau} \frac{dp_{\nu}}{d\tau} \right) \right].$$

17.5. а) Показать, что для одномерного релятивистского движения уравнение движения, приведенное в задаче 17.4, может быть представлено в виде

$$\dot{p} - \frac{2e^2}{3mc^3} \left(\ddot{p} - \frac{p \dot{p}^2}{p^2 + m^2 c^2} \right) = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} f(\tau),$$

где p — импульс частицы в направлении движения, точка означает дифференцирование по собственному времени, а $f(\tau)$ — обычная сила Ньютона, зависящая от собственного времени.

б) Показать, что с помощью подстановки $p = mc \operatorname{sh} y$ релятивистское уравнение приводится к уравнению Абрагама — Лоренца (17.9) для y и τ . Получить общее решение для $p(\tau)$ с начальными условиями

$$p(\tau) = p_0 \quad \text{при } \tau = 0.$$

17.6. Нерелятивистская частица с зарядом e и массой m ускоряется постоянным электрическим полем в зазоре длиной d . Идеализируем, будем считать, что частица совершает одномерное движение под действием внешней силы $m\alpha$, отличной от нуля лишь на интервале $(0, d)$. Если не учитывать радиационного затухания, то частица с начальной скоростью v_0 будет равномерно ускоряться в течение времени $T = (-v_0/\alpha) + \sqrt{(v_0/\alpha)^2 + (2d/\alpha)}$ и выйдет из зазора (при $x = d$) с конечной скоростью $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2\alpha d}$.

При учете радиационного затухания параметры движения изменяются: частица пролетает зазор за время T' и выходит из него со скоростью v_1' .

а) Решить интегро-дифференциальное уравнение движения частицы, учитывающее влияние излучения, считая, что T и T' много больше τ . Начертить графики зависимости скорости от времени с учетом и без учета радиационного затухания.

б) Показать, что с учетом лишь низших членов разложения по τ

$$T' = T - \tau \left(1 - \frac{v_0}{v_1} \right),$$

$$v_1' = v_1 - \frac{\alpha^2 \tau}{v_1} T.$$

в) Убедиться, что сумма излученной энергии и изменения кинетической энергии частицы равна работе, совершаемой приложенным полем.

17.7. В классической модели, описывающей уширение спектральных линий из-за соударений, принимается, что в результате соударения колебания осциллятора прекращаются и, следовательно, после некоторого времени колебаний T когерентный волновой цуг обрывается.

а) Считая, что вероятность соударения в интервале времени $(T, T + dT)$ для осциллятора, рассмотренного в § 8, определяется законом $\nu e^{-\nu T} dT$, где ν — средняя частота соударений, показать, что усредненное спектральное распределение интенсивности имеет вид

$$I(\omega) = \frac{I_0}{2\pi} \frac{\Gamma + 2\nu}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2 + \nu)^2},$$

так что ширина линии равна $(\Gamma + 2\nu)$

б) Для дублета натрия ($\lambda \approx 5893 \text{ \AA}$) сила осциллятора $f_j = 0,975$ и, таким образом, естественная ширина линии близка к классической величине $\Delta\lambda = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ \AA}$.

Оценить доплеровское уширение линии, считая, что атомы натрия находятся в термодинамическом равновесии при температуре 500° K , и сравнить результат с естественной шириной. Приняв для сечения соударений величину 10^{-16} см^2 , определить зависимость обусловленной соударениями ширины линии дублета натрия от давления паров натрия. При каком давлении уширение линии из-за соударений совпадает с естественной шириной и при каком — с доплеровской шириной?

17.8. Частица колеблется под действием приложенного электрического поля $E_0 e^{-i\omega t}$. Дипольный момент этого осциллятора

$$p = \alpha(\omega) E_0 e^{-i\omega t}.$$

а) Показать, что сечение поглощения для диполя может быть записано в виде

$$\sigma_{\text{погл}}(\omega) = \frac{2\pi}{c} [-i\omega\alpha(\omega) + \text{Компл. сопр.}].$$

б) Используя лишь то обстоятельство, что все нормальные типы колебаний должны обладать некоторым затуханием и что поляризуемость $\alpha(\omega)$ на высоких частотах должна стремиться к величине $(-e^2/m\omega^2)$, соответствующей свободным частицам, показать, что сечение поглощения удовлетворяет следующему правилу дипольных сумм:

$$\int_0^{\infty} \sigma_{\text{псгл}}(\omega) d\omega = \frac{2\pi^2 e^2}{mc}.$$

ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ И РАЗМЕРНОСТИ

Вопрос об единицах измерения и размерностях в электродинамике уже давно занимал многих физиков и инженеров. Положение

здесь заметно отличается от почти единодушного согласия в выборе основных единиц длины (сантиметр или метр), массы (грамм или килограмм) и времени (средняя солнечная секунда). По-видимому, это можно объяснить тем, что механические единицы были определены в то время (сразу после 1800 г.), когда появилась идея «абсолютных» стандартов и они были внедрены в научном и промышленном мире группой научных гигантов (Борда, Лаплас и другие). Наоборот, проблема выбора электромагнитных единиц возникла уже в то время, когда появилось множество специалистов в этой области. В настоящем приложении мне хотелось бы без излишних дискуссий внести ясность в указанный вопрос.

§ 1. Единицы измерения и размерности. Основные и производные единицы

Произвол в выборе числа основных единиц и размерности любой физической величины, выражаемой в этих единицах, подчеркивали еще Абрагам, Планк, Бриджмен [20], Бэрдж [12] и другие ученые. Читателю, специально интересующемуся этим вопросом, целесообразно познакомиться с серией прекрасных статей Бэрджа. Система единиц в любой области науки должна быть удобной и ясной. Так, физики-теоретики, работающие в области релятивистской квантовой теории поля и теории элементарных частиц, считают удобным *принять* такие универсальные постоянные, как квант действия Планка и скорость света в свободном пространстве *равными единице и безразмерными*. Получающаяся при этом система единиц (называемая естественной системой единиц) имеет лишь *одну* основную единицу, в качестве которой обычно выбирается единица длины. Все осталь-

ные величины — будь то длина, или время, или сила, или энергия и т. д. — выражаются через эту единственную единицу и имеют размерность, определяющуюся как некоторая степень размерности основной единицы. В такой системе нет ничего надуманного или менее физического, чем в системе, использующей в качестве основных единиц метр, килограмм и секунду (система МКС). Все это — лишь вопрос удобства¹⁾.

Необходимо сказать несколько слов об основных единицах (стандартах), рассматриваемых как независимые величины, и о производных единицах, размерность и величина которых определяются теоретически и экспериментально через основные единицы. По традиции принято считать основными единицы массы (m), длины (l) и времени (t). В выборе единиц электрических величин установившейся традиции еще нет. Рассмотрим, например, единицу тока. «Международный» ампер (долгое время считавшийся практической единицей тока) определяется количеством серебра, отлагающегося за единицу времени при электролизе в стандартном серебряном вольтамetre. Эту единицу тока следует рассматривать как основную единицу, независимую от единиц массы, длины и времени, так как единица силы тока находится из независимого эксперимента с электролизом, допускающего повторное воспроизведение.

Наоборот, принятый в настоящее время стандарт тока «абсолютный» ампер определяется как ток, при прохождении которого по двум бесконечно длинным параллельным прямолинейным проводникам, имеющим пренебрежимо малое поперечное сечение и расположенным на расстоянии 1 м в вакууме, проводники взаимодействуют с силой, равной $2 \cdot 10^{-7}$ н/м (ньютон/метр) на единицу длины. Очевидно, что «абсолютный» ампер — производная единица, так как ее определяют по механической силе, действующей между проводниками, в соответствии с приводимым ниже выражением (П.4)²⁾. Согласно этому определению, «абсолютный» ампер равен точно $1/10$ от электромагнитной единицы тока. С 1948 г. применяется Международная система электромагнитных единиц, в которой за

¹⁾ В квантовой теории поля роль основных единиц, входящих в теорию размерностей, играют степени константы связи.

²⁾ Коэффициент пропорциональности k_2 в формуле (П.4) принимает, таким образом, значение 10^{-7} в системе МКС. Размерность «абсолютного» ампера в отличие от его численной величины зависит от выбора размерности коэффициента k_2 . В обычной системе МКС при определении единиц электродинамических величин в качестве четвертой основной единицы произвольно выбирают электрический заряд (q). В результате размерность ампера оказывается равной (qt^{-1}) , а коэффициент k_2 имеет размерность (mlq^{-2}) . Если же считать k_2 безразмерным, то для тока получаем размерность $(m^{1/2}l^{1/2}t^{-1})$. Вопрос о том, вводить ли четвертую основную единицу (например, единицу заряда) или же определять размерности электродинамических величин в виде степеней (в ряде случаев дробных) трех основных механических единиц, не имеет существенного значения и является делом вкуса.

основные единицы приняты метр, килограмм, секунда и определенный выше «абсолютный» ампер, а соответствующие производные единицы сопротивления, напряжения и т. д. выражаются через основные. Такое решение представляется удовлетворительным.

При этом устраняются трудности, подобные, например, тем, которые возникли при попытке ввести три независимые единицы тока, напряжения и сопротивления ¹⁾, определяемые в трех независимых экспериментах (стандартный вольтметр, стандартный элемент Кларка и стандартный столбик ртути). Именно такая попытка была сделана в 1894 г. в акте Конгресса США, основанном на рекомендациях Международной комиссии инженеров и ученых. В результате принятия этого акта вскоре оказалось, что закон Ома «нарушается» из-за того, что систематические ошибки эксперимента превышают необходимую точность.

