

ЗАГАЛЬНИЙ КУРС ФІЗИКИ

Збірник задач



ЗАГАЛЬНИЙ КУРС ФІЗИКИ

Збірник задач

За редакцією
проф. І.П.Гаркуші

*Рекомендовано Міністерством
освіти і науки України
як навчальний посібник
для студентів інженерно-технічних
і педагогічних спеціальностей
вищих навчальних закладів*

БІБЛІОТЕКА
НПУ імені М.П. Драгоманова
б/інв.

Київ
"ТЕХНІКА"
2003

53(075)
ББК 22.3я73
314
УДК 531(075.8)

Гриф надано Міністерством
освіти і науки України,
лист № 14/18.2-1347 від 20.06.2002 р.

*Розповсюдження та тиражування
без офіційного дозволу видавництва заборонено*

Автори: І. П. Гаркуша, канд. фіз.-мат. наук, проф.; І. Т. Горбачук, канд. фіз.-мат. наук, проф.; В. П. Курінний, канд. техн. наук; І. М. Кучерук, канд. фіз.-мат. наук; М. Ш. Певзнер, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. А. Ю. Кудзін (Дніпропетровський національний університет), д-р техн. наук, проф. М. В. Белоус (Національний технічний університет України "КПІ")

Збірник складено відповідно до діючої програми загального курсу фізики для фізичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів, а також переважної більшості спеціальностей вищих технічних навчальних закладів. Він містить близько 2 200 задач з усіх розділів курсу, які мають широкий діапазон рівня складності. Відповіді до найбільш складних задач супроводжуються вказівками та розв'язаннями. Різноманітний за змістом та рівнем складності набір задач дає змогу використовувати збірник також під час вивчення загального курсу фізики у вузах з підвищеним обсягом викладання фізики.

Для студентів інженерно-технічних і педагогічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

ISBN 966-575-130-1

© І. П. Гаркуша, І. Т. Горбачук,
В. П. Курінний, І. М. Кучерук,
М. Ш. Певзнер, 2003

Передмова	7
Методичні вказівки до розв'язання задач	8
Розділ 1. Фізичні основи механіки	10
1.1. Елементи кінематики	10
Прямолінійний рух (11). Криволінійний рух (13). Обертальний рух. Кінематика твердого тіла (15)	
1.2. Динаміка матеріальної точки та поступального руху твердого тіла	17
Закони Ньютона (18). Динаміка матеріальної точки, яка рухається по колу (22). Сили в механіці (23). Сили інерції (24)	
1.3. Динаміка руху твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі	26
Момент інерції (27). Рівняння динаміки обертального руху (28). Момент імпульсу (29). Рівновага твердих тіл (31)	
1.4. Закони збереження в механіці	34
Закон збереження імпульсу (36). Рух тіла змінної маси (37). Закон збереження моменту імпульсу (38). Робота. Енергія. Закон збереження енергії (41)	
1.5. Принцип відносності в механіці. Елементи релятивістської механіки	46
Принцип відносності Галілея (48). Елементи релятивістської кінематики (48). Маса та імпульс у релятивістській механіці. Релятивістське рівняння руху (51). Енергія релятивістської частинки. Релятивістське співвідношення між енергією та імпульсом частинки (51). Взаємозв'язок між масою та енергією у релятивістській механіці. Зіткнення релятивістських частинок (52)	
1.6. Елементи механіки суцільних середовищ	53
Елементи гідростатики (55). Елементи гідродинаміки (56). Елементи теорії пружності (58)	
Розділ 2. Молекулярна фізика і термодинаміка	60
2.1. Основи молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу	60
Маса і розміри молекул. Кількість речовини (62). Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів. Середня енергія молекул (63). Рівняння стану ідеального газу. Газові закони (64). Швидкість газових молекул. Розподіл Максвелла. Розподіл Больцмана. Барометрична формула (70)	
2.2. Явища переносу в газах	74
Середня довжина вільного пробігу молекул. Кількість зіткнень (76). Дифузія, в'язкість, теплопровідність. Коефіцієнти переносу (78). Емпіричні рівняння явищ переносу (80). Диференціальні рівняння явищ переносу (82)	
2.3. Основи термодинаміки	82
Теплоємність газів (85). Застосування першого закону термодинаміки до ізопроцесів ідеальних газів (86). Адіабатний і політропний процеси (89). Другий закон термоди- наміки. Циклічні процеси. Цикл Карно. Теплові і холодильні машини (92). Ентропія (97)	

2.4. Реальні гази й рідини. Фазові переходи.....	101
Реальні гази. Рівняння Ван-дер-Ваальса. Критичний стан (103). Вологість повітря (105). Рідини. Поверхневий натяг. Капілярність (106). Фазові переходи. Рівняння Клапейрона – Клаузіуса (109)	
Розділ 3. Електрика і магнетизм.....	114
3.1. Електростатичне поле у вакуумі.....	114
Закон Кулона. Напруженість електричного поля точкового заряду. Сила, що діє на заряд в електричному полі (116). Принцип суперпозиції електричних полів (118). Електричний диполь (119). Потік вектора напруженості. Електростатична теорема Гаусса (121). Робота з переміщення електричного заряду. Потенціал. Зв'язок потенціалу електростатичного поля з напруженістю (124)	
3.2. Провідники в електростатичному полі.....	127
Рівноважний розподіл зарядів у провіднику. Метод дзеркальних відображень (128). Електроємність. Конденсатори. З'єднання конденсаторів у батареї (129)	
3.3. Електростатичне поле в діелектриках.....	132
Поляризація діелектриків (132). Умови на межі поділу діелектриків (134)	
3.4. Енергія електричного поля.....	136
Енергія системи електричних зарядів. Енергія заряджених провідників (137). Енергія зарядженого конденсатора. Енергія електростатичного поля. Густина енергії (138)	
3.5. Постійний електричний струм.....	142
Закон Ома для ділянки кола. Опір провідників (145). Закон Ома для повного кола. Правила Кірхгофа (149). Робота і потужність електричного струму (151). Струм у вакуумі, електролітах і газах (154)	
3.6. Постійне магнітне поле у вакуумі.....	157
Магнітне поле прямого, колового та соленоїдного струмів (159). Магнітне поле заряду, що рухається (161). Сила Ампера (161). Магнітний момент. Контур зі струмом у магнітному полі (162). Сила Лоренца (163). Циркуляція вектора магнітної індукції B (166). Потік вектора магнітної індукції. Робота з переміщення провідника зі струмом у магнітному полі (167)	
3.7. Електромагнітна індукція.....	169
Електромагнітна індукція (170). Самоіндукція та взаєміндукція (173). Струми під час замикання і розмикання кола (174). Енергія магнітного поля (175)	
3.8. Магнітне поле в речовині.....	176
3.9. Рівняння Максвелла. Принцип відносності в електродинаміці.....	180
Рівняння Максвелла (181). Принцип відносності в електродинаміці (183)	
Розділ 4. Коливання і хвилі.....	186
4.1. Кінематика гармонічного коливального руху.....	186
Кінематика гармонічних коливань (186). Додавання коливань (188)	
4.2. Динаміка гармонічних коливань. Гармонічний осцилятор.....	190
Сила та енергія в гармонічних коливаннях (191). Математичний і фізичний маятники (192). Пружинний маятник (193). Інші гармонічні осцилятори (195). Закон збереження енергії (метод узагальнених координат) у коливальних процесах (198). Коливальні системи з двома ступенями вільності (199)	
4.3. Згасаючі механічні коливання.....	200
4.4. Вимушені механічні коливання.....	203
4.5. Пружні хвилі. Елементи акустики.....	206
Розподіл зміщень і деформацій у пружній хвилі (209). Швидкість пружних хвиль. Потік енергії (211). Елементи акустики (212). Поглинання, відбивання й заломлення звуку (213). Інтерференція хвиль. Стоячі хвилі (215). Дисперсія хвиль. Фазова і групові швидкості (217)	

4.6. Вільні електричні коливання	218
Вільні незгасаючі коливання (218). Вільні згасаючі коливання (219)	
4.7. Вимушені електричні коливання. Змінний струм	221
Послідовне з'єднання резистора, котушки й конденсатора в колі. Резонанс напруг (223). Паралельне з'єднання котушки й конденсатора в колі. Резонанс струмів (225). Потужність у колі змінного струму (226)	
4.8. Електромагнітні хвилі	227
Плоскі монохроматичні електромагнітні хвилі (228). Енергія електромагнітних хвиль (229). Випускання електромагнітних хвиль. Випромінювання диполя (231). Інтерференція електромагнітних хвиль (232)	
Розділ 5. Оптика	235
5.1. Фотометрія	235
Світловий потік, сила світла, освітленість (236). Яскравість і світність (237)	
5.2. Геометрична оптика	239
Відбивання і заломлення світла (241). Сферичне дзеркало (243). Тонка лінза (243). Центровані оптичні системи (246). Оптичні прилади (248)	
5.3. Інтерференція світла	249
Одержання інтерференції поділом хвильового фронту (250). Одержання інтерференції поділом амплітуди (253). Інтерферометри (256)	
5.4. Дифракція світла	257
Зони Френеля. Дифракція Френеля на простих перешкодах (259). Дифракція Фраунгофера на щілині. Дифракційна ґратка (261). Дифракція на кристалічній ґратці (264). Дисперсія і роздільна здатність оптичних приладів (265)	
5.5. Поляризація світла	267
Закон Малюса. Закон Брюстера (269). Ступінь поляризації. Формули Френеля (271). Подвійне променезаломлення (271). Обертання площини поляризації. Штучна анізотропія (272)	
5.6. Взаємодія електромагнітних хвиль з речовиною. Оптика тіл, що рухаються	274
Дисперсія світла (275). Поглинання світла (276). Розсіювання світла (276). Ефект Доплера в оптиці (277). Нелінійна оптика (277). Ефект Вавилова – Черенкова (278)	
Розділ 6. Квантова теорія	279
6.1. Квантова теорія випромінювання. Фотони	279
Теплове випромінювання (280). Фотони. Тиск світла (281). Фотоефект (282). Ефект Комптона (283)	
6.2. Корпускулярно-хвильовий дуалізм. Квантовий стан	284
Корпускулярно-хвильовий дуалізм. Хвилі де Бройля (285). Співвідношення невизначеностей (286). Хвильова функція та її статистичний зміст (287)	
6.3. Рівняння Шредінґера	287
Часове рівняння Шредінґера. Стационарне рівняння (289). Вільна частинка (290). Частинка в нескінченно глибокій прямокутній потенціальній ямі (290). Частинка в центрально-симетричному полі. Атом водню та воднеподібні іони (291). Гармонічний осцилятор (292). Проходження мікрочастинок крізь потенціальний бар'єр (293)	
6.4. Квантування моменту імпульсу. Спін електрона. Атом	294
Квантування моменту імпульсу. Спін (298). Стан електронів в атомі. Багатоелектронні атоми (298). Атом у магнітному полі. Ефект Зеемана (299). Рентгенівське випромінювання. Рентгенівські спектри (300)	
6.5. Молекула	300
Види хімічного зв'язку. Валентність (301). Обертальні стани двоатомних молекул (301). Коливальні стани двоатомних молекул (302)	

6.6. Елементи квантової статистики.....	302
Загальні відомості про квантову статистику (303). Статистика Фермі – Дірака (304). Статистика Бозе – Ейнштейна (304)	
6.7. Елементи квантової електроніки.....	305
Спонтанне та вимушене випромінювання. Коефіцієнти Ейнштейна (306). Оптичні квантові генератори та підсилювачі (306). Магнітний резонанс (308)	
Розділ 7. Фізика конденсованого стану	309
7.1. Елементи теорії кристалічних ґраток.....	309
Загальні відомості про кристали та аморфні тіла (309). Елементи кристалографії (310)	
7.2. Теплові властивості кристалів.....	311
Теплове розширення твердих тіл (312). Фонони (313). Теплосмність твердих тіл (313)	
7.3. Електричні та магнітні властивості металів.....	314
Електропровідність металів (316). Магнітні властивості металів (318)	
7.4. Елементи зонної теорії твердих тіл та фізики напівпровідників.....	319
Електрон у періодичному полі кристалічних ґраток (319). Власна та домішкова електропровідності напівпровідників (320). Фотопровідність. Внутрішній фото-ефект (320). Ефект Холла у напівпровідниках (321)	
7.5. Контактні явища.....	322
Контактна різниця потенціалів. Термoeлектричні явища (323). Вентильні властивості контактів. p - n -перехід (324)	
7.6. Макроскопічні квантові явища.....	325
Явище надплинності (326). Явище надпровідності (326). Надпровідники в магніт-ному полі (327). Квантування магнітного потоку. Ефекти Джозефсона. Квантовий ефект Холла (328)	
Розділ 8. Фізика атомного ядра	329
8.1. Експериментальні методи ядерної фізики.....	329
8.2. Фундаментальні взаємодії та елементарні частинки.....	331
Фундаментальні взаємодії та їх властивості. Закони збереження у фундаментальних взаємодіях (336). Лептони та кварки. Складна структура адронів (336)	
8.3. Склад та характеристики атомного ядра.....	337
Склад атомного ядра (337). Маса та розміри атомних ядер (338). Магнітні моменти ядер (338)	
8.4. Ядерні сили. Енергія зв'язку ядра.....	338
Природа і властивості ядерних сил (340). Поняття про ядерні моделі (340). Енергія зв'язку, дефект маси та стабільність атомних ядер (340)	
8.5. Ядерні реакції. Радіоактивність.....	341
Закони збереження в ядерних реакціях. Поріг та енергія реакції (342). Закон радіо-активного розпаду. Радіоактивна рівновага (343). Альфа-розпад (344). Бета-розпад (344). Гама-випромінювання. Ефект Мессбауера (345)	
8.6. Фізичні основи ядерної енергетики.....	345
Поділ ядер (346). Коефіцієнт розмноження нейтронів. Ядерний реактор (347). Реакція синтезу (348) Елементи дозиметрії (349)	
Відповіді, вказівки та розв'язання	350
До розділу 1 (350). До розділу 2 (376). До розділу 3 (415). До розділу 4 (453). До розділу 5 (477). До розділу 6 (495). До розділу 7 (511). До розділу 8 (524)	
Додатки	
А. Деякі відомості з математики.....	534
Б. Таблиці фізичних величин.....	547

Збірник складено відповідно до діючої програми курсу для вищих педагогічних та технічних навчальних закладів. Він містить близько 2 200 задач і запитань з усіх розділів загального курсу фізики. Автори намагалися, щоб зміст задач та структура збірника відповідали сучасному станові фізичної науки та передовим методичним тенденціям викладання фізики.

У збірнику використано трирівневу рубрикацію: розділ – тема – питання теми. На початку кожної теми наведено короткі теоретичні відомості. Збірник містить довідкові таблиці та докладні математичні додатки.

Рівень складності задач збірника досить різноманітний. Відповіді до задач, які, на думку авторів, є важкими, супроводжуються вказівками і розв'язаннями. Обсяг відповідей становить майже третину загального обсягу збірника. Тому збірник може використовуватися викладачами як методичний матеріал, а також студентами для самостійної роботи.

При складанні даного збірника поряд з оригінальними задачами вміщено задачі з інших збірників, які, на погляд авторів, мають певну науково-методичну цінність.

Задачі до розділу “Фізичні основи механіки” склав В. П. Курінний, до розділу “Молекулярна фізика і термодинаміка” – І. Т. Горбачук, до розділу “Електрика і магнетизм” – І. М. Кучерук, до розділів “Коливання і хвилі”, “Оптика” – І. П. Гаркуша, до розділів “Квантова теорія”, “Фізика конденсованого стану”, “Фізика атомного ядра” – М. Ш. Певзнер. Загальне редагування збірника виконано І. П. Гаркушею.

Розв'язання задач є істотним елементом вивчення курсу фізики. Без застосування теоретичних знань до практичних задач вивчення курсу фізики не може бути повним.

Розв'язуючи задачі з фізики, слід дотримуватися таких правил.

1. Вивчити відповідний *теоретичний матеріал* підручника. Без цього спроби приступити до розв'язання задач є марними і дають змогу, у найкращому разі, одержати формальні відповіді на запитання, не збагачуючи знань студента з фізики. Ознайомитися з короткими теоретичними відомостями, наведеними в збірнику перед кожною темою.

2. Уважно прочитати *умову задачі*, з'ясувати постановку питання, записати умову в скороченому вигляді. Як правило, жодне слово в умові задачі не є зайвим. Треба визначити всі інформативні слова й відобразити інформацію, яку вони несуть, у скороченому запису. Значну кількість даних, що потрібні для розв'язання задачі, можна одержати з таблиць, вміщених у кінці збірника. Виразити всі фізичні величини в одній системі одиниць (переважно в СІ). Там, де це можливо, обов'язково виконати *рисунок*, який пояснює фізичний зміст задачі, адже грамотно побудований рисунок є гарантією її розв'язання.

3. Обґрунтувати можливість *спрощень*, після яких можна розглядати об'єкти задачі як ідеалізовані фізичні моделі. Наприклад, слід з'ясувати, чому, розглядаючи коливання кулі радіуса $r = 1$ см, підвішеної на нитці, довжина якої $l = 1$ м, цю кулю можна вважати матеріальною точкою; чому електричне поле всередині плоского конденсатора, площа пластин якого $S = 0,01$ м², а відстань між ними $d = 0,5$ мм, можна вважати за однорідне.

4. Установити, які *фізичні явища* лежать в основі задачі. Записати формули, що їх виражають, користуючись тими, що наведені у вступі до розділу. Визначити розв'язок у *загальному* (літерному) *вигляді*. Під час розв'язання задачі треба посилатися на відповідний фізичний закон. Слід пам'ятати, що переважна більшість фізичних законів має певні межі застосування. Спроби застосування законів поза цими межами спричиняють грубі помилки. Найбільш розповсюдженими помилками є використання закону, встановленого для сталого значення деякої величини, в умовах, коли вона є змінною, використання законів та співвідношень,

встановлених для точкових величин, у разі, коли вони не є точковими, тощо.

5. Після одержання розв'язку в загальному вигляді слід його *проаналізувати*, для чого потрібно:

а) переконатися в тому, що одержаний результат має розмірність шуканої величини;

б) розглянути, де це можливо, граничні умови. Наприклад, вираз сили електричної взаємодії між протяжними зарядженими тілами зі зростанням відстані між ними має переходити в закон Кулона.

6. Одержати *числовий результат*, користуючись правилами наближених обчислень. Поширеною є помилка, коли остаточний числовий результат, одержаний за допомогою калькулятора, має таку точність, яка значно перевищує точність вихідних даних. Проміжні значення величин обчислювати не треба.

7. Після одержання числового результату слід оцінити його *правдоподібність*. Така оцінка іноді допомагає знайти допущену помилку. Наприклад, швидкість частинки не може перевищувати $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, заряд частинки не може бути меншим від заряду електрона.

Щодо розв'язків задач, наведених у збірнику, то звертатися до них доцільно після спроб розв'язати задачу самостійно. Для полегшення роботи в кінці збірника вміщено досить докладні математичні додатки.

Розділ 1. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

1.1. ЕЛЕМЕНТИ КІНЕМАТИКИ

Положення матеріальної точки в просторі задається радіусом-вектором

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (1.1.1)$$

де $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – одиничні вектори напрямів (орти); x, y, z – координати точки.

Миттєва швидкість частинки

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}, \quad (1.1.2)$$

де v_x, v_y, v_z – проекції швидкості $\mathbf{v}$ на осі координат, $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$.

Середня швидкість за час Δt

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mathbf{v} dt, \quad (1.1.3)$$

де $\Delta \mathbf{r}$ – переміщення матеріальної точки за проміжок часу Δt .

Модуль вектора швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.1.4)$$

Прискорення

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}, \quad (1.1.5)$$

де $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}$ – орти дотичної та нормалі до траєкторії; R – радіус кривизни траєкторії в точці.

Шлях, що пройшла точка,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v dt. \quad (1.1.6)$$

Кінематичне рівняння обертового руху

$$\varphi = f(t). \quad (1.1.7)$$

Миттєва кутова швидкість

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.1.8)$$

Кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.1.9)$$

Зв'язок між лінійними і кутовими величинами:

$$\mathbf{v} = [\omega \mathbf{r}], \quad \mathbf{a}_\tau = [\varepsilon \mathbf{r}], \quad \mathbf{a}_n = -\omega^2 \mathbf{r}, \quad (1.1.10)$$

де $\mathbf{r}$ – радіус-вектор, проведений від миттєвого центра кривизни траєкторії до частинки.

Прямолінійний рух

1.1. У чому полягає відмінність поняття диференціала в математиці та фізиці?

1.2. За яких умов під час аналізу фізичних явищ значенням певної фізичної величини можна знехтувати?

1.3. Яким умовам мають задовольняти функції часу, що визначають: а) шлях; б) швидкість; в) прискорення?

1.4. Яким умовам мають задовольняти графіки функцій, що визначають: а) шлях; б) швидкість; в) прискорення?

1.5. За яких умов шлях матеріальної точки, що рухається вздовж осі Ox , визначається формулою $s = v_0 t + \frac{a_x t^2}{2}$, де v_0 – початкова швидкість;

a_x – проекція прискорення; t – час руху?

1.6. Частинка рухається вздовж осі Ox . Відома проекція прискорення частинки $a_x(t)$ як функція часу. Визначити: а) відповідну функцію швидкості $v_x(t)$; б) шлях s , який пройшла частинка за проміжок часу від $t = 0$ до $t = t_1$; в) модуль середньої швидкості $\langle v \rangle$ за цей час; г) модуль середнього прискорення $\langle a \rangle$ частинки за вказаний час.

1.7. Координати матеріальної точки змінюються з часом за законами: $x = 4$, $y = 3t$, $z = 0$, де x, y, z – координати, м; t – час, с. Встановити залежність пройденого шляху s від часу. Який шлях s_1 пройде точка за проміжок часу від $t = 0$ до $t = 5$ с?

1.8. Матеріальна точка рухається прямолінійно. Рівняння руху $s = 2 + 3t + 0,01t^3$, де s – шлях, м; t – час, с. Чому дорівнюють модулі швидкості v і прискорення a точки в момент часу $t = 0$ і $t_1 = 10$ с? Визначити середнє значення модулів швидкості $\langle v \rangle$ і прискорення $\langle a \rangle$ за перші 10 с руху.

1.9. Матеріальна точка рухається прямолінійно. Залежність пройденого шляху від часу описується рівнянням $s = 0,5t + t^2$, де s – шлях, м; t – час, с. Визначити залежність швидкості v і прискорення a від часу, середню швидкість $\langle v \rangle$ точки за другу секунду руху та шлях s , який пройшла точка за п'ять секунд.

1.10. Рух матеріальної точки задано рівняннями: $x = 8t^2 + 4$, $y = 6t^2 - 3$, $z = 0$, де x, y, z – координати, м; t – час, с. Визначити модуль швидкості v і прискорення a точки.

1.11. Автомобіль рухається зі швидкістю $v = 72$ км/год перпендикулярно до стіни. У момент часу, коли відстань до стіни $s = 400$ м, автомобіль подав короткий звуковий сигнал. Яку відстань Δs він пройде до того моменту, коли водій почує луну? Швидкість звуку в повітрі $c = 339$ м/с.

1.12. Частинка рухається вздовж прямої згідно з рівнянням $x = At^3 + Bt$, де $A = -0,36$ м/с³, $B = 2$ м/с. Обчислити середнє значення модуля швидкості $\langle v \rangle$ і модуль середньої швидкості $|\langle v \rangle|$ та модуль переміщення $|x(t)|$ за перші 3 с руху.

1.13. Швидкість частинки змінюється за законом $v = At^2 + Ce^{Bt}$, де $A = 3$ м/с³, $B = 1$ с⁻¹, $C = 1$ м/с. Обчислити прискорення a частинки наприкінці першої секунди руху, шлях s , пройдений частинкою, і середню швидкість $\langle v \rangle$ за цей час.

1.14. Рух матеріальної точки задано рівнянням $x = At + 2Bt^2$, де $A = 0,8$ м/с, $B = -0,1$ м/с². Обчислити середнє значення модуля швидкості $\langle v \rangle$ за перші 4 с руху.

1.15. Частинка рухається згідно з рівнянням $x = A \sin \frac{2\pi}{T}t$, де $A = 1$ м, $T = 1$ с, t – час, с. Визначити: а) шлях s , що пройшла частинка за час $t_1 = 10,25$ с; б) середнє значення модуля швидкості $\langle v \rangle$ за цей час; в) модуль середньої швидкості $|\langle v \rangle|$ за час t_1 .

1.16. Швидкість частинки змінюється згідно з рівнянням $v = At + B$, де $A = 2$ м/с², $B = 30$ м/с. Обчислити шлях s , який проходить частинка протягом перших 10 с руху. Вважати, що в початковий момент часу $s = 0$.

1.17. Частинка рухається згідно з рівнянням $\mathbf{r} = 3t^2\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j}$. Визначити шлях s , що пройшла частинка за перші 4 с руху.

1.18. Частинка рухається з прискоренням $\mathbf{a} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$, де $A = 2$ м/с³, $B = 4$ м/с³. Визначити модуль швидкості v_1 частинки в момент часу $t_1 = 2$ с, якщо при $t = 0$ її швидкість була $\mathbf{v} = C(A\mathbf{i} + B\mathbf{j})$, а $C = 5$ с².

1.19. На висоті $h_1 = 100$ м тіло, що вільно падає, мало швидкість $v_1 = 20$ м/с. Чому дорівнюватиме швидкість v_2 тіла на висоті $h_2 = 75$ м?

1.20. Тіло, кинуте вертикально вгору з початковою швидкістю $v = 21$ м/с, було на половині свого найвищого підняття двічі. Визначити проміжок часу Δt між цими двома моментами.

1.21. На поверхні Сіріуса-В частинка мала швидкість $v = 10$ км/с, спрямовану вертикально вгору. Обчислити прискорення вільного падіння g_c на Сіріусі-В, якщо частинка, рухаючись вільно в полі тяжіння, перебувала на висоті $h = 10$ м двічі з часовим інтервалом $\Delta t = 1,4$ мс.

Криволінійний рух

1.22. Описати рух частинки у випадках: а) $\mathbf{a}$ – сталий вектор; б) $\mathbf{a} = \text{const}$; в) $a_\tau \neq 0$, $a_n = 0$; г) $a_\tau = 0$, $a_n \neq 0$; д) $a_\tau = \text{const}$, $a_n = \text{const}$, де $\mathbf{a}$ – прискорення; a – модуль прискорення; a_τ , a_n – тангенціальне і нормальне прискорення.

1.23. Тіло, кинуте під кутом до горизонту, рухається вільно. Які з перелічених величин і в яких точках траєкторії збігаються між собою: а) dv/dt ; б) $|\mathbf{a}_n|$; в) $|\mathbf{a}_\tau|$; г) v_x ; д) $|v_y|$; е) R , де v – швидкість; $\mathbf{a}_n$, $\mathbf{a}_\tau$ – складові прискорення; v_x, v_y – проекції швидкості; R – радіус кривизни траєкторії?

1.24. В яких точках величини, перелічені в задачі 1.23, мають найбільше і найменше значення?

1.25. Як спрямований вектор $\mathbf{a}$ повного прискорення частинки, що рухається по криволінійній траєкторії?

1.26. В якому випадку шлях, пройдений за першу секунду в рівноприскореному русі, чисельно не дорівнює половині прискорення?

1.27. Камінь кинуте з поверхні Землі під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту зі швидкістю $v_0 = 10$ м/с. Визначити час підйому t_1 і час падіння t_2 .

1.28. М'яч кинуте вертикально вгору. Чому дорівнює прискорення м'яча у верхній точці траєкторії?

1.29. Із однієї точки простору кидають два тіла горизонтально і вертикально вгору з однаковими швидкостями v_0 . На якій відстані l перебуватимуть ці тіла через час t ?

1.30. З гармати вилітає снаряд під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 . Нехтуючи опором повітря й кривизною земної поверхні, визначити: а) горизонтальну v_x і вертикальну v_y складові та повну v швидкості руху снаряда як функції часу; б) час t_1 руху снаряда від моменту пострілу до його падіння на землю; в) залежність кута β між век-

тором швидкості снаряда і горизонтом від часу; г) залежність координат x і y снаряда від часу.

1.31. Через який час t після початку руху вектор швидкості тіла, що кинуто під кутом $\alpha = 45^\circ$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с, утворюватиме з горизонтом кут $\beta = 30^\circ$?

1.32. Обчислити нормальне a_n і тангенціальне a_t прискорення тіла, яке кинуто з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту, через $t_1 = 0,7$ с з початку польоту. В яких точках траєкторії ці прискорення будуть найбільшими і чому дорівнюватимуть?

1.33. Тіло кинуто зі швидкістю $v = 20$ м/с під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Визначити радіус кривизни R траєкторії тіла через час $t_1 = 1,2$ с після початку руху.

1.34. Тіло кинуто з поверхні землі під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с. Нехтуючи опором повітря, встановити: швидкість тіла v в момент часу $t_1 = 0,8$ с; рівняння траєкторії; час підйому t_1 і час падіння t_2 ; дальність s польоту; радіус кривизни R траєкторії в момент часу t_1 .

1.35. Гармата розміщується на горі, висота якої h . Під час пострілу снаряд вилітає із ствола зі швидкістю v_0 . Нехтуючи опором повітря, визначити кут $\alpha_{\max}$ стрільби, при якому дальність польоту s є максимальною. Чому вона дорівнює?

1.36. Визначити максимальну довжину $s_{\max}$ стрибка плигуна, якщо він рухався з горизонтальною швидкістю $v_0 = 10$ м/с, а відштовхнувшись від планки, набув швидкості $v_1 = 4$ м/с під деяким кутом до горизонту. Яким у цьому разі має бути кут $\alpha_{\max}$ між векторами v_1 і v_0 ? Опором повітря нехтувати.

1.37. Тіло кинуто зі швидкістю $v_0 = 10$ м/с під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Встановити шлях s , пройдений тілом.

1.38. У вертикальну трубу, висота якої $h = 3$ м, влітає маленька кулька зі швидкістю $v = 5$ м/с під кутом $\alpha = 30^\circ$ до верхнього зрізу труби. Кулька пружно відбивається від стінок. Визначити час t падіння кульки до основи труби.

1.39. Із поїзда, що рухається зі швидкістю $v_1 = 72$ км/год, у перпендикулярному до руху напрямі кинуто тенісний м'яч. Початкова швидкість м'яча відносно поїзда $v_0 = 20$ м/с, а кут нахилу вектора швидкості до горизонту $\alpha = 30^\circ$. Встановити залежність швидкості м'яча від часу і відстань s , яку пролетить м'яч. Опором повітря нехтувати.

1.40. Частинка рухається згідно з рівняннями $x = vt$, $y = at^2 + bt$, $z = ct^2$, де a , b , c , v – сталі. Визначити швидкість частинки v_1 , її прискорення a_1 та модуль переміщення r за перші t секунд руху.

1.41. Радіус-вектор точки $\mathbf{r} = At^2\mathbf{i} + Bt\mathbf{j}$, де A , B – сталі; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ – орти осей Ox і Oy . Встановити рівняння траєкторії точки в явному вигляді $y(x)$ та залежність швидкості v , прискорення a_1 і модулів цих величин від часу.

1.42. Радіус-вектор частинки має вигляд $\mathbf{r} = (ct^3 + kt)\mathbf{b}$, де $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $c = 0,5 \text{ м/с}^3$, $k = 2 \text{ м/с}$. Визначити, як залежать від часу вектор швидкості $\mathbf{v}(t)$, вектор прискорення $\mathbf{a}(t)$, шлях $s(t)$ і модуль швидкості $v(t)$.

1.43. Частинка рухається згідно з рівняннями $x = v_x t$, $y = A \sin \omega t$, де $v_x = 5,5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$; $A = 10^{-3} \text{ м}$; $\omega = 5,5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$. Встановити рівняння траєкторії частинки в явному вигляді та швидкість v і прискорення a частинки в момент часу $t_1 = \pi \text{ с}$.

Обертальний рух. Кінематика твердого тіла

1.44. Який напрям мають псевдовектори кутових величин ($d\varphi$; ω ; ϵ)?

1.45. Чим відрізняються псевдовектори від векторів?

1.46. Частинка рухається по колу. Який фізичний зміст мають вирази:

а) $\int_0^t \epsilon_z dt$; б) $\int_0^t |\epsilon_z| dt$; в) $\int_0^t \omega_z dt$; г) $\int_0^t |\omega_z| dt$, де ϵ_z , ω_z – відповідно проекції кутового прискорення та кутової швидкості?

1.47. Електрон в атомі водню за теорією Бора рухається по колу, радіус якого $R = 52,9 \text{ пм}$, зі швидкістю $v = 2,18 \text{ Мм/с}$. Визначити кутову швидкість ω і нормальне прискорення a_n електрона. Чому дорівнює кутова швидкість ω_1 обертання вектора швидкості електрона?

1.48. Частинка рухається по колу, радіус якого $R = 10 \text{ см}$, зі швидкістю $v = 10 \text{ см/с}$. Визначити середнє значення модуля швидкості $\langle v \rangle$ і модуль вектора середньої швидкості $|\langle \mathbf{v} \rangle|$ частинки за час руху $t = 3,14 \text{ с}$.

1.49. За проміжок часу $t = 10 \text{ с}$ точка пройшла одну шосту кола, радіус якого $R = 150 \text{ см}$. Обчислити за час руху середнє значення модуля швидкості $\langle v \rangle$; модуль вектора середньої швидкості $|\langle \mathbf{v} \rangle|$; модуль вектора середнього тангенціального прискорення $\langle a_\tau \rangle$, якщо модуль тангенціального прискорення не змінювався, а початкова швидкість дорівнювала нулеві.

1.50. Земля обертається навколо Сонця із середньою швидкістю $v = 29,8 \text{ км/с}$. Сонце рухається в напрямі сузір'я Лебеда зі швидкістю

$v_c = 250$ км/с. Визначити шлях s і модуль переміщення $|\mathbf{r}|$ Землі за час $t = 365$ діб. Вважати, що Земля рухається по гвинтовій лінії.

1.51. Тіло рухається згідно з рівняннями $x = 5 \sin 2\pi t$, $y = 5 \cos 2\pi t$, де x , y – координати, м; t – час, с. Обчислити шлях s , який проходить тіло за час $t_1 = 10,25$ с. Чому дорівнює модуль переміщення $|\mathbf{r}|$ за цей час?

1.52. Точка рухається по колу зі швидкістю $v = a_0 t$, де $a_0 = 1$ м/с². Визначити її повне прискорення a після того, як вона зробить повний оберт.

1.53. Тіло рухається по колу, радіус якого $R = 1$ м, зі швидкістю $v = a_0 t$, де $a_0 = 2$ м/с². Визначити вектор середньої швидкості $\langle \mathbf{v} \rangle$ і середнє значення модуля швидкості тіла $\langle v \rangle$ за першу секунду руху.