§ 2. Единицы измерения и уравнения электродинамики

При рассмотрении единиц и размерностей в теории электромагнетизма мы будем придерживаться традиции и примем в качестве основных независимых величин длину (l), массу (m) и время (t). Кроме того, воспользуемся общепринятым определением тока как скорости изменения заряда во времени ($I = dq/dt$). Это означает, что отношение заряда к току имеет размерность времени ²⁾. Уравнение непрерывности, связывающее плотности заряда и тока, принимает при этом вид

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (\text{П.1})$$

Для простоты мы будем вначале рассматривать лишь электромагнитные явления в свободном пространстве в отсутствие зарядов и токов.

Основным физическим законом электростатики является закон Кулона, определяющий силу взаимодействия двух точечных зарядов q и q' , расположенных на расстоянии r друг от друга. Этот закон можно записать в виде

$$F_1 = k_1 \frac{qq'}{r^2}. \quad (\text{П.2})$$

Величину и размерность постоянного коэффициента k_1 можно либо определить из уравнения, если независимо определена величина

¹⁾ См., например, [65].

²⁾ С точки зрения специальной теории относительности более естественно в качестве размерности тока принять размерность отношения заряда к длине. При этом плотность тока \mathbf{J} и плотность заряда ρ будут иметь одинаковую размерность и образуют 4-вектор. Такой выбор единиц принят в модифицированной гауссовой системе (см. стр. 681).

на и размерность единицы заряда, либо выбирать произвольным образом, задав тем самым единицу заряда. Требуется лишь, чтобы произведение $k_1 q q'$ имело размерность (ml^3t^{-2}) .

Напряженность электрического поля E — производная величина, определяемая обычно как сила, действующая на единичный заряд. Можно было бы определить напряженность электрического поля более общим образом, считая ее пропорциональной силе, действующей на единичный заряд, с коэффициентом пропорциональности, являющимся универсальной постоянной. При этом коэффициент пропорциональности может, вообще говоря, быть размерным, так что напряженность электрического поля не будет иметь размерности силы на единичный заряд. Однако, принимая такое чересчур общее определение E , мы ничего не выигрываем, так как E представляет собой *первую* производную характеристику поля, подлежащую определению. Лишь при определении последующих характеристик поля может оказаться удобным ввести в определяющие формулы размерные постоянные коэффициенты, с помощью которых можно согласовать величины и размерности этих характеристик поля с соответствующими свойствами напряженности электрического поля. Следовательно, без потери общности можно определить напряженность электрического поля точечного заряда q как силу, действующую на единичный заряд, так что, согласно (П.2),

$$E = k_1 \frac{q}{r^2}. \quad (\text{П.3})$$

Во всех известных автору системах единиц используется это определение напряженности электрического поля.

В магнитостатике взаимодействие токов и определение магнитной индукции рассматривают исходя из закона Ампера. Согласно закону Ампера, приходящаяся на единицу длины сила взаимодействия двух бесконечно длинных параллельных проводов, находящихся на расстоянии d и несущих токи I и I' , равна

$$\frac{dF_2}{dl} = 2k_2 \frac{II'}{d}. \quad (\text{П.4})$$

Здесь k_2 — коэффициент пропорциональности, аналогичный k_1 в формуле (П.2). Безразмерный численный множитель 2 введен в формулу (П.4) для большего удобства при определении коэффициента k_2 в дальнейшем. При связи размерностей тока и зарядов, устанавливаемого соотношением (П.1), соотношение между размерностями коэффициентов k_2 и k_1 уже определено. Как легко видеть из (П.2) и (П.4), отношение k_1/k_2 имеет размерность квадрата скорости (l^2t^{-2}) . Далее, путем сравнения величин механических сил (П.2) и (П.4) при известных зарядах и токах можно найти значение отношения k_1/k_2 для свободного пространства.

Численная величина этого отношения оказывается очень близка к квадрату скорости света в свободном пространстве. Таким образом,

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2, \quad (\text{П.5})$$

где c по величине и размерности совпадает со скоростью света [$c = (2,997930 \pm 0,000003) \cdot 10^{10}$ см/сек].

Вектор магнитной индукции \mathbf{B} может быть определен на основании закона взаимодействия токов Ампера как величина, пропорциональная силе, действующей на единичный ток, причем постоянный коэффициент пропорциональности α может быть выбран размерным, если это окажется удобным. Таким образом, величина (и размерность) магнитной индукции на расстоянии d от длинного прямолинейного проводника, несущего ток I , определяется формулой

$$\mathbf{B} = 2k_2\alpha \frac{I}{d}. \quad (\text{П.6})$$

Размерность отношения напряженности электрического поля к магнитной индукции можно найти из соотношений (П.1), (П.3) (П.5) и (П.6). Легко видеть, что отношение E/B имеет размерность (l/ta) .

Третьим и последним соотношением, на основании которого определяются единицы и размерности электродинамических величин, является закон электромагнитной индукции Фарадея, устанавливающий связь электрических и магнитных явлений. Дифференциальная форма этого экспериментально установленного закона, согласно которому электродвижущая сила, наведенная в контуре, пропорциональна скорости изменения магнитного потока через него, имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{E} + k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{П.7})$$

где k_3 — коэффициент пропорциональности. Так как связь между размерностями \mathbf{E} и \mathbf{B} установлена, размерность k_3 можно выразить через размерности ранее определенных величин, потребовав, чтобы оба члена в (П.7) имели одинаковую размерность. В результате оказывается, что k_3 имеет размерность α^{-1} . В действительности, коэффициент k_3 точно равен α^{-1} . Это было установлено в гл. 6, § 1, на основе инвариантности относительно преобразований Галилея. Но проще всего убедиться в этом, исходя из уравнений Максвелла для определенных выше полей:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi k_1 \rho, \\ \text{rot } \mathbf{B} &= 4\pi k_2 \chi \mathbf{J} + \frac{k_2 \alpha}{k_1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{E} + k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Для областей без источников можно, комбинируя второе и третье уравнения, получить волновое уравнение

$$\nabla^2 \mathbf{B} - k_3 \frac{k_2 \alpha}{k_1} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{П.9})$$

Скорость распространения волн, описываемых уравнением (П.9), определяется входящей в уравнение комбинацией констант. Как известно, эта скорость должна быть равна скорости света, так что

$$\frac{k_1}{k_3 k_2 \alpha} = c^2. \quad (\text{П.10})$$

Из (П.5) и (П.10) следует равенство

$$k_3 = \frac{1}{\alpha}, \quad (\text{П.11})$$

определяющее связь как размерностей, так и численных величин этих коэффициентов.

§ 3. Различные системы электромагнитных единиц

Системы электромагнитных единиц отличаются выбором величин и размерностей различных введенных выше констант. Из-за наличия соотношений (П.5) и (П.11) лишь две константы (например, k_1 и k_3) могут (и должны) выбираться произвольно. Целесообразно, однако, свести в таблицу все четыре константы (k_1 , k_2 , α , k_3) для наиболее употребительных систем единиц. Это и сделано в табл. 1. Заметим, что, за исключением размерностей величин, единицы в электромагнитной системе и системе МКС очень похожи: они различаются лишь степенями десяти. Гауссова система и система Хевисайда — Лоренца отличаются лишь множителями 4π . Лишь в гауссовой системе и в системе единиц Хевисайда — Лоренца коэффициент k_3 имеет размерность. Как очевидно из соотношения (П.7), если k_3 имеет размерность обратной скорости, то размерность векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} одинакова. Более того, из соотношения (П.7) следует, что при $k_3 = c^{-1}$ для электромагнитных волн в свободном пространстве \mathbf{E} и \mathbf{B} равны по величине.

До сих пор рассматривались лишь электромагнитные поля в свободном пространстве. Поэтому мы ограничивались лишь двумя полями \mathbf{E} и \mathbf{B} . Остается еще определить характеристики макроскопических полей \mathbf{D} и \mathbf{H} . Если усредненные электромагнитные свойства материальной среды описывать макроскопической поля-

Таблица 1

Величины и размерности электромагнитных констант для различных систем единиц

Размерность константы указана в скобках после ее численного значения. Через c обозначена скорость света в свободном пространстве ($c = 2,998 \cdot 10^{10}$ см/сек $= 2,998 \cdot 10^8$ м/сек). В четырех первых системах единиц в качестве основных единиц (l, m, t) приняты сантиметр, грамм и секунда. В системе МКС используются четыре основные единицы: метр, килограмм, секунда и единица заряда (q).

Система	k_1	k_2	α	k_3
Электростатическая	1	$c^{-2} (t^2 l^{-2})$	1	1
Электромагнитная	$c^2 (l^2 t^{-2})$	1	1	1
Гауссова	1	$c^{-2} (t^2 l^{-2})$	$c (l t^{-1})$	$c^{-1} (t l^{-1})$
Хевисайда—Лоренца	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi c^2} (t^2 l^{-2})$	$c (l t^{-1})$	$c^{-1} (t l^{-1})$
Рационализованная МКС	$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} = 10^{-7} c^2$ $(m l^3 t^{-2} q^{-2})$	$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ $(m l q^{-2})$	1	1

ризациями \mathbf{P} и намагниченностью \mathbf{M} , то векторы \mathbf{D} и \mathbf{H} определяются общими формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \lambda \mathbf{P}, \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \lambda' \mathbf{M}, \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

где $\epsilon_0, \mu_0, \lambda, \lambda'$ — постоянные коэффициенты. Мы не получим никакого преимущества, если будем считать размерности величин \mathbf{D} и \mathbf{P} или \mathbf{H} и \mathbf{M} различными. Поэтому коэффициенты λ и λ' следует считать безразмерными числами (в рационализованных системах $\lambda = \lambda' = 1$, в нерационализованных $\lambda = \lambda' = 4\pi$). Что же касается выбора коэффициентов ϵ_0 и μ_0 , то \mathbf{D} и \mathbf{P} можно считать отличающимися по размерности от \mathbf{E} , а \mathbf{H} и \mathbf{M} отличающимися от \mathbf{B} . Окончательный выбор коэффициентов производится, исходя из соображений удобства и простоты. Обычно стремятся придать макроскопическим уравнениям Максвелла относительно простую и изящную форму. Прежде чем перечислить возможные варианты указанного выбора, принятые в различных системах единиц, напомним

Величины ϵ_0 , μ_0 , D , H , макроскопические уравнения Максвелла и силы Лоренца в различных системах единиц

В скобках указывается размерность величин. Через c обозначена скорость света, имеющая размерность (lt^{-1}) .