1.54. Кут повороту радіуса-вектора частинки, що рухається по колу радіуса $R = 10$ см, визначається рівнянням $\varphi = At^2 + Bt + C$, де $A = 1$ рад/с²; $B = 2$ рад/с; $C = 3$ рад. Визначити за перші $t_1 = 2$ с руху: шлях s , який пройшла частинка; максимальні кутові швидкість $\omega_{\max}$ і прискорення $\epsilon_{\max}$; кут α між векторами повного й тангенціального прискорень частинки.

1.55. Визначити максимальні лінійну швидкість $v_{\max}$ і нормальне прискорення a_n точок, що лежать на поверхні нейтронної зірки. Маса зірки $m = 2 \cdot 10^{30}$ кг, густина $\rho = 5 \cdot 10^{14}$ г/см³, період обертання $T = 3$ мс. Вважати, що зірка має форму кулі.

1.56. Тіло, що обертається, збільшило свою кутову швидкість від значення $\omega_1 = 2$ рад/с до $\omega_2 = 64,8$ рад/с за час, протягом якого відбулось $N = 100$ повних обертів. Обчислити кутове прискорення ϵ тіла.

1.57. Вал обертається з кутовим прискоренням $\epsilon_z = -1$ рад/с². Його початкова кутова швидкість $\omega_0 = 10$ рад/с. Обчислити середню кутову швидкість $\langle \omega \rangle$ вала за час $t_1 = 15$ с руху.

1.58. Кутове прискорення вала $\epsilon_z = -1$ рад/с². Скільки обертів N зробить вал у разі зменшення частоти обертання від $n_1 = 1440$ хв⁻¹ до $n_2 = 360$ хв⁻¹? За який час t_1 це відбудеться?

1.59. Диск, радіус якого $R = 10$ см, обертається згідно з рівнянням $\varphi = Ae^{Bt}$, де $A = 10$ рад; $B = 0,1$ с⁻¹. Визначити тангенціальне a_t , нормальне a_n і повне a прискорення точок краю диска для моменту часу $t_1 = 10$ с.

1.60. Диск, радіус якого $R = 10$ см, обертається згідно з рівнянням $\varphi = At^2 + Bt + C$, де $A = 0,1$ рад/с²; $B = -1$ рад/с. Для моменту часу $t_1 = 1$ с визначити повне прискорення a точок кола диска та кут α між векторами тангенціального a_t і повного a прискорень.

1.61. Колесо, радіус якого $R = 0,1$ м, обертається так, що залежність кута повороту φ радіуса колеса від часу t описується рівнянням $\varphi = A \sin(Bt) + Ct^2$, де $A = 1$ рад; $B = 3 \text{ с}^{-1}$; $C = 2 \text{ рад/с}^2$. Для точок на ободі колеса обчислити через час $t_1 = 2\pi/3$ с після початку руху кутову ω та лінійну v швидкості, а також кутове ε , тангенціальне a_t та нормальне a_n прискорення.

1.62. Автоматна куля, діаметр якої $d = 5,68$ мм, має швидкість $v = 700$ м/с і обертається навколо своєї осі. Кутова швидкість обертання $\omega = 1,8 \cdot 10^4$ рад/с. Визначити максимальну швидкість точок кулі.

1.63. Автомобіль, що рухається зі швидкістю $v = 100$ км/год, після вимикання двигуна проїхав відстань $s = 1$ км. Чому дорівнює середнє кутове прискорення $\langle \varepsilon \rangle$ коліс автомобіля, якщо радіус колеса $r = 35$ см?

1.64. За час стрибка на висоту $h = 4,9$ м спортсмен на батуті зробив чотири оберти навколо горизонтальної осі. Визначити середню кутову швидкість $\langle \omega \rangle$ обертання спортсмена за час стрибка. Опором повітря нехтувати.

1.65. Спортсмен на батуті за час стрибка на висоту $h = 4,9$ м зробив чотири оберти навколо горизонтальної і два оберти навколо вертикальної осей. Визначити середню кутову швидкість $\langle \omega \rangle$ обертання спортсмена за час стрибка. Який кут α з горизонталлю утворює вектор кутової швидкості? Опором повітря нехтувати.

1.2. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ТА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

Імпульс частинки

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (1.2.1)$$

Імпульс системи частинок

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i, \quad (1.2.2)$$

де $\mathbf{p}_i$ – імпульс i -ї частинки; N – кількість частинок у системі.

Рівняння руху частинки та поступального руху системи частинок

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (1.2.3)$$

де $\mathbf{F}$ – рівнодіюча сила, що діє на частинку; для системи частинок $\mathbf{F}$ – головний вектор зовнішніх сил, які діють на частинки.

Радіус-вектор центра мас (центра інерції)

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i, \quad (1.2.4)$$

де m_i – маса i -ї частинки; $\mathbf{r}_i$ – її радіус-вектор; m – маса системи.

Закон руху центра мас

$$m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \mathbf{F}, \quad (1.2.5)$$

де $\mathbf{v}_c$ – швидкість центра мас.

Закон всесвітнього тяжіння

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.2.6)$$

де $\mathbf{F}$ – сила взаємодії двох частинок; G – гравітаційна стала; m_1, m_2 – маси взаємодіючих частинок; $\mathbf{r}$ – вектор, який визначає положення другої частинки відносно першої.

Сила пружності (закон Гука)

$$F_x = -kx, \quad (1.2.7)$$

де k – коефіцієнт пружності (жорсткість у випадку пружини); x – абсолютна деформація.

Сила тертя ковзання

$$F_\tau = fN, \quad (1.2.8)$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання; N – сила нормального тиску.

Рівняння руху частинки відносно неінерціальної системи відліку K'

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ін}}, \quad (1.2.9)$$

де $\mathbf{a}'$ – прискорення частинки в системі відліку K' ; $\mathbf{F}$ – сила, що діє на частинку з боку інших тіл; $\mathbf{F}_{\text{ін}}$ – сила інерції.

Рівняння руху частинки в неінерціальній системі, яка обертається зі сталою кутовою швидкістю ω відносно нерухомої осі:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + m\omega^2 \mathbf{R} + 2m[\mathbf{v}'\omega], \quad (1.2.10)$$

де $\mathbf{R}$ – вектор, що лежить у площині обертання і проведений від осі обертання до частинки; $\mathbf{v}'$ – швидкість частинки відносно системи відліку K' .

Закони Ньютона

1.66. У чому проявляються однорідність та ізотропність простору?

1.67. Запропонуйте систему відліку, яка точно відповідає визначенню інерціальної системи відліку.

1.68. Тіло, маса якого $m = 5$ кг, кинуто в горизонтальному напрямі зі швидкістю $v_1 = 10$ м/с. Визначити: приріст імпульсу $\Delta \mathbf{p}_1$ тіла за перші $t_0 = 3$ хв вільного падіння та приріст імпульсу $\Delta \mathbf{p}_2$ тіла, якщо воно кинуто в

горизонтальному напрямі зі швидкістю $v_2 = 7,9$ км/с (першою космічною швидкістю).

1.69. Вагон з піском, маса якого $m = 80$ т, рівномірно рухався зі швидкістю $v_1 = 3,6$ км/год. Визначити імпульс p вагона після того, як з нього висипалося донизу $m_1 = 60$ т піску.

1.70. Локомотив з вагонами рухається зі сталою швидкістю $v_1 = 0,2$ м/с. Якою має бути сила тяги F_T локомотива, якщо вагон завантажується гірською породою зі швидкістю $\mu = 800$ кг/с? Втрати механічної енергії під час руху не враховувати.

1.71. Два човни, маси яких $m_1 = 150$ кг і $m_2 = 110$ кг, рухаються зі швидкостями відповідно $v_1 = 10$ м/с і $v_2 = 15$ м/с назустріч один одному паралельними курсами. Коли човни порівнялися, то з кожного в інший одночасно перемістили вантажі. Маса кожного вантажу $m = 10$ кг. Визначити швидкості u_1 і u_2 човнів після обміну вантажами.

1.72. Три вагонетки, маси яких m_1 , m_2 і m_3 , рухаються за інерцією одна за одною з однаковими швидкостями v . Якими будуть їх швидкості v_1 , v_2 , v_3 , якщо із середньої вагонетки перекинули в крайні вантажі масою m зі швидкістю u відносно вагонеток?

1.73. На горизонтальну поверхню вертикально падає дощ. Густина дощу $n = 10^4$ крапель у кубічному метрі. Маса краплі $m = 40$ мг, швидкість її падіння $v = 5$ м/с. Обчислити тиск p дощу на поверхню. Вважати, що краплі не відскакують від поверхні.

1.74. Корабель, маса якого m , з водометальним двигуном кожної секунди викидає воду масою μ зі швидкістю u відносно корабля. Визначити швидкість v корабля через час t_0 після початку руху. Силою тертя та опором води нехтувати.

1.75. З окопу кинули гранату зі швидкістю $v_0 = 25$ м/с під кутом $\alpha = 45^\circ$ до горизонту, яка вибухнула через деякий час. На якій відстані s від окопу міститься центр мас уламків, що впали на землю? Опором повітря нехтувати.

1.76. Граната розірвалася в повітрі на N уламків. Визначити швидкість v гранати в момент вибуху, якщо відомі маси m_i та швидкості v_i всіх уламків.

1.77. Однорідна куля, маса якої $m = 1$ г, котиться без проковзування зі швидкістю $v = 1$ м/с. Визначити імпульс p кулі.

1.78. За яких умов можна користуватися законами Ньютона для опису взаємодії тіл скінченних розмірів?

1.79. Хлопчик, що сидить на причалі, упирається ногами в незакріплену баржу, маса якої $m = 10^4$ т, навпроти її центра мас. Обчислити, за

який час t баржа відпливе від причалу на відстань $l = 0,2$ м, якщо хлопча діє на неї із силою $F = 100$ Н? Опором води нехтувати.

1.80. Електровоз штовхає два вагони, маси яких $m_1 = m_2 = 60$ т, надаючи їм прискорення $a = 0,1$ м/с². Коефіцієнт опору $\mu = 0,005$. З якими силами F_1 і F_2 стиснуті пружини буферів між вагонами та між електровозом і вагоном?

1.81. Однорідний брусок лежить на похилій площині. До яких точок прикладаються результуючі сили, що діють на брусок?

1.82. З яким максимальним прискоренням a може рухатись автомобіль, якщо коефіцієнт тертя між резиною та бетоном $f = 0,7$?

1.83. Тіло розміщено на похилій площині з кутом нахилу α . Коефіцієнт тертя становить f . У скільки разів мінімальна сила F_1 , з якою треба подіяти на тіло, щоб витягнути його на похилу площину, більша за силу F_2 , потрібну для утримання тіла на похилій площині?

1.84. Уздовж похилої площини, що утворює з горизонтом кут α , підіймають тіло. Коефіцієнт тертя становить f . Під яким кутом β до похилої площини треба спрямувати силу, щоб вона була найменшою?

1.85. Яким має бути мінімальний коефіцієнт тертя f між шинами коліс і дорогою, щоб велосипедист зміг рухатися вгору по дорозі з нахилом $0,02$ (нахил – синус кута α нахилу дороги до горизонту) з прискоренням $a = 0,2$ м/с²?

1.86. На похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30^\circ$ до горизонту лежить брусок, маса якого $m = 2$ кг. З яким прискоренням a рухатиметься брусок, якщо на нього почне діяти сила $F = 20$ Н, напрямлена паралельно похилій площині та її основі (рис 1.1)? Розглянути випадки, коли коефіцієнт тертя: а) $f_1 = 0,6$; б) $f_2 = 0,2$.

1.87. На похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30^\circ$ до горизонту розміщено брусок, маса якого $m = 400$ г. На нього діє сила $F = 10$ Н. Кут β між векторами сил $\mathbf{F}$ і тяжіння $m\mathbf{g}$ дорівнює 60° . Визначити прискорення a тіла, якщо коефіцієнт тертя між бруском і похилою площиною $f = 0,5$.

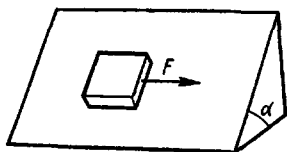


Рис. 1.1

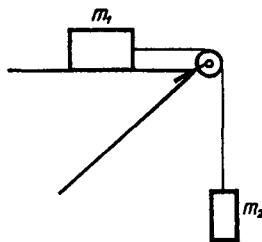


Рис. 1.2

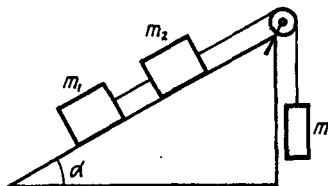


Рис. 1.3

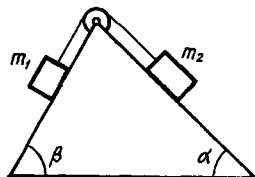


Рис. 1.4

1.88. Через нерухомий блок перекинута нитка. До її кінців прикріплено вантажі, маси яких $m_1 = 2$ кг і $m_2 = 3$ кг (рис. 1.2). Визначити прискорення a вантажів і силу F , з якою блок діє на вісь, якщо коефіцієнт тертя між вантажем і поверхнею $f = 0,2$. Масою блока і нитки нехтувати. Як зміниться прискорення вантажів, якщо маса нитки буде досить великою?

1.89. В установці, зображеній на рис. 1.3, відомими є кут α , маси m , m_1 , m_2 , коефіцієнт тертя f між похилою площиною і вантажами. Визначити: прискорення вантажу m_2 ; силу натягу $F_{н2}$ нитки між вантажами m_1 і m_2 ; силу $F_{бл}$, з якою блок діє на вісь. Масою блока й нитки нехтувати. Вважати, що $m > (m_1 + m_2) \sin \alpha$.

1.90. Невагомий блок закріплено на вершині двох похилих площин, що утворюють з горизонтом кути $\alpha = 30^\circ$ і $\beta = 45^\circ$ (рис. 1.4). Через блок перекинута нитка, до кінців якої прикріплено тягарці $m_1 = m_2 = 1$ кг. Нехтуючи тертям, визначити: прискорення a , з яким рухаються тіла; натяг F_n нитки (нитка пружна, невагома). Чи зміняться відповіді, якщо пружну нитку замінити нерозтяжною?

1.91. На горизонтальній поверхні розміщено брусок, маса якого $m_1 = 2$ кг. Коефіцієнт тертя бруска об поверхню $f_1 = 0,2$. На бруску лежить інший брусок, його маса $m_2 = 8$ кг. Коефіцієнт тертя верхнього бруска об нижній $f_2 = 0,3$. До верхнього бруска прикладена горизонтальна сила. Визначити: значення сили F_1 , при якому почнеться сумісне ковзання брусків по поверхні; значення сили F_2 , при якому верхній брусок почне проковзувати відносно нижнього.

1.92. Човен, маса якого m , рухається в стоячій воді зі швидкістю v_0 . Сила опору руху $F = -kv$, де k – стала, що залежить від форми човна. У деякий момент часу двигун човна було зупинено. Встановити залежність швидкості v і шляху s від часу, який відрховується від моменту зупинки двигуна. В який момент часу швидкість човна дорівнюватиме нулеві? Чи не суперечить це дослідів?

1.93. Підводний човен, маса якого m , рухається зі швидкістю v_0 . Сила опору змінюється зі швидкістю за законом $F = -kv^2$, де k – стала. Вста-

новити залежність швидкості v човна від шляху x , який він проходить після зупинки двигуна.

1.94. Визначити час t_n підйому тіла, маса якого m , кинутого вгору зі швидкістю v_0 . Вважати, що сила опору руху залежить від швидкості за законом $F = -kv$.

1.95. Початкова швидкість v_0 кулі, маса якої $m = 10$ г, дорівнює 700 м/с. При горизонтальному русі в повітрі за час $t_1 = 0,1$ с її швидкість зменшилася до значення $v_1 = 600$ м/с. Визначити коефіцієнт опору k , вважаючи, що сила опору пропорційна квадратові швидкості кулі.

1.96. Вертоліт, маса якого m і розмах лопатей гвинта d , піднімається вертикально вгору з прискоренням a . З якою швидкістю v гвинт відкидає вниз повітря? Покласти, що густина повітря, яке відкидається лопатями, ρ , а діаметр струменя повітря також d .

1.97. Яка сила F діятиме на наконечник поливного шланга в ту мить, коли з нього почне витікати вода зі швидкістю $v = 20$ м/с? Площа перерізу струменя на виході зі шланга $S = 1$ см².

Динаміка матеріальної точки, яка рухається по колу

1.98. Кулька, що прикріплена до нитки, довжина якої $l = 1$ м, описує коло в горизонтальній площині. Який кут φ утворює нитка з вертикаллю, якщо частота обертання $n = 0,6$ с⁻¹?

1.99. Літак виконує “мертву петлю” радіуса $R = 1$ км. Визначити вагу льотчика P , маса якого $m = 70$ кг, у момент, коли швидкість літака $v = 720$ км/год, а вектор швидкості v утворює кут $\alpha = 45^\circ$ з горизонталлю.

1.100. Визначити силу F , що діє на частинку масою m , координати якої змінюються згідно з рівняннями $x = A \cos \omega t$, $y = B \sin \omega t$, де A , B , ω – сталі.

1.101. Велосипедист рухається зі швидкістю $v = 10$ м/с по заокругленню дороги радіуса $R = 15$ м. Обчислити кут α нахилу площини велосипеда до вертикалі, а також найменший коефіцієнт тертя f між шинами велосипеда і дорогою, за яких забезпечується стійкість велосипедиста.

1.102. На внутрішній поверхні вертикально розташованого конуса, кут розхилу якого $\alpha = 90^\circ$, лежить невелике тіло (рис. 1.5). Конус обертається навколо своєї вершини з кутовою швидкістю ω . При яких значеннях кутової швидкості тіло перебуватиме в стані рівноваги на відстані

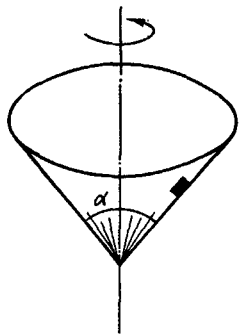


Рис. 1.5

$l = 20$ см від вершини конуса, якщо коефіцієнт тертя між тілом та поверхнею конуса $f = 0,4$?

1.103. Тонке однорідне кільце, маса якого $m = 300$ г і радіус $R = 20$ см, обертається навколо осі, що проходить через його центр з частотою $n = 5 \text{ с}^{-1}$. Обчислити силу F , що розтягує кільце, за таких умов: а) вісь обертання є перпендикулярною до площини кільця; б) вісь обертання лежить у площині кільця.

1.104. Тіло, маса якого $m = 1$ кг, обертається на нитці у вертикальній площині. На скільки сила натягу $F_{н,н}$ нитки в нижній точці буде більшою, ніж у верхній $F_{н,в}$?

1.105. На поверхні горизонтального диска, радіус якого $R = 25$ см, лежить стрижень, довжина якого дорівнює радіусові диска. Кінець стрижня збігається з центром диска. Коефіцієнт тертя $f = 0,5$. При якій частоті n обертання диска стрижень буде зісковзувати з диска?

Сили в механіці

1.106. За яких умов силу тяжіння можна визначати за формулою (1.2.6), якщо тіла мають скінченні розміри?

1.107. Сформулювати принцип суперпозиції для ньютонівського гравітаційного поля.

1.108. З якою силою F взаємодіє частинка, маса якої m_1 , з тонким однорідним стрижнем, що має масу m_2 і довжину l , якщо вони лежать на одній прямій і ближній кінець стрижня розміщується на відстані a від частинки?

1.109. З якою силою F притягуються дві галактики, маси яких $m_1 = 10^{11} m_{\odot}$ і $m_2 = 10^{10} m_{\odot}$, якщо центри їх містяться на відстані $r = 10^8$ кпк одна від одної? Тут $m_{\odot}$ – маса Сонця; 1 кпк = 1 кілопарсек = $3,1 \cdot 10^{19}$ м.

1.110. Усередині порожньої кулі міститься тіло. З якою силою F взаємодіє куля з тілом внаслідок гравітаційного тяжіння?

1.111. Вважаючи, що Земля має форму кулі, а густина її атмосфери є функцією тільки відстані до центра Землі, встановити, з якою силою F атмосфера притягує частинку, що лежить на поверхні Землі.

1.112. На основі спостережень зроблено висновок, що речовина у Всесвіті розподілена більш-менш рівномірно. Який висновок, виходячи з теорії тяжіння Ньютона, можна зробити про місцезнаходження нашої Галактики у Всесвіті, якщо вважати, що результуюча сила тяжіння на неї не залежить від часу і дорівнює нулеві?

1.113. Як змінюється прискорення вільного падіння g з висотою h над поверхнею Землі і глибиною H ? В обох випадках відстань відраховується від поверхні Землі. Покласти, що Земля є однорідною кулею.

1.114. Космічний корабель обертається по коловій орбіті навколо Землі на висоті $h = 300$ км над її поверхнею. Визначити швидкість v корабля, а також вагу P і силу тяжіння F_t , що діють на космонавта, маса якого $m = 80$ кг.

1.115. Снаряд має початкову швидкість $v_0 = 3$ км/с. На яку найбільшу висоту h може піднятися снаряд? Опором повітря знехтувати, врахувати залежність прискорення вільного падіння від висоти.

1.116. Обчислити середню вагу $\langle P \rangle$ спортсмена, маса якого $m = 80$ кг, якщо він стартує з прискоренням $a = 3$ м/с².

1.117. Космонавт, маса якого $m = 75$ кг, перебуває в центрифугі, що обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю $\omega = 4,33$ рад/с. Радіус центрифуги $R = 3$ м. Визначити числове значення і напрям ваги P космонавта.

1.118. Дві пружини з коефіцієнтами жорсткості k_1 і k_2 з'єднують один раз послідовно, другий – паралельно. Якої жорсткості $k_{\text{екв}}$ треба взяти пружини, щоб ними можна було замінити у кожному випадку ці системи з двох пружин?

1.119. Як зміниться жорсткість пружини, якщо її довжину зменшити у n разів?

1.120. Тіло масою m прикріплено до двох послідовно з'єднаних пружин із жорсткостями k_1 і k_2 . До вільного кінця ланцюжка пружин прикладена постійна сила F . Яким буде сумарне подовження пружин?

1.121. Чи діють сили тертя між абсолютно твердими тілами?

1.122. На що витрачається механічна енергія тіл при терті? Як змінюється сила тертя у разі зменшення шорсткості поверхонь тіл?

1.123. Які із сил – тяжіння, тертя та пружності – є фундаментальними?

Сили інерції

1.124. Чим сили інерції відрізняються від інших сил?

1.125. У вагоні, що рухається з прискоренням a , переміщається людина, маса якої m , з прискоренням a_1 відносно вагона. Записати рівняння руху людини в системі відліку, що зв'язана з вагоном, і встановити реакцію опори на людину F_p за таких умов: а) $a \uparrow \uparrow a_1$; б) $a \uparrow \downarrow a_1$.

1.126. Вертикальна стіна, до якої приклали брусок, рухається з прискоренням $a = 10$ м/с² (рис. 1.6). Коефіцієнт тертя між стіною та брусом $f = 0,6$. Визначити прискорення a_1 бруска. При якому прискоренні a_2 стіни брусок не рухатиметься вниз?

1.127. Розв'язати задачу 1.88 за умови, що установка рухається вертикально вгору з прискоренням $a = 5$ м/с².

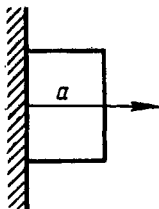


Рис. 1.6

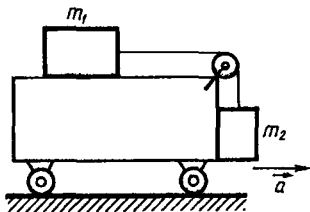


Рис. 1.7

1.128. Цистерна з рідиною рухається горизонтально з прискоренням $a = 1 \text{ м/с}^2$. Під яким кутом α до горизонту піднімається в рідині повітряна бульбашка?

1.129. Тіло, маса якого m , підвісили на пружній нитці з коефіцієнтом пружності k . Визначити видовження нитки Δl , якщо точка підвісу почне рухатись з прискоренням a .

1.130. З яким мінімальним прискоренням a в горизонтальному напрямі треба рухати візок (рис. 1.7), щоб тіла масами $m_1 = m_2$ перебували в стані спокою відносно нього. Коефіцієнти тертя між кожним тілом і поверхнею візка є однаковими й дорівнюють f . Масою блока та нитки нехтувати, тертя в блоці не враховувати.

1.131. У центрі демонстраційного столика, що обертається, розміщено циліндр з водою. Вісь циліндра збігається з віссю обертання столика. Довести, що під час обертання столика поверхня води набуває форми параболоїда обертання.

1.132. У ліфті тіло падало з висоти $h = 2 \text{ м}$ протягом $t_1 = 1 \text{ с}$. Визначити прискорення a ліфта.

1.133. Яка сила інерції F діяла б на тіло, маса якого $m = 100 \text{ кг}$, якби його можна було помістити на екваторі нейтронної зірки радіуса $R = 30 \text{ км}$? Період обертання зірки $T = 1 \text{ мс}$.

1.134. Визначити максимальну силу Коріоліса F_{max} , що діє на Сонце в системі відліку, пов'язаній із Землею.

1.135. Корабель рухається вздовж меридіана на північ зі швидкістю $v_0 = 72 \text{ км/год}$. Чому дорівнює прискорення a корабля? На яку відстань Δs і в якому напрямі корабель відхилиться від курсу за $t = 1 \text{ год}$? Широта місцевості $\varphi = 30^\circ$. Зміною широти нехтувати.

1.136. Порожниста сталева кулька піднімається з глибини $h = 500 \text{ м}$ води на поверхню. Швидкість усталеного руху кульки $v = 1 \text{ м/с}$. На яку відстань x і в якому напрямі відносно вертикалі відхилиться кулька? Широта місцевості $\varphi = 30^\circ$.

1.137. Ріка, ширина якої $l = 1,2$ км, тече з півночі на південь на широті $\varphi = 45^\circ$. На скільки метрів рівень h води біля одного берега вищий, ніж біля іншого? Покласти, що швидкість течії ріки $v_0 = 0,3$ м/с.

1.138. Гармата, що розміщена на платформі, яка плаває у воді на широті екватора, стріляє вертикально вгору. Маса снаряда $m_0 = 10$ кг, маса платформи з гарматою $m = 40$ т, довжина ствола $l = 3$ м. Вважаючи, що прискорення снаряда в стволі є постійним, встановити значення й напрям початкової швидкості v платформи.

1.3. ДИНАМІКА РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА, ЯКЕ ОБЕРТАЄТЬСЯ НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

Момент інерції матеріальної точки, маса якої m , відносно деякої осі

$$I = mr^2, \quad (1.3.1)$$

де r – відстань від точки до осі.

Момент інерції твердого тіла відносно осі Oz

$$I_z = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV, \quad (1.3.2)$$

де ρ – густина тіла.

Момент інерції:

а) суцільного однорідного циліндра (диска) відносно осі циліндра (диска)

$$I = \frac{1}{2} mR^2, \quad (1.3.3)$$

де R – радіус циліндра (диска); m – його маса;

б) тонкостінного циліндра (тонкого кільця) радіуса R відносно осі, що збігається з віссю циліндра (кільця),

$$I = mR^2; \quad (1.3.4)$$

в) однорідного стрижня, що має довжину l і масу m , відносно осі, що проходить через центр його мас перпендикулярно до осі стрижня,

$$I = \frac{1}{12} ml^2; \quad (1.3.5)$$

г) однорідної кулі масою m і радіуса R відносно осі, що проходить через центр кулі,

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \quad (1.3.6)$$

Теорема Гюйгенса – Штейнера

$$I = I_0 + md^2, \quad (1.3.7)$$

де I_0 – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас паралельно даній осі; d – відстань між осями.

Момент сили відносно деякої осі Oz

$$M_z = F_{\perp} l, \quad (1.3.8)$$

де $F_{\perp}$ – проекція сили $\mathbf{F}$ на площину, яка є перпендикулярною до осі Oz ; l – плече сили.

Момент імпульсу твердого тіла відносно нерухомої осі обертання Oz

$$L_z = I_z \omega, \quad (1.3.9)$$

де I_z – момент інерції тіла відносно осі Oz ; ω – кутова швидкість.

Рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі

$$\frac{dL_z}{dt} = M_{z\text{зовн}}, \quad (1.3.10)$$

де $M_{z\text{зовн}}$ – алгебрична сума моментів зовнішніх сил, що діють на тіло, відносно осі Oz .

Якщо момент інерції не змінюється, рівняння (1.3.10) набуває вигляду

$$I_z \varepsilon = M_{z\text{зовн}}, \quad (1.3.11)$$

де ε – кутове прискорення, $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$.

Момент інерції

1.139. Визначити момент інерції I тонкого однорідного стрижня, маса якого m і довжина l , відносно осі, що проходить: а) через центр мас стрижня перпендикулярно до нього; б) паралельно стрижню на відстані a від нього.

1.140. Визначити момент інерції I тонкого однорідного стрижня, що має масу m і довжину l , відносно осі, яка перетинає його під довільним кутом α так, що кінці стрижня знаходяться від осі на однакових відстанях a .

1.141. Визначити момент інерції I тонкого однорідного кільця, маса якого $m = 200$ г і радіус $R = 30$ см: а) відносно осі, що проходить уздовж діаметра кільця; б) відносно осі, що є дотичною до кільця.

1.142. Визначити момент інерції I труби, маса якої $m = 100$ кг, відносно її осі симетрії, якщо зовнішній і внутрішній радіуси труби становлять відповідно $R_1 = 10$ см і $R_2 = 8$ см.

1.143. Довести, що для тонкої пластинки, яка лежить у площині xOy , є слушною формула $I_x + I_y = I_z$, де I_x , I_y , I_z – моменти інерції пластинки відносно координатних осей.

1.144. Обчислити момент інерції I_z пластинки, яка має вигляд прямокутного паралелепіпеда зі сторонами $a = 0,3$ мм, $b = 200$ мм, $c = 300$ мм, відносно осі Oz , що проходить через центр інерції пластинки перпендикулярно до найбільшої грані. Густина матеріалу пластинки $\rho = 21,5$ г/см³.

1.145. В однорідному диску, маса якого $m = 2$ кг і радіус $R = 40$ см, вирізано круглий отвір. Діаметр отвору $d = 20$ см, а центр його міститься на відстані $l = 15$ см від осі диска. Визначити момент інерції I одержаного тіла відносно осі, що проходить через: а) центр диска перпендикулярно до його площини; б) центр диска і вирізу.

Рівняння динаміки обертального руху

1.146. Через блок у вигляді диска, радіус якого $R = 10$ см і маса $m = 0,5$ кг, перекинута легка нерозтяжна нитка. До її кінців прив'язано вантажі $m_1 = 2$ кг і $m_2 = 3$ кг (рис.1.8). Визначити кутове прискорення ϵ диска, якщо система надана самій собі. Чому дорівнює сила F , з якою блок діє на вісь? Нитка не ковзає.

1.147. На однорідний суцільний циліндр, що має масу m_1 і радіус R та може обертатися навколо горизонтальної осі, намотали нитку, до кінця якої прикріпили вантаж масою m_2 (рис. 1.9). Нехтуючи масою нитки і тертям на осі циліндра, визначити прискорення a вантажу і силу F , що діє на вісь блока.

1.148. Циліндр масою m і радіуса R опускається на нитках, маса яких набагато менша від m (рис. 1.10). Визначити швидкості v осі циліндра і v_A точки A наприкінці другої секунди від початку руху. Нитки не ковзають.

1.149. Тонкостінний циліндр масою m і радіуса R опускається на нитках, маса яких набагато менша від m (рис. 1.10). Вільні кінці ниток прикріплено до стелі ліфта, що рухається вниз із прискоренням a_0 . Визначити прискорення a циліндра відносно ліфта і силу натягу T кожної нитки.

1.150. До одного кінця нитки, перекинutoї через блок, підвішено вантаж, маса якого $m_1=1$ кг. До другого її кінця прикладена донизу

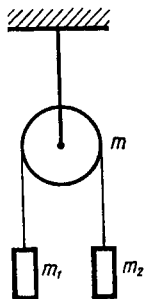


Рис. 1.8

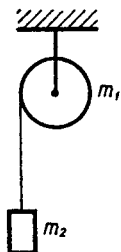


Рис. 1.9

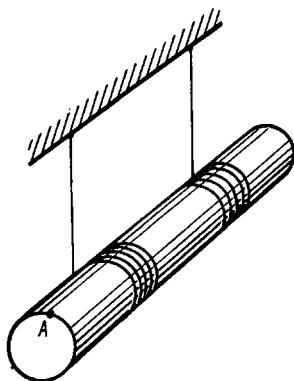


Рис. 1.10

сила $F = At + Bt^3$, де $A = 3 \text{ Н/с}$, $B = 2 \text{ Н/с}^3$, t – час, с. Блок має форму диска, його маса $m = 3 \text{ кг}$. З якими прискореннями a_1 і a_2 рухається вантаж через час $t_1 = 1 \text{ с}$ і $t_2 = 2 \text{ с}$ від початку дії сили?

1.151. Визначити прискорення a вантажів і сили натягу T ниток в системі, що зображена на рис. 1.11. Тут $m_1 = 2 \text{ кг}$, $m_2 = 3 \text{ кг}$, $R_1 = 20 \text{ см}$, $R_2 = 10 \text{ см}$. Момент інерції східчастого блока відносно його осі $I = 0,05 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Нитки невагомі.

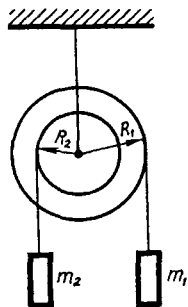


Рис. 1.11

1.152. Маховик, маса якого $m_1 = 1 \text{ кг}$, жорстко зв'язаний зі шківом радіуса $r = 5 \text{ см}$. Маса шківів $m_2 = 200 \text{ г}$. Система приводиться в рух за допомогою тягарця, маса якого $m_3 = 500 \text{ г}$. Тягарець прив'язаний до одного з кінців мотузки, що намотана на шків. Визначити частоту ν обертання маховика через перші $t = 21 \text{ с}$ руху. Вважати, що вся маса маховика розподілена по його ободу на відстані $R = 40 \text{ см}$ від осі обертання.

Момент імпульсу

1.153. Показати, що для частинки, яка рухається з постійною швидкістю, момент імпульсу L відносно деякої точки не залежить від положення частинки.

1.154. Конічний маятник, маса якого $m = 50 \text{ г}$, підвішений на нитці завдовжки $l = 50 \text{ см}$ і обертається з кутовою швидкістю $\omega = \pi \text{ рад/с}$, описуючи конус з кутом розхилу $\theta = 60^\circ$. Визначити момент імпульсу L маятника відносно точки підвісу і вказати його напрям у просторі.