Система	ϵ_0	μ_0	D, H	Макроскопические уравнения Максвелла	Сила Лоренца, действующая на единичный заряд
Электростатическая	1	c^{-2} (t^2l^{-2})	$D = E + 4\pi P$ $H = c^2 B - 4\pi M$	$\operatorname{div} D = 4\pi q, \operatorname{rot} H = 4\pi J + \frac{\partial D}{\partial t},$ $\operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \operatorname{div} B = 0$	$E + v \times B$
Электромагнитная	c^{-2} (t^2l^{-2})	1	$D = \frac{1}{c^2} E + 4\pi P$ $H = B - 4\pi M$	$\operatorname{div} D = 4\pi q, \operatorname{rot} H = 4\pi J + \frac{\partial D}{\partial t},$ $\operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \operatorname{div} B = 0$	$E + v \times B$
Гауссова	1	1	$D = E + 4\pi P$ $H = B - 4\pi M$	$\operatorname{div} D = 4\pi q, \operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t},$ $\operatorname{rot} E + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \operatorname{div} B = 0$	$E + \frac{v}{c} \times B$
Хевисайда — Лоренца	1	1	$D = E + P$ $H = B - M$	$\operatorname{div} D = q, \operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right),$ $\operatorname{rot} E + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \operatorname{div} B = 0$	$E + \frac{v}{c} \times B$
Рационализованная МКС	$\frac{10^7}{4\pi c^2}$ $(q^2 t^2 m^{-1} l^{-3})$	$4\pi \times 10^{-7}$ (mlq^{-2})	$D = \epsilon_0 E + P$ $H = \frac{1}{\mu_0} B - M$	$\operatorname{div} D = q, \operatorname{rot} H = J + \frac{\partial D}{\partial t},$ $\operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \operatorname{div} B = 0$	$E + v \times B$

ним, что для линейных изотропных сред материальные соотношения имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \mu \mathbf{J}. \quad (\text{П.13})$$

Таким образом, постоянные ε_0 и μ_0 в уравнениях (П.12) представляют собой значения ε и μ для свободного пространства. Относительная диэлектрическая проницаемость вещества (часто называемая диэлектрической постоянной) определяется как безразмерное отношение $\varepsilon/\varepsilon_0$, а относительная магнитная проницаемость (часто называемая просто проницаемостью) определяется как μ/μ_0 .

В табл. 2 приведены значения ε_0 и μ_0 , формулы, определяющие \mathbf{D} и \mathbf{H} , макроскопическая форма уравнений Максвелла и выражение для силы Лоренца в пяти наиболее употребительных системах единиц, перечисленных в табл. 1. Для каждой из систем единиц уравнение непрерывности, связывающее плотности токов и зарядов, имеет вид (П.1), как легко проверить, используя в каждом случае первые два уравнения Максвелла¹⁾. Закон Ома также записывается в одинаковом виде $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ (σ — проводимость) во всех системах единиц.

§ 4. Перевод формул и численных значений величин из гауссовой системы единиц в систему МКС

В настоящее время наибольшее распространение получили две системы электромагнитных единиц: гауссова и рационализованная система МКС. Система МКС весьма удобна при рассмотрении практических крупномасштабных явлений, особенно в различных технических приложениях. Гауссова система более пригодна при исследовании микроскопических проблем, в том числе электродинамики отдельных заряженных частиц. Так как настоящая книга посвящена в основном микроскопическим релятивистским проблемам, мы считали целесообразным использовать в ней гауссову систему единиц. В гл. 8, посвященной волноводам и полым резонаторам, была предпринята попытка умиротворить и инженеров, для чего основные формулы записывались в таком виде, чтобы, опустив множители в квадратных скобках, мы сразу получали бы эквивалентное уравнение в системе МКС (при этом все величины следует, конечно, понимать выраженными в единицах системы МКС).

¹⁾ Иногда используют модифицированную гауссову систему единиц, в которой ток определяется соотношением $I = (1/c) (dq/dt)$. При этом плотность тока \mathbf{J} в таблице следует заменить на $c\mathbf{J}$, а уравнение непрерывности принимает вид $\text{div } \mathbf{J} + (1/c) (\partial \rho / \partial t) = 0$ (см. также примечание к табл. 4).

Перевод из одной системы единиц в другую в общем случае может быть осуществлен с помощью табл. 3 и 4. Табл. 3 дает схему перевода *выражений и уравнений* и позволяет перевести любое уравнение из гауссовой системы в систему МКС, и наоборот. Имеются и более простые схемы, предназначенные лишь для перехода из системы МКС в гауссову; возможны также и другие общие схемы. Однако табл. 3 позволяет при неизменности всех механических величин сразу, без всякого добавочного рассмотрения, осуществлять перевод величин, встречающихся в электродинамике и механике (например, постоянной тонкой структуры $e^2/\hbar c$ или плазменной частоты $\omega_p^2 = 4\pi n e^2/m$).

В табл. 3 при переходе от одной системы к другой масса, длина, время и другие неэлектродинамические величины не изменяются.

Таблица 3

Таблица перевода выражений и формул из одной системы единиц в другую

Величина	Гауссова система	Рационализованная система МКС
Скорость света	c	$(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$
Напряженность электрического поля (потенциал, напряжение)	$E (\Phi, V)$	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} E (\Phi, V)$
Электрическая индукция	D	$\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}} D$
Плотность заряда (заряд, плотность тока, ток, поляризация)	$\rho (q, J, I, P)$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \rho (q, J, I, P)$
Магнитная индукция	B	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} B$
Напряженность магнитного поля	H	$\sqrt{4\pi\mu_0} H$
Намагниченность	M	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} M$
Проводимость	σ	$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}$
Диэлектрическая проницаемость	ϵ	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$
Магнитная проницаемость	μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$
Сопrotивление (импеданс)	$R (Z)$	$4\pi\epsilon_0 R (Z)$
Индуктивность	L	$4\pi\epsilon_0 L$
Емкость	C	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} C$

Чтобы с помощью табл. 3 преобразовать любое уравнение, записанное в гауссовой системе единиц, в уравнение в системе МКС, следует в обеих частях уравнения заменить символы, перечисленные в столбце «гауссова система», на соответствующие символы системы МКС, помещенные в правом столбце. Допустимо и обратное преобразование. Так как длина и время не изменяются при переходе к другой системе, величины, размерности которых отличаются лишь степенями длины и времени, по возможности сгруппированы вместе.

Табл. 4. для перевода единиц позволяет перевести численное значение любой физической величины из системы единиц МКС в гауссову и обратно. Табл. 4 составлена так, что по известному значению рассматриваемой физической величины, выраженной в единицах МКС или в гауссовых единицах, можно определить ее значение в единицах другой системы. Таким образом, значения, приводимые в каждой строке, представляют одно и то же количество, выраженное в различных единицах. Множители 3 (кроме входящих в показатели степени) следует при уточненных расчетах заменить на $(2,997930 \pm \pm 0,000003)$ в соответствии с точным значением скорости света. Так, например, в строке «электрическая индукция» точное значение приведенной величины $12\pi \cdot 10^5$ в действительности равно $(2,99793 \times \times 4\pi \cdot 10^5)$. В тех случаях, когда существует общепринятое наименование единиц, оно приведено в таблице. В остальных случаях говорят просто о числе единиц МКС или гауссовых единиц.

Таблица 4

Таблица перевода численных значений физических величин

Физическая величина	Обозначение	Рационализованная система МКС	Гауссова система
Длина	l	1 метр (м)	10^2 см
Масса	m	1 килограмм (кг)	10^3 г
Время	t	1 секунда (сек)	1 сек
Сила	F	1 ньютон (н)	10^5 дин
Работа	W	} 1 джоуль (дж)	10^7 эрг
Энергия	U		
Мощность	P	1 ватт (вт)	10^7 эрг·сек ⁻¹
Заряд	q	1 кулон (к)	$3 \cdot 10^9$ статкулон
Плотность заряда	ρ	1 кулон·метр ⁻³	$3 \cdot 10^3$ статкулон·см ⁻³
Ток	I	1 ампер (а) (к·сек ⁻¹)	$3 \cdot 10^9$ статампер
Плотность тока	J	1 ампер·метр ⁻²	$3 \cdot 10^5$ статампер·см ⁻²
Напряженность электрического поля	E	1 вольт·метр ⁻¹	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$ статвольт·см ⁻¹

Продолжение табл. 4

Физическая величина	Обозначение	Рационализированная система МКС	Гауссова система
Потенциал	Φ, V	1 вольт (<i>в</i>)	$\frac{1}{300}$ статвольт
Диэлектрическая поляризация	P	1 кулон·метр ⁻²	$3 \cdot 10^5$ статкулон·см ⁻² (статвольт·см ⁻¹)
Электрическая индукция	D	1 кулон·метр ⁻²	$12\pi \cdot 10^5$ статвольт·см ⁻¹ (статкулон·см ⁻²)
Проводимость	σ	1 ом ⁻¹ ·м ⁻¹	$9 \cdot 10^9$ сек ⁻¹
Сопротивление	R	1 ом	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ сек·см ⁻¹
Емкость	C	1 фарада (<i>ф</i>)	$9 \cdot 10^{11}$ см
Магнитный поток	Φ, F	1 вебер (<i>вб</i>)	10^8 гаусс·см ² (максвелл)
Магнитная индукция	B	1 вебер·метр ⁻²	10^4 гаусс
Напряженность магнитного поля	H	1 ампер-виток·метр ⁻¹	$4\pi \cdot 10^{-3}$ эрстед
Намагниченность	M	1 вебер·метр ⁻²	$\frac{1}{4\pi} \cdot 10^4$ гаусс
Индуктивность	L	1 генри (<i>гн</i>)	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$

Примечание. В определении единицы измерения индуктивности в гауссовой системе существует некоторая путаница. Она связана с тем, что ряд авторов использует модифицированную гауссову систему единиц, в которой ток измеряется в электромагнитных единицах. При этом заряд и ток связаны соотношением $I_m = (1/c)(dq/dt)$.