1.155. Тіло, маса якого $m = 1 \text{ кг}$, кинуто з початковою швидкістю $v_0 = 20 \text{ м/с}$ під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту. Встановити залежність від часу векторів M_O моменту сили тяжіння і L_O моменту імпульсу тіла відносно точки кидання.

1.156. У системі частинок задано її момент імпульсу L_O відносно деякої точки O . Нехай L'_O – момент імпульсу відносно іншої точки O' , яка разом з точкою O є нерухомою в даній системі відліку. Положення точки O' відносно точки O задано радіусом-вектором $r_{OO'}$. Нехай також заданий сумарний імпульс p частинок відносно цієї системи відліку. Довести співвідношення $L_O = L'_O + [r_{OO'} p]$.

1.157. Обчислити моменти імпульсу Землі відносно Сонця L_C і власної осі обертання L_O . Вважати, що Земля обертається навколо Сонця по колу.

1.158. Тонка сферична оболонка, маса якої $m = 10$ кг і радіус $R = 1$ м, обертається з частотою $\nu = 10$ с⁻¹ навколо своєї осі симетрії. Визначити момент імпульсу L_z оболонки відносно цієї осі.

1.159. Автоматна куля у вигляді циліндра, діаметр якої $d \approx 6$ мм, а маса $m = 10$ г, обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю $\omega \approx 2 \cdot 10^4$ рад/с. Визначити момент імпульсу L_z кулі відносно її осі.

1.160. Тонкий обруч, маса якого $m = 1$ кг і радіус $R = 0,5$ м, котиться без проковзування зі швидкістю $v = 2$ м/с по горизонтальній поверхні. Визначити модуль моменту імпульсу L обруча відносно точки торкання його з поверхнею (відносно миттєвого центра обертання).

1.161. По внутрішній поверхні конічної лійки з кутом піврозхилу θ у площині, що перпендикулярна до осі, котиться без ковзання по колу радіуса r кулька. Маса кульки m , радіус R , швидкість v . Визначити момент імпульсу L_z кульки відносно осі лійки.

1.162. Гіроскоп, який має форму диска радіуса $R = 5$ см, обертається навколо своєї осі симетрії з частотою $n = 9\,000$ хв⁻¹. Вісь гіроскопа утворює деякий кут α з вертикаллю і може вільно повертатися навколо точки O (рис. 1.12). Відстань від точки O до центра мас гіроскопа $l = 10$ см. Обчислити кутову швидкість Ω обертання осі гіроскопа навколо вертикалі (кутову швидкість прецесії). Як залежить кутова швидкість Ω прецесії від кута α нахилу осі гіроскопа?

1.163. Маховик з моментом інерції $I = 0,5$ кг·м² за час $t = 0,5$ хв змінив частоту обертання від $n_1 = 2\,400$ хв⁻¹ до $n_2 = 120$ хв⁻¹. Визначити середнє значення кутового прискорення $\langle \epsilon \rangle$ маховика та моменту $\langle M \rangle$ сили гальмування.

1.164. Куля, радіус якої $R = 0,1$ м і маса $m = 10$ кг, обертається навколо своєї осі згідно з рівнянням $\varphi = At^3 + Bt^2 + C$, де $A = 1$ рад/с³, $B = -3$ рад/с². Визначити момент сили M для моментів часу $t_1 = 1$ с і $t_2 = 2$ с.

1.165. Однорідний суцільний диск радіуса $R = 0,1$ м може обертатися навколо вертикальної осі, яка збігається з його віссю симетрії. До ободу диска прикладена дотична сила $F = 200$ Н. Визначити масу m диска, якщо його кутове прискорення $\epsilon = 40$ рад/с², а момент сили тертя, що діє при обертанні диска, $M_\tau = 10$ Н·м.

1.166. Куля скочується без ковзання з похилої площини, яка нахилена під кутом α до горизонту. Визначити лінійне прискорення a центра мас кулі. Коефіцієнт тертя ковзання між кулею і площиною f . При якому куті α_1 нахилу куля почне ковзати?

1.167. Обруч радіуса R , який обертається навколо вертикальної осі, що перпендикулярна до площини обруча і проходить через його

центр з кутовою швидкістю ω_0 , опускають на горизонтальну поверхню. Коефіцієнт тертя обруча об поверхню f . Визначити кутове прискорення ϵ обруча. Скільки обертів N зробить обруч на поверхні до повної зупинки?

1.168. Суцільний циліндр, маса якого m і радіус R , обертається навколо своєї осі за законом $\varphi = A \sin \omega t$. Як залежать від часу момент M сили, що діє на циліндр, і момент імпульсу L циліндра?

1.169. Вал у вигляді суцільного циліндра радіуса $R = 10$ см насаджено на горизонтальну вісь. На циліндр намотано нитку, до кінця якої підвішено вантаж масою $m = 1$ кг. Обчислити момент імпульсу L системи відносно осі блока через час $t_1 = 3$ с після початку руху вантажу.

Рівновага твердих тіл

1.170. Електричну лампу (рис. 1.13) підвісили на шнурі й відтягнули горизонтальним канатом. Визначити сили натягу F_{BC} шнура BC і F_{AB} горизонтального каната AB , якщо маса лампи з абажуром $m = 1$ кг, а кут між шнуром і канатом $\alpha = 120^\circ$.

1.171. До однорідного стрижня, довжина якого $l = 1,2$ м, що може обертатися навколо точки O (рис. 1.14), прикладені сили $F_1 = 3$ Н, $F_2 = 4$ Н, $F_3 = 5$ Н у точках A , C , B . Кут між напрямом сили F_1 і стрижнем $\alpha = 30^\circ$ ($|OB| = |OC| = l_1 = 0,3$ м). Визначити масу m стрижня AB , якщо він перебуває в рівновазі.

1.172. Освітлювальну систему підвішено над серединою вулиці за допомогою тросів. Маса освітлювальної системи $m = 10$ кг. Визначити силу натягу F тросів, якщо вони утворюють між собою кут $\alpha = 120^\circ$.

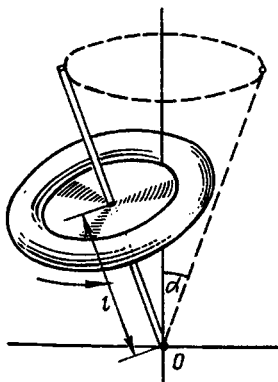


Рис. 1.12

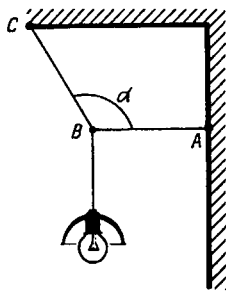


Рис. 1.13

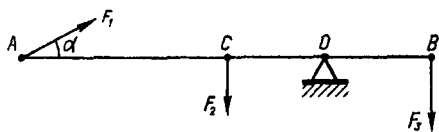


Рис. 1.14

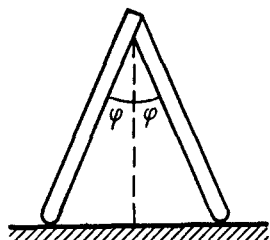


Рис. 1.15

1.173. Дві однакові лінійки поставили на стіл так, щоб вони спиралися одна на одну. Кут розхилу лінійок дорівнює 2φ . Яким має бути коефіцієнт тертя f між нижніми кінцями лінійок і поверхнею стола, щоб вони не падали (рис. 1.15)?

1.174. Циліндричний коток потрібно підняти на сходинок, висота якої h (рис. 1.16). Яку силу F при цьому треба прикласти до центра котка в горизонтальному напрямі, якщо маса котка m , а радіус R ($R > h$)?

1.175. На горизонтальному столі лежить катушка ниток. З яким прискоренням a рухатиметься центр мас катушки, якщо тягнути за нитку із силою F під кутом α до поверхні стола (рис. 1.17). Катушка рухається без ковзання. Як слід тягнути нитку, щоб катушка: а) намотувалась, тобто рухалась у бік натягнутої нитки; б) ковзала; в) змотувалась?

1.176. Однорідна півкуля, маса якої m_1 і радіус r , лежить опуклою стороною на горизонтальній площині. На край півкулі поклали невеликий вантаж масою m_2 (рис. 1.18). Який кут α утворює з горизонтом площина, що обмежує півсферу?

1.177. До вертикальної гладенької стінки на мотузці, довжина якої $l = 0,5$ м, підвішено кулю масою $m = 7,8$ кг. Чому дорівнює сила натягу T мотузки і сила тиску F кулі на стінку, якщо радіус кулі $R = 6,2$ см? Тертям нехтувати.

1.178. Визначити координату x відносно центра мас O однорідного диска радіуса R , з якого вирізано отвір. Радіус отвору $r < R/2$ (рис. 1.19). Центр отвору лежить на відстані $R/2$ від центра диска.

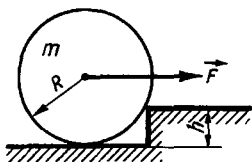


Рис. 1.16

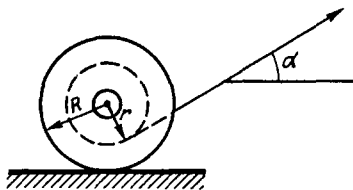


Рис. 1.17

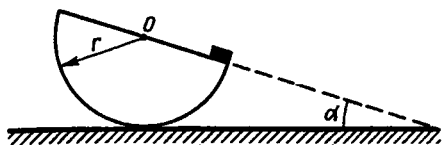


Рис. 1.18

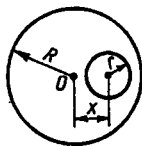


Рис. 1.19

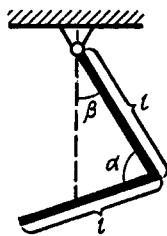


Рис. 1.20

1.179. Визначити положення центра мас дрітної рамки, що має форму рівностороннього трикутника, якщо дві сторони рамки зроблені з алюмінієвого дроту, а третя – із залізного. Дріт має однакову площу перерізу. Довжина сторони рамки $a = 0,5$ м.

1.180. Металевий прут зігнуто навпіл так, що його частини утворюють кут $\alpha = 60^\circ$ (рис. 1.20). Прут підвішений за один кінець на шарнірі. Знайти кут β , який утворює з вертикаллю верхня частина прута в положенні рівноваги.

1.181. При зважуванні на терезах з різними плечима вага тіла на одній чашці була $P_1 = 80$ Н, на другій $P_2 = 85$ Н. Визначити справжню вагу P тіла.

1.182. На похилій площині з кутом нахилу α до горизонту стоїть циліндр радіуса R . Якою може бути найбільша висота h циліндра, при якій він не перекинеться, якщо циліндр виготовлений з однорідної речовини?

1.183. Біля стіни стоїть драбина. Коефіцієнт тертя між драбиною і стіною та між драбиною і землею однаковий: $f = 0,45$. Центр ваги драбини міститься на середині її довжини. Визначити найменший кут α , який драбина може утворювати з горизонтом, не ковзаючи.

1.184. Як краще зрушити з місця залізничний вагон: прикладаючи силу до корпуса вагона чи до верхньої частини обода колеса?

1.185. Космонавт у скафандрі масою $m_1 = 120$ кг перебуває на орбіті штучного супутника Землі. Під час виконання монтажних робіт космонавт руками переміщує балку, маса якої $m_2 = 360$ кг і довжина $l = 10$ м. На яку максимальну відстань l_1 відносно Землі космонавт може перемістити балку, якщо він з балкою рухається вільно? Розмірами космонавта нехтувати.

1.186. Обчислити відстань r між центром орбіти Місяця й центром Землі. Покласти відстань між центрами Землі й Місяця $R = 384,4$ Мм.

1.187. Як відомо, Архімед сказав: “Дайте мені точку опори, і я посуну Землю”. Якою має бути довжина l важеля, для того щоб Архімед міг перемістити Землю на $s = 1$ мм за час $t = 8$ год? Сила, з якою він тисне на кінець важеля, $F_2 = 500$ Н, а плече важеля від точки опори до Землі $d = 10$ м.

1.188. Плоску фігуру розрізали на дві частини по прямій, що проходить через центр мас. Чи будуть однаковими маси цих частин?

1.189. Куб з ребром a і масою m лежить на шорсткуватій поверхні клина з кутом α . Ребро куба паралельне реброві клина. Визначити момент M сили реакції опори відносно центра куба.

1.190. На горизонтальну поверхню насипали гравій, що утворив конус із кутом піврозхилу θ . Оцінити коефіцієнт f тертя між частинками гравію.

1.191. Тіло у вигляді тонкого однорідного кільця, маса якого $m = 100$ г і радіус $R = 15$ см, лежить на горизонтальній поверхні іншого тіла. Який найменший момент M пари сил треба прикласти до кільця, щоб воно почало обертатися навколо своєї осі, якщо коефіцієнт тертя між тілами $f = 0,3$?

1.4. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ В МЕХАНІЦІ

Зміна імпульсу незамкненої системи

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt, \quad (1.4.1)$$

де $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ – імпульси системи в моменти часу відповідно t_1 , t_2 ; $\mathbf{F}$ – результуюча всіх зовнішніх сил.

Якщо $\mathbf{F} = 0$, має місце закон збереження імпульсу

$$\mathbf{p} = \text{const}. \quad (1.4.2)$$

Рівняння динаміки тіла змінної маси m

$$m \frac{dv}{dt} = F + u \frac{dm}{dt}, \quad (1.4.3)$$

де v – швидкість тіла; u – швидкість речовини, що відокремлюється від даного тіла або приєднується до нього, відносно системи відліку, яка зв'язана з тілом.

Рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі

$$\frac{d(I_z \omega)}{dt} = M_z, \quad (1.4.4)$$

де I_z – момент інерції твердого тіла відносно осі обертання; ω – кутова швидкість; M_z – сумарний момент зовнішніх сил відносно осі обертання.

Якщо $M_z = 0$ (система замкнена), має місце закон збереження моменту імпульсу відносно осі Oz

$$L_z = \text{const}. \quad (1.4.5)$$

Третій закон Кеплера

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad (1.4.6)$$

де T_1, T_2 – періоди обертання планет (тіл); a_1, a_2 – великі півосі їхніх орбіт.

Елементарна робота сили

$$dA = Fdr = F_s ds = Fds \cos \alpha, \quad (1.4.7)$$

де F_s – проекція сили на напрям елементарного переміщення; ds – модуль елементарного переміщення; α – кут між векторами сили і переміщення.

Робота змінної сили на шляху s

$$A_{12} = \int_{1-2} Fdr = \int_s F_s ds. \quad (1.4.8)$$

Робота гравітаційної сили притягання під час переміщення частинки в централь-но-симетричному полі тяжіння

$$A = Gmm_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = U_1 - U_2, \quad (1.4.9)$$

де G – гравітаційна стала; m – маса джерела поля; m_1 – маса частинки, що переміщується; r_1, r_2 – відповідно початкова і кінцева відстані від центра джерела; U – потенціальна енергія гравітаційної взаємодії.

Робота зовнішньої сили під час переміщення тіла поблизу поверхні Землі (в од-норідному полі сили тяжіння Землі)

$$A = mg\Delta h, \quad (1.4.10)$$

де g – прискорення вільного падіння; Δh – збільшення відстані між тілом і поверхню Землі.

Робота пружної сили при деформації пружини

$$A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}, \quad (1.4.11)$$

де x_1, x_2 – відповідно початкова і кінцева абсолютні деформації пружини.

Робота зовнішньої сили при обертанні твердого тіла

$$dA = M_\omega d\varphi, \quad (1.4.12)$$

де M_ω – проекція моменту сили на напрям вектора ω .

Миттєва потужність

$$P = \frac{dA}{dt} = Fv. \quad (1.4.13)$$

Кінетична енергія тіла, що рухається,

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (1.4.14)$$

Кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої осі,

$$T = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (1.4.15)$$

Кінетична енергія тіла в разі плоского руху

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}, \quad (1.4.16)$$

де v_c – швидкість центра мас; I_c – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас.

Приріст кінетичної енергії частинки

$$T_2 - T_1 = A, \quad (1.4.17)$$

де A – робота результуючої всіх сил, що діють на частинку.

Зв'язок між потенціальною енергією частинки та силою, що діє на неї у даній точці поля,

$$\mathbf{F} = - \left(\frac{dU}{dx} \mathbf{i} + \frac{dU}{dy} \mathbf{j} + \frac{dU}{dz} \mathbf{k} \right). \quad (1.4.18)$$

Закон збереження механічної енергії для консервативної системи

$$T + U = \text{const}. \quad (1.4.19)$$

Закон збереження імпульсу

1.192. На тіло діє сила, модуль якої змінюється за законом $F = At^2 + Bt$, де $A = 3 \text{ Н/с}^2$; $B = 2 \text{ Н/с}$; t – час, с. Визначити модуль імпульсу тіла p в момент часу $t_1 = 2 \text{ с}$, якщо при $t = 0$ імпульс дорівнював нулеві.

1.193. Тіло масою m рухається вздовж осі Ox за законом $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, де A , ω , φ – сталі. Записати закон $p(t)$ зміни модуля імпульсу тіла з часом.

1.194. Два вагони масою m кожний рухаються назустріч один одному зі швидкостями v_0 і зазнають зіткнення. Встановити залежність імпульсу p кожного вагона від деформації x пружин буферів. Жорсткість пружин k .

1.195. Снаряд, що мав імпульс $p = 5000 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$, розірвався в повітрі на два уламки з імпульсами $p_1 = 3000 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$ і $p_2 = 4000 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$. Визначити кути α_1 і α_2 між векторами $\mathbf{p}$ і $\mathbf{p}_1$ та $\mathbf{p}$ і $\mathbf{p}_2$.

1.196. Кулька, маса якої $m_1 = 200 \text{ г}$, рухається зі швидкістю $v_1 = 2 \text{ м/с}$ і пружно стикається з кулькою масою $m_2 = 100 \text{ г}$, що рухається зі швидкістю $v_2 = 1 \text{ м/с}$. Удар центральний. Визначити швидкості u_1 та u_2 кульок після зіткнення за таких умов: а) $v_1 \uparrow \downarrow v_2$; б) $v_1 \uparrow \uparrow v_2$.

1.197. Дві кулі масами $m_1 = 2 \text{ кг}$ і $m_2 = 3 \text{ кг}$ рухаються у взаємно перпендикулярних напрямках зі швидкостями $v_1 = 2 \text{ м/с}$ і $v_2 = 1 \text{ м/с}$. Визначити швидкості u_1 , u_2 куль після їх непружного зіткнення.

1.198. Куля, яка рухається, пружно стикається з такою самою нерухомою кулею. Удар нецентральный. Довести, що кулі завжди розлітаються під прямим кутом одна до одної.

1.199. Дві шайби масами $m_1 = 2$ кг і $m_2 = 1$ кг мають швидкості $\mathbf{v}_1 = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ (м/с) і $\mathbf{v}_2 = -8\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ (м/с). Визначити швидкості $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ шайб після їх пружного зіткнення.

1.200. Дві шайби масами $m_1 = 1$ кг і $m_2 = 2$ кг мають швидкості $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ (м/с) і $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ (м/с). Визначити швидкості $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ шайб після їх непружного зіткнення.

1.201. Дві шайби масами $m_1 = 400$ г і $m_2 = 200$ г рухаються без тертя вздовж похилої площини назустріч одна одній. У момент, коли їхні швидкості $v_1 = 10$ м/с і $v_2 = 8$ м/с, шайби пружно стикаються. Вважаючи удар центральним, визначити швидкості u_1 , u_2 шайб відразу після зіткнення.

1.202. Кулька, маса якої $m = 400$ г, впала з висоти $h_1 = 1$ м на горизонтальну плиту й відскочила вгору на висоту $h_2 = 0,8$ м. Визначити імпульс $\mathbf{p}$, набутий плитою.

1.203. Кулька падає на стіну під кутом $\alpha = 30^\circ$ до неї. Під яким кутом β кулька відскочить від стіни, якщо коефіцієнт тертя $f = 0,1$?

1.204. Снаряд, маса якого $m = 10$ кг, мав початкову швидкість v_0 , напрямлену під кутом α до горизонту. У верхній точці траєкторії він розірвався на два уламки. Один уламок, маса якого $m_1 = 4$ кг, полетів у зворотному напрямі по траєкторії руху снаряда. У скільки разів n другий уламок пролетів більшу відстань по горизонталі, ніж перший?

1.205. Снаряд, маса якого $m = 10$ кг, мав початкову швидкість $v = 800$ м/с, напрямлену під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту. Через деякий час після пострілу снаряд розірвався на два уламки. Один уламок масою $m_1 = 3$ кг через час $t_0 = 30$ с від моменту пострілу мав швидкість $v_1 = 600$ м/с, напрямлену горизонтально. Визначити швидкість v_2 другого уламка в той самий момент часу t_0 , вважаючи, що всі тіла рухались у вертикальній площині. Покласти $g = 10$ м/с². Опором повітря нехтувати.

1.206. Чи зберігається імпульс тіла, кинутого під кутом до горизонту? Чи зберігається його проекція на який-небудь напрям? Опором повітря нехтувати.

1.207. Ствол гармати утворює з горизонтом кут $\alpha = 30^\circ$. Якщо гармата закріплена, то снаряд, маса якого $m = 10$ кг, вилітає при пострілі зі швидкістю $v_0 = 800$ м/с. Визначити швидкість u , яку набуває незакріплена гармата при пострілі. Маса гармати $m_1 = 1\,200$ кг.

Рух тіла змінної маси

1.208. Через нерухомий блок перекинуто трос, до одного кінця якого прикріпили вантаж масою $m_1 = 100$ кг, а до другого – контейнер з піском такої самої маси. Маса порожнього контейнера $m_2 = 20$ кг. Із контейнера

починає висипатися пісок зі швидкістю $\mu = 20$ кг/с. Визначити швидкість v вантажу в момент часу, коли з контейнера висипався пісок масою $m_3 = 20$ кг. Вважати трос і блок невагомими.

1.209. Ракета масою m_0 починає викидати струмину газу зі швидкістю u відносно ракети. Щосекунди викидається газ масою μ . Записати рівняння руху ракети. Чому дорівнює швидкість ракети v через t секунд після початку руху?

1.210. Частинка льоду (градинка) падає вниз крізь грозову хмару і при цьому її маса зростає зі швидкістю μ (кг/с). Сила тяжіння в кожний момент часу зрівноважується силою опору повітря $F_0 = -kv$, де k – стала. Знехтувавши початковою масою градинки, визначити її швидкість v через t секунд руху.

1.211. На ракету, що піднімається вертикально вгору, діє донизу постійна результуюча зовнішня сила F , маса ракети в початковий момент часу m_0 , витрати газу μ (кг/с), а швидкість викидання струмни газу відносно ракети u . За наведеними даними записати рівняння руху ракети. Визначити швидкість $v(t)$ ракети як функцію часу.

1.212. Встановити закон зміни маси $m(t)$ ракети з часом, якщо ракета рухається зі сталим прискоренням a , швидкість викидання струмни газу відносно ракети u , а її початкова маса m_0 . Вважати, що зовнішні сили на ракету не діють.

Закон збереження моменту імпульсу

1.213. Симетричне тіло обертається навколо осі симетрії так, що його момент імпульсу відносно цієї осі дорівнює L_z . Визначити момент імпульсу тіла L_{z1} відносно осі, яка паралельна осі обертання.

1.214. Дві однакові однорідні циліндричні шайби містяться на гладкому столі (рис. 1.21). Шайба A рухається зі швидкістю, яка спрямована до центра шайби B , і обертається з кутовою швидкістю $\omega_A = 10$ рад/с відносно свого центра мас. Шайба B перебуває в спокої. Під час зіткнення шайби злипаються. Визначити кутову швидкість ω обертання системи

відносно осі, що проходить через центр мас, після зіткнення.

1.215. Дві краплі ртуті радіусами $R_1 = 1$ мм і $R_2 = 2$ мм обертаються з кутовими швидкостями відпо-

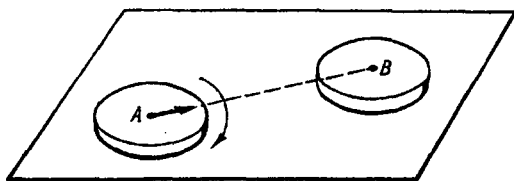


Рис. 1.21

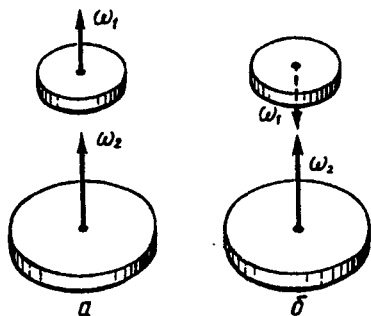


Рис. 1.22



Рис. 1.23

відно $\omega_1 = 5$ рад/с і $\omega_2 = 4$ рад/с, осі обертання їх паралельні одна одній. Визначити кутову швидкість ω краплі, що утворилась внаслідок злиття крапель.

1.216. У процесі гравітаційного стиску радіус зірки, що обертається навколо своєї осі, зменшився в 500 разів. Визначити, у скільки разів n змінилась швидкість обертання.

1.217. Два шорстких диски, моменти інерції яких $I_1 = 2$ кг·м², $I_2 = 3$ кг·м², вільно обертаються з кутовими швидкостями $\omega_1 = 10$ рад/с і $\omega_2 = 15$ рад/с навколо однієї вертикальної осі. Встановити усталену кутову швидкість ω' після опускання верхнього диска на нижній. Розглянути випадки: а) $\omega_1 \uparrow \uparrow \omega_2$ (рис. 1.22, а); б) $\omega_1 \uparrow \downarrow \omega_2$ (рис. 1.22, б).

1.218. Два шорстких диски, моменти інерції яких $I_1 = 1$ кг·м², $I_2 = 2$ кг·м² і радіуси $R_1 = 0,1$ м, $R_2 = 0,15$ м, обертаються з кутовими швидкостями $\omega_1 = 7$ рад/с і $\omega_2 = 5$ рад/с. Якими будуть усталені кутові швидкості ω' обертання дисків після того, як їх привели у контакт, а осі дисків закріпили і залишили паралельними, за таких умов: а) $\omega_1 \uparrow \uparrow \omega_2$ (рис. 1.23, а); б) $\omega_1 \uparrow \downarrow \omega_2$ (рис. 1.23, б)?

1.219. Кулька прив'язана до нитки і рухається по колу зі швидкістю $v = 6,28$ м/с, спираючись на гладку горизонтальну площину (рис. 1.24). Нитку втягують в отвір на площині так, щоб радіус обертання кульки зменшився в $k = 3$ рази. Якою при цьому буде лінійна швидкість v_1 кульки?

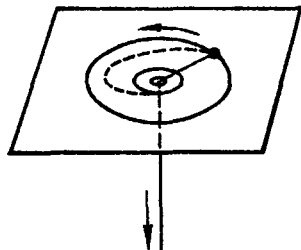


Рис. 1.24

1.220. Людина стоїть у центрі горизонтальної платформи, що має форму однорідного диска. Платформа обертається навколо вертикальної осі, яка проходить через її центр,

з частотою $\nu_1 = 0,5 \text{ с}^{-1}$. Людина тримає в руках стрижень, довжина якого $l = 2 \text{ м}$ і маса $m = 9 \text{ кг}$, що розташований вертикально по осі обертання платформи. З якою частотою ν_2 обертатиметься платформа, коли людина поверне стрижень у горизонтальне положення так, що центр мас стрижня не змінить положення? Сумарний момент інерції людини й платформи $I = 8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

1.221. Однорідний диск вільно обертається навколо вертикальної осі з частотою $\nu_1 = 90 \text{ хв}^{-1}$. Маленький шматок замазки, маса якого $m = 5 \text{ г}$, упав вертикально на диск (і прилип) на відстані $R = 10 \text{ см}$ від осі. Частота обертання диска при цьому зменшилась до $\nu_2 = 87 \text{ хв}^{-1}$. Визначити момент інерції I диска.

1.222. Людина, маса якої $m = 80 \text{ кг}$, стоїть на горизонтальній платформі, що має форму диска радіуса $R = 10 \text{ м}$. Маса платформи $M = 100 \text{ кг}$. Платформа спирається на вертикальну вісь, яка проходить через її центр, і може обертатися навколо цієї осі. Людина почала рухатись зі швидкістю $v = 7,2 \text{ км/год}$ відносно платформи по колу радіуса $r = 5 \text{ м}$ навколо її центра. Визначити кутову швидкість ω платформи. Людину вважати матеріальною точкою.

1.223. Однорідний тонкий стрижень, маса якого $m_1 = 500 \text{ г}$ і довжина $l = 1 \text{ м}$, підвішений на відстані $l/3$ від його кінця й може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, яка проходить через точку підвісу. У верхній кінець стрижня влучає пластилінова кулька масою $m_2 = 50 \text{ г}$, що рухається горизонтально зі швидкістю $v = 1 \text{ м/с}$. Визначити кутову швидкість ω стрижня одразу після удару.

1.224. Однорідний твердий стрижень, маса якого m і довжина l , лежить на гладенькій горизонтальній поверхні. Кулька масою m_1 , що летить зі швидкістю v_0 перпендикулярно до стрижня, пружно вдаряє в його кінець. Визначити кутову швидкість ω обертання стрижня після удару.

1.225. Скориставшись даними задачі 1.224, визначити швидкість v центра мас системи і кутову швидкість ω стрижня при непружному зіткненні. Вважати, що $m_1 < m$.

1.226. Крутильний балістичний маятник – це хрестовина, яка підвішена на пружному дроті й може обертатися навколо вертикальної осі. На одному кінці хрестовини закріплена мішень, а на іншому – тягар, що її врівноважує. Після попадання кулі, що летить горизонтально, маятник повертається на кут $\varphi = 30^\circ$, закручуючи дріт. Маса кулі $m = 0,3 \text{ г}$, відстань від точки на мішені, в яку влучає куля, до осі обертання $R = 30 \text{ см}$, момент інерції маятника $I_m = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, модуль крутіння $D = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}$. Визначити швидкість v кулі.

1.227. Радіус орбіти Нептуна в 30 разів більший від радіуса орбіти Землі. Визначити період T обертання Нептуна навколо Сонця.

1.228. Відстань від Марса до Сонця більша за відстань від Землі до Сонця в 1,524 раза. Вважаючи орбіти планет коловими, знайти, у скільки разів n період обертання Марса навколо Сонця більший від періоду обертання Землі. З якою орбітальною швидкістю v_1 рухається Марс? Орбітальна швидкість Землі $v = 29,8$ км/с.

1.229. Комета рухається навколо Сонця по еліпсу, ексцентриситет якого $\epsilon = 0,9$. У скільки разів n швидкість комети в перигелії (найближча до центра Сонця точка орбіти) більша, ніж в афелії (найвіддаленіша від центра Сонця точка орбіти)?

1.230. Супутник Землі, що рухається по коловій орбіті радіуса $r = 6600$ км, після короткочасного гальмування став рухатися по еліптичній орбіті, яка торкається поверхні Землі. Визначити час t падіння супутника на Землю.

1.231. Супутник, маса якого $m = 70$ т, рухається по еліпсу навколо Землі так, що найменша і найбільша відстані від центра Землі відповідно $r_1 = 6600$ км і $r_2 = 6700$ км. Обчислити момент імпульсу L супутника відносно центра Землі.

Робота. Енергія. Закон збереження енергії

1.232. Під дією сталої сили тіло почало рухатись у горизонтальному напрямі й пройшло шлях $s = 5$ м, набувши швидкості $v = 2$ м/с. Маса тіла $m = 400$ кг. Коефіцієнт тертя $f = 0,4$. Визначити роботу A сили.

1.233. Обчислити роботу A , що виконується на шляху $s = 10$ м рівномірно зростаючою зі шляхом силою, якщо на початку руху сила становила $F_1 = 10$ Н, а наприкінці руху $F_2 = 40$ Н. Кут між елементами шляху і вектором сили дорівнює нулеві.

1.234. Автомобіль, маса якого $m = 1000$ кг, починає рухатись по колу радіуса $R = 100$ м з тангенціальним прискоренням $a_1 = 1$ м/с. Обчислити роботу A двигуна, яку він виконує за один оберт автомобіля по колу. Середній коефіцієнт опору $f = 0,3$.

1.235. Сила тяги F автомобіля змінюється з відстанню s за законами: а) $F = Bs + C$; б) $F = Bs^2 + Cs + D$, де B, C, D – сталі. Визначити роботу A сили на ділянці шляху $(s_1 s_2)$.

1.236. Яку роботу A треба виконати, щоб витягти тіло масою $m = 2$ кг на гірку, довжина основи якої $l = 1$ м, а висота $h = 0,5$ м, якщо коефіцієнт тертя $f = 0,2$? Кут нахилу поверхні гірки до горизонту може змінюватись, але знак його залишається тим самим.

1.237. Навантажені санки масою $m = 100$ кг спускаються з гори і далі ковзають по горизонтальній поверхні льоду. Яку відстань s пройдуть санки по льоду, якщо біля підніжжя гори вони досягають швидкості $v = 0,5$ м/с? Коефіцієнт тертя $f = 0,035$. Яка робота A проти сил тертя виконуватиметься при цьому?

1.238. Тіло масою $m = 0,5$ кг ковзає з гірки, довжина основи якої $l = 2$ м, а висота $h = 1$ м. Після того, як тіло з'їхало до основи гірки, з'ясувалося, що воно виконало роботу $A = 4,4$ Дж. Визначити коефіцієнт f тертя між тілом і поверхнею гірки.

1.239. Із вагона, що рухається зі швидкістю $v = 3,6$ км/год, вивантажується гірська порода зі швидкістю $\mu = 14\,000$ кг/с. Визначити розвинену при цьому потужність P гальмування локомотива. Силою опору нехтувати.

1.240. Вертоліт масою m нерухомо висить у повітрі. Яку потужність P розвивають двигуни вертольота, якщо швидкість повітря, що відкидають лопаті гвинта вниз, дорівнює v ?

1.241. Тіло, маса якого $m = 1$ кг, кинуто зі швидкістю $v = 10$ м/с під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Встановити залежність кінетичної T і потенціальної U енергій тіла від часу. Опором повітря нехтувати.

1.242. На столі лежить гнучка мотузка, одна п'ята довжини якої вільно звисає. Яку роботу потрібно виконати, щоб витягнути цю частину мотузки на стіл? Довжина мотузки $l = 1$ м, а її маса $m = 1$ кг. Тертям нехтувати.

1.243. На столі лежить гнучка мотузка, маса якої $m = 1$ кг, а довжина $l = 2$ м. Якщо чверть довжини ($\eta = 0,25$) мотузки звисити зі стола, то вона почне зісковзувати з нього. Яку роботу A виконає сила тертя, що діє на мотузку при її повному зісковзуванні зі столу?