Индуктивность определяется соотношением для наведенного напряжения $V = L di/dt$ или для энергии $U = 1/2 LI^2$. При принятом в § 2 определении единицы тока гауссова единица индуктивности по величине и размерности ($t^2 l^{-1}$) совпадает с электростатической единицей индуктивности. Ток в электромагнитных единицах I_m связан с током в I гауссовой системе соотношением $I_m = (1/c)I$. Из энергетического определения индуктивности мы видим, что электромагнитная индуктивность L_m связана с гауссовой индуктивностью L соотношением $L_m = c^2 L$. Таким образом, L_m имеет размерность длины. В модифицированной гауссовой системе обычно используются электромагнитные единицы индуктивности (*см*) и тока. При этом соотношение, связывающее индуктивность и напряжение, имеет вид $V = (L_m/c)(di_m/dt)$.

Между различными единицами индуктивности существует следующее соотношение: $1 \text{ гн} = 1/9 \cdot 10^{-11}$ гауссовых единиц = 10^9 см .

БИБЛИОГРАФИЯ

1. A b r a h a m M., B e c k e r R., Theorie der Elektrizität, Bd. I, Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität, Leipzig, 1932. (См. перевод: М. А б р а г а м, Р. Б е к к е р, Теория электричества, М., 1936.)
2. A d l e r R. B., C h u L. J., F a n o R. M., Electromagnetic Energy Transmission and Radiation, New York, 1960.
3. A n a t o n i J., The Special Theory of Relativity, London, 1959.
4. A l f v é n H., Cosmical Electrodynamics, London, 1950. (См. перевод: Х. А л ь ф в е н, Космическая электродинамика, ИЛ, 1952.)
5. American Institute of Physics Handbook, New York, 1957.
6. B e c k e r R., Theorie der Elektrizität, Bd. II, Elektronentheorie, Berlin, 1933. (См. перевод: Р. Б е к к е р, Электронная теория, М., 1941.)
7. B a k e r V. B., C o p s o n E. T., Mathematical Theory of Huygens, Principle, 2nd ed., London, 1950.
8. Б а л д и н А. М., Г о л ь д а н с к и й В. И., Р о з е н т а л ь И. Л., Кинематика ядерных реакций, М., 1959.
9. Bateman Manuscript Project, Higher Transcendental Functions, ed. by A. Erdélyi, New York, 1953.
10. Bateman Manuscript Project, Tables of Integral Transforms, ed. by A. Erdélyi, New York, 1954.
11. B e r g m a n n P. G., Introduction to the Theory of Relativity, New Jersey, 1942. (См. перевод: П. Б е р г м а н, Введение в теорию относительности, ИЛ, 1947.)
12. B i r g e R. T., Amer. Phys. Teacher, 2, 41 (1934); 3, 102, 171 (1935).
13. B l a t t J. M., W e i s s k o p f V. F., Theoretical Nuclear Physics, New York, 1952. (См. перевод: Дж. Б л а т т, А. В а й с к о п ф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954.)
14. B o h r N., Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-fys. Medd., 18, No. 8 (1948). (См. перевод: Н. Б о р, Прохождение атомных частиц через вещество, ИЛ, 1950.)
15. B o r n M., The Mechanics of the Atom, London, 1927.
16. B o r n M., W o l f E., Principles of Optics, London, 1959.
17. B o r o w i t z S., K o h n W., Phys. Rev., 86, 985 (1952).

18. B ö t t c h e r C. J. F., Theory of Electric Polarization, New York, 1952.
19. Б р а г и н с к и й С. И., Ш а ф р а н о в В. Д., Ядерная физика (Труды Второй Международной конференции по мирному использованию атомной энергии), М., 1959, стр. 221.
20. B r i d g m a n P. W., Dimensional Analysis, New York, 1931. (См. перевод: П. В. Б р и д ж м э н, Анализ размерностей, М.—Л., 1934.)
21. O' B r i e n B., Physics Today, 13, 52 (1960).
22. B r i l l o u i n L., Wave Propagation and Group Velocity, New York, 1960.
23. B r o w n K. L., W i l s o n R., Phys. Rev., 93, 443 (1954).
24. B u t t E. P. et al., Физика горячей плазмы и термоядерные реакции (Труды Второй Международной конференции по мирному использованию атомной энергии), М., 1959, стр. 370.
25. B y e r l y W. E., Fourier Series and Spherical Harmonics, Boston, 1893.
26. C h a n d r a s e k h a r S., Plasma Physics, Chicago, 1960.
27. C h a n g C. S. W., F a l k o f f D. L., Phys. Rev., 76, 365 (1949).
28. C h u r c h i l l R. V., Fourier Series and Boundary Value Problems, New York, 1941.
29. C o n d o n E. U., S h o r t l e y G. H., Theory of Atomic Spectra, Cambridge, 1953. (См. перевод: Е. К о н д о н, Г. Ш о р т л и, Теория атомных спектров, ИЛ, 1949.)
30. C o p s o n E. T., Proc. Edin. Math. Soc., (2), 8, 14 (1947).
31. C o r b e n H. C., S t e h l e P., Classical Mechanics, 2nd ed., New York, 1960.
32. C o u r a n t R., H i l b e r t D., Methoden der mathematischen Physik, Berlin, 1937. (См. перевод: Р. К у р а н т, Д. Г и л ь б е р т, Методы математической физики, М., 1951.)
33. C o u r a n t E. D., S n y d e r H. S., Ann. Phys., 3, 1 (1958).
34. C o w l i n g T. G., Magnetohydrodynamics, New York, 1957. (См. перевод: Т. К а у л и н г, Магнитная гидродинамика, ИЛ, 1959.)
35. D e b y e P., Polar Molecules, New York, 1945. (См. перевод немецкого издания: П. Д е б а й, Полярные молекулы, М., 1931.)
36. D i r a c P. A. M., Proc. Roy. Soc., A167, 148 (1938).
37. D u r a n d E., Electrostatique et magnétostatique, Paris, 1953.
38. D u r b i n R. P., L o a r H. H., H a v e n s W. W., Phys. Rev., 88, 179 (1952).
39. E i n s t e i n A., L o r e n t z H. A., M i n k o w s k i H., W e y l H., Das Relativitätsprinzip, 4 Aufl., Leipzig, 1922. (См. перевод в книге: Г. Л о р е н ц, А. П у а н к а р е, А. Э й н ш т е й н, Г. М и н к о в с к и й, Принцип относительности; Сборник работ классиков релятивизма, Л., 1935.)
40. E l d e r F. R., L a n g m u i r R. V., P o l l o c k H. C., Phys. Rev., 74, 52 (1948).
41. F e r m i E., Phys. Zs., 23, 340 (1922) [см. также Atti accad. nazl. Lincei Rend., 31, 184, 306 (1922)].

42. Friedman B., Principles and Techniques of Applied Mathematics, New York, 1956.
43. Fröhlich H., Theory of Dielectrics, London, 1949. (См. перевод: Г. Фрелих, Теория диэлектриков, ИЛ, 1960.)
44. Fry W. F., Phys. Rev., **86**, 418 (1952).
45. Glasstone S., Lovberg R. H., Controlled Thermonuclear Reactions, New York, 1960.
46. Goldstein H., Classical Mechanics, Cambridge, Mass., 1950. (См. перевод: Г. Голдстейн, Классическая механика, ИЛ, 1947.)
47. Hadamard J., Lectures on Cauchy's Problem, New York, 1923.
48. Handbook of Physics, ed. by E. U. Condon, N. Odishaw, New York 1958.
49. Handbook of Chemistry and Physics, Chemical Rubber Publishing Co.
50. Heitler W., Quantum Theory of Radiation. 3rd ed., Oxford, 1954. (См. перевод: В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.)
51. Hildebrand F. B., Advanced Calculus for Engineers, New Jersey, 1948.
52. Hofstadter R., Ann. Rev. Nucl. Sci., **7**, 231 (1957).
53. Иваненко Д. Д., Соколов А. А., Классическая теория поля, М., 1948.
54. Jahneke F., Emde E., Funktionentabellen, Leipzig, 1933. (См. перевод: Е. Янке, Ф. Эмде, Таблицы функций, М., 1959.)
55. Jeans J. H., Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, 5th ed., London, 1948.
56. Joos P., Phys. Rev. Lett., **4**, 558 (1960).
57. Jordan E. C., Electromagnetic Waves and Radiating Systems, New Jersey, 1950.
58. Kelvin (W. Thomson), Reprints of Papers on Electrostatics and Magnetism, 2nd ed., London, 1884.
59. King R. W. P., Wu T. T., Scattering and Diffraction of Waves, Cambridge, Mass., 1959. (См. перевод: Р. Кинг, У Тай-цзунь, Рассеяние и дифракция электромагнитных волн, ИЛ, 1962.)
60. Kraus J. D., Antennas, New York, 1950.
61. Kwal B., Journ. phys. rad., **10**, 103 (1949).
62. Lamb W. E., Retherford R. C., Phys. Rev., **72**, 241 (1947).
63. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Классическая теория поля, М., 1960.
64. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, М., 1957.
65. Laws F. A., Electrical Measurements, New York, 1917.
66. Lighthill M. J., Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions, Cambridge, 1958.
67. Linhart J. G., Plasma Physics, Amsterdam, 1960.
68. Livingston M. S., High-Energy Accelerators, New York, 1954, (См. перевод: М. Ливингстон, Ускорители, ИЛ, 1956.)

69. Lorentz H. A., Theory of Electrons, Leipzig, 1915. (См. перевод: Г. А. Лорентц, Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения, М., 1956.)
70. Magnus W., Oberhettinger F., Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Berlin, 1948.
71. Martin P. C., Glauber R. J., Phys. Rev., **109**, 1307 (1958).
72. Mason M., Weaver W., The Electromagnetic Field, Chicago, 1929.
73. Maxwell J. C., Treatise on Electricity and Magnetism, 3rd ed., New York, 1954.
74. Møller M., Theory of Relativity, London, 1952.
75. Morette De Witt C., Jensen J. H. D., Zs. Naturforsch., **8a**, 267 (1953).
76. Morse P. M., Rubenstein P. J., Phys. Rev., **54**, 895 (1938).
77. Morse P. M., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, New York, 1953. (См. перевод: Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ, 1958.)
78. Rappaportsky W. K. H., Phillips M., Classical Electricity and Magnetism, New York, 1955. (См. перевод: В. Пановский, М. Филиппс, Классическая электродинамика, М., 1963.)
79. Pauli W., Theory of Relativity, New York, 1958. [Перевод статьи из Encyklopedia der mathematischen Wissenschaften, Bd. V19, Leipzig, 1921, с дополнительными замечаниями автора, 1956.] (См. перевод немецкого издания: В. Паули, Теория относительности, М., 1947.)
80. Plass G. N., Rev. Mod. Phys., **33**, 37 (1961).
81. Primakoff H., Phys. Rev., **84**, 1255 (1951).
82. Rohrlich F., в книге Lectures in Theoretical Physics, Vol. II, ed. by W. E. Brittin and B. W. Downs, New York, 1960.
83. Rohrlich F., Amer. Journ. Phys., **28**, 639 (1960).
84. Rose D. J., Clark M., Plasmas and Controlled Fusion, New York, 1961.
85. Rosenbluth M., Los Alamos Report LA-2030, 1956.
86. Rosenfeld L., Theory of Electrons, Amsterdam, 1951.
87. Rossi B., High-Energy Particles, New York, 1952. (См. перевод: Б. Росси, Частицы больших энергий, М., 1955.)
88. Rothe R., Ollendorff F., Polhausen K., Theory of Functions as Applied to Engineering Problems, Cambridge, Mass., 1933.
89. Шафранов В. Д., Атомная энергия, **1**, № 5, 38 (1956).
90. Schelkunoff S. A., Advanced Antenna Theory, New York, 1952.
91. Schott G. A., Electromagnetic Radiation, Cambridge, 1912.
92. Segre E., ed., Experimental Nuclear Physics. Vol. I, New York, 1953. (См. перевод: Экспериментальная ядерная физика, под ред. Э. Серге, т. I, ИЛ, 1955.)
93. Schankland R. S., et al., Rev. Mod. Phys., **27**, 167 (1955).
94. Siegbahn K., ed., Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy, Amsterdam, 1955. (См. перевод: Бета- и гамма-спектроскопия, под ред. К. Зигбана, М., 1959.)

95. Silver S., ed., Microwave Antenna Theory and Design, M. I. T. Radiation Laboratory Series, Vol. 12, New York, 1949. (См. перевод: Антенны сантиметровых волн, М., 1950.)
96. Simon A., Introduction to Thermonuclear Research, London, 1959.
97. Slater J. C., Microwave Electronics, New York, 1950. (См. перевод 1-го издания: Дж. Слэтер, Электроника СВЧ, М., 1949.)
98. Slater J. C., Frank N. H., Electromagnetism, New York, 1947.
99. Smithsonian Physical Tables, 9th ed.
100. Smythe W. R., Static and Dynamic Electricity, 2nd ed., New York, 1950. (См. перевод: В. Смайт, Электростатика и электродинамика, ИЛ, 1954.)
101. Smythe W. R., Phys. Rev., **72**, 1066 (1947).
102. Sommerfeld A., Elektrodynamik, Leipzig, 1949. (См. перевод: А. Зоммерфельд, Электродинамика, ИЛ, 1958.)
103. Sommerfeld A., Partial Differentialgleichungen der Physik, Leipzig, 1948. (См. перевод: А. Зоммерфельд, Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, 1948.)
104. Spitzer L., Physics of Fully Ionized Gases, New York, 1956. (См. перевод: Л. Спитцер, Физика полностью ионизованного газа, ИЛ, 1957.)
105. Sternheimer R. M., Phys. Rev., **88**, 851 (1952); **91**, 256 (1953).
106. Stratton J. A., Electromagnetic Theory, New York, 1941. (См. перевод: Дж. А. Страттон, Теория электромагнетизма, М., 1954.)
107. Stratton J. A., Chu L. J., Phys. Rev., **56**, 99 (1939).
108. Taylor R. J., Proc. Phys. Soc., **B70**, 1049 (1957).
109. Taylor R. J., Физика горячей плазмы и термоядерные реакции (Труды Второй Международной конференции по мирному использованию атомной энергии), М., 1959, стр. 68.
110. Titchmarsh E. C., Introduction to the Theory of Fourier Integrals, 2nd ed., Oxford, 1948. (См. перевод: Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, М., 1948.)
111. Tomboulain D. H., Hartman P. L., Phys. Rev., **102**, 1423 (1956).
112. Tranter C. J., Integral Transforms in Mathematical Physics, 2nd ed., London, 1956. (См. перевод: К. Дж. Трантер, Интегральные преобразования в математической физике, М., 1956.)
113. Van Vleck J. H., Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities, Oxford, 1932.
114. Watson G. N., Theory of Bessel Functions, 2nd ed., London, 1952. (См. перевод 1-го издания: Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949.)
115. Weisskopf V. F., Rev. Mod. Phys., **21**, 305 (1949). (См. перевод: В. Вайскопф, Сдвиг уровней атомных электронов, ИЛ, 1950.)
116. Whittaker E. T., History of the Theories of Aether and Electricity, Vol. 1, 2, London, 1951, 1953.

117. Williams E. J., Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-fys. Medd., 13, No. 4 (1935).
118. Wilson A. H., Theory of Metals, London, 1953.
119. Wilson W., Proc. Phys. Soc., A48, 376 (1936).

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА¹⁾

120. Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л., Фейнберг Е. Л., Распространение радиоволн, М., 1953.
121. Арцимович Л. А., Управляемые термоядерные реакции, 2-е изд., М., 1963.
122. Вайнштейн Л. А., Электромагнитные волны, М., 1957.
123. Вопросы теории плазмы, вып. I, М., 1963; вып. II, М., 1963; вып. III, М., 1964; вып. IV, М., 1964.
124. Гельфанд И. М., Шолов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, 2-е изд., М., 1959.
125. Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.
126. Грей Э., Мэтьюз Г. Б., Функции Бесселя и их приложение к физике и механике, ИЛ, 1953.
127. Гринберг Г. А., Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, Изд-во АН СССР, 1948.
128. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М., Основные дифференциальные уравнения математической физики, М., 1962.
129. Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, М., 1953.
130. Тамм И. Е., Основы теории электричества, 5-е изд., М., 1954.
131. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, М., 1951.
132. Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К., Теория дифракции, ИЛ, 1964.
133. Эйнштейн А., Сущность теории относительности, ИЛ, 1955.
134. Lehnert V., Dynamics of Charged Particles, Amsterdam, 1964.

¹⁾ Добавлена редактором перевода.— *Прим. ред.*

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аберрация света** 383, 398
Абрагама — Лоренца уравнение движения 638
— — электромагнитная модель электрона 640, 645
Адиабатическая инвариантность 460, 461
Айвза — Стилвелла опыт 400
Альфвена волны 364, 365, 367
Ампера закон 159—162
Антенна линейная короткая 301
— — мультипольное излучение 616
— — с центральным возбуждением 306, 616
— — полноволновая и полуволновая 308, 619
— — сопротивление излучения 309
- Бабине принцип для скалярных задач** 318
— — — электромагнитных полей 321
Бесселя функции 86, 94, 104, 111, 325, 478
— — сферические 592—594
Бете — Гайтлера формулы для тормозного излучения 562
Био и Савара закон 156
Бора принцип соответствия 551
— формула для потерь энергии 480
- Вавилова — Черенкова излучение** 487, 492, 542, 546, 547
Вейцеккера — Вильямса метод виртуальных фотонов 572—577
Вероятность перехода 612
— — для водородоподобных атомов 551
- Взаимодействие квадрупольное** 121, 122, 150
Вмороженность силовых линий 345, 351
Внутреннее электрическое поле 138
Волноводы 269, 272, 273
— — граничные условия 270, 271
— — частоты 273
— — диэлектрические 288, 290, 291
— — потери омические 278, 280
— — типы волн 273 274
Волновое уравнение 206, 208, 209
— — вывод из уравнений Максвелла 230, 596
— — для полей в волноводе 269, 270
— — — скалярного и векторного потенциалов 206
— — — начальные условия 212—214
— — решение в одномерном случае 227
— — число в волноводе 273
— — дебаевское 374
— — как составляющая 4-вектора 421
— — при наличии потерь 278
— — связь с частотой 230
- Волновой пакет** 236—243
Волны бегущие 230, 240
— — в волноводе 272
— — магнитогидродинамические 363—368
— — влияние конечной проводимости и вязкости 366
— — магнитозвуковые 365
— — поперечно-магнитные («электрические») 271, 598
— — в диэлектрическом волноводе 290, 291, 292
— — затухание в волноводах 280