1.244. Кулька масою $m_1 = 0,01$ кг, що має швидкість $v_1 = 500$ м/с, пробиває кулю масою $m = 5$ кг, яка висить на нитці. При цьому швидкість кульки зменшилася до $v_2 = 100$ м/с. Яка частина η енергії кульки перейшла в теплоту?

1.245. Куля, маса якої $m = 10$ г, рухаючись зі швидкістю $v = 500$ м/с, влучає в ціль. З якою середньою силою $\langle F \rangle$ діяла куля на ціль, якщо вона проникла в неї на глибину $l = 1$ см? Втратами енергії на нагрівання і руйнування матеріалу кулі нехтувати.

1.246. Куля, маса якої $m_1 = 200$ г, має швидкість $v_1 = 20$ м/с і налітає на нерухому кулю масою $m_2 = 100$ г. Внаслідок центрального зіткнення втрати механічної енергії $Q = 5$ Дж. Визначити швидкості куль u_1, u_2 після їх зіткнення.

1.247. Куля, маса якої $m = 1$ кг, ударяється об стіну під кутом $\alpha = 60^\circ$ до нормалі зі швидкістю $v_1 = 10$ м/с, а відскакує від неї зі швидкістю $v_2 = 6$ м/с під кутом $\beta = 45^\circ$. Визначити модуль імпульсу p , що дістала стіна. Яка кількість теплоти Q виділилася під час удару?

1.248. Вантаж прив'язали до нижнього кінця вертикальної пружини, верхній кінець якої закріплений на штативі. З положення, що відповідає недеформованій пружині, вантаж, підтримуючи рукою, повільно опускають до положення рівноваги. При цьому пружина розтягується на довжину $l = 5$ см. На яку довжину l_1 розтягнеться пружина, якщо вантаж опускатиметься вільно з того самого первісного положення?

1.249. Диск, маса якого $m = 0,6$ кг і радіус $R = 7,5$ см, опускається під дією сили тяжіння на двох нитках, намотаних на його вісь радіуса $r = 3$ мм (рис. 1.25). Нитки розмотуються на повну довжину, але диск, обертаючись у тому самому напрямі, намотує нитки на вісь, внаслідок чого він піднімається вгору. Доходячи до верхньої точки, диск знову опускається донизу, здійснюючи коливання у вертикальній площині (маятник Максвелла). Визначити: а) лінійне прискорення a диска і силу F натягу нитки, залежність прискорення і сили натягу від напрямку руху диска; б) кінетичну енергію T обертального руху диска, якщо, опускаючись з верхнього положення, диск пройшов відстань $h = 20$ см.

1.250. Електродвигун потужністю $P = 1,2$ кВт обертає зі сталою частотою $n = 600$ хв⁻¹ насос. Момент інерції насоса $I = 1,52$ кг·м². Який час t обертатиметься насос після вимкнення двигуна, якщо вважати, що момент сили опору залишатиметься незмінним?

1.251. Ковзаняр обертається навколо вертикальної осі з витягнутими вбік руками. Як зміниться частота обертання спортсмена, якщо він підійме руки вгору? Як і за рахунок чого зміниться кінетична енергія ковзаняра? Силою тертя нехтувати.

1.252. Спортсмен, який плигнув з вишки у воду, в польоті збільшив швидкість обертання. Як змінилися при цьому його лінійне прискорення і механічна енергія? Рух спортсмена вважати вільним.

1.253. Кулька, маса якої $m = 50$ г, скочується без проковзування по жолобу з висоти $h = 30$ см і описує вертикальну петлю радіуса $R = 10$ см (рис. 1.26). З якою силою кулька тисне на жолоб у нижній і верхній точках петлі по нормалі до неї?

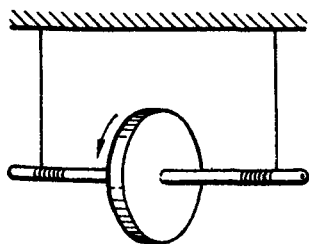


Рис. 1.25

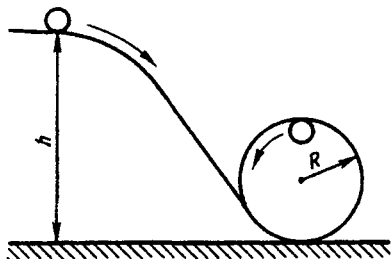


Рис. 1.26

1.254. Кулька скочується по похилому жолобу, який описує вертикальну петлю радіуса R (рис 1.26). З якої мінімальної висоти h має рухатися кулька, щоб не відірватися від жолоба у верхній точці петлі? Розглянути два випадки: а) кулька зісковзує; б) кулька скочується.

1.255. Кулька, яка котиться без ковзання по горизонтальній поверхні зі швидкістю $v_0 = 5$ м/с, стикається по нормалі зі стіною. Вважаючи, що удар пружний, обчислити швидкість v кульки після відбивання тоді, коли вона почне рухатися без ковзання.

1.256. Тонкий стрижень підвісили за кінець. На відстані l від точки підвішування на стрижень починає діяти горизонтальна сила F . Яку роботу A виконає сила під час повороту стрижня на кут φ ?

1.257. Обруч, циліндр і кулька однаковою масою m скочуються з гірки, висота якої h . У підніжжя гірки швидкість усіх тіл v є однаковою, до того ж мало місце проковзування. Визначити роботу A сил опору для кожного тіла.

1.258. Визначити прискорення a центра кульки, яка скочується з похилої площини. Маса кульки $m = 100$ г, похила площина утворює з горизонтом кут $\alpha = 30^\circ$. Обчислити силу тертя F_t , що діє на кульку, та роботу A цієї сили. Проковзування немає.

1.259. З вершини сферичної поверхні радіуса R скочується без проковзування маленька кулька. На якій висоті h над центром сфери кулька відділиться від поверхні сфери й полетить вільно?

1.260. Куля, швидкість якої $v_0 = 10$ м/с, заковчується без проковзування на похилу площину. На яку висоту h підніметься куля?

1.261. Вал двигуна обертається з частотою $n = 2800$ хв⁻¹. Визначити обертовий момент M , якщо двигун має потужність $P = 1,2$ кВт, його ККД $\eta = 72\%$.

1.262. Однорідний стрижень, маса якого $m = 3$ кг і довжина $l_0 = 0,5$ м, лежить на горизонтальній поверхні. Яку мінімальну роботу A треба виконати, щоб обернути стрижень на кут 2π навколо вертикальної осі, що проходить через кінець стрижня? Коефіцієнт тертя $f = 0,6$.

1.263. Однорідний диск, маса якого $m = 10$ кг і радіус $R = 0,2$ м, лежить на горизонтальній поверхні. Яку роботу A треба виконати, щоб повернути диск навколо його осі на кут $\alpha = 90^\circ$? Коефіцієнт тертя диска об поверхню $f = 0,4$.

1.264. Диск, маса якого $m = 3$ кг і радіус $R = 10$ см, розкручується навколо вертикальної осі до частоти обертання $n = 5$ с⁻¹. Вертикальна вісь проходить через центр диска перпендикулярно до його площини.

Після цього диск був покладений на горизонтальну поверхню. Скільки обертів N зробить диск до повної зупинки, якщо коефіцієнт тертя диска об поверхню $f = 0,3$?

1.265. Шків починає обертатися зі сталим кутовим прискоренням $\varepsilon = 4,5 \cdot 10^3 \text{ рад/с}^2$ і через $t_1 = 2 \text{ с}$ його момент імпульсу набуває значення $L_1 = 250 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$. Визначити кінетичну енергію T_2 шківа через $t_2 = 1 \text{ с}$ після початку обертання.

1.266. Автомобіль, маса якого $m = 0,8 \text{ т}$, рухається зі швидкістю $v = 108 \text{ км/год}$. Для його зупинки ввімкнули акумулятор енергії у вигляді маховика ($I = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$). Обчислити частоту обертання n маховика після зупинки автомобіля. Вважати, що втрат механічної енергії немає.

1.267. Маховик, маса якого $m_1 = 20 \text{ кг}$, має форму диска радіуса $R = 20 \text{ см}$ і може обертатися навколо своєї осі, що орієнтована горизонтально. На циліндричній поверхні диска закріплено невагому нитку, до другого кінця якої підвішено вантаж. Маса вантажу $m_2 = 2 \text{ кг}$. Вантаж вертикально підіймають на висоту $h = 1 \text{ м}$, а потім він вільно падає (рис. 1.27). При цьому внаслідок удару маховик починає обертатися. Визначити кутову швидкість ω маховика після удару. Чи можливо, щоб нитка була нерозтяжною, а тіла абсолютно твердими?

1.268. На який кут α треба відхилити однорідний стрижень, довжина якого $l = 1 \text{ м}$, підвішений за верхній кінець, щоб його нижній кінець під час проходження положення рівноваги мав швидкість $v = 4 \text{ м/с}$?

1.269. Тонкий однорідний стрижень, маса якого $m_1 = 3 \text{ кг}$, а довжина $l = 1 \text{ м}$, може вільно обертатися навколо осі, що проходить через його верхній кінець. У стрижень на відстані $l_1 = 0,6 \text{ м}$ від нижнього кінця влучає куля масою $m_2 = 10 \text{ г}$, що летіла горизонтально зі швидкістю $v_0 = 300 \text{ м/с}$. На який кут φ відхилиться стрижень після удару, якщо удар непружний?

1.270. Через блок, що має форму диска, перекинуто шнур. Маса блока $m = 0,4 \text{ кг}$. До кінців шнура прив'язали вантажі масами $m_1 = 0,1 \text{ кг}$ та $m_2 = 0,2 \text{ кг}$. Встановити співвідношення між кінетичними енергіями T_n поступального руху вантажів і обертального руху T_o блока через $t = 2 \text{ с}$ від початку руху. Масою шнура нехтувати.

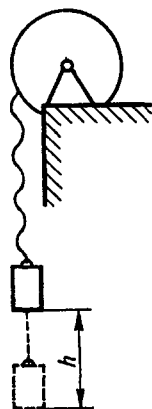


Рис. 1.27

1.271. Потенціальна енергія частинки має вигляд $U = -ax + b \ln(x^2 + y^2)$, де a, b – сталі. Визначити силу $\mathbf{F}$, що діє на частинку в точці з координатами x_0, y_0 .

1.272. Потенціальна енергія частинки визначається рівнянням $U(x) = D((a/x)^{12} - (a/x)^6)$, де D, a – додатні сталі; x – координата частинки. Встановити значення x_0 , яке відповідає положенню рівноваги частинки. Чи рівновага є стійкою?

1.273. Потенціальна енергія частинки $U(r) = a^2/r^2 - 2a/r$, де a – додатна стала. Встановити значення r_0 , яке відповідає мінімуму потенціальної енергії. Чому дорівнює сила, що діє на частинку в точці $r = r_0$?

1.274. Вираз потенціальної енергії частинки в полі має вигляд $U = ax + by + cz$, де $a = 2$ Дж/м, $b = -3$ Дж/м, $c = 4$ Дж/м. Деякі точки поля мають координати $A(2; 3; 3)$, $B(2; 7; 3)$, $C(2; 7; 2)$, $D(4; 7; 2)$, які вимірюються в метрах. Визначити роботу A поля при переміщенні частинки шляхом $AD = AB + BC + CD$. Обчислити різницю потенціальних енергій $U_A - U_D$ частинки в точках A і D та порівняти результат з одержаною роботою.

1.5. ПРИНЦИП ВІДНОСНОСТІ В МЕХАНІЦІ. ЕЛЕМЕНТИ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ МЕХАНІКИ

Перетворення Галілея

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t', \quad t = t', \quad (1.5.1)$$

де $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ – радіуси-вектори частинки відповідно у системах K і K' ; $\mathbf{V}$ – швидкість системи K' відносно системи відліку K .

Закон додавання швидкостей у нерелятивістській механіці

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}, \quad (1.5.2)$$

де $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ – швидкості частинок в системах відліку відповідно K і K' .

Перетворення Лоренца у разі, коли система відліку K' рухається зі швидкістю V в додатному напрямі осі Ox системи K , причому осі Ox' і Ox збігаються, а осі Oy' і Oy , а також Oz' і Oz паралельні одна одній (рис. 1.28):

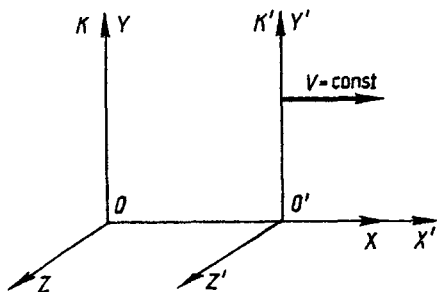


Рис. 1.28

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \\ t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (1.5.3)$$

Скорочення довжини тіла, яке рухається,

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (1.5.4)$$

де l_0 – власна довжина тіла.

Сповільнення ходу годинника, що рухається,

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (1.5.5)$$

де $\Delta \tau$ – проміжок власного часу годинника, що рухається.

Інтервал між подіями

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2, \quad (1.5.6)$$

де Δt – проміжок часу між подіями; Δr – відстань між точками, в яких відбуваються події. Інтервал є інваріантною величиною: у системах відліку, зв'язаних між собою перетвореннями Лоренца, інтервал приймає одне й те саме значення.

Релятивістський закон додавання швидкостей

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}. \quad (1.5.7)$$

Релятивістська маса та релятивістський імпульс

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.5.8)$$

Рівняння релятивістської динаміки частинки

$$F = \frac{d}{dt} \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.5.9)$$

Енергія релятивістської частинки:

а) власна енергія

$$E_0 = m_0 c^2; \quad (1.5.10)$$

б) кінетична енергія

$$T = c^2 (m - m_0) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right); \quad (1.5.10a)$$

в) повна енергія, взаємозв'язок між енергією та масою релятивістської частинки:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.5.10б)$$

Зв'язок між енергією та імпульсом релятивістської частинки:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4; \quad p^2 c^2 = T(T + 2m_0 c^2). \quad (1.5.11)$$

Принцип відносності Галілея

1.275. Які властивості симетрії має мати простір, щоб виконувався принцип відносності Галілея?

1.276. Чи існує в механіці Галілея – Ньютона гранична швидкість поширення сигналів?

1.277. У різних точках простору відбулись дві події, які є одночасними в системі K . Чи будуть вони одночасними в іншій інерціальній системі відліку?

1.278. Всі зірки віддаляються від Сонця зі швидкістю $v = Hr$, де H – стала Хаббла; r – модуль радіуса-вектора, що визначає положення зірки відносно Сонця. Записати закон зміни швидкості v_1 будь-якої зірки відносно іншої зірки, положення якої відносно Сонця визначається радіусом-вектором $\mathbf{R}$.

1.279. З моторного човна, який рухався проти течії, випало весло. Через час $t_1 = 10$ хв човен повернув назад і наздогнав весло на відстані $s = 100$ м нижче за течією. Визначити швидкість v течії, вважаючи, що при русі в обох напрямках мотор працював однаково, а вітру не було.

1.280. Тіло кинуто в довільному напрямі зі швидкістю v_0 , після чого воно вільно падає. Використовуючи формулу (1.5.2), визначити швидкість тіла v_1 відносно Землі, а також швидкість тіла v_2 відносно системи відліку, що рухається вниз із прискоренням g , через t секунд після початку руху.

1.281. Одне тіло кинуто з точки, положення якої визначається радіусом-вектором $\mathbf{r}_1$, зі швидкістю $\mathbf{v}_1$, а друге – з точки з радіусом-вектором $\mathbf{r}_2$ зі швидкістю $\mathbf{v}_2$. Як змінюється відстань Δr між тілами з часом?

1.282. Корабель пливе зі швидкістю $v = 36$ км/год. По його палубі перпендикулярно до курсу корабля починає рухатись людина з прискоренням $a = 0,5$ м/с². Визначити швидкість v_1 людини, а також її прискорення a_1 відносно води через час $t_1 = 6$ с після початку руху.

1.283. Кулька падає на стіну під кутом α до нормалі зі швидкістю v_1 . Чому дорівнює кут β падіння кульки в системі відліку, яка рухається паралельно стіні зі швидкістю v_2 у тому самому напрямі, що й кулька?

Елементи релятивістської кінематики

1.284. На екрані осцилографа спостерігається світна точка в тому місці, куди падає пучок електронів. Пучок відхиляється змінним електричним (найчастіше) полем, внаслідок чого світна точка переміщується вздовж екрана з деякою швидкістю v . Чи може швидкість v перевищувати швидкість світла у вакуумі?

1.285. В атмосфері Землі на відстані $l = 20$ км від її поверхні в космічних променях утворився мюон. Рухаючись зі швидкістю $v = 0,9996$ c від-

носно системи відліку, зв'язаної із Землею, мюон досягає земної поверхні. До яких розмірів l_0 скоротиться ця відстань, якщо не враховувати сповільнення часу?

1.286. З якою максимальною швидкістю v має рухатися стрижень, щоб відносна похибка, яка допускається при вимірюванні його довжини без врахування руху, не перевищувала б 0,01 %?

1.287. У системі відліку K міститься нерухомий стрижень, довжина якого $l_0 = 1$ м, орієнтований під кутом $\alpha = 60^\circ$ до осі Ox . Визначити його довжину l і відповідний кут α' у системі K' , що рухається відносно системи K зі швидкістю $V = c/2$ вздовж осі Ox .

1.288. Ребра куба орієнтовані паралельно осям координат. З якою швидкістю v куб має рухатися вздовж однієї з осей, для того щоб перетворитися на паралелепіпед із об'ємом втричі меншим, ніж об'єм куба?

1.289. Швидкість мюонів у циклотроні $v = 0,99 c$, а власний час життя $\tau_0 = 2,2$ мкс. Чому дорівнює час життя τ мюона в системі відліку, зв'язаній із циклотроном?

1.290. У лабораторній системі відліку частинка, що рухалась зі швидкістю $v = 0,95 c$, пройшла до розпаду шлях $s = 23,7$ м. Чому дорівнював власний час життя τ_0 частинки?

1.291. У прискорювачі одержано пучок мюонів, що рухаються зі швидкістю $v = 0,99 c$. Внаслідок розпаду їхня концентрація в пучку змен-

шується за законом $n(t) = n_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$. Яку відстань s має пройти пучок мюонів, щоб концентрація частинок у ньому зменшилась у $k = 5$ разів?

1.292. На циклотроні одержано пучок релятивістських піонів. Якщо не враховувати релятивістське сповільнення часу, то піон має пройти за свій час життя τ_0 відстань $s = 5,8$ м. Експеримент показує, що піон проходить відстань $s_0 = 8,8$ м. З якою швидкістю v рухається піон відносно лабораторії? У скільки разів час життя піона τ у лабораторній системі відліку більший за його власний час життя τ_0 ?

1.293. Дві частинки рухаються назустріч одна одній зі швидкостями $v_1 = 0,8 c$ і $v_2 = 0,9 c$ відносно лабораторної системи відліку. Визначити відносну швидкість $v_{\text{відн}}$ частинок.

1.294. Дві частинки рухаються назустріч одна одній з однаковими швидкостями v відносно нерухомого спостерігача. Відносна швидкість частинок $v_{\text{відн}} = 0,9 c$. Визначити швидкість v частинок відносно спостерігача.

1.295. Час життя мюона в системі відліку, відносно якої він перебуває в спокої, $\tau_0 = 2,2$ мкс, його час життя в системах, що рухаються відносно

нього та паралельно одна одній, відповідно $\tau_1 = 2,5$ мкс і $\tau_2 = 2,2$ мкс. Чому дорівнює відносна швидкість $v_{\text{відн}}$ вказаних систем відліку?

1.296. Одна з частинок рухається відносно лабораторії зі швидкістю $v = 0,9 c$, а інша – зі швидкістю $v_{\text{відн}} = 0,5 c$ відносно першої в тому самому напрямі. Чому дорівнює швидкість v_1 другої частинки відносно лабораторії?

1.297. У деякий момент часу на Сонці відбувся спалах, а через $\Delta t = 5$ хв на Землі відбувся землетрус. 1. Яким – часоподібним чи просторовоподібним – інтервалом розділені ці події? 2. Чи можна розглядати землетрус на Землі як наслідок спалаху на Сонці? 3. Чи існують такі системи відліку, в яких вказані події відбуваються в оберненому порядку?

1.298. Довести, що величина $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2$ (Δt – проміжок часу між двома подіями, які відбуваються в точках, розділених просторовим проміжком $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$) зберігає незмінний вигляд у всіх інерціальних системах відліку.

Вказівка. Скористатися перетворенням Лоренца для координат і часу та довести, що має місце рівність $\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta r'^2$.

1.299. Дві події розділені просторовоподібним інтервалом. Довести, що: а) існує система відліку, в якій вони одночасні; б) у кожній системі відліку вони не відбуваються в одній і тій самій точці.

1.300. Дві події розділені часоподібним інтервалом. Довести, що: а) існує система відліку, в якій вони відбуваються в одній і тій самій точці; б) у жодній системі відліку вони не є одночасними.

1.301. Частинка рухається вздовж прямої лінії так, що в кожний момент часу залишається незмінним прискорення $a = \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

1. Встановити залежність швидкості v і шляху s , пройденого частинкою, від часу, якщо початкова швидкість частинки дорівнює нулеві. 2. Довести, що в граничному ($v^2/c^2 \rightarrow 0$) випадку одержані залежності переходять у відомі формули ньютонівської механіки для рівномірного руху. 3. До якої границі прямує v , якщо $t \rightarrow \infty$?

1.302. Частинка рухається зі швидкістю v_x і прискоренням $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ у системі відліку K . Визначити швидкість v'_x і прискорення a'_x частинки в системі K' , яка рухається відносно системи K вздовж осі Ox зі швидкістю V .

**Маса та імпульс у релятивістській механіці.
Релятивістське рівняння руху**

1.303. При якій швидкості v тіла відносно Землі його маса m у цій системі відліку буде вдвічі більшою за масу спокою m_0 ?

1.304. Галактика, маса спокою якої $m_0 = 10^{41}$ кг, рухається відносно Землі зі швидкістю $v_0 = 0,8$ с. Чому дорівнює різниця Δm між масою Галактики в системі відліку, що пов'язана із Землею, та її масою спокою?

1.305. Побудувати для релятивістської частинки графік залежності величини m/m_0 від v^2/c^2 , задаючи значення швидкості v в інтервалі $0,1 \text{ с} \leq v \leq 0,9 \text{ с}$ через кожні $0,1 \text{ с}$.

1.306. Нерухоме у системі K тіло має густину ρ_0 . Визначити густину ρ цього тіла у системі K' , яка рухається зі швидкістю $v = 0,6 \text{ с}$ вздовж осі Ox системи K .

1.307. Як змінюється імпульс p релятивістської частинки у разі зміни її швидкості від $v_1 = 0,2 \text{ с}$ до $v_2 = 0,8 \text{ с}$?

1.308. Побудувати для протонів і α -частинок графіки залежності імпульсу p від величини v^2/c^2 , задаючи значення швидкості v в інтервалі $0,1 \text{ с} \leq v \leq 0,9 \text{ с}$ через кожні $0,1 \text{ с}$.

1.309. Чи буде взагалі в релятивістській механіці вектор прискорення паралельним векторові сили?

1.310. На частинку з масою спокою m_0 діє постійна сила F . Встановити залежність від часу імпульсу $p(t)$, швидкості $v(t)$ і шляху $s(t)$, який пройшла частинка, якщо її початкова швидкість дорівнювала нулеві.

**Енергія релятивістської частинки.
Релятивістське співвідношення між енергією
та імпульсом частинки**

1.311. При якій швидкості v кінетична енергія T частинки дорівнює її енергії спокою $m_0 c^2$?

1.312. Визначити імпульс p частинки, кінетична енергія якої $T = 900 \text{ MeV}$, а швидкість $v = 0,8 \text{ с}$.

1.313. Яку роботу A треба виконати, щоб збільшити швидкість частинки масою $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг від $v_1 = 0,6 \text{ с}$ до $v_2 = 0,8 \text{ с}$? Порівняти одержаний результат зі значенням $A_{\text{нр}}$, яке обчислене за нерелятивістською формулою.

1.314. У скільки разів період коливань T маятника годинника в лабораторії більший за його період коливань T_0 в системі відліку, зв'язаній з протоном, повна енергія якого $E = 10$ Гев?

1.315. Як зміниться період T обертання протона по колу радіуса $R = 30$ м у разі збільшення його повної енергії від $E_1 = 950$ МеВ до $E_2 = 9,5$ Гев?

1.316. Два протони з кінетичними енергіями $T = 20$ Гев кожен рухаються назустріч один одному. Визначити кінетичну енергію T' кожного протона в системі відліку іншого.

1.317. Довести, що вираз для кінетичної енергії релятивістської частинки

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$$

при $v \ll c$ переходить у ньютонівський вираз $T = \frac{m_0 v^2}{2}$.

Вказівка. Використати формулу для наближених обчислень для виразу $(1 - x)^{-1/2}$, якщо $x \ll 1$, або, розглядаючи кінетичну енергію T як функцію змінної v^2/c^2 , розкласти її до степеневому ряду за цією змінною та обмежитись першим неznикаючим доданком у сумі.

1.318. Довести, що вираз для модуля імпульсу релятивістської частинки

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{(T + 2E_0)T} \quad (T - \text{кінетична енергія частинки, } E_0 - \text{її енергія спо-}$$

кою) за умови $v \ll c$ переходить у ньютонівський вираз $p = \sqrt{2m_0 T}$.

1.319. У системі K повна енергія частинки E , імпульс $\mathbf{p}$. Визначити повну енергію E' та імпульс $\mathbf{p}'$ частинки в системі K' , яка рухається зі швидкістю V вздовж додатного напрямку осі Ox рівномірно й прямолінійно (див. рис. 1.28).

1.320. Довести, що величина $E^2/c^2 - p^2$ для частинки є інваріантом перетворень Лоренца, тобто не змінюється при переході від однієї інерціальної системи до іншої.

Вказівка. Використати розв'язок задачі 1.319.

Взаємозв'язок між масою та енергією у релятивістській механіці. Зіткнення релятивістських частинок

1.321. Внаслідок пружної деформації сталевий стрижень, об'єм якого $V = 1$ м³, здобув відносне подовження $\epsilon = 0,001$. На яке значення Δm відрізняється маса деформованого стрижня від маси недеформованого?

1.322. На яке значення Δm зміниться маса одного моля льоду при його повному перетворенні у воду за нормальних умов?

1.323. Чому дорівнює маса m поля, що випромінює антена радіопередавача потужністю $P = 1$ кВт за час $t = 24$ год?

1.324. Частинка, маса спокою якої m_0 , а швидкість $v = 0,99$ с відносно лабораторії налітає на нерухому частинку такої самої маси. Визначити масу спокою M і швидкість v' частинки, що утворилася під час непружного зіткнення.

1.325. Частинка з масою m_0 , яка перебуває в спокої, розпадається на дві частинки з масами m_{01} і m_{02} . Визначити кінетичні енергії T_1 і T_2 частинок у системі спокою первинної частинки.

1.6. ЕЛЕМЕНТИ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Сила, що діє на занурене в рідину або газ тіло (закон Архімеда),

$$F_A = \rho g V, \quad (1.6.1)$$

де ρ – густина рідини або газу; g – прискорення вільного падіння; V – об'єм рідини або газу, яку витиснуло тіло.

Рівняння нерозривності струмینی

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \quad (1.6.2)$$

де S_1, S_2 – площі двох різних перерізів; v_1, v_2 – відповідні швидкості течії.

Рівняння Бернуллі

$$\rho v^2/2 + \rho gh + p = \text{const}, \quad (1.6.3)$$

де ρ – густина ідеальної рідини; v – швидкість рідини в деякій точці струмینی стаціонарного потоку; h – відстань від точки до площини відліку; p – тиск рідини в точці.

Модуль сили тертя між двома шарами рідини

$$F_r = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S, \quad (1.6.4)$$

де η – динамічна в'язкість рідини; S – площа поверхні контакту шарів рідини; $\left| \frac{dv}{dz} \right|$ –

модуль градієнта швидкості (передбачається, що шари рідини рухаються лише у напрямі, перпендикулярному до осі Oz).

Швидкість витікання ідеальної рідини крізь малий отвір у широкій посудині (формула Торрічеллі)

$$v = \sqrt{2gh}, \quad (1.6.5)$$

де h – висота стовпа рідини над отвором.

Лобовий опір тіла, що міститься в ламінарному потоці в'язкої рідини,

$$F = \eta v r, \quad (1.6.6)$$

де v – швидкість течії; r – коефіцієнт, що залежить від форми та розмірів тіла.

Сила опору при русі кулі у в'язкому середовищі або при обтіканні нерухомої кулі описується законом Стокса

$$F = 6\pi\eta Rv, \quad (1.6.7)$$

де R – радіус кулі.

При ламінарній течії об'єм рідини V , яка проходить крізь трубку завдовжки l і радіуса R за час t , визначається за формулою Пуазейля

$$V = \frac{\pi}{8} \frac{\Delta p R^4}{\eta l} t, \quad (1.6.8)$$

де Δp – різниця тисків на кінцях трубки.

Для турбулентного потоку при великих швидкостях течії лобовий опір

$$F = C_x S \rho v^2, \quad (1.6.9)$$

де C_x – коефіцієнт лобового опору, що залежить від форми тіла та числа Рейнольдса; S – площа міделя (мідель – найбільший за площею переріз тіла, який є перпендикулярним до потоку, що набігає на нього); ρ – густина середовища.

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (1.6.10)$$

де l – характеристичний розмір (величина, що характеризує лінійні розміри тіла).

Напруження в пружнодеформованому тілі

$$\sigma = \frac{dF}{dS}, \quad (1.6.11)$$

де dF – сила, що діє на елементарну площадку dS даного перерізу.

Відносне видовження, або стиснення (закон Гука для стрижня),

$$\epsilon_l = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}, \quad (1.6.12)$$

де E – модуль пружності (модуль Юнга); l – початкова довжина тіла; Δl – абсолютна зміна довжини тіла.

Руйнівна сила

$$F_{\max} = \sigma_{\max} S, \quad (1.6.13)$$

де $\sigma_{\max}$ – руйнівне напруження; S – площа поперечного перерізу тіла.

Відносна зміна об'єму в разі поздовжньої деформації

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\mu) \frac{\sigma}{E}, \quad (1.6.14)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона, що дорівнює відношенню відносної поперечної деформації до поздовжньої:

$$\mu = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_l}. \quad (1.6.15)$$

Відносна зміна товщини

$$\epsilon_d = \frac{\Delta d}{d} = \beta \sigma, \quad (1.6.16)$$

де d – початкова товщина тіла; Δd – абсолютна зміна товщини; β – коефіцієнт поперечного стиснення внаслідок поздовжнього розтягу.

Кут зсуву при деформації зсуву

$$\varphi = n \frac{F_{\tau}}{S} = n p_{\tau} = \frac{\sigma_{\tau}}{G}, \quad (1.6.17)$$

де n – коефіцієнт зсуву; F_{τ} – дотична сила, яка спричиняє зсув; σ_{τ} – дотичне напруження; G – модуль зсуву.

Модуль Юнга E , модуль зсуву G і коефіцієнт Пуассона μ зв'язані співвідношенням

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (1.6.18)$$

Кут закручення стрижня

$$\varphi = \frac{2Ml}{\pi GR^4}, \quad (1.6.19)$$

де M – крутильний момент; l – довжина стрижня; R – радіус стрижня.

Потенціальна енергія пружнодеформованого стрижня

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_l^2 EV, \quad (1.6.20)$$

де V – об'єм тіла.

Елементи гідростатики

1.326. Коли середовище можна вважати суцільним?

1.327. До якої точки прикладається сила Архімеда?

1.328. Кулька радіуса $R = 2$ см, густина якої $\rho = 0,5$ г/см³, плаває в рідині. Визначити вагу P кульки.

1.329. Кулька, густина якої $\rho = 2,7$ г/см³, а радіус $R = 2$ см, міститься в посудині з водою. Визначити силу F , з якою кулька тисне на дно посудини.

1.330. Тіло, що лежить у посудині, частково занурене в рідину. Як зміниться вага посудини, якщо тіло переклали так, що воно повністю занурилось у рідину?

1.331. Айсберг у вигляді прямої призми, висота якої $h = 100$ м, плаває у воді. Яка висота h_1 надводної частини айсберга? Густина води $\rho_v = 1,03$ г/см³.

1.332. Свинцева і пластмасова кулі однакової маси лежать на різних шальках аналітичних терезів. Чи будуть терези перебувати в рівновазі? Як зміниться відповідь, якщо на шальки терезів покласти кулі однакової маси зі скла та скловати?

1.333. Посудина з рідиною, в якій плаває тіло, міститься в ракеті. Як змінюватиметься глибина занурення тіла в рідину під час виведення ракети на орбіту штучного супутника Землі?

1.334. Цистерна, яка частково заповнена рідиною, що має густину ρ , рухається горизонтально з прискоренням a . Як зміниться тиск у рідині в напрямі нормалі до її поверхні?

1.335. Бак у вигляді куба зі стороною $l = 1$ м повністю заповнений водою і рухається горизонтально з прискоренням $a = 2$ м/с². Визначити силу F тиску рідини на дно бака.

Елементи гідродинаміки

1.336. Обчислити густину води ρ при тиску $p = 10$ ГПа, що створюється під час вибуху, коли відомо, що за таких умов тиск обчислюється за формулою $p = (14(\rho/\rho_0)^2 - 28,4)$ ГПа, де $\rho_0 = 10^3$ кг/м³.

1.337. У трубі постійного перерізу міститься пісок, в якому зі швидкістю $v = 1$ м/с рухається поршень, ущільнюючи його. Визначити швидкість D фронту ущільнення (між ущільненим та неущільненим піском). Густина ущільненого піску $\rho = 2,3$ г/см³, а неущільненого $\rho_0 = 1,6$ г/см³.

1.338. У підводному човні на глибині $h = 200$ м утворилася пробоїна, площа якої $S = 5$ см². Яка мінімальна сила $F_{\min}$ потрібна, щоб закрити пробоїну із внутрішнього боку? Яка сила $F_{\text{уп}}$ необхідна, щоб утримати латку?

1.339. На яку висоту h підніметься струмінь води, що витікає зі шланга, якщо надлишковий тиск води у водопроводі $0,1$ МПа? Опором повітря нехтувати.

1.340. Визначити максимальну силу $F_{\max}$, з якою вітер тисне на стіну будівлі, площа поверхні якої $S = 2000$ м². Густина повітря $\rho = 1,23$ кг/м³, швидкість вітру $v = 20$ м/с і він дме перпендикулярно до стіни.