- Волны поперечно-магнитные, связь с мультипольными моментами 607—611
 — — сферические 598
 — — цилиндрические 271
 — поперечно-электрические («магнитные») 271, 598
 — — в диэлектрическом волноводе 290, 291
 — — — прямоугольном волноводе 274—276
 — — затухание в волноводах 280
 — — связь с мультипольными моментами 607—611
 — — сферические 598
 — — цилиндрические 271
- Восприимчивость диэлектрическая 130, 138—141
- Время жизни 395, 612
 — соударения 557
- Вязкость 343, 349—352
 — магнитная 346, 347
- Галилея преобразования 196, 383, 405, 425
 — система отсчета 388
- Гамильтониан релятивистской частицы 447
- Гартмана число 349, 351
- Гаусса — Остроградского теорема (теорема о дивергенции) 19
- Гаусса теорема для поверхностного распределения зарядов 17, 19, 22
- Гистерезис магнитный 177, 178
- Граничные задачи в декартовых координатах 63 и далее
 — — — сферических координатах 77 и далее
 — — — цилиндрических координатах 93 и далее
 — — магнитостатики 178, 180
 — — при наличии диэлектриков 132, 245
 — — решение методом изображений 41
 — — — с помощью функции Грина 32
 — — смешанные 30, 108, 110
 — — электростатики 22, 23, 30, 108—110, 131
- Грина теорема взаимности 40
 — формулы 28, 29
 — функция 32
 — — в электростатике 32—35, 100, 102
- Грина функция для волнового уравнения 209—212, 594
 — — — сферического слоя 99
 — — — сферы 56, 57
 — — разложение по полиномам Лежандра 80, 81
 — — — сферическим гармоникам 86
 — — — функциям Бесселя 103
- Гюйгенса принцип 215, 310
- Давление магнитное 347
- Дарвина — Брейта взаимодействие 450
- Движение заряженной частицы 443, 450—458, 512
 — — — в дипольном поле Земли 468
 — — — — неоднородном магнитном поле 454, 456, 459
 — — — — однородном статическом магнитном поле 450, 451
 — — — — скрещенных электрическом и магнитном полях 452
 — — — — равномерное 524
 — — — ультрарелятивистское 529
- Дебая волновое число 374
- Дебая — Хюккеля радиус экранирования 377
- Дельта-функция 15, 16, 27, 63, 97, 103, 115
- Диада 219, 220
- Дипольное приближение 300, 303, 476, 557
- Дипольный момент магнитный 154, 166, 169, 171—173, 303
 — — — витка тока 166, 170
 — — — излучение 528, 584—586
 — — — наведенный 141
 — — электрический 120, 300
- Дирихле граничные условия 30
- Диск заряженный 112
- Дисперсионное соотношение 262, 371
- Дисперсия 236, 239, 257, 371
- Дифракция на отверстии 322, 328
 — — полуплоскости 338
 — — сфере 330
 — — приближение Кирхгофа 312, 315
- Диффузия магнитного поля 345
- Диэлектрики 129, 131, 133, 144, 360
- Диэлектрическая проницаемость 130, 490, 494
- Добротность 285, 286, 288

- Допплера смещение поперечное 400
 — — — релятивистское 398
 Дрейф частиц 452, 454—457
- Единицы измерения и размерности
 электромагнитных величин 672,
 676, 678
 — — таблицы перехода между
 системами 679, 680
 Емкость 39
- Закон сохранения энергии 215
 — — — и импульса 217
- Законы сохранения в ковариантной
 форме 422
- Замедление времени 393—396, 411
 Запаздывающее время 212
- Заряд, лоренц-инвариантность 415
 — связанный 128, 134, 137
 — точечный 45—48
 — фиктивный магнитный 182
- Зеркало магнитное 173, 464
- Излучение заряда ультрарелятивист-
 ского 529—534
 — — ускоренного 524—527
 — лоренц-инвариантность мощно-
 сти 515
 — мультипольное атомных систем
 611—616
 — — правила отбора 603, 604
 — — угловое распределение 604—
 607
 — ограниченного источника 298
 — при бета-распаде 578
 — — исчезновении заряда 581
 — — — магнитного момента 584—
 586
 — — соударениях 556—570
 — синхротронное 517, 529—536
- Импульс канонический 447
 — ковариантное определение 652
 — преобразование Лоренца 430
 — трансформационные свойства 647
 — электромагнитный 219
- Инверсии метод 50—56
- Индуктивность 226, 227, 295
 — на высоких частотах 253
- Индукция магнитная 154, 156
 — — длинного прямого провода 157
 — — кругового витка 163—168
- Индукция магнитная намагниченной
 сферы 180—185
 — — нерелятивистского заряда 156
 — — преобразование Лоренца 417—
 419
 — электрическая, определение 129
- Интеграл действия, лоренц-инвари-
 антность 445
- Интервал времениподобный 406
 — пространственноподобный 406
- Ионосфера 255—258
- Калибровка кулоновская (попереч-
 ная) 163, 207, 208
 — лоренцовская 207
- Калибровочная инвариантность 207
- Калибровочные преобразования 163,
 206, 207
- Квадрупольный момент 120, 122, 123
- Кирхгофа интегральное представле-
 ние 214, 215
 — — — векторные эквиваленты
 313—317
 — — — применение в дифракцион-
 ных задачах 309—312
- Клаузиуса — Моссотти уравнение 141
- Клейна — Нишины формула 538,
 539, 542
- Ковариантность 413
 — законов сохранения 423
 — лагранжиана 445
 — силы Лоренца 421
 — уравнений Максвелла 416, 417
 — — электродинамики 415
- Комптона рассеяние 538
- Конус световой 406
- Коши граничные условия 31, 32, 245
- Коэффициент прохождения для кру-
 глого отверстия 325, 340
- Кулона закон 13
- Лагранжиан двух взаимодействующ-
 щих заряженных частиц 448—450
 — релятивистской заряженной ча-
 стицы 443—448
- Ландау затухание 374
- Лапласа уравнение 27, 64, 70, 86, 87
 — — общее решение 84, 93—95
- Лармора формула для мощности
 излучения 515, 516

- Лежандра полиномы 72—77, 79
 — — присоединенные 81, 82
 Ленца закон 196
 Лиенара — Вихерта поля 512
 — — потенциалы 510
 Линия передачи 227, 271, 294, 295
 Лорентц — Лоренца формула 141
 Лоренца преобразование 392, 393, 398, 403, 405, 408—411
 — — волнового вектора и частоты 399, 400, 421
 — — из системы ЦМ в лабораторную систему 439—441
 — — импульса и энергии 430, 431
 — — плотности заряда и тока 415
 — — потенциалов 415
 — — скоростей 396
 — — четырехвекторов и четырехтензоров 411—413
 — — электромагнитных полей 417—419, 452, 453
 — сила 218, 421, 422, 641
 — уравнение движения в ковариантной форме 443—448
 — условие 206, 207, 416
 Лоренц-инвариантность излученной мощности 515
 — интеграла действия 445
 — сечения излучения 566
 — скалярного произведения 4-векторов 413, 433—435
 — фазы плоской волны 399, 421
 — четырехмерного лапласиана 412
 — — элемента объема 413
 Лоренцовская форма спектральной линии 285, 477, 659, 662
 Лэмбовский сдвиг 660
 Магнит постоянный 186
 Магнитная проницаемость 177
 Магнитогидродинамика 341—350
 — система уравнений 343—345
 Магнитостатика, основные уравнения 160, 163, 174—178
 Майкельсона — Морли опыт 383, 385—387, 389
 Максвелла тензор натяжений 221
 — уравнения 203, 204
 — — в ковариантном виде 417
 — — — различных системах единиц 678
 Максвелла уравнения макроскопические 221—225
 — — решение 231, 232, 599
 Материальная производная 197, 343
 Метод изображений 41, 42
 — — для диэлектриков 132
 — — — проводящей сферы в однородном поле 48
 — — — точечного заряда вблизи проводящей сферы 42—45
 Минковского диаграмма 411
 Момент вращающий 154, 159, 173
 — количества движения мультипольного излучения 602
 — — — фотона 603, 624
 — магнитный 154, 159, 173, 303, 461, 528, 584
 — — ограниченного распределения тока 169
 Моменты мультипольные 118—123, 168, 169, 298, 300, 302, 609, 611
 — — линейных антенн 618
 Намагниченность макроскопическая 169, 175, 176
 — — эквивалентность поверхностному току 182, 184
 Неймана граничные условия 30, 32
 Ома закон 250, 341
 — — для движущихся сред 344
 — — — плазмы в магнитном поле 380
 Осциллятор гармонический 550, 660
 Отражение плоских волн 243—247
 — полное внутреннее 248
 — радиоволн от ионосферы 257
 Парные интегральные уравнения 110, 111
 Парсевала теорема 524, 525
 Пинч-эффект 352—360, 363
 Плазма 255, 341, 343, 373
 — диэлектрическая проницаемость 494
 — неустойчивости 360—363
 — проводимость 504
 — удержание внешними полями 363
 — — магнитными зеркалами 464
 — — собственными полями 352

- Плазменная частота 254, 371
 Плазменные колебания 369—377, 380, 381
 Плоская волна 230, 235, 240, 260
 — — отражение и преломление 243—247
 — — разложение по мультиполям 624
 — — распространение в диспергирующей среде 236
 — — — — проводящей среде 250, 252
 Поверхностный ток 264, 268, 319
 Пойнтинга вектор 216, 232, 277
 — теорема 215
 Поле магнитное 176, 177
 — мультиполя 591—632
 — электрическое 14, 20, 128, 129, 205
 — — трансформационные свойства 417
 — электромагнитное; плотность импульса 423
 — — разложение по мультиполям 596, 599
 Полнота системы функций 61, 82
 Поляризация излучения 212—235
 — — при отражении 247
 — — — соударениях 558, 559
 Поляризуемость 140—144
 Порог реакции 438
 Потенциал векторный 162—167, 205
 — — квадруполь 304
 — — магнитного диполя 169, 303
 — — ограниченного источника 298—300
 — — электрического диполя 300
 — скалярный 20, 180, 183, 205
 — — двойного слоя 24
 — — заряженного проводящего диска 109
 — — линейного заряда 104
 — — поверхностного распределения зарядов 108
 — — разложение по мультиполям 118—120
 — — точечного заряда 80, 86, 103, 107, 116
 Потери энергии при соударениях 470—495, 564, 570
 — — — — влияние плотности 485
 — — — — квантовомеханическое выражение 482
 — — — — классическое выражение 480
 Потери энергии омические 268
 — — — в волноводе 279
 — — — — резонаторе 287
 — — при тормозном излучении 564, 570
 Поток магнитогидродинамический 348—352
 — энергии 216, 232, 277
 — — скорость 235, 239
 Правила отбора для мультипольных переходов 603
 Правило дипольных сумм 665
 Преобразования ортогональные 408, 409
 Принцип неопределенности 236, 243, 481, 485, 497, 498, 561, 580, 585, 657
 — причинности 212, 261, 408, 656
 Прицельный параметр 472, 473, 490, 492, 495, 496, 560, 561, 565, 575
 Проводимость 250, 253, 344, 504
 Проводник 42, 264, 268
 — глубина проникновения поля 251, 252, 266, 268, 287
 Пуанкаре натяжения 647—649
 Пуассона уравнение 26, 29, 99
 Работа выхода металла 47
 Радиационная длина 571
 Размерность физических величин 670
 Разность фаз 232—234, 252, 254
 Распад частиц 395, 432
 Рассеяние частиц атомами 495, 496, 498
 — — многократное и однократное 500, 502, 503
 Реакция излучения 636—645, 654, 658—660
 Резерфорда формула для сечения рассеяния 496
 Резонансная частота 141, 480
 Резонатор 284—288
 Рейнольдса число 346
 Рэлея закон рассеяния 629, 662
 Сечение излучения 497, 560, 563
 — — лоренц-инвариантность 566
 — — рассеяния 493, 496, 537, 540, 561, 628, 661, 662
 — — резонансное 662
 — — реакции 664

- Сила осциллятора 479, 481, 659
 — самодействия 641
 — электродвижущая 196
- Скорость групповая 238, 239
 — — в волноводах 278
 — — — электронной плазме 374
 — света 389, 673
 — фазовая 230, 239
 — — альфвеновских волн 365, 368
 — — в волноводе 274
 — — плазменных колебаний 374
- Сложение скоростей 396
- Смайта формула для дифракции на плоских экранах 317
- Снеллиуса закон 243
- Собственная энергия и импульс 647—654
 — — — ковариантное определение 652
 — — — — трансформационные свойства 647
- Собственное время 405
 — поле 641
- Собственные натяжения 647, 648
 — функции 106, 107, 272, 274, 282,
- Соленоид, магнитное поле 190
- Сопrotивление излучения 309
- Соударения 439, 470
 — нерелятивистские 564
 — релятивистские 570
- Специальная теория относительности 383—388
 — — — постулаты 388, 389
- Спин-орбитальное взаимодействие 401
- Спиральность 234
- Стокса теорема 22
- Сферические гармоники 82—86, 166, 595
 — — векторные 599, 605, 607, 620, 623, 628
- Тензор натяжений Максвелла 221
 — электромагнитного поля 416
 — энергии — импульса 423, 648
- Теорема единственности 30—32, 78
 — о среднем значении 340
 — сложения для сферических гармоник 84
- Томаса прецессия 256, 400—405
- Томсона теорема 40
 — формула для сечения рассеяния 537—539
- Тормозное излучение 560, 561, 563, 564, 567, 570, 577
 — — спектральное распределение 558, 566, 569
 — — угловое распределение и поляризация 557, 559, 567
- Угол рассеяния 496—500
- Уравнение движения, ковариантная форма 422, 445
 — — с учетом реакции излучения 637—639, 654
 — непрерывности для жидкости 343, 364
 — — — заряда и тока 155, 672
 — — — потока электромагнитной энергии 216
 — — ковариантная форма 415
- Уравнения материальные 205
- Условия излучения 311
- Усреднение макроскопическое 124, 222
- Уширение спектральной линии 659
- Фарадея закон индукции 196, 197, 199
- Физо опыт 384
- Фицджеральда — Лоренца сокращение 387, 393, 410
- Флуоресценция резонансная 662
- Френеля формула для скорости света в движущихся средах 385
 — формулы для отражения и преломления 246, 247
- Фурье интеграл 63
 — преобразование 236, 240, 285, 478
 — ряд 62, 63
- Ханкеля преобразование 95
- Частота вращения частицы в магнитном поле 255, 461
 — как составляющая 4-вектора 421

- Четность мультипольных полей 604
- Четырехвекторы и четырехтензоры 411
- скалярное произведение 413, 433
 - — — лоренц-инвариантность 435
- Ширина спектральной линии 286, 659
- Эйри функция 531
- Экранирование внутриатомное 496, 568
- Экраны дополнительные 318
- Электрон, классическая модель 640
- классический радиус 645
- Электростатика, макроскопические уравнения 123—129
- Энергия магнитная 199, 201, 202
- передача при соударениях 443, 470
 - — — — дискретность значений 480
 - распределения зарядов 121
 - электромагнитная, плотность 216, 232
 - электростатическая 20, 35—37, 144, 644
- Эфир 383

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7

ГЛАВА 1

Введение в электростатику

§ 1. Закон Кулона	13
§ 2. Напряженность электрического поля	14
§ 3. Теорема Гаусса	17
§ 4. Дифференциальная форма теоремы Гаусса	19
§ 5. Второе уравнение электростатики и скалярный потенциал	20
§ 6. Поверхностные распределения зарядов и диполей. Скачки электрического поля и потенциала	22
§ 7. Уравнения Лапласа и Пуассона	26
§ 8. Теорема Грина	28
§ 9. Единственность решения при граничных условиях Дирихле или Неймана	30
§ 10. Формальное решение граничных задач электростатики с помощью функции Грина	32
§ 11. Потенциальная энергия и плотность энергии электростатического поля	35
Рекомендуемая литература	38
Задачи	39

ГЛАВА 2

Граничные задачи электростатики. I

§ 1. Метод изображений	41
§ 2. Точечный заряд вблизи заземленного сферического проводника	42
§ 3. Точечный заряд вблизи заряженного изолированного сферического проводника	46
§ 4. Точечный заряд вблизи сферического проводника с заданным потенциалом	48
§ 5. Сферический проводник в однородном электрическом поле	48

§ 6. Метод инверсии	50
§ 7. Функция Грина для сферы. Общее выражение для потенциала	56
§ 8. Две примыкающие проводящие полусферы, имеющие различный потенциал	57
§ 9. Разложение по ортогональным функциям	60
§ 10. Разделение переменных. Уравнение Лапласа в декартовых координатах	63
Рекомендуемая литература	66
Задачи	67

Г Л А В А 3

Граничные задачи электростатики. II

§ 1. Уравнение Лапласа в сферических координатах	70
§ 2. Уравнение Лежандра и полиномы Лежандра	72
§ 3. Граничные задачи с азимутальной симметрией	77
§ 4. Присоединенные функции Лежандра и сферические гармоники $Y_{lm}(\theta, \varphi)$	81
§ 5. Теорема сложения для сферических гармоник	84
§ 6. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах. Функции Бесселя	86
§ 7. Граничные задачи в цилиндрических координатах	93
§ 8. Разложение функций Грина в сферических координатах	95
§ 9. Нахождение потенциала с помощью разложений для сферических функций Грина	99
§ 10. Разложение функций Грина в цилиндрических координатах	102
§ 11. Разложение функций Грина по собственным функциям	105
§ 12. Смешанные граничные условия. Заряженный проводящий диск	108
Рекомендуемая литература	112
Задачи	113

Г Л А В А 4

Мультиполи. Макроскопическая электростатика материальных сред. Диэлектрики

§ 1. Разложение по мультиполям	118
§ 2. Разложение по мультиполям энергии распределения зарядов во внешнем поле	121
§ 3. Макроскопическая электростатика. Эффекты совокупного действия атомов	123
§ 4. Изотропные диэлектрики и граничные условия	130
§ 5. Граничные задачи при наличии диэлектриков	132
§ 6. Поляризуемость молекул и диэлектрическая восприимчивость	138
§ 7. Модели поляризуемости молекул	141
§ 8. Энергия электрического поля в диэлектрике	144
Рекомендуемая литература	150
Задачи	150

ГЛАВА 5

Магнитостатика

§ 1. Введение и основные определения	154
§ 2. Закон Био и Савара	156
§ 3. Дифференциальные уравнения магнитостатики и закон Ампера	160
§ 4. Векторный потенциал	162
§ 5. Векторный потенциал и магнитная индукция кругового витка тока	163
§ 6. Магнитное поле ограниченного распределения токов. Магнитный момент	168
§ 7. Сила и момент, действующие на ограниченное распределение тока во внешнем магнитном поле	171
§ 8. Макроскопические уравнения	174
§ 9. Граничные условия для магнитной индукции и поля	178
§ 10. Однородно намагниченный шар	180
§ 11. Намагниченный шар во внешнем поле. Постоянные магниты	185
§ 12. Магнитное экранирование. Сферическая оболочка из магнитного материала в однородном поле	187
Рекомендуемая литература	190
Задачи	190