1.341. За який час t можна витиснути ідеальну рідину зі шприца, якщо на поршень діє сила $F = 20$ Н, об'єм рідини в шприці $V = 10$ см³, а площі поршня та внутрішнього перерізу голки відповідно $S_1 = 1$ см², $S_2 = 0,3$ мм²? Тертя не враховувати. Густина рідини $\rho = 1000$ кг/м³.

1.342. Циліндрична склянка радіуса R_1 наповнена водою. Висота стовпа води h_0 . У дні склянки утворився отвір малого діаметра. Внаслідок цього за час t вода зі склянки повністю витекла. Визначити радіус R_2 отвору в дні склянки.

1.343. Потік води, площа поперечного перерізу якого $S_1 = 4$ см², витікає в горизонтальному напрямі із брандспойта, розміщеного на висоті $h = 2$ м над поверхнею Землі, і падає на неї на відстані $L = 8$ м від отвору брандспойта (рис.1.29). Знаючи надлишковий тиск $p = 78$ кПа води в рукаві, визначити площу його поперечного перерізу S_2 .

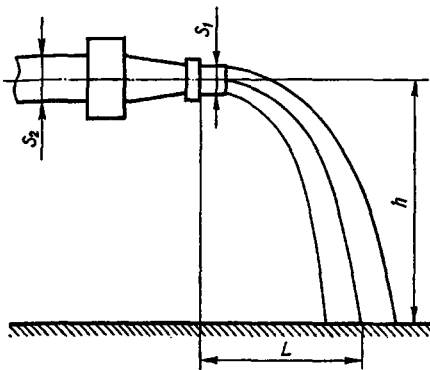


Рис. 1.29

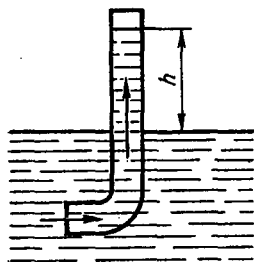


Рис. 1.30

1.344. Циліндричний бак, розташований вертикально, наповнений водою та мазутом. Висота води в баку $h_1 = 1$ м, густина мазуту 900 кг/м^3 . У днищі бака зроблено отвір, крізь який витікає вода з початковою швидкістю $v = 9,5$ м/с. Визначити висоту h_2 шару мазуту в баку. В'язкість води й мазуту не враховувати.

1.345. Центрифуга обертається з кутовою швидкістю $\omega = 6000$ рад/с. У ній міститься вода, поверхню якої за даних умов можна розглядати як циліндричну з радіусом $R = 5$ см. З якою швидкістю v відносно центрифуги витікатиме вода з отвору, що розміщений на відстані $r = 15$ см від осі центрифуги?

1.346. Яка швидкість v ріки в місці занурення зігнутої трубки (рис. 1.30), якщо вода в трубці піднялась на висоту $h = 100$ мм?

1.347. У широкий посудині, заповненій касторовим маслом, падає сталевая кулька зі сталою швидкістю $v = 0,2$ м/с. Динамічна в'язкість касторового масла при температурі досліду $\eta = 2$ Па·с. Визначити діаметр d кульки.

1.348. Обчислити швидкість v усталеного руху краплі води, діаметр якої $d = 0,05$ мм, що падає в повітрі. Динамічна в'язкість повітря $\eta = 17$ мкПа·с. Вважати, що рух повітря при обтіканні краплі є ламінарним.

1.349. Довгий циліндр радіуса R_1 рухається вздовж своєї осі зі сталою швидкістю v_0 всередині коаксіального з ним нерухомого циліндра, радіус якого R_2 . Простір між циліндрами заповнений в'язкою рідиною. Обчислити швидкість v рідини як функцію відстані r від осі циліндрів, вважаючи, що течія є ламінарною.

1.350. По горизонтальній трубі радіуса $R = 25$ мм тече вода із середньою швидкістю $v = 0,1$ м/с. Визначити характер течії і перепади тиску

на одиницю довжини dp/dl труби. Динамічна в'язкість води $\eta = 1$ мПа·с. Вважати, що критичне число Рейнольдса $Re_{кр} = 3\,000$.

1.351. Одна посудина заповнена гліцериним, а інша – трансформаторним маслом. Густина й в'язкість гліцерину та масла відповідно $\rho_1 = 1\,210$ кг/м³, $\eta_1 = 0,35$ Па·с і $\rho_2 = 850$ кг/м³, $\eta_2 = 0,05$ Па·с. У кожній посудині падають алюмінієві кульки, діаметри яких $d = 8$ мм. Чи можна силу опору руху кульок обчислювати за формулою Стокса (припустити, що характерний розмір l дорівнює діаметрові кульок і критичне число Рейнольдса $Re_{кр} = 0,5$)? Якщо це так, обчислити за цією формулою швидкість v падіння кульок.

1.352. Обчислити максимальне значення швидкості $v_{\max}$ потоку води в трубі, що має діаметр $d = 2$ см, при якому рух рідини залишається ламінарним. Вважати, що критичне число Рейнольдса $Re_{кр} = 3\,000$. В'язкість води $\eta = 1$ мПа·с.

1.353. За час $t = 1$ с крізь поперечний переріз труби протікає вода, об'єм якої $V = 0,5$ л. Динамічна в'язкість води за даних умов $\eta = 1$ мПа·с, критичне число Рейнольдса $Re_{кр} = 3\,000$. Яким має бути діаметр d труби, щоб рух залишився ламінарним?

1.354. Дві кульки однакової густини, радіуси яких R_1 і R_2 , рухаються під дією сили тяжіння в суцільному середовищі з усталеними швидкостями v_1 і v_2 відповідно. Встановити відношення швидкостей v_1/v_2 кульок, якщо сила опору F рухові пропорційна k -му степеню добутку площі поперечного перерізу S кульки та швидкості v її руху? Силою Архімеда нехтувати.

1.355. Потужність двигуна вантажного автомобіля $P = 62,5$ кВт. Частина $\eta = 0,2$ цієї потужності йде на виконання роботи для подолання опору повітря при турбулентному русі зі швидкістю $v = 16$ м/с. Густина повітря $\rho = 1,2$ кг/м³, коефіцієнт опору $C_x = 0,6$. Визначити площу міделя автомобіля.

Елементи теорії пружності

1.356. За допомогою сталевого троса підйомника, діаметр якого $d = 6$ см, опустили кліть у шахту на глибину $h = 1$ км. Як залежать розтягуючі напруження $\sigma_{\max}$ у перерізі троса, що міститься на глибині x ? Маса кліті $m = 8$ т.

1.357. Сталевий канат, що утримує нерухому кабінку ліфта, має діаметр $d_0 = 8$ мм. Яким має бути діаметр d_1 каната, якщо кабіна при раптовій зупинці набуде прискорення у 8 разів більшого, ніж прискорення вільного падіння g ? Коефіцієнт міцності в обох випадках дорівнює 6.

1.358. Стрижень, що має густину ρ , довжину l і площу поперечного перерізу S , стоїть на горизонтальній поверхні. На скільки зменшиться його довжина і об'єм під дією власної маси?

1.359. Мідний стрижень затиснуто між двома опорами. Його температуру збільшили на $\Delta t = 50^\circ\text{C}$. Яке напруження σ виникає в стрижні? Модуль Юнга для міді $E = 130$ ГПа. Температурний коефіцієнт лінійного розширення міді $\alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

1.360. Сталевий стрижень, маса якого $m = 7,8$ кг, довжина $l = 2$ м, обертається навколо осі, що проходить через його середину, з кутовою швидкістю $\omega = 100$ рад/с. Визначити найбільші напруження σ_{max} в стрижні, якщо площа його поперечного перерізу $S = 5 \text{ см}^2$.

1.361. Сталевий маховик має вигляд масивного кільця із зовнішнім діаметром $d_1 = 50$ см і внутрішнім $d_2 = 49$ см. При якій циклічній частоті обертання $\omega_{\text{руйн}}$ він зруйнується? Межа міцності сталі на розрив $\sigma_{\text{max}} = 600$ МПа, густина сталі $\rho = 7,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

1.362. Який тиск p може витримати сталевий балон сферичної форми, якщо його внутрішній радіус $R = 50$ см, товщина стінок $d = 5$ мм? Межа міцності сталі на розрив $\sigma_{\text{max}} = 600$ МПа.

1.363. Балка квадратного перерізу зі стороною $a = 200$ мм горизонтально замурована одним кінцем у стіну. Довжина вільної частини $l = 2$ м. Обчислити прогин h вільного кінця балки під дією власної маси. Густина матеріалу $\rho = 7,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга $E = 200$ ГПа.

1.364. Пружний циліндричний стрижень, маса якого m , довжина l і площа поперечного перерізу S , рухається в напрямі своєї осі з прискоренням a (однаковим для всіх його точок). Визначити енергію U пружної деформації циліндра, яка виникає внаслідок прискореного руху.

1.365. На пружині, закріпленій верхнім кінцем, підвішений вантаж масою m . Показати, що зміна потенціальної енергії вантажу при деформації пружини вдвічі більша, ніж енергія пружно деформованої пружини. Як це узгоджується із законом збереження енергії?

1.366. Визначити енергію U пружної деформації сталеві труби (внутрішній діаметр d_1 , зовнішній – d_2), один кінець якої закріплено, а другий закручено відносно її осі на кут ϕ . Довжина труби l . Модуль зсуву сталі G .

1.367. Внаслідок закручування верхній переріз сталевго стрижня, довжина якого $l = 3$ м, повернувся відносно нижнього на кут $\phi = 2^\circ$. Радіус стрижня $R = 50$ мм. Визначити крутильний момент M та потенціальну енергію пружної деформації U стрижня. Модуль зсуву для сталі $G = 82$ ГПа.

1.368. Вивести залежність між крутильним моментом M та кутом закручення ϕ суцільного стрижня, довжина якого l , радіус R . Модуль кручення стрижня G .

1.369. Яку енергію U можна одержати за рахунок зміни пружно-деформованого стану $V = 1 \text{ м}^3$ прісної води при підйомі з глибини $h = 11$ км? Коефіцієнт об'ємної пружності $\beta = 0,49$ ГПа $^{-1}$.

Розділ 2. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

2.1. ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ІДЕАЛЬНОГО ГАЗУ

Атомна одиниця маси $m_a = \frac{\text{маса атома вуглецю } ^{12}\text{C}}{12} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$.

Відносна атомна маса

$$A_r = \frac{m_0}{m_a}, \quad (2.1.1)$$

де m_0 – маса атома, кг.

Відносна молекулярна маса речовини

$$M_r = \sum_{i=1}^n N_i A_{ri} \quad (2.1.2)$$

де N_i – кількість атомів i -го хімічного елемента, що входить до складу молекули даної речовини; A_{ri} – відносна атомна маса цього елемента (відносні атомні маси наведено в періодичній таблиці Д. І. Менделєєва).

В одному молі довільної речовини міститься однакова кількість структурних елементів (стала Авогадро)

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Молярна маса (маса моля речовини) $M = m_0 N_A$ (кг/моль).

Кількість молів структурних елементів речовини

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}, \quad (2.1.3)$$

де N – кількість структурних елементів (атомів, молекул, іонів, протонів тощо) речовини; m – маса речовини.

Кількість молів структурних елементів суміші речовин

$$\nu = \sum_{i=1}^n \nu_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M_i}. \quad (2.1.4)$$

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}}^2 \rangle}{2}, \quad (2.1.5)$$

де p – тиск газу; n – концентрація молекул; $\langle \epsilon \rangle$ – середня кінетична енергія поступального руху однієї молекули газу, $\langle \epsilon \rangle = \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}}^2 \rangle}{2}$; $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ – середня квадратична швидкість молекули.

Середня кінетична енергія молекули

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (2.1.6)$$

де i – сума кількостей поступальних, обертальних і подвоєної кількості коливальних ступенів вільності молекули, $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} + 2i_{\text{хол}}$; k – стала Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; T – термодинамічна температура газу.

Рівняння стану ідеального газу (рівняння Клапейрона – Менделєєва)

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad (2.1.7)$$

де R – молярна газова стала, $R = kN_A = 8,31$ Дж/(моль·К); m – маса газу.

Тиск суміші газів (закон Дальтона)

$$p = \sum_{i=1}^k p_i, \quad (2.1.8)$$

де p_i – парціальний тиск i -ї компоненти суміші; k – кількість компонентів.

Молярна маса суміші газів

$$M = \frac{\sum_{i=1}^k m_i}{\sum_{i=1}^k \nu_i}, \quad (2.1.9)$$

де m_i – маса i -ї компоненти суміші; ν_i – кількість молів i -ї компоненти суміші,

$$\nu_i = \frac{m_i}{M_i}.$$

Середнє значення функції $F(x)$ випадкової величини x для неперервного розподілу

$$\langle F(x) \rangle = \int_a^b F(x) f(x) dx, \quad (2.1.10)$$

де $f(x)$ – функція розподілу випадкової величини.

Функція розподілу молекул ідеального газу за абсолютними значеннями швидкостей (функція розподілу Максвелла)

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}, \quad (2.1.11)$$

де $f(v)$ – функція розподілу, $f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv}$; тут $dN(v)$ – кількість молекул, швидкості яких лежать в інтервалі від v до $v+dv$ в околі швидкості v , N – загальна кількість молекул, dv – інтервал швидкостей.

Найбільш імовірна, середня арифметична і середня квадратична швидкості молекул

$$v_i = \sqrt{\frac{2RT}{M}}; \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}; \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (2.1.12)$$

Функція розподілу Максвелла за відносними значеннями швидкостей

$$f(u) = \frac{dN(u)}{Ndu} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2, \quad (2.1.13)$$

де u – відносна швидкість частинки (молекули), $u = \frac{v}{v_i}$.

Функція розподілу Больцмана за потенціальними енергіями $U(r)$

$$f(U) = A_U e^{-\frac{U}{kT}}, \quad (2.1.14)$$

де A_U – нормувальна стала, яка визначається з умови

$$\int_{U_a}^{U_b} f(U) dU = 1.$$

Закон Больцмана для розподілу частинок у зовнішньому потенціальному полі

$$n = n_0 e^{-\frac{\Delta U}{kT}}, \quad (2.1.15)$$

де ΔU – різниця потенціальних енергій частинок (молекул) на двох рівнях довільного потенціального поля, $\Delta U = U_0 - U$; n_0 , n – концентрації частинок (молекул) на цих рівнях.

Барометрична формула

$$p = p_0 e^{-\frac{Mg(h-h_0)}{RT}}, \quad (2.1.16)$$

де p_0 , p – тиск газу на висоті відповідно h_0 і h .

Маса і розміри молекул. Кількість речовини

2.1. Скільки атомів міститься в 2 г гелію?

2.2. Скільки молекул міститься в 4 г кисню?

2.3. Визначити молярну масу води H_2O . Скільки молів води міститься в 1 кг води? Скільки молекул води міститься в 1 м³ води? Обчислити масу і об'єм однієї молекули води.

2.4. Визначити відносну молекулярну та молярну маси сірчаної кислоти.

2.5. Обчислити кількість молів атомів, електронів та нейтронів в 1 кг ізотопу ${}^{235}_{92}\text{U}$.

2.6. Обчислити масу і об'єм одного моля води, об'єм, який займає одна молекула води, а також діаметр атома кисню, якщо припустити, що кисень у молекулі води займає близько половини об'єму.

2.7. Яка кількість молекул міститься в суміші газів, що має об'єм $V = 22,4 \text{ дм}^3$, якщо температура $T = 273,16 \text{ К}$ і тиск $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$?

2.8. Радонові ванни містять $1,8 \cdot 10^6$ атомів радону на 1 л води. Обчислити, на скільки молекул води припадає один атом радону.

2.9. Де більше міститься атомів: в 1 м^3 води чи в 1 м^3 ртуті?

2.10. Через скільки часу склянка з водою виявиться порожньою, якщо з неї щосекунди випаровуватиметься 100 млрд молекул?

2.11. Визначити кількість молекул повітря в атмосфері Землі.

2.12. Відомий англійський популяризатор науки Джеймс Джинс стверджував, що коли хтось із нас вдихає повітря, то в його легені потрапляє декілька тих молекул, які вийшли із легенів Юлія Цезаря при його останньому передсмертному видиху. Чи правдоподібне таке твердження?

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів.

Середня енергія молекул

2.13. Обчислити середню кінетичну енергію $\langle \epsilon_{\text{оберт}} \rangle$ обертального руху однієї молекули кисню при температурі $T = 350 \text{ К}$ та середню кінетичну енергію $\langle E \rangle$ обертального руху всіх молекул кисню, маса якого $m = 4 \text{ г}$.

2.14. Температура газу в закритому металевому балоні змінюється від 293,15 до 373,15 К. Як при цьому зміняться тиск і середня кінетична енергія поступального руху молекул газу?

2.15. У посудині місткістю $V = 3 \text{ дм}^3$ міститься азот при температурі $t = 17^\circ \text{C}$ і тиску $p = 10^{-4} \text{ Па}$. Визначити кількість молекул N азоту в посудині, масу m азоту та середню кінетичну енергію $\langle E \rangle$ поступального теплового руху молекул газу.

2.16. Визначити температуру T суміші трьох молів гелію, взятого при температурі $t_1 = 80^\circ \text{C}$, і двох молів азоту, взятого при $t_2 = 40^\circ \text{C}$.

2.17. Обчислити кінетичну енергію $\langle E \rangle$ обертального руху двох молів молекул кисню при температурі 17°C .

2.18. Чотириатомний газ в кількості $\nu = 3$ моля складається з об'ємних молекул, всі ступені вільності яких збуджуються при температурі $T = 1,2 \cdot 10^3$ К. Обчислити кінетичну енергію $\langle E \rangle$ молекул газу. Яка частина цієї енергії припадає на поступальні, обертальні та коливальні рухи молекул?

2.19. Що означає процес вирівнювання температури з погляду молекулярно-кінетичної теорії?

2.20. Встановити співвідношення між середніми кінетичними енергіями теплового руху молекул та їхніми масами в стані термодинамічної рівноваги.

2.21. Деяка маса кисню перебуває при температурі $t = 27$ °С і тиску $p = 100$ кПа. Кінетична енергія поступального руху молекул кисню $\langle E \rangle = 6,3$ Дж. Обчислити кількість молекул N кисню, його масу m та об'єм V .

2.22. У посудині, об'єм якої $V = 3$ л, міститься суміш $m_1 = 14$ г азоту та $m_2 = 10$ г аргону. Визначити тиск p даної суміші на стінки посудини, якщо сума середніх кінетичних енергій молекул обох газів $\langle \epsilon \rangle = 2$ еВ.

2.23. Азот, маса якого $m = 15$ г, знаходиться при температурі $T = 800$ °С. При цьому 60 % молекул азоту дисоційовані на атоми. Визначити середню енергію теплового руху частинок. Вважати, що коливальні ступені вільності не збуджені.

2.24. Кисень займає об'єм $V = 560$ л, його маса $m = 8$ г. Обчислити: тиск p цього газу при температурі $T = 820$ К; тиск p' при температурі, якій відповідає середня кінетична енергія частинок $\langle \epsilon \rangle = 10$ еВ. Вважати, що практично всі молекули газу розпалися на два іони однакової маси.

2.25. Газ, який складається з жорстких двохатомних молекул, при нормальному тиску займає об'єм $V = 8$ дм³. Визначити середню енергію $\langle E \rangle$ теплового руху молекул цього газу.

2.26. Супутник зв'язку, об'єм якого $V = 50$ м³, наповнений за нормальних атмосферних умов сумішшю азоту і гелію, маси яких є однаковими. Корпус супутника пробиває космічна частинка, діаметр якої 1 мм. Встановити склад газу, що проходить крізь отвір, а також час, протягом якого кількість молекул азоту і гелію окремо зменшиться на 0,1 %. Процес вважати ізотермічним.

Рівняння стану ідеального газу. Газові закони

2.27. Густина ρ суміші азоту й водню при температурі $t = 47$ °С і тиску $p = 2,05$ кПа становить 0,3 кг/м³. Яка концентрація водню n_2 в суміші?

2.28. Атмосферне повітря містить переважно кисень, азот й аргон. Визначити кількість молекул n цих газів та їхні маси в одиниці об'єму

за нормальних умов, коли відомо, що кількість молекул азоту в 4 рази більша, а аргону в 20 разів менша від кількості молекул кисню.

2.29. У посудині місткістю $V = 2$ л знаходиться $m = 2$ г гідриду урану UH_3 . При нагріванні до температури $T = 673$ К гідрид повністю розпадається на уран, відносна атомна маса якого $A_r = 238$, та атомарний водень. Визначити тиск водню в посудині при цій температурі.

2.30. У циліндрі під поршнем міститься газ за нормальних умов. Спочатку при $T = \text{const}$ об'єм газу збільшили у $\beta = 5$ разів, потім газ нагріли при $p = \text{const}$ до температури $t = 127$ °С. Визначити концентрацію n молекул у кінцевому стані.

2.31. До якої температури T потрібно нагріти ідеальний газ при $p = \text{const}$, щоб його густина зменшилась у 2 рази порівняно з густиною цього газу, коли $t_0 = 0$ °С?

2.32. Електрична лампа розжарювання, об'єм якої $V = 500$ см³, наповнена азотом під тиском $p = 9 \cdot 10^4$ Па. Яка маса води m увійде в лампу, якщо в ній зробити отвір під водою при нормальному атмосферному тиску?

2.33. У відкритій посудині при $t_1 = 20$ °С міститься $m_1 = 150$ г повітря. На яке значення Δm зменшиться маса повітря в посудині у разі нагрівання її до $t_2 = 100$ °С? Зміною розмірів посудини під час нагрівання нехтувати.

2.34. Суміш газів, що перебуває під тиском $p = 1,02 \cdot 10^5$ Па, містить $m_1 = 16$ г кисню та $m_2 = 4$ г гелію. Температура суміші $T = 280$ К. Обчислити концентрацію n молекул суміші та її густина ρ .

2.35. Швидкість відкачування роторного масляного насоса $Q = 1,5 \cdot 10^{-4}$ м³/с. Який час τ потрібен для того, щоб повітря в посудині місткістю $V = 5$ л відкачати від нормального атмосферного тиску до тиску $p = 1,33$ Па?

2.36. Посудини A і B з'єднані між собою за допомогою капіляра з краном. Посудина A занурена у водяну ванну з температурою $T_1 = 373$ К, а посудина B – в холодну суміш з температурою $T_2 = 253$ К. Спочатку в посудинах за допомогою крана створили повітряні тиски $p_1 = 5,3 \cdot 10^2$ Па та $p_2 = 1,4 \cdot 10^3$ Па. Визначити рівноважний усталений тиск p , що буде в посудинах після відкриття крана, якщо місткість посудини A $V_1 = 250$ см³, а посудини B – $V_2 = 400$ см³.

2.37. У посудині, об'єм якої $V = 20$ л, міститься $m_1 = 5$ г водню та $m_2 = 10$ г азоту при температурі $T = 290$ К. Визначити тиск у посудині, молярну масу та густина суміші газів.

2.38. Посудина місткістю V заповнена повітрям за нормальних умов. Потім у цю посудину при тій самій температурі нагнітають додатково

масу m азоту, і нагрівають суміш газів до температури T_1 . Обчислити тиск p суміші при температурі T_1 .

2.39. Атмосфера Венери складається переважно з вуглекислого газу. Визначити, у скільки разів густина ρ_1 атмосфери біля поверхні Венери більша від густини ρ_2 атмосфери біля поверхні Землі, вважаючи, що тиск p_1 атмосфери Венери більший від тиску p_2 атмосфери Землі в 100 разів, а середня температура T_1 на поверхні Венери становить $\frac{7}{3}$ від температури T_2 на Землі.

2.40. На дні озера, глибина якого $h = 20$ м, температура води $t_1 = 7$ °С. Бульбашка повітря, яка на дні озера має об'єм $V_1 = 2$ мм³, повільно піднімається. Який об'єм V матиме бульбашка повітря біля поверхні води, якщо атмосферний тиск нормальний, а температура поверхні води $t_2 = 19$ °С? Тиском, що зумовлений поверхневим натягом, нехтувати.

2.41. Посудина з газом та теплоізолюваними стінками поділена рухомою теплопровідною перегородкою на дві частини, відношення об'ємів яких у рівноважному стані перегородки $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$ при температурах у цих частинах відповідно $t_1 = 102$ °С і $t_2 = 227$ °С. Визначити відношення об'ємів, які встановляться після вирівнювання температур.

2.42. Запаяна з одного боку вертикально розміщена трубка, довжина якої $H = 1$ м, до краю заповнена повітрям і ртуттю (рис. 2.1). Довжина стовпчика ртуті $h = 38$ см. До якої температури T треба нагріти повітря в трубці, щоб уся ртуть вилілась? Температуру атмосфери взяти такою, що дорівнює $t_1 = 17$ °С, тиск $p_0 = 101,3$ кПа.

2.43. У двох газових балонах автомобіля міститься паливо для двигуна під тиском $p_1 = 20,26$ МПа. Місткість кожного балона $V = 0,08$ м³. Яка маса Δm газу була витрачена за час поїздки, якщо тиск у балонах знизився до $p_2 = 10,13$ МПа? Температура газу $t_0 = 0$ °С. Густина палива за нормальних умов $\rho = 0,6$ кг/м³.

2.44. Маса планети Марс $m = 6,6 \cdot 10^{23}$ кг, радіус її $r = 3,2 \cdot 10^6$ м. Оцінити температуру T атмосфери на поверхні Марса, якщо припустити, що планета оточена газовою оболонкою сталої густини, висота якої $h = 5 \cdot 10^4$ м, а середня молярна маса газу $M = 10^{-2}$ кг/моль.

2.45. Газ стискається ізотермічно від об'єму $V_1 = 10$ дм³ до об'єму $V_2 = 5$ дм³. Тиск при цьому змінюється на $\Delta p = 6$ кПа. Визначити початковий тиск p газу.

2.46. У лабораторії для наближеного визначення атмосферного тиску студент діяв так: трубку (не капілярну) завдовжки l занурив вертикально

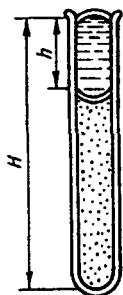


Рис. 2.1

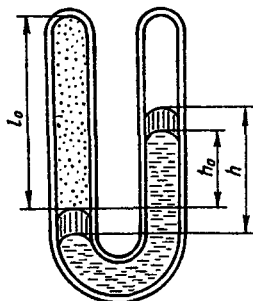


Рис. 2.2

у воду на глибину H , а потім, закривши верхній кінець трубки пальцем, вийняв її з води. При цьому в трубці залишився стовпчик води, висота якого h . Визначити атмосферний тиск p за цими вимірами.

2.47. В U -подібну трубку наливо ртуть (рис. 2.2). Після того, як з правого коліна відкачали повітря і запаяли його, різниця рівнів ртуті в колінах при $t = 17^\circ\text{C}$ виявилась $h_0 = 75$ см, а довжина стовпчика повітря у відкритому коліні $l_0 = 1$ м. Потім запаяли ліву частину трубки і прилад помістили в гарячу воду. Різниця рівнів ртуті в колінах стала $h = 90$ см. Обчислити температуру T води.

2.48. Стінки балона, що містить $m_1 = 1,5$ кг азоту, руйнуються при температурі $t_1 = 300^\circ\text{C}$. Яку масу m водню можна зберігати в цьому балоні при температурі $t_2 = 25^\circ\text{C}$ і восьмикратному запасі міцності?

2.49. Футбольний м'яч, об'єм якого $V = 3,4$ дм³, нагнітають повітрям за допомогою помпи. Який тиск p установиться в камері м'яча після $N = 50$ качань, якщо при кожному циклі роботи помпа забирає з навколишнього середовища об'єм $V_0 = 100$ см³ повітря при нормальному атмосферному тиску?

2.50. З посудини, об'єм якої $V = 20$ дм³, потрібно відкачати повітря від нормального атмосферного тиску до $p = 1,018$ кПа. За скільки циклів n роботи помпи це можна зробити, якщо об'єм її всмоктувальної камери $V_0 = 2$ дм³?

2.51. Визначити молекулярну формулу C_xH_y газу, який є сполукою вуглецю з воднем, якщо при температурі $t = 27^\circ\text{C}$ і тиску $p = 100$ кПа густина цього газу $\rho = 0,64$ кг/м³.

2.52. Аеростат наповнений воднем при температурі $t_1 = 17^\circ\text{C}$. Під дією сонячних променів температура водню в аеростаті підвищилася до $t_2 = 37^\circ\text{C}$, а зовнішній тиск атмосфери не змінився. Під час нагрівання надлишковий водень вийшов з аеростата, а його маса зменши-

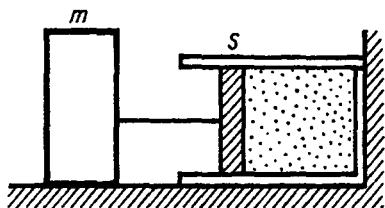


Рис. 2.3

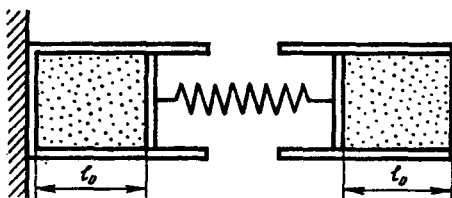


Рис. 2.4

лась на $\Delta m = 6,12$ кг. Визначити об'єм V аеростата, вважаючи, що середня густина водню $\rho = 0,09$ кг/м³.

2.53. Резервуари місткостями $V_1 = 25$ л і $V_2 = 15$ л з'єднані між собою трубкою з клапаном, крізь який газ переходить з більшого резервуара в менший у разі досягнення різниці тисків у них $\Delta p = 120$ кПа. Коли температура $t_1 = 27$ °С, то більший резервуар містить газ при нормальному атмосферному тиску, а менший повністю вакуумований. Який тиск p установиться в меншому резервуарі, якщо обидва їх нагріти до $t_2 = 152$ °С?

2.54. У вакуумовану посудину місткістю $V = 0,3$ л при $t_0 = 0$ °С введено 0,90 г рідкого чотириоксиду азоту N_2O_4 . З підвищенням температури до $t = 27$ °С рідкий чотириоксид азоту випаровується і частково дисоціює на двооксид азоту NO_2 . Який відсоток α молекул чотириоксидного азоту дисоціює, якщо тиск газу в посудині $p = 128$ кПа?

2.55. Для дослідження верхніх шарів атмосфери Венери в проекті "Вега" передбачено використати аеростатний зонд. Визначити об'єм V зонда, наповненого гелієм, якщо на досліджуваних висотах при температурі $t = 10$ °С тиск атмосфери $p = 50$ кПа. Вважати, що атмосфера Венери повністю складається з вуглекислого газу, а маса зонда з апаратурою $m = 20$ кг.

2.56. Легкорозтяжну повітряну кулю, маса якої $m_1 = 100$ кг, заповнено $m_2 = 200$ кг азоту. До якої температури T треба нагріти азот у теплоізоляційній повітряній кулі, щоб вона піднялася? Атмосфера перебуває в нормальних умовах.

2.57. У циліндрі під поршнем, площа якого $S = 10^{-3}$ м², міститься повітря за нормальних умов. Циліндр лежить на горизонтальній поверхні, впираючись дном у вертикальну стінку (рис. 2.3). До якої температури T треба нагріти повітря в циліндрі, щоб тіло масою $m = 8$ кг, з'єднане жорстким стрижнем з рухомим без тертя поршнем, зсунулося з місця по поверхні, якщо коефіцієнт тертя між ними $\mu = 0,30$?

2.58. Між поршнями двох однакових нерухомих циліндрів, заповнених однаковим газом, встановлена пружина (рис. 2.4). У вихідному стані

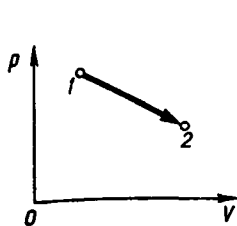


Рис. 2.5

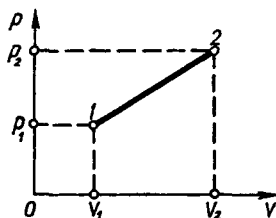


Рис. 2.6

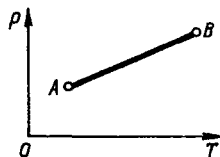


Рис. 2.7

відстань між поршнями і дном циліндрів l_0 , температура газу T_1 . Потім в одному з циліндрів газ було нагріто до такої температури T_2 , що його тиск збільшився в n разів. Обчислити, на скільки змінилася довжина пружини. Тертям поршнів у циліндрах нехтувати.

2.59. У горизонтально розміщеній трубці, довжина якої $L = 1$ м, на відстані $b = 80$ см від запаяного кінця міститься стовпчик ртуті $l = 0,3$ см завдовжки. З якою кутовою частотою ω має обертатись трубка в горизонтальній площині, щоб ртуть досягла відкритого краю трубки? Тиск атмосфери нормальний.

2.60. В одній половині розділеної тонкою перегородкою теплоізолюваної посудини, об'єм якої $V = 10$ л, міститься багатоатомний газ при температурі $t_1 = 27^\circ\text{C}$ і тиску $p_1 = 152,0$ кПа, в іншій – двоатомний газ при температурі $t_2 = 77^\circ\text{C}$ і тиску $p_2 = 202,6$ кПа. Визначити температуру T суміші газів після усунення перегородки.

2.61. Посудина, об'єм якої $V = 10$ л і площа перерізу $S = 100$ см², розділена на дві однакові частини напівпроникною перегородкою. В одній половині посудини міститься 8 молів азоту, в іншій – 10 молів водню. Крізь пористу перегородку можуть проходити лише молекули водню. Яка сила F діятиме на перегородку після встановлення рівноваги? Процес відбувається при сталій температурі $T = 298$ К.

2.62. Пояснити, як змінилась температура процесу, зображеного на діаграмі (рис. 2.5). Маса газу не змінювалась.

2.63. Зобразити графічно залежність густини ідеального газу від температури при ізотермічному, ізобарному та ізохорному процесах.

2.64. Як ізопроцесами можна перевести ідеальний газ зі стану 1 у стан 2 (рис. 2.6)?

2.65. Процес зміни стану газу зображено на діаграмі p, T прямою лінією AB (рис. 2.7). Як змінювався об'єм газу, якщо $m = \text{const}$?

2.66. За графіком залежності об'єму від температури (рис. 2.8) встановити характер зміни тиску газу під час нагрівання.

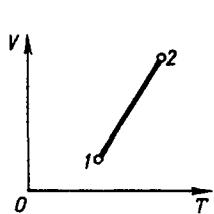


Рис. 2.8

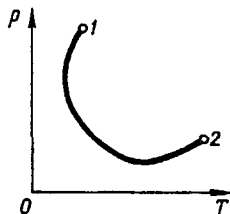


Рис. 2.9

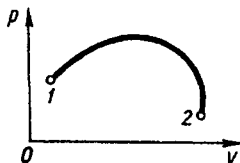


Рис. 2.10

2.67. На рис. 2.9 зображено зміну тиску газу залежно від температури. Як змінюється об'єм газу під час нагрівання?

2.68. Як змінювалась температура газу під час процесу, зображеного на діаграмі p, V (рис. 2.10)?

2.69. На діаграмі p, V зобразити ізобарне розширення газу із стану 1 у стан 2. Якому з цих станів відповідає вища температура? Як зміниться графік перебігу процесу, якщо взяти більшу масу газу, а початковий об'єм залишиться той самий?

2.70. На діаграмі p, V зобразити ізохорний процес переходу газу із стану 1 у стан 2. Якому з цих станів відповідає вища температура? Як зміниться графік перебігу процесу, якщо взяти більшу масу газу, а початковий тиск залишиться той самий?

2.71. Чому вершки в молоці відстоюються скоріше за низької температури?

2.72. Як пояснити явище, яке виражають словами “дим тане в повітрі”?

2.73. Поясніть механізм присмоктування медичних банок до тіла людини.

Швидкість газових молекул. Розподіл Максвелла.

Розподіл Больцмана. Барометрична формула

2.74. Визначити середню квадратичну $\langle v_{\text{кв}} \rangle$, середню арифметичну $\langle v \rangle$ і найбільш імовірну v_i швидкості молекул ідеального газу, густина якого при нормальному тиску $p = 1,2 \text{ кг/м}^3$.

2.75. Встановити концентрацію n_0 молекул водню в посудині, якщо тиск $p = 0,3 \text{ кПа}$, а температура є такою, що середня квадратична швидкість молекул водню $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 2,7 \text{ км/с}$.

2.76. Обчислити середню квадратичну швидкість $\langle v'_{\text{кв}} \rangle$ пилинки, маса якої $m = 10 \text{ нг}$, вважаючи, що вона рухається у повітрі та перебуває з ним у тепловій рівновазі, і порівняти її з середньою квадратичною швидкістю $\langle v''_{\text{кв}} \rangle$ молекул повітря при тій самій температурі $t = 22^\circ\text{C}$.

2.77. Якою має бути температура T_2 водню, щоб середня квадратична швидкість його молекул дорівнювала середній квадратичній швидкості молекул азоту при температурі $T_1 = 390 \text{ K}$?

2.78. Як змінюється крива розподілу Максвелла зі зміною температури? Який фізичний зміст площі, обмеженої графіком розподілу Максвелла та віссю абсцис?

2.79. При температурі $t = 527^\circ \text{C}$ найбільш імовірна швидкість молекул деякого газу $v_1 = 1820 \text{ м/с}$. Встановити, який це газ.

2.80. У досліді Штерна на поверхні циліндра C , що обертається навколо осі, конденсуються атоми срібла, які рухаються з різними швидкостями (рис. 2.11). Яким швидкостям v атомів, що осідають на ділянці DD' , відповідає шар найбільшої товщини?

2.81. Визначити температуру T азоту, при якій швидкостям молекул $v_1 = 200 \text{ м/с}$ та $v_2 = 500 \text{ м/с}$ відповідає одне й те саме значення функції розподілу $f(v)$.

2.82. Обчислити імпульс K молекули водяної пари при температурі $t = 27^\circ \text{C}$, вважаючи швидкість її руху такою, що дорівнює середній квадратичній швидкості $\langle v_{\text{кв}} \rangle$.

2.83. Якою має бути температура T повітря Землі, щоб середня квадратична швидкість молекули водню дорівнювала другій космічній швидкості?

2.84. Визначити відносну кількість молекул кисню, швидкості яких при температурі $t = 17^\circ \text{C}$ лежать у межах $275 \dots 280 \text{ м/с}$.

2.85. Встановити відношення кількості молекул кисню, швидкості яких при температурі $t = 127^\circ \text{C}$ лежать у межах $598 \dots 602 \text{ м/с}$, до кількості молекул, швидкості яких лежать у межах $298 \dots 302 \text{ м/с}$. Пояснити результат.

2.86. У закритій посудині міститься $m = 0,1 \text{ кг}$ кисню. Обчислити кількість N молекул кисню, швидкості яких лежать у межах $195 \dots 205 \text{ м/с}$ при $t = 0^\circ \text{C}$.

2.87. Довести, що відносна кількість молекул, швидкості яких лежать у межах від середньої арифметичної до найбільш імовірної, не залежить від температури.

2.88. Встановити відношення кількості молекул ідеального газу, швидкості яких лежать у межах від v до $v + \Delta v$ при температурі T_1 , до кількості молекул, швидкості яких лежать у цих самих межах, а темпера-

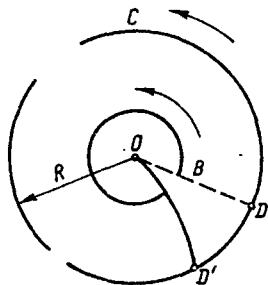


Рис. 2.11

тура $T_2 = 2T_1$. Розглянути випадки: а) $v = \frac{1}{2}v_{i1}$; б) $v = v_{i1}$; в) $v = 2v_{i2}$, де

v_{i1} , v_{i2} – найбільш імовірні швидкості молекул, що відповідають температурам T_1 і T_2 . Вважати, що в усіх випадках $\Delta v \ll v$.

2.89. Встановити відносну кількість молекул азоту, швидкості яких при $t = 100^\circ\text{C}$ лежать у межах $250 \dots 700$ м/с.

2.90. У посудині міститься $m = 14$ г азоту при температурі $t = 1227^\circ\text{C}$. Яка кількість N_x молекул азоту має кінетичну енергію поступального руху, що перевищує енергію $E = 5,5 \cdot 10^{-20}$ Дж?

2.91. Кисень за нормальних умов займає об'єм $V = 1$ м³. Визначити кількість N молекул у цьому об'ємі, які мають швидкості більші ніж $v_0 = 1,5 \cdot 10^3$ м/с.

2.92. Для вимірювання сталої Авогадро французький фізик Ж. Перрен використав розподіл частинок водної емульсії фарби гумігут. Густина частинок гумігугу $\rho = 1210$ кг/м³, а їхній радіус $r = 0,47$ мкм. Експеримент проводився при температурі $t = 4^\circ\text{C}$. Встановити висоту Δh , на якій концентрація частинок гумігугу зменшувалась у 2 рази.

2.93. У повітрі при нормальному атмосферному тиску й температурі $t = 27^\circ\text{C}$ є завислі сферичні частинки радіуса $r = 0,1$ мкм. Дослідно встановлено, що концентрація цих частинок зменшується у 2 рази на висоті $h = 20$ м. Визначити масу m частинок, якщо повітря і система частинок перебувають у стані теплової рівноваги, а густина повітря $\rho = 1,293$ кг/м³.

2.94. У відкритій циліндричній посудині міститься повітря при нормальному атмосферному тиску. Посудину обертають навколо вертикальної осі, перпендикулярної до осі циліндричної посудини, з кутовою швидкістю ω . Як змінюється тиск p газу вздовж посудини?

2.95. На якій висоті h над поверхнею Землі парціальний тиск вуглекислого газу зменшується у 2 рази? Температуру атмосфери вважати сталою і такою, що $t = 27^\circ\text{C}$.

2.96. Сучасні літаки можуть перебувати в атмосфері на висоті $h = 30$ км. Який тиск p атмосфери на цій висоті покаже барометр? Температуру атмосфери вважати сталою і такою, що $t = 7^\circ\text{C}$, а склад повітря – незмінним.

2.97. Біля поверхні Землі атмосфера складається переважно з азоту (76 %), кисню (23 %) та аргону (1 %). Як змінюється співвідношення компонентів атмосфери з висотою?

2.98. На якій висоті h над поверхнею Землі густина повітря при $t = 27^\circ\text{C}$ зменшується в $e = 2,718$ рази порівняно з його густиною на

рівні моря? Температуру, склад повітря й прискорення вільного падіння вважати незалежними від висоти.

2.99. Біля поверхні Землі на мільйон молекул азоту припадає приблизно одна молекула водню. На якій висоті h концентрація молекул водню й азоту в атмосфері вирівнюється? Вважати, що температура атмосфери $t = 0^\circ\text{C}$ і зі зміною висоти залишається такою самою.

2.100. На якій висоті h над рівнем моря атмосферний тиск $p = 8$ кПа, якщо температура повітря $t = 17^\circ\text{C}$ і не змінюється з висотою, а тиск на рівні моря нормальний? Обчислити кількість частинок атмосфери в одиниці об'єму на цій висоті.

2.101. Визначити середню потенціальну енергію $\langle U \rangle$ молекули газу в земній атмосфері, вважаючи останню ізотермічним ідеальним газом, а поле тяжіння – однорідним.

2.102. Встановити відношення тиску повітря на висоті $h_1 = 2$ км до тиску на дні шахти, глибина якої $h_2 = 2$ км. Поле тяжіння є однорідним, атмосфера – ідеальний газ, який перебуває в стані термодинамічної рівноваги при температурі $T = 300$ К.

2.103. У центрифугі з ротором радіуса $r = 0,5$ м при температурі $T = 300$ К міститься суміш нуклідів хлору ^{35}Cl та ^{37}Cl . При обертанні ротора біля його стінок частки атомів першого та другого нуклідів будуть $\eta_1 = 0,3$ та $\eta_2 = 0,7$. Обчислити кутову швидкість ω обертання ротора, якщо частка атомів нукліда ^{37}Cl у суміші $\eta = 0,25$.

2.104. На основі закону розподілу молекул ідеального газу за швидкостями встановити формулу для найбільш імовірної швидкості.

2.105. На якій висоті h відношення концентрації водню до концентрації кисню в рівноважній земній атмосфері при $T = 300$ К більше за відношення цих концентрацій поблизу поверхні Землі в $\eta = 4,22$ раза?

2.106. Встановити закон, за яким змінюється тиск повітря з висотою $p(h)$, вважаючи, що температура T повітря зменшується з висотою рівномірно, тобто температурний градієнт $\frac{dT}{dh}$ постійний і дорівнює $-a$.

Визначити тиск повітря як функцію температури $p(T)$ та вивести формули для випадку ізотермічної атмосфери ($a = 0$).

2.107. Використовуючи закон розподілу молекул ідеального газу за швидкостями, визначити їх середню квадратичну швидкість.

2.108. Скориставшись функцією розподілу молекул ідеального газу за енергіями, встановити середню кінетичну енергію $\langle \epsilon \rangle$ молекул.

2.109. Скориставшись функцією розподілу молекул за енергіями, встановити найбільш імовірне значення енергії ϵ_i молекул.

2.110. Обчислити середнє значення величини, оберненої до швидкості молекули кисню за нормальних умов.

2.2. ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ В ГАЗАХ

Середня довжина вільного пробігу молекули газу

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}, \quad (2.2.1)$$

де n – концентрація молекул газу; σ – повний ефективний поперечний переріз зіткнення молекул.

У разі зіткнення молекул, що розглядаються як тверді кулі,

$$\sigma = \pi d^2, \quad (2.2.2)$$

де d – ефективний діаметр молекули.

Середня кількість зіткнень, яких зазнає молекула за одиницю часу,

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle l \rangle} = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle, \quad (2.2.3)$$

де $\langle v \rangle$ – середня арифметична швидкість.

Кількість парних зіткнень усіх молекул в одиниці об'єму за одиницю часу

$$z = \frac{1}{2} \langle z \rangle n. \quad (2.2.4)$$

Середня кількість ударів молекул за одиницю часу об одиничну плоску поверхню, розміщену в газі,

$$z_0 = \frac{1}{4} n \langle v \rangle. \quad (2.2.5)$$

Закон розподілу за довжиною вільного пробігу

$$N = N_0 e^{-\frac{x}{\langle l \rangle}}, \quad (2.2.6)$$

де N – кількість молекул, що пройшли відстань x у шарі без зіткнень; N_0 – кількість молекул, що падають на шар газу.

Функція розподілу молекул за довжинами вільного пробігу

$$f(x) = \frac{1}{\langle l \rangle} e^{-\frac{x}{\langle l \rangle}}. \quad (2.2.7)$$

Якщо вздовж осі Ox існує градієнт густини $\frac{d\rho}{dx}$, то маса m речовини, яка переноситься внаслідок дифузії крізь площину S , розміщену перпендикулярно до осі Ox , за час t (закон Фіка),

$$m = -D \frac{d\rho}{dx} S t, \quad (2.2.8)$$

де D – коефіцієнт дифузії газу,

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle. \quad (2.2.9)$$

Якщо вздовж осі Ox існує градієнт температури $\frac{dT}{dx}$, то кількість теплоти Q , яка переноситься внаслідок теплопровідності крізь площину S , розміщену перпендикулярно до осі Ox , за час t (закон Фур'є),

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dx} S t, \quad (2.2.10)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності газу,

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho \langle l \rangle \langle v \rangle c_V, \quad (2.2.11)$$

тут c_V – питома теплоємність газу при сталому об'ємі.

Зв'язок між силою внутрішнього тертя та модулем градієнта швидкості (закон Ньютона):

$$F = \eta \left| \frac{dv}{dx} \right| S, \quad (2.2.12)$$

де F – модуль сили тертя, яка діє по поверхні площею S між шарами речовини, що рухаються (передбачається, що шар газу або рідини має швидкість лише у напрямі, перпендикулярному до осі Ox); η – коефіцієнт динамічної в'язкості,

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle l \rangle \langle v \rangle. \quad (2.2.13)$$

Момент сил внутрішнього тертя, що виникають між коаксіальними шарами газу за наявності градієнта кутової швидкості,

$$dM = \eta r^2 \frac{d\omega}{dr} dS, \quad (2.2.14)$$

де r – радіус шару газу.

Температуропровідність

$$\chi = \frac{\lambda}{\rho c_p}, \quad (2.2.15)$$

де c_p – питома теплоємність при сталому тиску.

Рівняння теплопровідності та дифузії для ізотропного однорідного середовища

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \quad (2.2.16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \Delta p, \quad (2.2.17)$$

де Δ – оператор Лапласа.

Середня довжина вільного пробігу молекул. Кількість зіткнень

2.111. Чому дорівнює середня довжина $\langle l \rangle$ вільного пробігу молекул азоту, якщо його температура $t = 77^\circ \text{C}$ і тиск $p = 133 \text{ Па}$?

2.112. Для посудини, характерний лінійний розмір якої $L = 10 \text{ см}$, нижня межа надвисокого вакууму становить $13,3 \text{ нПа}$. Визначити середню довжину $\langle l \rangle$ вільного пробігу молекул повітря в цій посудині, коли відомо, що при нормальному атмосферному тиску середня довжина вільного пробігу молекул повітря дорівнює 94 нм , а температура в обох випадках є однаковою.

2.113. У балоні електролампочки, об'єм якої становить 100 см^3 , міститься 100 мг гелію. Визначити середню довжину $\langle l \rangle$ вільного пробігу молекул гелію.

2.114. Обчислити густину ρ водню в посудині, коли відомо, що середня довжина вільного пробігу його молекул $\langle l \rangle = 1,2 \text{ мм}$.

2.115. Яким тискам p відповідатиме вакуум для повітря у сферичній посудині діаметра 10 см і в капілярі діаметра 1 мкм при температурі 22°C ?

2.116. Визначити концентрацію n , середню довжину $\langle l \rangle$ вільного пробігу та середній час $\langle \tau \rangle$ між зіткненнями молекул газоподібного азоту: а) за нормальних умов; б) якщо тиск $p = 1,0 \text{ нПа}$ і температура $t = 17^\circ \text{C}$.

2.117. У скільки разів середня довжина вільного пробігу молекул повітря за нормальних умов більша від середньої відстані між молекулами? Діаметр молекул повітря взяти таким, що дорівнює $0,3 \text{ нм}$. Як пояснити результат розрахунків?

2.118. Газоподібний кисень перебуває за нормальних умов. Обчислити середню кількість зіткнень $\langle z \rangle$, яких зазнає кожна молекула кисню за одиницю часу, та кількість z всіх зіткнень молекул в 1 м^3 за 1 с .

2.119. Визначити граничну концентрацію n молекул гелію у сферичній колбі діаметра $D = 10$ см, при якій зіткнень між молекулами на шляху, що дорівнює діаметрові колби, не буде.

2.120. Скільки зіткнень $\langle z \rangle$ зазнає за 1 с молекула неону, який перебуває при температурі $T = 600$ К під тиском $p = 1,3 \cdot 10^2$ Па?

2.121. Оцінити тиск p водню в посудині місткістю $V = 1$ л, при якому довжина вільного пробігу молекул $\langle l \rangle$ стає більшою від характерного розміру посудини. Температура водню $T = 300$ К.

2.122. У балоні міститься водяна пара при температурі $T = 400$ К та тиску $p = 1,3$ Па. Скільки зіткнень z відбувається щосекунди між молекулами пари в 1 м^3 ?

2.123. Сферична колба місткістю $V = 3 \text{ дм}^3$ наповнена водяною парою. При якій густині ρ водяної пари середня довжина вільного пробігу її молекул буде більшою від розмірів посудини?

2.124. Повітря в кімнаті, розмір якої $3 \times 3 \times 3$ м, має тиск $p = 100$ кПа і температуру $t = 27$ °С. Обчислити: середню довжину $\langle l \rangle$ вільного пробігу молекул; середню кількість $\langle z \rangle$ зіткнень, яких зазнає кожна молекула за одиницю часу; середню кількість z всіх зіткнень між молекулами за одиницю часу; середній час $\langle \tau \rangle$ між зіткненнями та середню кількість z_0 ударів молекул повітря за одиницю часу об одну зі стінок кімнати.

2.125. Обчислити середню довжину $\langle l_0 \rangle$ вільного пробігу молекул аргону за нормальних умов, а також середню довжину $\langle l \rangle$ та середній час $\langle \tau \rangle$ вільного пробігу молекул аргону, якщо тиск $p = 1,0$ мПа і температура $t = 22$ °С.

2.126. Середня довжина вільного пробігу молекул гелію при деякому тиску й температурі 22 °С дорівнює $0,1$ мкм. Після ізотермічного стиснення тиск газу збільшився у 2 рази. Визначити середню кількість z зіткнень молекул гелію в одиниці об'єму за одиницю часу після закінчення процесу.

2.127. При температурі $\langle t \rangle = 17$ °С та деякому тиску середня довжина вільного пробігу молекул кисню $\langle l \rangle = 28$ нм. Після ізотермічного стиснення об'єм газу зменшився в 3 рази. Розрахувати середній час $\langle \tau \rangle$ між зіткненнями молекул кисню в кінці стиснення.

2.128. Площа поверхні антикатада рентгенівської трубки $S = 2 \text{ см}^2$. Обчислити, яку кількість ударів z_0 об поверхню антикатада здійснюють молекули повітря за 1 с при температурі $\langle t \rangle = 7$ °С і тиску $p = 13,3$ мПа.

2.129. Встановити характер залежності середньої довжини $\langle l \rangle$ вільного пробігу й кількості $\langle z \rangle$ зіткнень однієї молекули за одиницю часу від температури для ідеального газу під час процесу: а) ізотермічного; б) ізобарного.

2.130. Внаслідок певного процесу, що відбувся з ідеальним газом, його тиск збільшився в n разів. Як і у скільки разів змінилися середня довжина $\langle l \rangle$ вільного пробігу й кількість $\langle z \rangle$ зіткнень кожної молекули за 1 с, якщо процес: а) ізотермічний; б) ізохорний?

2.131. На плоский шар ідеального газу падає потік молекул того самого газу. Встановити відстань x , на якій частка молекул, що дорівнює η , зазнає хоча б одного зіткнення. Розрахунки виконати для випадків: $\eta = 0,632; 0,865; 0,950$ при температурі $T = 300$ К і тиску $p = 1,5 \cdot 10^5$ Па для гелію, кисню та вуглекислого газу.

2.132. Вільний пробіг молекул, за умовами задачі 2.131, збільшується на $l = x_2 - x_1 = 2,58 \cdot 10^{-9}$ м, при цьому кількість таких молекул змінилася в $\eta = 0,368$ раза. Визначити за цими даними ефективний діаметр d молекул газу, якщо газ перебуває при $T = 300$ К, $p = 0,15$ МПа.

2.133. Чи зміниться кількість молекул потоку (див. задачу 2.131) з фіксованим вільним пробігом, якщо стан газу змінюється ізохорно?

Дифузія, в'язкість, теплопровідність. Коефіцієнти переносу

2.134. Визначити коефіцієнт самодифузії D кисню за нормальних умов.

2.135. Внаслідок ізотермічного процесу розширення тиск газу зменшився в 1,5 раза. Як зміниться при цьому коефіцієнт дифузії азоту?

2.136. Коефіцієнт дифузії деякого газу за нормальних умов $D = 15,3$ мм²/с. Діаметр молекули $d = 0,30$ нм. Який це газ?

2.137. Визначити коефіцієнти дифузії D і динамічної в'язкості η повітря, якщо тиск $p = 100$ кПа й температура $t = 17$ °С.

2.138. Якої найбільшої швидкості v може досягти дощова краплина діаметра $d = 2$ мм під час падіння її в повітрі? Температура і тиск повітря є нормальними.

2.139. Для експериментального визначення коефіцієнта динамічної в'язкості η газів досліджуванним газом заповнюють простір між двома коаксіальними циліндрами. Зовнішній циліндр приводять в обертальний рух і за кутом закручення дротини, на якій підвішено внутрішній циліндр, вимірюють дотичну силу в'язкості. Визначити η за даними

експерименту, якщо радіуси циліндрів відповідно $r_1 = 6$ см, $r_2 = 6,3$ см, а їхня висота $h = 20$ см є однаковою. Частота обертання зовнішнього циліндра $\nu = 10$ с⁻¹. Дотична сила в'язкості $F = 1,80$ мН.

2.140. В'язкість азоту η при температурі $T = 273$ К та тиску $p = 9 \cdot 10^4$ Па дорівнює $16,8$ мкПа·с. Обчислити середню довжину вільного пробігу $\langle l \rangle$ молекул азоту за цих умов.

2.141. В'язкість аргону за нормальних умов $\eta = 21$ мкПа·с. Визначити: середню арифметичну швидкість $\langle v \rangle$ теплового руху атомів газу; середню довжину $\langle l \rangle$ їх вільного пробігу; середню кількість z зіткнень атомів у 1 м³ за 1 с; ефективний поперечний переріз зіткнення σ та ефективний діаметр d атома аргону.

2.142. Обчислити середню довжину $\langle l \rangle$ вільного пробігу молекули кисню за нормальних умов, якщо його коефіцієнт дифузії $D = 1,9 \cdot 10^{-5}$ м²/с за тих самих умов.

2.143. За певних умов в'язкість ідеального газу $\eta = 5 \cdot 10^{-2}$ Па·с, густина $\rho = 2,5 \cdot 10^{-3}$ кг/м³. Чому дорівнює його коефіцієнт дифузії D за цих умов?

2.144. Коефіцієнт дифузії D азоту, що міститься у сферичній колбі радіуса $r_1 = 30$ см при температурі $T = 300$ К, дорівнює 1 м²/с. Чи залежить коефіцієнт теплопровідності λ цього газу від тиску при вказаній температурі? Чи зміниться відповідь, якщо радіус колби зменшити до $r_2 = 3$ см?

2.145. Відстань між подвійними стінками посудини Дьюара $l = 8$ мм. При якому тиску p коефіцієнт теплопровідності λ азоту, що міститься між стінками посудини, почне зменшуватися під час відкачування? Температура азоту $T = 250$ К.

2.146. Визначити коефіцієнт теплопровідності λ азоту при температурі $t = 17$ °С. За яких умов λ не залежить від тиску?

2.147. За деяких умов коефіцієнти дифузії та динамічної в'язкості азоту дорівнюють відповідно $20,9$ мм²/с та $17,7$ мкПа·с. Виразити за цими даними концентрацію n молекул азоту та його коефіцієнт теплопровідності λ .

2.148. Температура повітря в кімнаті, розміри якої $3 \times 4 \times 2,5$ м, дорівнює 15 °С, атмосферний тиск – 100 кПа. Визначити: густину повітря ρ ; кількість молів ν молекул повітря в кімнаті; масу m повітря; кількість N молекул; середню масу m_0 однієї молекули; кількість молекул n в оди-

ниці об'єму; середню квадратичну швидкість $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ молекул; найбільш імовірну швидкість v_i ; відносну кількість молекул $\frac{\Delta N}{N}$ і кількість молекул ΔN , швидкості яких лежать у межах 500...505 м/с; кількість молекул N_1 і N_2 , швидкості яких відповідно більші від 500 і менші за 300 м/с; середню довжину $\langle l \rangle$ вільного пробігу молекул; середню кількість $\langle z \rangle$ зіткнень молекули за 1 с; загальну кількість зіткнень z молекул повітря в кімнаті між собою за 1 с; коефіцієнти самодифузії D , динамічної в'язкості η і теплопровідності λ .

2.149. Який з газів – водень, кисень чи вуглекислий газ – є найкращим провідником теплоти?

Емпіричні рівняння явищ переносу

2.150. Визначити масу m водню, яка буде перенесена внаслідок дифузії крізь поверхню, площа якої $\Delta S = 1 \text{ дм}^2$, за час $\Delta t = 0,5 \text{ хв}$ при градієнті густини $\frac{\Delta \rho}{\Delta x} = 1,18 \text{ кг/м}^4$ в напрямі, перпендикулярному до плоскої поверхні, якщо температура є незмінною і становить 17°C , а тиск нормальний.

2.151. Обчислити втрати теплоти Q в кімнаті через вікно протягом 1 год внаслідок теплопровідності повітря між рамами, якщо площа рами вікна $\Delta S = 5 \text{ м}^2$, відстань між рамами $\Delta x = 8 \text{ см}$, температура в кімнаті 20°C , зовні -10°C . Температуру повітря між рамами вважати такою, що дорівнює середньому арифметичному температур у кімнаті й за вікном.

2.152. У посудині Дьюара циліндричної форми міститься лід при 0°C . Радіус внутрішнього циліндра 5 см, висота 20 см, відстань між стінками 7 мм. Температура повітря в кімнаті 20°C . Обчислити, яка маса m льоду розтане протягом 1 год внаслідок теплопровідності повітря між стінками посудини Дьюара, вважаючи, що тиск повітря між стінками не відповідає умовам вакууму.

2.153. Між двома пластинками, розміщеними на відстані $l = 1 \text{ мм}$ одна від однієї, міститься повітря за нормальних умов. Між пластинками підтримується різниця температур $\Delta T = 1 \text{ К}$, площа поверхні кожної пластинки $S = 10^{-2} \text{ м}^2$. Яка кількість теплоти Q передається внаслідок теплопровідності від однієї пластинки до іншої за $\Delta t = 10 \text{ хв}$, якщо температура теплішої пластинки $T = 300 \text{ К}$?

2.154. Зовнішня поверхня цегляної стіни завтовшки $l = 0,37$ м має температуру $T_1 = 258$ К, а внутрішня – $T_2 = 273$ К. Визначити кількість теплоти ΔQ , що проходить крізь площу поверхні $S = 2$ м² цієї стіни за добу. Теплопровідність цегли $\lambda = 0,7$ Вт/(м·К).

2.155. Сферичні посудини (алюмінієва та свинцева) однакових зовнішніх розмірів, зовнішній радіус яких $R = 5$ см, заповнено гарячою рідиною. Товщина стінки алюмінієвої посудини $l_1 = 3$ см. Якою має бути товщина l_2 стінки свинцевої посудини, щоб кількість теплоти, що надходить щосекунди з кожної посудини до навколишнього середовища, була однаковою? Розподіл температур вважати неперервним.

2.156. Лід на річці, товщина якого $l_1 = 35$ см, покритий шаром снігу завтовшки $l_2 = 25$ см. Температура нижніх шарів повітря $t_1 = -25$ °С, а верхніх шарів води біля льоду $t = 0$ °С. Визначити густину теплового потоку крізь ці два шари, якщо коефіцієнт теплопровідності льоду $\lambda_1 = 2,23$ Вт/(м·К), а снігу $\lambda_2 = 0,85$ Вт/(м·К).

2.157. Один кінець залізного стрижня підтримується при температурі $t_1 = 100$ °С, а інший – упирається в лід, температура якого $t_2 = 0$ °С. Довжина стрижня $l = 14$ см, площа поперечного перерізу $S = 2$ см². Обчислити кількість теплоти Q , що проходить за одиницю часу вздовж стрижня, та масу m льоду, який перетвориться у воду при 0 °С за час $\tau = 40$ хв. Втрати теплоти крізь стінки стрижня нехтувати.

2.158. Сталевий трубопровід діаметра 200×8 мм (зовнішній діаметр труби й товщина стінки) проклали на відкритому повітрі, температура якого $t_1 = -17$ °С. У середині труби протікає вода, середня температура якої $t_2 = 97$ °С. Коефіцієнт тепловіддачі від води до труби $\alpha_1 = 820$ Вт/(м²·К). Визначити щосекундну втрату теплоти трубопроводом, якщо його довжина $L = 25$ м, а коефіцієнт тепловіддачі від труби до навколишнього середовища $\alpha_2 = 9$ Вт/(м²·К). Коефіцієнт теплопровідності сталі $\lambda = 50$ Вт/(м·К).

2.159. Ракета через деякий час після запуску набула швидкості 5 км/с і піднялася над поверхнею Землі на таку висоту, де температура повітря $t = -10$ °С. Визначити дотичну силу, яка діє на одиницю поверхні ракети, вважаючи, що шар повітря, який захоплюється ракетою, $\Delta x = 20$ см, а його густина далека від умов вакууму і, отже, виконується вимога незалежності коефіцієнта динамічної в'язкості η від тиску p .

2.160. На який кут повернеться диск, підвішений на пружній нитці, якщо під ним на відстані $L = 1$ см обертається такий самий диск із кутовою швидкістю $\omega = 50$ рад/с? Радіуси дисків $R = 10$ см, модуль кручення нитки $f = 10^{-5}$ Дж/рад. Вважати, що коефіцієнт динамічної в'язкості повітря $\eta = 1,8 \cdot 10^{-3}$ Па·с.

2.161. Обчислити силу F внутрішнього тертя, що діє між двома плоскопаралельними шарами азоту, який перебуває за нормальних умов. Відносна швидкість шарів $u = 1$ м/с, відстань між ними $h = 0,2$ м, площа кожного шару $S = 0,2$ м².

Диференціальні рівняння явищ переносу

2.162. Вивести формулу стаціонарного розподілу температури $T(x)$ у нескінченній плоскопаралельній однорідній пластинці, якщо її товщина l , а температури поверхонь T_1 і T_2 підтримуються сталими.

2.163. Дві пластинки – мідна та залізна – однакової товщини щільно прилягають одна до одної. Температура зовнішньої поверхні мідної пластинки 100 °С, залізної 0 °С. Якою буде температура T в місці дотику пластинок?

2.164. У плоскому шарі ідеального газу на двох площинах, перпендикулярних до осі Ox , відстань l між якими підтримується сталою, значення густини ρ_1 та ρ_2 . Вивести формулу стаціонарного розподілу густини цього газу $\rho(x)$, який установлюється внаслідок дифузії вздовж осі Ox .

2.165. В ідеальному газі на двох площинах, що розмішуються на відстані l одна від одної та є перпендикулярними до осі Ox , підтримуються сталими значення температур T_1 і T_2 . Вивести формулу стаціонарного розподілу температури в цьому газі, який установлюється внаслідок теплопровідності вздовж осі Ox .

2.3. ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ

Перший закон термодинаміки для елементарного процесу

$$dU = \delta Q - \delta A, \quad (2.3.1)$$

де dU – зміна внутрішньої енергії системи; δQ – кількість теплоти, наданої системі; δA – робота, яку виконують зовнішні сили над системою.

Теплоємність тіла

$$C = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (2.3.2)$$

Молярні теплоємності ідеального газу при ізохорному та ізобарному процесах відповідно

$$C_V = \frac{i}{2} R, \quad C_P = \frac{i+2}{2} R, \quad (2.3.3)$$

де i – кількість ступенів вільності газових молекул.

Зв'язок між питомою c і молярною C теплоємностями:

$$c = \frac{C}{M}. \quad (2.3.4)$$

Співвідношення між C_p і C_V для ідеального газу (рівняння Майєра)

$$C_p = C_V + R. \quad (2.3.5)$$

Рівняння адіабати для ідеального газу (рівняння Пуассона)

$$pV^\gamma = \text{const}, TV^{\gamma-1} = \text{const}, Tp^{-\frac{1}{\gamma}} = \text{const}, \quad (2.3.6)$$

де p – тиск; V – об'єм; γ – показник адіабати, $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$; T – температура газу.

Рівняння політропи для ідеального газу

$$pV^n = \text{const}, TV^{n-1} = \text{const}, Tp^{-\frac{1}{n}} = \text{const}, \quad (2.3.7)$$

де n – показник політропи, $n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$; C – молярна теплоємність газу під час політропного процесу.

Елементарна зміна внутрішньої енергії маси m ідеального газу

$$dU = \frac{m}{M} C_V dT. \quad (2.3.8)$$

Елементарна робота, яку виконує термодинамічна система під час зміни її об'єму

$$\delta A = p dV. \quad (2.3.9)$$

Робота, що виконується ідеальним газом:

а) в ізобарному процесі

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1); \quad (2.3.10)$$

б) в ізотермічному процесі

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}; \quad (2.3.11)$$

в) в адіабатному процесі

$$A = \frac{1}{\gamma-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2) = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right); \quad (2.3.12)$$

г) у політропному процесі

$$A = \frac{1}{n-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2) = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{n-1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right). \quad (2.3.13)$$

Елементарна зміна ентропії в оборотному процесі

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (2.3.14)$$

Зв'язок між статистичною вагою w та ентропією S :

$$S = k \ln w, \quad (2.3.15)$$

де k – стала Больцмана.

Термодинамічні функції:

а) ентальпія

$$H = U + pV; \quad (2.3.16)$$

б) вільна енергія (енергія Гельмгольца)

$$F = U - TS; \quad (2.3.17)$$

в) термодинамічний потенціал (енергія Гіббса)

$$G = H - TS = F + pV = U - TS + pV. \quad (2.3.18)$$

Другий закон термодинаміки

$$dS \geq 0. \quad (2.3.19)$$

Основне рівняння термодинаміки для рівноважних процесів

$$TdS = dU + pdV. \quad (2.3.20)$$

Коефіцієнт корисної дії теплової машини для кругового процесу

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}. \quad (2.3.21)$$

де A – робота, виконана під час здійснення прямого оборотного циклу; Q_1 – кількість теплоти, що надається робочому тілу нагрівником; Q_2 – кількість теплоти, що перейшла від робочого тіла до холодильника.

Коефіцієнт корисної дії циклу Карно

$$\eta_0 = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (2.3.22)$$

де T_1 – температура нагрівника; T_2 – температура холодильника.