ГЛАВА 6

**Переменные во времени поля. Уравнения Максвелла.
Законы сохранения**

§ 1. Закон индукции Фарадея	195
§ 2. Энергия магнитного поля	199
§ 3. Максвелловский ток смещения. Уравнения Максвелла	203
§ 4. Векторный и скалярный потенциалы	205
§ 5. Калибровочные преобразования. Лоренцовская калибровка. Кулоновская калибровка	207
§ 6. Функция Грина для волнового уравнения	209
§ 7. Задача с начальными условиями. Интегральное представление Кирхгофа	212
§ 8. Теорема Пойнтинга	215
§ 9. Законы сохранения для системы заряженных частиц и электромагнитных полей	217
§ 10. Макроскопические уравнения	221
Рекомендуемая литература	225
Задачи	225

ГЛАВА 7

Плоские электромагнитные волны

§ 1. Плоские волны в непроводящей среде	229
§ 2. Линейная и круговая поляризация	232
§ 3. Суперпозиция волн в одном измерении. Групповая скорость	235

§ 4. Примеры распространения импульсов в диспергирующей среде	240
§ 5. Отражение и преломление электромагнитных волн на плоской границе раздела между диэлектриками	243
§ 6. Поляризация при отражении и полное внутреннее отражение	247
§ 7. Волны в проводящей среде	250
§ 8. Простая модель проводимости	253
§ 9. Поперечные волны в разреженной плазме	254
Рекомендуемая литература	258
Задачи	259

ГЛАВА 8

Волноводы и резонаторы

§ 1. Поля на поверхности и внутри проводника	264
§ 2. Цилиндрические резонаторы и волноводы	269
§ 3. Волноводы	272
§ 4. Волны в прямоугольном волноводе	274
§ 5. Поток энергии и затухание в волноводах	276
§ 6. Резонаторы	281
§ 7. Потери мощности в резонаторе. Добротность резонатора	284
§ 8. Диэлектрические волноводы	288
Рекомендуемая литература	293
Задачи	294

ГЛАВА 9

Простейшие излучающие системы и дифракция

§ 1. Поля, создаваемые ограниченными колеблющимися источниками	297
§ 2. Электрическое дипольное поле и излучение	300
§ 3. Магнитные дипольные и электрические квадрупольные поля	302
§ 4. Линейная антенна с центральным возбуждением	306
§ 5. Интеграл Кирхгофа	309
§ 6. Векторные эквиваленты интеграла Кирхгофа	313
§ 7. Принцип Бабинне для дополнительных экранов	318
§ 8. Дифракция на круглом отверстии	322
§ 9. Дифракция на малых отверстиях	328
§ 10. Рассеяние коротких волн проводящей сферой	330
Рекомендуемая литература	337
Задачи	337

ГЛАВА 10

Магнитная гидродинамика и физика плазмы

§ 1. Введение и основные понятия	341
§ 2. Уравнения магнитной гидродинамики	343
§ 3. Магнитная диффузия, вязкость и давление	345

§ 4. Магнитогидродинамический поток между границами в скрещенных электрическом и магнитном полях	348
§ 5. Пинч-эффект	352
§ 6. Динамическая модель пинч-эффекта	355
§ 7. Неустойчивости сжатого плазменного столба	360
§ 8. Магнитогидродинамические волны	363
§ 9. Высокочастотные плазменные колебания	369
§ 10. Коротковолновые плазменные колебания. Дебаевский радиус экранирования	374
Рекомендуемая литература	377
Задачи	378

ГЛАВА 11

Специальная теория относительности

§ 1. Исторические предпосылки и основные эксперименты	382
§ 2. Постулаты специальной теории относительности и преобразование Лоренца	388
§ 3. Сокращение Фицджеральда — Лоренца и замедление времени	393
§ 4. Сложение скоростей. Аберрация и опыт Физо. Допплеровское смещение	396
§ 5. Прецессия Томаса	400
§ 6. Собственное время и световой конус	405
§ 7. Преобразования Лоренца как ортогональные преобразования в четырехмерном пространстве	408
§ 8. Четырехвекторы и четырехтензоры. Ковариантность уравнений физики	411
§ 9. Ковариантность уравнений электродинамики	415
§ 10. Преобразование электромагнитного поля	17
§ 11. Ковариантность выражения для силы Лоренца и законов сохранения	421
Рекомендуемая литература	424
Задачи	424

ГЛАВА 12

Кинематика и динамика релятивистских частиц

§ 1. Импульс и энергия частицы	429
§ 2. Кинематика осколков при распаде нестабильной частицы	432
§ 3. Преобразование к системе центра масс и пороги реакций	435
§ 4. Преобразование импульса и энергии из системы центра масс в лабораторную систему	439
§ 5. Ковариантные уравнения движения. Лагранжиан и гамильтониан для релятивистской заряженной частицы	443
§ 6. Релятивистские поправки первого порядка для лагранжиана взаимодействующих заряженных частиц	448

§ 7. Движение в однородном статическом магнитном поле	450
§ 8. Движение в однородных статических электрическом и магнитном полях	452
§ 9. Дрейф частиц в неоднородном статическом магнитном поле	454
§ 10. Адиабатическая инвариантность магнитного потока сквозь орбиту частицы	459
Рекомендуемая литература	465
Задачи	466

Г Л А В А 13

Соударения заряженных частиц. Потери энергии. Рассеяние

§ 1. Передача энергии при кулоновских соударениях	470
§ 2. Передача энергии гармоническому осциллятору	475
§ 3. Классическое и квантовомеханическое выражение для потерь энергии	479
§ 4. Влияние плотности на потери энергии при соударении	485
§ 5. Потери энергии в электронной плазме	493
§ 6. Упругое рассеяние быстрых частиц атомами	495
§ 7. Среднеквадратичное значение угла рассеяния и угловое распределение при многократном рассеянии	500
§ 8. Электропроводность плазмы	504
Рекомендуемая литература	507
Задачи	507

Г Л А В А 14

Излучение движущихся зарядов

§ 1. Потенциалы Лиенара — Вихерта и поле точечного заряда	509
§ 2. Полная мощность, излучаемая ускоренно движущимся зарядом. Формула Лармора и ее релятивистское обобщение	514
§ 3. Угловое распределение излучения ускоряемого заряда	518
§ 4. Излучение заряда при произвольном ультрарелятивистском движении	522
§ 5. Спектральное и угловое распределения энергии, излучаемой ускоренными зарядами	524
§ 6. Спектр излучения релятивистской заряженной частицы при мгновенном движении по окружности	529
§ 7. Рассеяние на свободных зарядах. Формула Томсона	536
§ 8. Когерентное и некогерентное рассеяние	540
§ 9. Излучение Вавилова — Черенкова	542
Рекомендуемая литература	549
Задачи	549

ГЛАВА 15

**Тормозное излучение. Метод виртуальных фотонов.
Излучение при бета-распаде**

§ 1. Излучение при соударениях	556
§ 2. Тормозное излучение при нерелятивистских кулоновских соударениях	560
§ 3. Тормозное излучение при релятивистском движении	564
§ 4. Влияние экранирования. Потери на излучение в релятивистском случае	568
§ 5. Метод виртуальных фотонов Вейцеккера — Вильямса	571
§ 6. Тормозное излучение как рассеяние виртуальных фотонов	577
§ 7. Излучение при бета-распаде	578
§ 8. Излучение при захвате орбитальных электронов. Исчезновение заряда и магнитного момента	581
Рекомендуемая литература	587
Задачи	587

ГЛАВА 16

Поля мультиполей

§ 1. Собственные функции скалярного волнового уравнения	591
§ 2. Разложение электромагнитных полей по мультиполям	596
§ 3. Свойства полей мультиполей. Энергия и момент количества движения мультипольного излучения	599
§ 4. Угловое распределение мультипольного излучения	604
§ 5. Источники мультипольного излучения. Мультипольные моменты	607
§ 6. Мультипольное излучение атомных и ядерных систем	611
§ 7. Излучение линейной антенны с центральным возбуждением	616
§ 8. Разложение векторной плоской волны по сферическим волнам	621
§ 9. Рассеяние электромагнитных волн на проводящей сфере	624
§ 10. Решение граничных задач с помощью разложений по мультиполям	629
Рекомендуемая литература	630
Задачи	630

ГЛАВА 17

**Влияние излучения частицы на ее движение.
Собственное поле частицы**

§ 1. Вводные замечания	633
§ 2. Определение силы реакции излучения из закона сохранения энергии	636
§ 3. Вычисление силы реакции излучения по Абрагаму и Лоренцу	640
§ 4. Трудности модели Абрагама — Лоренца	645

§ 5. Трансформационные свойства модели Абрагама — Лоренца. Натяжения Пуанкаре	646
§ 6. Ковариантное определение собственной электромагнитной энергии и импульса заряженной частицы	651
§ 7. Интегро-дифференциальное уравнение движения с учетом радиационного затухания	654
§ 8. Ширина линии и сдвиг уровня для осциллятора	657
§ 9. Рассеяние и поглощение излучения осциллятором	660
Рекомендуемая литература	666
Задачи	666

ПРИЛОЖЕНИЕ

Единицы измерения и размерности

§ 1. Единицы измерения и размерности. Основные и производные единицы	670
§ 2. Единицы измерения и уравнения электродинамики	672
§ 3. Различные системы электромагнитных единиц	675
§ 4. Перевод формул и численных значений величин из гауссовой системы единиц в систему МКС	678
Библиография	682
Предметный указатель	688

Д ж. Д ж е к с о н
КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Редактор *И. Г. Нахимсон*
Художник *Н. С. Хмелевский*
Художественный редактор *Е. И. Подмарькова*
Технический редактор *А. Г. Резоухова*

Сдано в производство 17/XII 1964 г.
Подписано к печати 13/V 1965 г.
Бумага 60×90¹/₁₆=22 бум. л. 44 печ. л.
Уч.-изд. л. 40,01. Изд. № 2/2659
Цена 2 р. 95 к. Зак. 786
Темплан 1965 г. изд-ва «Мир», пор. № 62

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16
Главполиграфпрома Государственного
комитета Совета Министров СССР по печати
Москва, Трехпрудный пер., д. 9