Холодильний коефіцієнт холодильної машини

$$\varepsilon = \frac{Q'_2}{A} = \frac{Q'_2}{Q'_1 - Q'_2}, \quad (2.3.23)$$

де Q'_2 – кількість теплоти, яка відводиться від охолоджуваного тіла за цикл; A – робота, виконана над робочим тілом за цикл; Q'_1 – кількість теплоти, яка передається навколишньому середовищу за цикл.

Холодильний коефіцієнт ідеального зворотного циклу Карно

$$\varepsilon = \frac{T'_2}{T'_1 - T'_2}, \quad (2.3.24)$$

де T'_2 – температура тіла, що охолоджується; T'_1 – температура середовища, якому передається теплота.

Приріст ентропії ΔS під час рівноважного переходу термодинамічної системи зі стану 1 у стан 2

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU}{T} + \int_1^2 \frac{pdV}{T}. \quad (2.3.25)$$

Нерівність Клаузіуса

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0. \quad (2.3.26)$$

Теплоємність газів

2.166. Обчислити молярні теплоємності C_V і C_p та їхнє відношення γ для ідеального газу, що містить N -атомні молекули, за умови: а) $N = 1$; б) $N = 2$; в) $N = 3$; г) $N = 4$.

В к а з і в к а. Завдання б виконати окремо для жорстких і пружних зв'язків між атомами, а завдання в і г – окремо для об'ємних молекул з жорсткими і пружними зв'язками між атомами.

2.167. Визначити питому теплоємність c_p : а) аргону, б) парів ртуті, в) водяних парів, г) кисню, д) парів етилового спирту – за умов, коли молекули цих газів можна вважати жорсткими, а гази та пари – ідеальними газами. Порівняти з табличними даними й пояснити розбіжності.

2.168. При деякій температурі питома теплоємність метану за умови сталого тиску дорівнює 2373 Дж/(кг·К). Чи будуть частково “розмороженими” коливальні ступені вільності молекул метану при цій температурі, якщо метан вважати ідеальним газом?

2.169. Різниця питомих теплоємностей для деякого газу $c_p - c_V = 189$ Дж/(кг·К). Визначити, який це газ.

2.170. Визначити питомі теплоємності c_p і c_V деякого газу, коли відомо, що його густина за нормальних умов $\rho = 1,43$ кг/м³, а відношення молярних теплоємностей дорівнює 1,4. Який це газ?

2.171. Обчислити відношення $\gamma = C_p / C_V$ для суміші 2 молів гелію і 3 молів азоту.

2.172. Відношення молярних теплоємностей суміші газів $\gamma = 1,38$. Визначити масу m_1 азоту в суміші, коли відомо, що до її складу входить 8 г метану. Молекули газів вважати жорсткими.

2.173. Повітря можна вважати сумішшю 76 % азоту, 23 % кисню та 1 % аргону. Визначити питомі теплоємності c_p і c_V повітря та їхнє відношення γ .

2.174. Змішавши один моль аргону, взятого при температурі 100 °С, з одним молем невідомого газу, взятого при температурі 30 °С, одержали

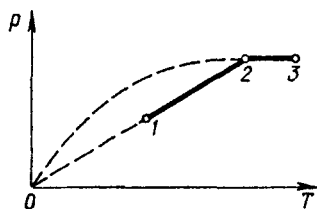


Рис. 2.12

суміш, температура якої становила 55°C . Чи можуть молекули невідомого газу бути одноатомними?

2.175. Визначити молярну теплоємність C багатоатомного газу в політропному процесі. Показник політропи $n = 1,65$. За яких значень показника політропи теплоємність газу буде від'ємною?

2.176. Встановити ступінь дисоціації α кисню, якщо для нього відношення $C_p/C_V = 1,49$.

2.177. У політропному процесі об'єм азоту збільшився в $\alpha = 3$ рази, а тиск зменшився в $\beta = 6$ разів. Визначити молярну теплоємність C азоту в цьому процесі.

2.178. Один моль ідеального одноатомного газу послідовно бере участь у двох процесах: 1–2 та 2–3 (рис. 2.12). У першому з цих процесів тиск p пропорційний температурі T , у другому – p пропорційний $\sqrt{T}$. Визначити молярну теплоємність C газу в кожному з цих процесів.

2.179. Обчислити за класичною теорією питому теплоємність при сталому тиску c_p газу, який містить 20 % гелію, 30 % водню, 50 % метану.

Застосування першого закону термодинаміки до ізопроеесів ідеальних газів

2.180. Двохатомний газ, маса якого $m = 1$ кг, перебуває під тиском $p = 80$ кПа, його густина $\rho = 4$ кг/м³. Визначити внутрішню енергію U газу.

2.181. У щільно закритій посудині під поршнем міститься $m_1 = 66$ г вуглекислого газу і $m_2 = 28$ г азоту в стані, коли їхні молекули можна вважати жорсткими. Суміш газів охолоджується на $\Delta T = 20$ К без зміни об'єму. Визначити зміну внутрішньої енергії ΔU суміші газів.

2.182. Стан ідеального газу змінюється за законом $p = \alpha V$. Визначити роботу A , виконану одним молем газу, якщо температура підвищилась на ΔT .

2.183. Обчислити молярну теплоємність C ідеального газу для процесу, в якому тиск прямо пропорційний його об'ємові. Вважати, що вказана теплоємність не залежить від температури.

2.184. Нагрівається чи охолоджується ідеальний газ, якщо він розширюється за законом $pV^2 = \text{const}$? Яка його молярна теплоємність у цьому

процесі? Відповісти на ті самі запитання за умови, що газ розширюється за законом $p^2V = \text{const}$.

2.185. Повітря, маса якого $m = 116$ г, стискають так, що його об'єм змінюється пропорційно тиску (рис. 2.13). При цьому тиск зростає від 200 до 400 кПа. Визначити коефіцієнт пропорційності зміни об'єму залежно від тиску, якщо під час процесу газ одержав 80 кДж теплоти. Обчислити температуру T в початковій 1 і кінцевій 2 точках процесу.

2.186. Одноатомний ідеальний газ переходить зі стану 1 у стан 2 (рис. 2.14). Обчислити кількість теплоти Q , що надається газіві.

2.187. Визначити питому теплоємність c_x повітря в процесі, при якому температура газу змінюється за законом: а) $T = \alpha V^n$; б) $T = \frac{\beta}{V^n}$ за умови $n = 10$.

2.188. Посудина розділена перегородкою на дві частини. Одна з них має об'єм V і наповнена розрідженим газом, інша – порожня. Якщо викинути перегородку, то газ перейде в рівноважний стан. Чи зміниться при цьому внутрішня енергія газу? Порівняти середню енергію молекул газу та їх середню швидкість до й після викидання перегородки, а також тиск газу на стінки посудини.

2.189. У вертикально розміщеному циліндрі під поршнем міститься $m = 160$ г кисню. Для підвищення температури кисню на $T = 20$ К при сталому тиску йому було надано кількість теплоти $Q = 2,91$ кДж. Визначити питому теплоємність c_p кисню в цьому процесі; роботу A , яку виконує газ під час розширення, та зміну його внутрішньої енергії ΔU .

2.190. Азот, маса якого $m = 0,1$ кг, був ізобарно нагрітий від $T_1 = 200$ К до $T_2 = 400$ К. Визначити роботу A , виконану газом, отриману ним теплоту Q та зміну внутрішньої енергії азоту ΔU .

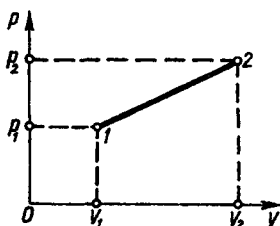


Рис. 2.13

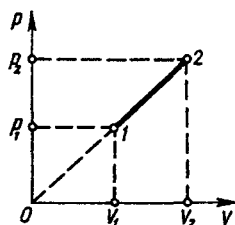


Рис. 2.14

2.191. Обчислити кількість теплоти Q , потрібної для нагрівання повітря на $\Delta T = 30$ К при сталому тиску, якщо початковий об'єм $V = 50$ м³, а температура T_0 та тиск p_0 відповідають нормальним умовам.

2.192. Абсолютна температура азоту, який при нормальному атмосферному тиску займав об'єм $V = 0,1$ м³, внаслідок ізобарного розширення збільшилась у $n = 3$ рази. Яку масу m бензину було спалено, якщо на нагрівання азоту пішло $\eta = 40$ % теплоти, що виділилась під час спалювання бензину? Теплотворна здатність бензину $q = 46$ МДж/кг.

2.193. Кисень, маса якого 80 г, ізобарно нагрівають від 15 до 115 °С. Визначити роботу A , виконану газом, зміну внутрішньої енергії ΔU та кількість підведеної теплоти Q .

2.194. Азот, маса якого 28 г, міститься в циліндрі під невагомим рухомим поршнем і займає об'єм V_1 при тиску p_1 та температурі $t = 27$ °С. Потім газ внаслідок нагрівання повільно розширюється при $p_1 = \text{const}$ до об'єму V_2 та нагрівається до температури T_2 . Для нагрівання газу витрачається $Q = 10$ кДж теплоти. Обчислити роботу A розширення газу, зміну його внутрішньої енергії ΔU , температуру T_2 та відношення V_2/V_1 .

2.195. Під час ізобарного розширення ідеального газу йому надається кількість теплоти Q . Яка частина цієї теплоти йде на збільшення внутрішньої енергії і яка на роботу його розширення за умови, що газ: а) одноатомний; б) двоатомний з жорсткими молекулами; в) багатоатомний з жорсткими об'ємними молекулами?

2.196. Інертний газ у посудині місткістю $V = 1$ м³ при тиску $p = 10^5$ Па отримує теплоту $Q = 30$ кДж. Яким буде відносне збільшення температури $\Delta T/T$ газу?

2.197. Внаслідок ізотермічного розширення азоту при температурі $T = 280$ К його об'єм збільшився вдвічі. Визначити роботу A , виконану під час розширення газу, зміну внутрішньої енергії ΔU та кількість теплоти Q , одержаної газом. Маса азоту $m = 0,2$ кг.

2.198. У скільки разів n збільшився об'єм водню під час ізотермічного розширення, якщо при цьому газ отримав теплоту $Q = 800$ Дж? Температура водню $T = 300$ К, кількість речовини $\nu = 0,4$ моля.

2.199. Визначити кількість теплоти Q , що виділяється під час ізотермічного стиснення $m = 7$ г азоту, якщо при цьому тиск газу підвищується у $n = 50$ разів. Чому дорівнюватиме робота A , що виконується в цьому процесі? Температура газу $T = 300$ К.

2.200. Кисень займає об'єм $V_1 = 100$ л і перебуває під тиском $p_1 = 200$ кПа. Під час нагрівання газ розширився при сталому тиску до об'єму $V_2 = 300$ л, а потім його тиск зріс до $p_2 = 500$ кПа при сталому

об'ємі. Обчислити зміну внутрішньої енергії газу ΔU , виконану газом роботу A та теплоту Q , яку одержав газ. Побудувати графік процесу.

2.201. При нагріванні балона, де міститься 1 кг невідомого газу, на 1 К при сталому об'ємі витрачається 700,8 Дж теплоти, а при сталому тиску – 959,8 Дж. Встановити, який це газ?

2.202. Вуглекислий газ, маса якого $m = 88$ г, міститься в об'ємі $V_1 = 10$ л під тиском $p_1 = 506,5$ кПа. Його спочатку ізохорно нагріли, а потім ізобарно стиснули до об'єму $V_3 = 5$ л, виконавши роботу $A = 16,8$ кДж. Визначити різницю температур ΔT у початковому і кінцевому станах.

2.203. Двохатомний газ має початковий об'єм $V_1 = 50$ л і тиск $p_1 = 0,3$ МПа. Газ нагрівають ізохорно до тиску $p_2 = 2 p_1$, після чого ізо-термічно розширюють до початкового тиску, а потім охолоджують, доводячи до початкового об'єму. Обчислити в кожному процесі роботу A , виконану газом, зміну його внутрішньої енергії ΔU та кількість теплоти Q , одержаної газом.

Адіабатний і політропний процеси

2.204. Одноатомний і двохатомний гази займають однакові початкові об'єми V_0 при однакових початкових тисках p_0 і температурах T_0 . Гази адіабатно стискаються до половини початкового об'єму. Визначити кінцевий тиск кожного газу порівняно з початковим. Встановити відношення робіт, виконаних внаслідок стиснень газів.

2.205. Визначити зміну внутрішньої енергії ΔU ідеального одноатомного газу під час його адіабатного розширення від об'єму $V_0 = 10$ л, який він мав при нормальному тиску, до об'єму $V_1 = 320$ л.

2.206. Середня кінетична енергія молекул водню, який розглядається як ідеальний газ, збільшилась у 3 рази. Як зміниться його об'єм, якщо процес проходив адіабатно?

2.207. Кисень, маса якого 16 г, початковий тиск 150 кПа і температура 27 °С, адіабатно стискають до 1/10 його початкового об'єму. Обчислити кінцевий тиск p і температуру T газу, роботу A , виконану над газом, та приріст внутрішньої енергії ΔU .

2.208. Внаслідок адіабатного розширення об'єм газу збільшується у 2 рази, а термодинамічна температура знижується в 1,32 раза. Скільки ступенів вільності i мають молекули цього газу?

2.209. Два різних гази, одноатомний і двохатомний, мають однакові об'єми й температури. Гази стискають адіабатно так, що їхні об'єми зменшуються у 2 рази. Який з газів нагріється більше та у скільки разів?

2.210. Чому під час відкривання пляшки з газованою водою біля її поверхні з'являється хмаринка туману?

2.211. Трїохатомний газ, що складається з жорстких об'ємних молекул, перебуває при температурі $t_1 = 200^\circ\text{C}$. Спочатку газ ізотермічно стискають так, що його об'єм зменшується в 3 рази, а потім газ адіабатно розширюється до початкового тиску. Обчислити температуру T_3 газу після адіабатного розширення. Зобразити процес в координатах p, V .

2.212. Деяку масу одноатомного ідеального газу стискають спочатку ізотермічно, а потім адіабатно так, що в обох випадках його кінцевий тиск стає в 5 разів більшим від початкового. Початковий тиск і температура газу в обох випадках є однаковими. Встановити відношення робіт, які виконуються під час стиснення газу в цих процесах.

2.213. Внаслідок розширення ідеального двоухатомного газу його тиск зменшується в 3 рази. Обчислити, у скільки разів зменшується середня квадратична швидкість $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ молекул газу й збільшується їхня середня довжина $\langle l \rangle$ вільного пробїгу, якщо розширення газу відбувалося: а) ізотермічно; б) адіабатно.

2.214. Внаслідок адіабатного стиснення тиск повітря було збільшено від $p_1 = 50$ кПа до $p' = 0,5$ МПа. Потім при незмінному об'ємі температуру повітря було зменшено до початкової. Визначити тиск p_2 газу наприкінці процесу.

2.215. Внаслідок політропного стиснення об'єм повітря змінюється від 12 до 3 м^3 , а тиск – від 100 до 600 кПа. Визначити показник політропи n і роботу A , виконану під час стиснення повітря.

2.216. Вуглекислий газ, маса якого $m = 88$ г, розширюючись політропно (показник політропи $n = 1,4$), змінює свою температуру на $\Delta T = 3$ К. Обчислити молярну теплоємність C газу, кількість теплоти Q , якої набув газ, та роботу A , виконану газом під час розширення.

2.217. Двоухатомний ідеальний газ при тиску $p_1 = 10$ кПа займає об'єм $V_1 = 4\text{ дм}^3$. Після політропного розширення за лінійним законом об'єм газу став $V_2 = 8\text{ дм}^3$. Визначити показник політропи n , молярну теплоємність C газу під час цього процесу, зміну внутрішньої енергії ΔU , роботу A , яку виконує газ під час розширення, та кількість теплоти Q , що була надана газу.

2.218. За яких значень показника політропи n політропне розширення ідеального газу супроводжується: а) поглинанням теплоти і нагріванням газу; б) поглинанням теплоти і охолодженням газу; в) виділенням теплоти? Завдяки якій енергії газ у цьому випадку виконує роботу?

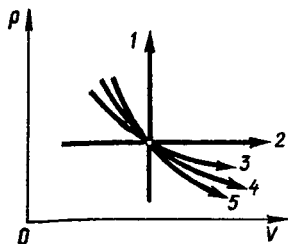


Рис. 2.15

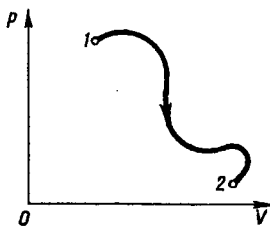


Рис. 2.16

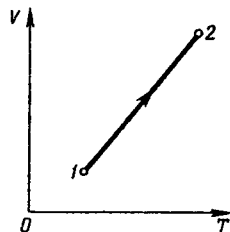


Рис. 2.17

2.219. Показник політропи $n = \frac{C - C_p}{C - C_v}$. Яким ізопроцесам відповідають значення $C = 0$, $C \rightarrow \infty$, $C = C_v$ і $C = C_p$? Які значення n відповідають цим процесам?

2.220. Обчислити роботу A одного моля ідеального газу в політропному процесі під час зміни об'єму від V_1 до V_2 та одержати з цього результату вираз для роботи газу в ізотермічному, ізобарному та адіабатному процесах.

2.221. Накреслити наближені графіки ізобарного, ізохорного, ізотермічного й адіабатного процесів для ідеального газу на діаграмах: а) p, V ; б) p, T ; в) V, T .

2.222. Коли ідеальний газ за однакового збільшення об'єму виконує більшу роботу: при ізобарному, ізотермічному чи адіабатному процесах?

2.223. На діаграмі p, V (рис. 2.15) зображено графіки ізопроцесів: ізохорного 1, ізобарного 2, ізотермічного 3, адіабатного 4 і політропного 5. Як змінюється внутрішня енергія ідеального газу під час перебігу кожного з цих процесів?

2.224. Побудувати для ідеального газу наближені графіки ізобарного, ізохорного, ізотермічного і адіабатного процесів на діаграмах U, T ; U, V ; U, p .

2.225. На рис. 2.16 зображено процес переходу ідеального газу зі стану 1 у стан 2. Визначити на графіку ділянки процесу, де температура газу зростає (спадає).

2.226. За графіком залежності об'єму від температури (рис. 2.17) встановити характер зміни тиску газу під час його нагрівання.

2.227. Набуває чи віддає теплоту ідеальний газ у циклі, що зображений на рис. 2.18?

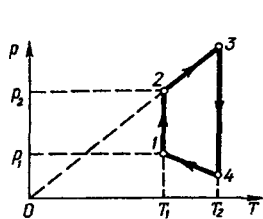


Рис. 2.18

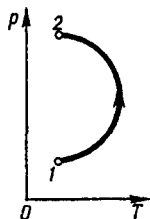


Рис. 2.19

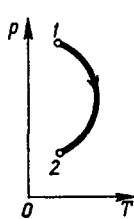


Рис. 2.20

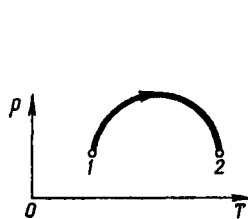


Рис. 2.21

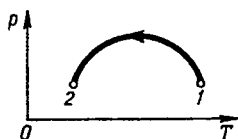


Рис. 2.22

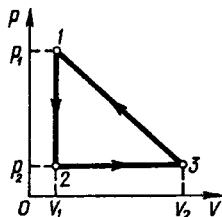


Рис. 2.23

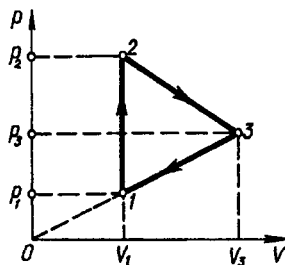


Рис. 2.24

2.228. Набуває чи віддає теплоту ідеальний газ у процесі, що зображений на рис. 2.19?

2.229. Набуває чи віддає теплоту ідеальний газ у процесі, що зображений на рис. 2.20?

2.230. Набуває чи віддає теплоту ідеальний газ у процесі, що зображений на рис. 2.21?

2.231. Набуває чи віддає теплоту ідеальний газ у процесі, що зображений на рис. 2.22?

2.232. Набуває чи віддає теплоту ідеальний газ у циклі, що зображений на рис. 2.23?

Другий закон термодинаміки. Циклічні процеси.

Цикл Карно. Теплові і холодильні машини

2.233. Обчислити роботу A , яку виконують 6 г водню в циклі, що складається з ізохори 1–2 та двох ділянок лінійної залежності тиску від об'єму 2–3 і 3–1 (рис. 2.24). Температура стану 1 становить 0°C , а температури станів 2 і 3 є однаковими і дорівнюють 100°C . Точки 1 і 3 лежать на прямій, продовження якої проходить через початок координат.

2.234. Над повітрям, маса якого $m = 58$ г, здійснено цикл, який складається з двох ізобар і двох ізохор (рис. 2.25). Температура газу в стані 1

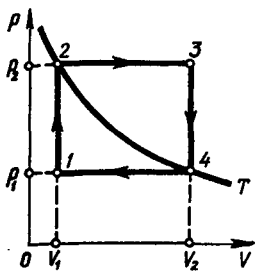


Рис. 2.25

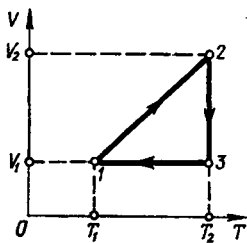


Рис. 2.26

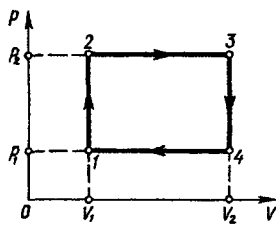


Рис. 2.27

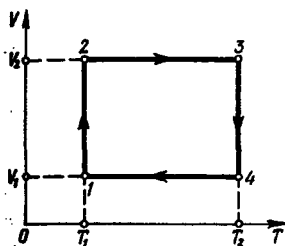


Рис. 2.28

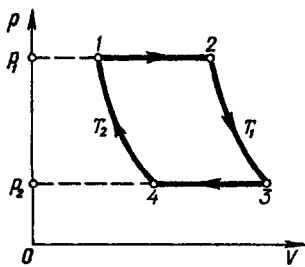


Рис. 2.29

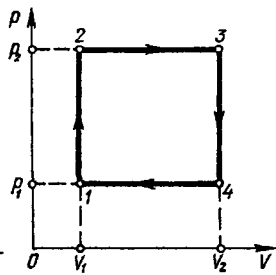


Рис. 2.30

$T_1 = 293$ К, а в стані 3 температура $T_3 = 353$ К. Точки 2 і 4 лежать на одній ізотермі. Визначити роботу A , яка виконується за цикл.

2.235. Певна маса азоту здійснює замкнений цикл, зображений у координатах V, T на рис. 2.26. Найменший тиск газу в цьому процесі 350 кПа, температура газу в стані 1 $T_1 = 320$ К, об'єм $V_1 = 5$ дм³, а в стані 2 об'єм $V_2 = 10$ дм³. Зобразити цикл у координатах p, V . Визначити масу m газу, тиск p_3 у стані 3, повну роботу A газу за один цикл, кількість теплоти Q , наданої газу та відведеної від нього, зміну внутрішньої енергії ΔU на кожній з ділянок циклу.

2.236. Над ідеальним газом виконується замкнений цикл 1-2-3-4-1 (рис. 2.27). На ділянці циклу 3-4-1 від системи відводиться кількість теплоти Q_2 . Яка кількість теплоти Q_1 надається системі на ділянці циклу 1-2-3?

2.237. Зобразити цикл, що відбувається з ідеальним газом, який складається з ізохори, ізотерми та ізобари на діаграмах $p, V; p, T; V, T$.

2.238. Які з процесів циклу, зображеного на рис. 2.28, відбувалися з поглинанням теплоти, а які – з тепловіддачею?

2.239. Внаслідок ізотермічного розширення в циклі Карно газ одержав від нагрівника 150 кДж теплоти. Визначити роботу A ізотермічного стиснення цього газу, коли відомо, що ККД циклу $\eta = 0,4$.

2.240. Коли ККД циклу Карно збільшиться помітніше: під час підвищення температури нагрівника на ΔT чи у разі зниження температури холодильника на те саме значення?

2.241. Довести, що цикл із двох ізобар при тисках p_1 і p_2 та двох ізотерм при температурах T_1 і T_2 (рис. 2.29) має ККД, менший від ККД циклу Карно.

2.242. Робочим тілом замкненого циклу Карно, що складається з двох ізохор і двох ізобар (рис. 2.30), є ідеальний трьохатомний газ. Молекули газу – жорсткі (об'ємні) системи. Відношення тисків $\frac{p_2}{p_1} = 2,5$, а відно-

шення об'ємів $\frac{V_2}{V_1} = 4$. Визначити ККД η циклу.

2.243. Теплова машина, що працює за циклом Карно, за один цикл виконує роботу $A = 28,05$ кДж. Визначити ККД η циклу, кількість теплоти Q_1 та Q_2 , відповідно одержаної від нагрівника і переданої холодильнику за один цикл, якщо температура нагрівника $t_1 = 150$ °С, холодильника $t_2 = 10$ °С.

2.244. Коефіцієнт корисної дії ідеальної теплової машини $\eta = 25$ %. Яким буде холодильний коефіцієнт ϵ цієї машини, якщо змусити її працювати за зворотним циклом Карно як холодильну машину?

2.245. Температура холодильної камери ідеальної холодильної машини $t'_2 = -8$ °С. За один цикл від холодильної камери відводиться кількість теплоти $Q'_2 = 20$ кДж і передається навколишньому середовищу, температура якого $t'_1 = 20$ °С. Визначити: холодильний коефіцієнт ϵ машини; кількість теплоти Q'_1 , що передається навколишньому середовищу за один цикл; потужність P , яку споживає холодильна машина, якщо цикл продовжується протягом $\tau = 1,2$ с.

2.246. Ідеальна холодильна машина має два резервуари: один – з водою, температура якої $t_2 = 0$ °С, що використовується як холодильник, а інший – з киплячою водою, що використовується як нагрівник. Атмосферний тиск нормальний. Яку роботу A потрібно виконати, щоб у холодильнику перетворити в лід $m_1 = 1$ кг води? Яка маса m води в нагрівнику перетвориться при цьому на пару?

2.247. Яка кількість теплоти Q'_1 виділиться в кімнаті за добу від домашнього холодильника потужністю 150 Вт, якщо його холодильний коефіцієнт $\epsilon = 8$?

2.248. Над 10 г водню здійснюється цикл, зображений на рис. 2.31. На ділянці циклу 1–2 тиск змінюється за законом $p = \alpha T^{\frac{2}{3}}$. Відомо, що

$p_1 = 100$ кПа, $p_2 = 250$ кПа, $T_1 = 273$ К, $T_2 = 1000$ К. Визначити роботу A та ККД η циклу.

2.249. У ХІХ ст. англійський фізик У. Томсон запропонував ідею так званого динамічного опалення. Піч, в якій спалюють паливо, є нагрівником теплової машини, а холодильником для неї є вода опалювальної системи. Внаслідок роботи теплової машини приводиться в дію холодильна машина, для якої опалювальна система є нагрівником, а холодильним резервуаром, від якого відбирається теплота, є ґрунтова вода. Вважаючи, що обидві машини працюють за ідеальним циклом Карно, і нехтуючи втратами, визначити, скільки теплоти набуде вода опалювальної системи при спалюванні $m = 10$ кг торфу (питома теплота згоряння $q = 14,64$ МДж/кг). Дані про температуру відповідних резервуарів взяті зі схеми динамічного опалення Томсона, зображеної на рис. 2.32. У скільки разів n опалювальна система набуває теплоти більше, ніж виділяється її при безпосередньому згорянні палива?

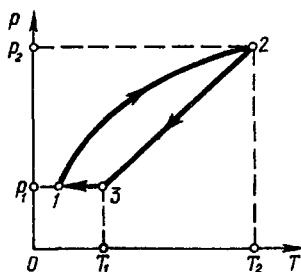


Рис. 2.31

2.250. У координатах p, V графік циклічного процесу з ідеальним газом – це прямі, що з'єднують точки $A(100; 2)$, $B(300; 2)$ і $C(300; 5)$, де p – тиск, кПа; V – об'єм, дм^3 (рис. 2.33). Визначити роботу A газу за цикл.

2.251. З одноатомним ідеальним газом виконують два циклічних процеси: $1-2-3-4-1$ і $5-6-7-8-5$ (рис. 2.34). Визначити відношення коефіцієнтів корисної дії $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ цих процесів.

2.252. Із вуглекислим газом, маса якого $m = 0,28$ кг, відбувається циклічний процес, зображений на рис. 2.35. Яку роботу виконує газ за один цикл, якщо на ділянці $2-3$ об'єм збільшується у 3 рази, а температури станів 1 і 2 відповідно $t_1 = 27^\circ\text{C}$ і $t_2 = 217^\circ\text{C}$? На яких

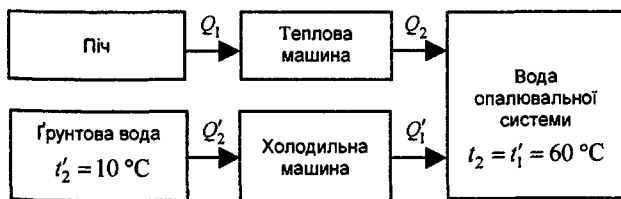


Рис. 2.32

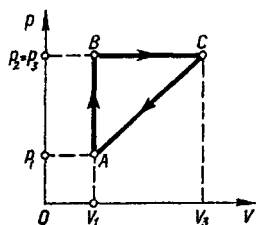


Рис. 2.233

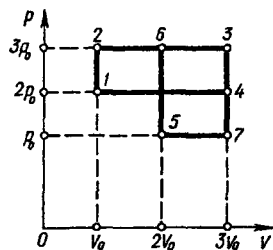


Рис. 2.234

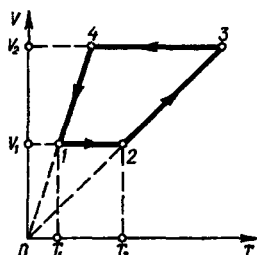


Рис. 2.235

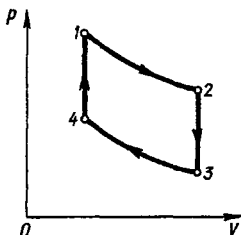


Рис. 2.236

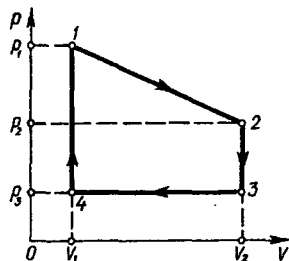


Рис. 2.237

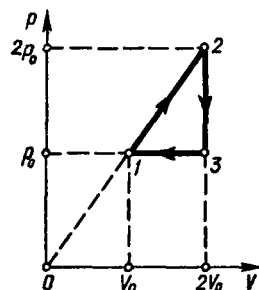


Рис. 2.238

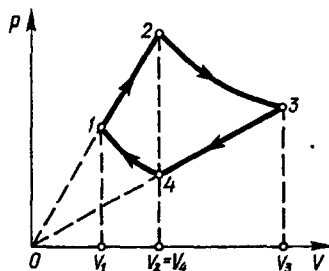


Рис. 2.239

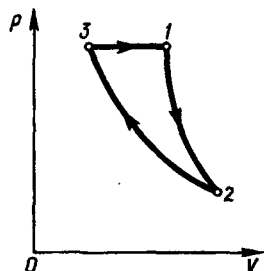


Рис. 2.240

ділянках циклу до системи надходить теплота? Обчислити її значення Q та ККД η циклу.

2.253. Визначити ККД η циклу, який складається з двох адіабат і двох ізохор (рис. 2.236), якщо внаслідок адіабатного розширення температура ідеального газу знижується до $T_2 = 0,75 T_1$, а завдяки адіабатному стисненню підвищується до $T_4 = \frac{4}{3} T_3$.

2.254. Ідеальний газ у кількості $\nu = 5$ молів змінює свій стан згідно з циклом, зображеним на рис. 2.237. Температури у станах 1, 2, 3, 4 відпо-

відно $T_1 = 350 \text{ К}$, $T_2 = 400 \text{ К}$, $T_3 = 373 \text{ К}$, $T_4 = 273 \text{ К}$. Яку роботу A виконує газ за один цикл?

2.255. Теплова машина, робочим тілом якої є ідеальний двохатомний газ, виконує роботу за циклом, зображеним на рис. 2.38. Визначити ККД η теплової машини.

2.256. На діаграмі p, V (рис. 2.39) показано замкнутий процес з повітрям, маса якого $m = 58 \text{ г}$. Ділянками процесу 1–2 та 3–4 є прямі, продовження яких проходять через початок координат, а ділянками 2–3 та 4–1 – ізотерми. Зобразити графік цього процесу на діаграмі V, T . Обчислити об'єм V_3 , роботу A й ККД η циклу, якщо $V_1 = 5 \text{ м}^3$, $T_1 = 290 \text{ К}$, $V_2 = V_4 = 8 \text{ м}^3$.

2.257. Довести, що в циклі, який складається з адіабати, ізотерми та ізобари (рис. 2.40), уся теплота, поглинута ідеальним газом, перетворюється в роботу.

2.258. Визначити ККД η циклу з ідеальним газом, який складається з ізотерми, політропи та адіабати, коли відомо, що ізотермічний процес відбувається при максимальній температурі циклу, а температура в межах циклу змінюється в n разів.

2.259. Обчислити ККД η циклу двигуна Отто, що складається з двох адіабат і двох ізохор. Ступінь адіабатного стиснення робочого тіла $\frac{V_1}{V_2} = \beta$. Зобразити цикл на діаграмі p, V .

2.260. Визначити ККД η циклу двигуна Дізеля, який складається з двох адіабат, ізобари та ізохори. Ступінь адіабатного стиснення робочого тіла $\frac{V_1}{V_2} = \beta$, ступінь ізобарного розширення $\frac{V_3}{V_2} = \rho$. Зобразити цикл на діаграмі p, V .

Ентропія

2.261. Визначити зміну ентропії ΔS одного моля ідеального газу при адіабатному, ізотермічному, ізохорному та ізобарному процесах.

2.262. Обчислити приріст ентропії ΔS водню, маса якого $m = 0,8 \text{ кг}$, під час його стиснення від $0,1 \text{ МПа}$ при температурі 27°С до $1,5 \text{ МПа}$ при температурі 127°С .

2.263. Вивести загальну формулу для обчислення зміни ентропії ΔS в довільному процесі для маси m ідеального газу, молярна маса якого M .

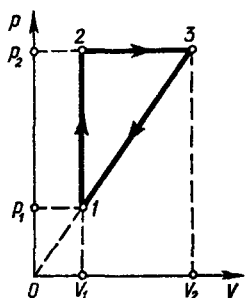


Рис. 2.41

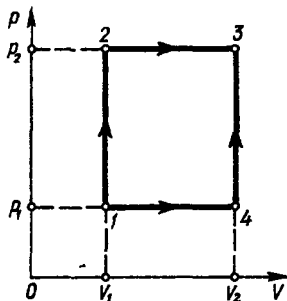


Рис. 2.42

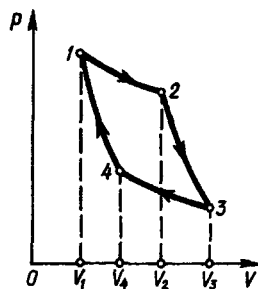


Рис. 2.43

2.264. Визначити зміну ентропії ΔS під час змішування двох різних газів, вважаючи процес ізотермічним. Чи буде цей процес оборотним?

2.265. При однакових початкових температурах і тисках змішали кисень, маса якого $m_1 = 2,5$ кг, і вуглекислий газ, що має масу $m_2 = 3$ кг. Визначити зміну ентропії ΔS газів.

2.266. Гелій, початковий тиск якого в резервуарі становить 20,26 МПа, повільно ізотермічно виходить крізь вентиль. Обчислити питому зміну ентропії $\frac{\Delta S}{m}$ газу, вважаючи атмосферний тиск нормальним.

2.267. Кисень послідовно переходить зі стану 1, температура якого $t_1 = 27^\circ\text{C}$, у стан 2, температура якого $t_2 = 114,3^\circ\text{C}$, і в стан 3, що має температуру T_3 , а потім повертається в стан 1. Маса кисню $m = 96$ г. Визначити температуру T_3 і зміну ентропії ΔS на ділянці 1–2–3 циклу, якщо зміна станів відбувалася так, як показано на рис. 2.41.

2.268. Один моль багатоатомного ідеального газу переходить зі стану 1 (нормальні умови) у стан 3 ($p_2 = 202,6$ кПа, $V_2 = 33,6$ л) по ділянці 1–2–3 або по ділянці 1–4–3 циклу (рис. 2.42). Показати, що зміна ентропії ΔS за обох переходів є однаковою. Обчислити цю зміну.

2.269. В ідеальній тепловій машині Карно як робоче тіло використовують один моль азоту. Температура нагрівника $T_1 = 400$ К, холодильника $T_2 = 300$ К. Початковий об'єм газу в точці 1 (рис. 2.43) становить 6 л, а найбільший об'єм у точці 3–18 л. При якому об'ємі V_2 потрібно припинити подачу в циліндр теплоти (закінчити ізотермічне розширення)? При якому об'ємі V_4 почнеться адіабатне стиснення? Яка кількість теплоти Q_{1-2} надходить у систему на ділянці 1–2 циклу? Яку кількість теплоти Q_{3-4} віддає система на ділянці 3–4 циклу? Обчис-

лити ККД η циклу. Розрахувати зміну ентропії ΔS робочого тіла на ділянках 1–2 та 3–4 циклу.

2.270. У політропному процесі ентропія 1 кг азоту збільшилась на 140 Дж/К, температура газу при цьому змінилась від $t_1 = 20^\circ\text{C}$ до $t_2 = 120^\circ\text{C}$. Визначити показник n політропи.

2.271. Кисень, маса якого $m = 2$ кг, збільшив свій об'єм у $n = 5$ разів, перший раз ізотермічно, другий раз – адіабатно. Визначити зміну ентропії ΔS в кожному з процесів.

2.272. Якою буде зміна ентропії ΔS речовини під час нагрівання, якщо її питома теплоємність стала, а коефіцієнт об'ємного розширення є незначним?

2.273. Обчислити зміну внутрішньої енергії ΔU та ентропії ΔS одного моля ідеального одноатомного газу, а також кількість теплоти Q , поглинутої під час розширення газу за політропою $pV^3 = \text{const}$ від об'єму $V_1 = 1$ л і тиску $p_1 = 2$ МПа до об'єму $V_2 = 3$ л.

2.274. Під час політропного процесу тиск та об'єм деякої маси кисню змінюється від $p_1 = 0,4$ МПа, $V_1 = 1$ л до $p_2 = 0,1$ МПа, $V_2 = 2$ л. Початкова температура кисню $T_1 = 500$ К. Яку кількість теплоти Q набуває кисень від навколишнього середовища? Як змінюються ентропія ΔS та внутрішня енергія ΔU газу?

2.275. Обчислити зміну внутрішньої енергії ΔU та ентропії ΔS одного моля ідеального газу під час розширення за політропою $pV^n = \text{const}$ від об'єму V_1 до об'єму V_2 . Розглянути випадки ізотермічного та адіабатного процесів.

2.276. У деякому процесі ентропія термодинамічної системи змінилась на $\Delta S = 1,38$ мДж/К. Як при цьому змінилась статистична вага w ?

2.277. Яку кількість теплоти ΔQ потрібно надати макроскопічній системі, що перебуває при температурі 17°C , щоб при сталому об'ємі статистична вага стану збільшилась на $\Delta \eta = 1,0\%$?

2.278. Показати, що робота A , виконана системою під час зміни її об'єму в оборотному ізотермічному процесі, дорівнює зменшенню її вільної енергії F . Довести рівності

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T, \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V.$$

2.279. Показати, що в стані рівноваги при $V = \text{const}$, $T = \text{const}$ вільна енергія F має мінімальне значення; при $T = \text{const}$, $p = \text{const}$ міні-

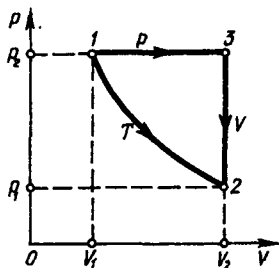


Рис. 2.44

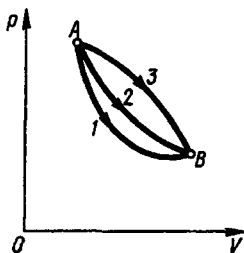


Рис. 2.45

мальне значення має термодинамічний потенціал G . Довести слушність рівностей

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p, \quad V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T.$$

2.280. Показати, що кількість теплоти, якої набула термодинамічна система під час ізобарного оборотного процесу, дорівнює приростові ентальпії системи. Довести слушність рівностей

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p = T, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S = V.$$

2.281. Показати, що мають місце співвідношення

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{p}{T}.$$

2.282. Показати, що мають місце співвідношення

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -p.$$

2.283. Накреслити на діаграмі S, T графіки ізотермічного, адіабатного, ізохорного та ізобарного процесів.

2.284. На рис. 2.44 зображено два процеси переходу ідеального газу зі стану 1 у стан 2. Показати, що приріст ентропії ΔS в обох випадках є однаковим.

2.285. На рис. 2.45 зображено три процеси переходу ідеального газу зі стану A у стан B . При якому з цих переходів система набуває більшу кількість теплоти? За якого переходу зміна ентропії буде більшою?

2.4. РЕАЛЬНІ ГАЗИ Й РІДИНИ. ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ

Рівняння Ван-дер-Ваальса для довільної маси m реального газу, молярна маса якого M :

$$\left(p + \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{a}{V^2}\right) \left(V - \frac{m}{M} b\right) = \frac{m}{M} RT, \quad (2.4.1)$$

де a , b – поправки (константи) Ван-дер-Ваальса; $\left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{a}{V^2} = p_i$ – внутрішній тиск, зумовлений силами взаємного притягання молекул; $\frac{m}{M} b = V_i$ – об'єм, зв'язаний з власним об'ємом молекул. Якщо молекули газу уявити як сфери, поправка Ван-дер-Ваальса для одного моля $b = \frac{16}{3} \pi r^3 N_A$, де r – радіус молекули газу; N_A – стала Авогадро.

Зв'язок між критичними параметрами – молярним об'ємом, тиском, температурою газу – та константами a і b Ван-дер-Ваальса:

$$V_{Mк} = 3b, \quad p_k = \frac{a}{27b^2}, \quad T_k = \frac{8a}{27bR}. \quad (2.4.2)$$

Зв'язок між критичними параметрами одного моля речовини:

$$p_k V_{Mк} = \frac{3}{8} RT_k. \quad (2.4.3)$$

Рівняння Ван-дер-Ваальса у зведених величинах для одного моля газу

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau, \quad (2.4.4)$$

$$\text{де } \pi = \frac{p}{p_k}; \quad \omega = \frac{V_M}{V_{Mк}}; \quad \tau = \frac{T}{T_k}.$$

Зміна температури дроселюванням одного моля реального газу в об'єм з невеликим тиском:

$$\Delta T = \frac{1}{C_p} \left(\frac{RT_1 b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \right), \quad (2.4.5)$$

де V_1 , T_1 – початкові відповідно об'єм і температура газу.

Диференціальний ефект Джоуля–Томсона в реальному газі

$$\frac{dT}{dp} = \frac{\frac{2a}{RT} \left(1 - \frac{b}{V}\right)^2 - b}{C_p \left(1 - \frac{2a}{RTV} \left(1 - \frac{b}{V}\right)^2\right)}, \quad (2.4.6)$$

де C_p – молярна теплоємність реального газу при сталому тиску, $C_p =$

$$= C_V + \frac{R}{1 - \frac{2a(V-b)^2}{RTV^3}}.$$

Умови розрідженості газу

$$\frac{b}{V} \ll \frac{1,2a}{RTV} \ll 1. \quad (2.4.7)$$

Внутрішня енергія реального газу

$$U = \nu C_V T - \frac{av^2}{V} + u_0. \quad (2.4.8)$$

Відносна вологість повітря

$$\varphi = \frac{p}{p_0}, \text{ або } \varphi = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (2.4.9)$$

де відповідно p , ρ – парціальний тиск і густина водяної пари, що міститься в повітрі при даній температурі (абсолютна вологість); p_0 , ρ_0 – парціальний тиск і густина насиченої пари при тій самій температурі (визначають за таблицями, див. додаток Б, табл. 13).

Рівняння Клапейрона – Клаузіуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(v_2 - v_1)}, \quad (2.4.10)$$

де v_1 , v_2 – питомі об'єми речовини у двох агрегатних станах; T , q – температура і питома теплота фазового переходу речовини зі стану 1 у стан 2.

Залежність тиску насиченої пари від температури:

$$p = p_0 \exp \left(\frac{qM}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right), \quad (2.4.11)$$

де p_0 – тиск пари при температурі T_0 .

Зміна ентропії під час фазового переходу першого роду

$$\Delta S = \frac{q \Delta m}{T}, \quad (2.4.12)$$

де Δm – маса речовини, що зазнала переходу; T – температура фазового переходу.

Поверхневий натяг

$$\sigma = \frac{F}{l}, \text{ або } \sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S}, \quad (2.4.13)$$

де F – сила поверхневого натягу; l – довжина ділянки контуру, що обмежує вільну поверхню; ΔE – зміна вільної енергії поверхневого шару рідини; ΔS – зміна площі поверхні цього шару.

Надлишковий тиск, зумовлений кривизною поверхні рідини (формула Лапласа),

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (2.4.14)$$

де r_1, r_2 – радіуси кривизни двох взаємно перпендикулярних перерізів поверхні рідини.

Висота підняття рідини в капілярній трубці

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g R}, \quad (2.4.15)$$

де θ – крайовий кут змочування; ρ – густина рідини; R – радіус капілярної трубки.

Відносна зміна об'єму рідини під час нагрівання

$$\frac{\Delta V}{V} = \beta \Delta T, \quad (2.4.16)$$

де β – температурний коефіцієнт об'ємного теплового розширення.

Відносна зміна об'єму рідини у разі зміни тиску

$$\frac{\Delta V}{V} = -\gamma \Delta p, \quad (2.4.17)$$

де γ – коефіцієнт стисливості.

Осмотичний тиск розчину (формула Вант-Гоффа)

$$p_{\text{осм}} = CRT, \quad (2.4.18)$$

де C – кількість молів розчиненої речовини в одиниці об'єму розчинника, $C = \frac{m}{MV}$.

Реальні гази. Рівняння Ван-дер-Ваальса. Критичний стан

2.286. Кисень, маса якого $m = 0,64$ кг, займає об'єм $V = 0,24$ м³ при температурі $T = 293$ К. Визначити тиск газу p , внутрішній тиск p_i , власний об'єм V_0 молекул.

2.287. Азот при тиску 200 кПа має густину $\rho = 2,25$ кг/м³. Визначити температуру T та внутрішній тиск p_i газу, вважаючи його: а) ідеальним; б) реальним.

2.288. Посудина місткістю 5 л при температурі 27 °С заповнена вуглекислим газом, маса якого $m = 0,4$ кг. Яку частину тиску газу складає тиск, зумовлений силами притягання молекул? Яку частину об'єму посудини займає власний об'єм молекул?

2.289. За відомим значенням поправки b в рівнянні Ван-дер-Ваальса обчислити густину ρ кисню в критичному стані.

2.290. Визначити внутрішній тиск p_i водяної пари в критичному стані, якщо при цьому її густина $\rho = 200$ кг/м³.

2.291. За відомими значеннями T_k і p_k для азоту визначити його критичний молярний об'єм V_{Mk} .

2.292. Кисень, маса якого $m = 32$ кг, адіабатно розширюється у вакуум від об'єму $V_1 = 0,5$ м³ до об'єму $V_2 = 2$ м³. Визначити зниження температури ΔT газу при цьому розширенні. Значення поправки a в рівнянні Ван-дер-Ваальса взяти з табл. 8, дод. Б.

2.293. Тиск водню в 10 разів більший від критичного, а об'єм дорівнює половині критичного. Визначити температуру T одного моля газу.

2.294. Азот, маса якого $m = 84$ кг, при температурі $t = 27$ °С ізотермічно розширюється від об'єму $V_1 = 2$ м³ до об'єму $V_2 = 5$ м³. Вважаючи газ реальним, визначити приріст внутрішньої енергії ΔU ; роботу A , виконану газом; кількість теплоти Q , яку надано газу, та зміну його ентропії ΔS .

2.295. У досліді Авенаріуса для демонстрації критичного стану речовин використовують ефір у закритих ампулах. Яку частину об'єму ампули має займати ефір при температурі 20 °С, щоб у критичному стані весь об'єм ампули був заповнений ефіром? Для ефіру $M = 74 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $\rho_{20} = 714$ кг/м³, $T_k = 467$ К, $p_k = 3,6$ МПа.

2.296. Обчислити густину ρ_k водяної пари в критичному стані за значеннями T_k і p_k , наведеними в табл. 9, дод. Б.

2.297. Гелій у кількості $\nu = 1$ моль займає об'єм $V = 0,237$ м³ при температурі $t = -200$ °С. Користуючись рівнянням Ван-дер-Ваальса у зведених величинах, визначити тиск p газу.

2.298. У балоні об'ємом V при температурі T міститься газ, маса якого m . Балон випускає газ, і через деякий час маса газу в ньому зменшується на Δm . Вважаючи газ реальним, визначити зміну тиску Δp газу в балоні.

2.299. Визначити молярні теплоємності C'_p і C'_v газу Ван-дер-Ваальса.

2.300. Обчислити зміну ентропії ΔS одного моля вуглекислого газу в ізобарному процесі, якщо температура змінюється від $t_1 = 27$ °С до $t_2 = 10$ °С і об'єму від $V_1 = 1$ дм³ до $V_2 = 5$ дм³.

2.301. Чим пояснити, що під час дроселювання при кімнатній температурі водень нагрівається, а кисень – охолоджується?

2.302. Характерна крива залежності енергії взаємодії U двох молекул від відстані r між ними має вигляд, показаний на рис. 2.46. Які сили діють між молекулами, якщо: а) $r < 2r_0$; б) $r > 2r_0$?

2.303. Побудувати графіки залежностей внутрішньої енергії U моля реального газу від: а) температури T при сталому об'ємі V ; б) об'єму V при сталій температурі T . Порівняти ці криві з відповідними для ідеального газу.

2.304. Який формальний граничний перехід перетворює рівняння Ван-дер-Ваальса в рівняння стану ідеального газу? Чому він відповідає з погляду фізики?

2.305. На діаграмі p, V провести ізотерми Ван-дер-Ваальса для кількох температур $T_1, T_2, T_3, \dots$. Чим теоретичні ізотерми відрізняються від експериментальних? Провести на рисунку бінодаля і спінодаля. Який фізичний зміст критичної точки K ?

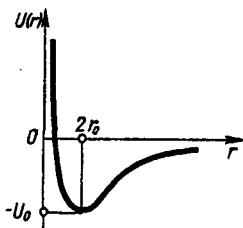


Рис. 2.46

2.306. Балони місткістю $V_1 = 1$ л та $V_2 = 9$ л з'єднані трубкою з краном. У першому балоні міститься $\nu = 1$ моль азоту, а другий балон відкачаний до високого вакууму. Вважаючи стінки балонів та трубки адіабатними, обчислити, як зміниться температура ΔT газу після відкриття крана.

2.307. Визначити внутрішню енергію U маси $m = 32$ г кисню при температурі $T = 300$ К, який займає об'єм $V = 0,1$ л, розглядаючи його як ван-дер-ваальсівський газ.

2.308. Обчислити роботу A , виконану під час розширення одного моля азоту від об'єму $V_1 = 2$ л до об'єму $V_2 = 3$ л. Розглядати азот як ван-дер-ваальсівський газ. Розширення відбувається при $T = 300$ К.

2.309. Азот при критичній температурі $T_k = 420$ К має критичний об'єм $V_{mk} = 1,2 \cdot 10^{-4}$ м³/моль. Вважаючи, що азот описується рівнянням Ван-дер-Ваальса, обчислити зниження температури ΔT $m = 7$ г азоту під час його адіабатного розширення від об'єму $V_1 = 5$ л до об'єму $V_2 = 50$ л.

2.310. Довести, що газ, який підлягає рівнянню Ван-дер-Ваальса за умови $a = 0$, у досліді Джоуля – Томсона завжди нагрівається.

2.311. Довести, що газ, який підлягає рівнянню Ван-дер-Ваальса за умови $b = 0$, у досліді Джоуля – Томсона завжди охолоджується. Розглядати газ як розріджений.

2.312. Обчислити температуру T , при якій гелій у досліді Джоуля – Томсона почне охолоджуватись. Гелій розглядати як розріджений ван-дер-ваальсівський газ, критична температура якого $T_k = 5,1$ К.

Вологість повітря

2.313. Обчислити, коли і в скільки разів кількість водяної пари в повітрі є більшою: пізньої осені після затяжних дощів при температурі 0°C і відносній вологості 98 % або сухого літнього місяця при температурі 30°C і відносній вологості 50 %.

2.314. Повітря в кімнаті, розміри якої $5 \times 4 \times 3$ м, при температурі $t = 17^\circ\text{C}$ має відносну вологість $\varphi_1 = 30\%$. Скільки часу τ має працювати зволожувач повітря, продуктивність якого $\alpha = 1,5$ кг/год, щоб підвищити вологість повітря до $\varphi_2 = 80\%$ при тій самій температурі?

2.315. Вологе повітря, маса якого $m = 71$ кг, займає об'єм $V = 50$ м³ при температурі $T = 293$ К і тиску $p = 120$ кПа. Визначити відносну вологість φ повітря.

2.316. Довгий капіляр занурюють у воду. Через деякий час після того, як капіляр був герметично закритий зверху, рівень води в ньому знизився на $\Delta h = 3$ см. Визначити відносну вологість φ повітря біля поверхні води відкритої посудини, якщо температура навколишнього середовища $t = 17^\circ\text{C}$.

2.317. Вологе повітря при нормальному атмосферному тиску і температурі $t = 27^\circ\text{C}$ займає об'єм $V = 5$ м³. Відносна вологість повітря $\varphi = 75\%$. Обчислити густину ρ вологого повітря та масу m пари води.

2.318. В аудиторію, площа якої $S = 50$ м² і висота $h = 4$ м, зайшла група студентів. Через деякий час температура повітря підвищилась від $t_1 = 15^\circ\text{C}$ до $t_2 = 22^\circ\text{C}$, а вологість – від $\varphi_1 = 50\%$ до $\varphi_2 = 70\%$. Яка маса води випарувалася в аудиторії?

2.319. Над поверхнею Землі шар повітря, площа якого $S = 3$ км² і висота $h = 500$ м, має температуру $t_1 = 18^\circ\text{C}$ при відносній вологості $\varphi = 80\%$. Обчислити масу m води, яка випала дощем після зниження температури до $t_2 = 12^\circ\text{C}$.

2.320. Змішують $V_1 = 2$ м³ повітря, відносна вологість якого $\varphi_1 = 25\%$ при температурі $t_1 = 27^\circ\text{C}$, з $V_2 = 3$ м³ повітря, відносна вологість якого $\varphi_2 = 30\%$ при температурі $t_2 = 17^\circ\text{C}$. Визначити відносну вологість φ повітря, яке одержують унаслідок змішування, якщо тиск постійно був однаковим і таким, що дорівнював нормальному атмосферному.

2.321. У циліндрі місткістю $V = 12$ л під поршнем міститься 5 г аміаку при температурі -57°C , яка підтримується постійною термостатуванням. Яка маса Δm аміаку перейде з газоподібного стану в рідкий при ізотермічному зменшенні його об'єму в 4 рази? Молярна маса аміаку 17 г/моль, а тиск насиченої пари при температурі -57°C дорівнює 26 кПа.

Рідини. Поверхневий натяг. Капілярність

2.322. При температурі $t_1 = 100^\circ\text{C}$ густина ртуті $\rho_1 = 13,4 \cdot 10^3$ кг/м³. Якою має бути температура t_2 , щоб густина ртуті стала $\rho_2 = 12,9 \cdot 10^3$ кг/м³? Середній температурний коефіцієнт об'ємного розширення ртуті $\langle\beta\rangle = 1,85 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

2.323. На скільки потрібно збільшити зовнішній тиск Δp , щоб при нагріванні бензолу на $\Delta T = 5$ К об'єм його не змінився? Середній температурний коефіцієнт об'ємного розширення бензолу $\langle \beta \rangle = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, коефіцієнт стисливості $\gamma = 9,0 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$.

2.324. У досліді Дюлонга і Пті, за яким визначають коефіцієнт об'ємного розширення рідин, використовують U-подібну скляну трубку, заповнену досліджуваною рідиною, праве і ліве коліна якої підтримують при різних температурах. Визначити середній температурний коефіцієнт об'ємного розширення $\langle \beta \rangle$ гліцерину, якщо температура рідини в лівому коліні $t_1 = 20$ °С, у правому $t_2 = 50$ °С, висота підняття рідини в лівому коліні $h_1 = 90$ см, а різниця рівнів $\Delta h = 1,34$ см.

2.325. Гас наливо в скляну посудину, висота якої $h = 25$ см так, що при температурі $t_1 = 10$ °С його рівень на $\Delta h = 0,5$ см нижчий від висоти посудини. Чи виллється гас із посудини, якщо підвищити його температуру до $t_2 = 40$ °С? Середній температурний коефіцієнт об'ємного розширення гасу $\langle \beta \rangle = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, тепловим розширенням скла нехтувати.

2.326. Скляна посудина до краю заповнена трансформаторним маслом при температурі $t_0 = 0$ °С. Внаслідок нагрівання посудини з маслом до $t = 100$ °С з неї витікло 6 % налитого масла. Визначити середній температурний коефіцієнт об'ємного розширення $\langle \beta \rangle$ трансформаторного масла, якщо середній коефіцієнт об'ємного розширення скла $\langle \beta' \rangle = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

2.327. Яку роботу A потрібно виконати, щоб краплину води, маса якої $m = 1,0$ г, розділити на краплини радіуса 50 нм?

2.328. На скільки нагріється краплина ртуті, утворена злиттям п'яти крапель радіуса $0,1$ мм?

2.329. Дві мильні бульбашки радіусами r_1 і r_2 зливаються в одну радіуса R . Коефіцієнт поверхневого натягу мильної плівки σ . Визначити атмосферний тиск p .

2.330. У закритій посудині є певна кількість краплин води різного радіуса. Що станеться з краплинами води через достатньо довгий час?

2.331. Дві краплини води однакового радіуса $r = 1$ см зливаються в одну. Обчислити значення надлишкової енергії ΔE , яка звільняється при цьому, та оцінити час τ , протягом якого відбувається злиття краплин.

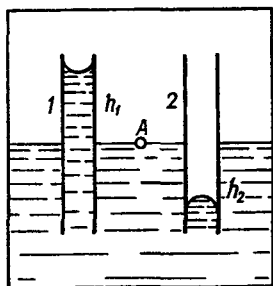


Рис. 2.47

2.332. Яку масу m води можна перенести в решеті діаметра $D = 30$ см, якщо радіуси круглих отворів у дні $r = 1$ мм, а вода повністю не змочує синтетичного матеріалу, з якого виготовлено дно решета?

2.333. Визначити різницю рівнів Δh ртуті у двох сполучених капілярах, діаметри отворів яких $d_1 = 2$ мм і $d_2 = 4$ мм.

2.334. Змочувальна рідина в капілярній трубці з внутрішнім радіусом r піднімається на висоту h . Визначити роботу A сили поверхневого натягу та порівняти її з потенціальною енергією U води в капілярній трубці.

2.335. При температурі води 20°C в неї занурено капіляр, внутрішній радіус якого $0,2$ мм. Після нагрівання води до 60°C рівень її в капілярі знизився на 7 мм. Визначити поверхневий натяг σ води при 60°C . Змочування вважати повним. Тепловим розширенням скла капіляра при нагріванні нехтувати.

2.336. У посудину зі спиртом опущено дві плоскопаралельні скляні пластинки, відстань між якими $2,0$ мм. При повному змочуванні обчислити висоту h підняття спирту між пластинками. Визначити масу m спирту, піднятого між пластинками, якщо довжина пластинки 5 см.

2.337. У закритій посудині є вода, і в неї вміщено два капіляри однакового радіуса: один абсолютно змочуваний рідиною (ліюфільний), другий – абсолютно незмочуваний (ліюфобний). Вода в капілярах установилася так, як показано на рис. 2.47. Обчислити тиск p над поверхнями води в капілярах.

2.338. Краплина ртуті, маса якої $m = 1,36$ г, уведена між паралельними скляними пластинками. Яку силу F потрібно прикласти для того, щоб розплющити краплину до товщини $d = 0,10$ мм? Незмочування вважати повним.

2.339. Сферична краплина рідини випаровується внаслідок підведення теплоти від навколишнього середовища. Вважаючи підведення теплоти на одиницю поверхні краплини прямо пропорційним різниці температур повітря T_n і рідини T_p та обернено пропорційним радіусові r краплини, встановити закон зміни радіуса краплини з часом. Визначити час $\tau_{\text{вип}}$, протягом якого краплина випаровується, коли умови випаровування такі, що за час $\tau = 15$ хв радіус краплини зменшується в $n = 2$ рази. Змінами поверхневої енергії, зумовленими поверхневим натягом, нехтувати.

2.340. У скляну трубку наливо 10 см³ мілімолярного розчину цукру в воді. Нижня частина трубки закрита напівпроникною плівкою, крізь яку молекули води проходять, а молекули цукру – ні. На яку максимальну висоту h підніметься розчин у трубці, якщо її помістити в посудину з чистою водою до однакового початкового рівня при температурі води 20 °С? Завдяки якій енергії піднімається вода?

2.341. При температурі 27 °С осмотичний тиск розчину $p = 0,2$ МПа. Скільки частинок n розчиненої речовини міститься в 1 л розчину?

2.342. Чи утримуватиметься на поверхні води платинова дрітина діаметра 1 мм, змащена жиром (гідрофобна)?

2.343. Чи можна користуватися промокальним папером в умовах невагомості?

2.344. Написати рівняння рівноваги тисків у повітряній бульбашці.

2.345. Якщо вилити невелику кількість нафти на поверхню бурхливо-го моря, воно на деякий час у цьому місці заспокоюється. Чому?

2.346. Яку форму займають невеликі кількості рідини в умовах невагомості?

2.347. До якої висоти в капілярній трубці підніметься змочувальна рідина в умовах невагомості?

2.348. Чи однаковою буде висота підняття води різної температури в капілярних трубках однакового радіуса? Відповідь обґрунтувати обчисленнями.

2.349. Чому перед дощем барометричний тиск падає?

2.350. Якщо дві однакові мильні бульбашки з'єднати трубкою, то чи буде рівновага стійкою?

2.351. Чому в спеціально охолоджуваних приміщеннях часто буває вогко?

2.352. Чому не буває роси під густим деревом?

Фазові переходи. Рівняння Клапейрона — Клаузіуса

2.353. Їжу готують у каструлі-скороварці при температурі $t = 116$ °С й підвищеному тиску. Яка частина води k випарується після розгерметизації каструлі? Теплообміном під час установаження рівноваги нехтувати.

2.354. У теплоізовльованому циліндрі під невагомим поршнем, площа якого $S = 200$ см², міститься $m_1 = 36$ г насиченої пари. На скільки опуститься поршень, якщо в циліндр влити $m_2 = 36$ г води при температурі $t_0 = 0$ °С? Теплоємністю циліндра знехтувати.

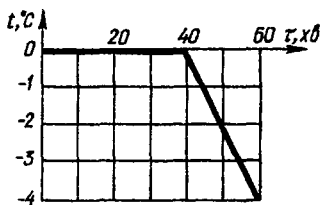


Рис. 2.48

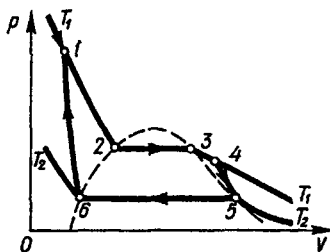


Рис. 2.49

2.355. Холодильник потужністю $P = 52$ Вт заморожує $m = 2$ кг води, взятої при $t_1 = 20$ °С, за час $\tau = 2,5$ год. При цьому температура льоду стає $t_2 = -3$ °С. Обчислити, на скільки змінилась би температура ΔT повітря в кімнаті, об'єм якої $V = 25$ м³, коли б кімната була теплоізолюваною та герметично закритою.

2.356. Питомий об'єм насиченої водяної пари при 0 °С дорівнює 206 м³/кг, а зміна тиску з температурою $\frac{\Delta p}{\Delta T} = 44$ Па/К. Визначити питому теплоту пароутворення q води.

2.357. Посудину, в якій була суміш води і льоду, винесли взимку з кімнати на вулицю і почали вимірювати температуру суміші. Маса суміші $m = 8$ кг. Отримали графік залежності температури t від часу τ (рис. 2.48). Визначити, яка маса m_x води була в посудині спочатку.

2.358. Визначити питому теплоту сублимації δ води в потрійній точці, коли відомо, що для потрійної точки питома теплота пароутворення води $q = 2,48$ МДж/кг, а питома теплота плавлення льоду $r = 332$ кДж/кг.

2.359. У закритій посудині при температурі $T_1 = 273$ К міститься один моль води. Яку кількість теплоти Q треба витратити, щоб підвищити температуру води до $T_2 = 373$ К, якщо при цьому вся вода перетворилась у насичену пару? Пружністю насиченої пари та теплоємністю стінок посудини, а також об'ємом води порівняно з об'ємом її насиченої пари нехтувати.

2.360. Яку роботу A виконує за один цикл 1-2-3-4-5-6-1 машина Карно, робочим тілом якої є один моль води, що зазнає під час роботи машини фазові перетворення в пару та назад у воду (рис. 2.49)? Ізотермам 1-2-3-4 та 5-6 відповідають температури $T_1 = 500$ К та $T_2 = 373$ К. Нижня ізотерма 5-6 ($T_2 = 373$ К) цілком міститься у двофазній області речовини, тобто в точці 6 залишається тільки рідина, а у точці 5 – тільки пара. Криві 1-6 та 4-5 – адіабати.

2.361. Встановити нахили кривих фазової рівноваги вода–лід та вода–пара на діаграмі p, T біля потрібної точки. Питомий об'єм водяної пари в потрібній точці $v_3 = 206 \text{ м}^3/\text{кг}$, порівняно з ним питомими об'ємами води та льоду можна нехтувати. Що більше: тиск насиченої пари над водою чи над льодом при $T_0 = 273,16 \text{ К}$?

2.362. Ромбічна структура сірки перетворюється в моноклінну при температурі $T = 369,5 \text{ К}$. При атмосферному тиску питома теплота перетворення її $q = 9,24 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}$. Стрибок питомого об'єму сірки під час фазового перетворення $\Delta v = 14 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{кг}$. Обчислити зміщення точки ΔT фазового переходу сірки у разі зміни тиску на $\Delta p = 10^5 \text{ Па}$.

2.363. Користуючись рівнянням Клапейрона – Клаузіуса, обчислити тиск p насиченої водяної пари при температурі $T = 474 \text{ К}$. Вважати пару ідеальним газом.

2.364. У закритій посудині місткістю $V = 5 \text{ л}$ знаходиться маса $m = 1 \text{ кг}$ води при температурі $T = 373 \text{ К}$. З простору над водою повітря викачане, і він зайнятий насиченою парою. Обчислити збільшення маси Δm насиченої пари під час підвищення температури системи на $\Delta T = 1 \text{ К}$. Пару вважати ідеальним газом, питомим об'ємом води порівняно з питомим об'ємом пари нехтувати.

2.365. При температурі $T_1 = 273 \text{ К}$ пружність водяної пари над льодом $p_1 = 6 \cdot 10^2 \text{ Па}$. Обчислити пружність водяної пари p_2 над льодом при температурі $T_2 = 272 \text{ К}$.

2.366. Температура плавлення оцтової кислоти при атмосферному тиску $T_1 = 289 \text{ К}$. Різниця між питомими об'ємами рідкої та твердої фаз кислоти $\Delta v = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{кг}$. Точка плавлення оцтової кислоти зміщується на $\Delta T = 1 \text{ К}$ під час зміни тиску на $\Delta p = 4,1 \cdot 10^6 \text{ Па}$. Визначити питому теплоту плавлення r оцтової кислоти.

2.367. Кусок льоду поміщено в адіабатну оболонку при температурі $T = 373 \text{ К}$ та атмосферному тиску p . Як зміниться температура льоду ΔT , якщо його адіабатно стиснути до тиску $p_1 = 10^7 \text{ Па}$? Яка частка льоду η при цьому розплавиться?

2.368. Встановити зміну ентропії ΔS під час нагрівання $m = 4 \text{ кг}$ води від $T_1 = 283 \text{ К}$ до $T_2 = 373 \text{ К}$ та перетворення її в пару.

2.369. У калориметрі міститься вода, маса якої $m_1 = 0,2 \text{ кг}$, а температура $T_1 = 300 \text{ К}$. У воду занурюють кусок льоду, маса якого $m_2 = 0,5 \text{ кг}$, а температура $T_2 = 265 \text{ К}$. Як зміниться ентропія ΔS льоду після досягнення рівноважного стану? Теплоємністю калориметра порівняно з теплоємностями води та льоду нехтувати.

2.370. Вода може бути переохолоджена до температури $T = 263 \text{ К}$. Яка маса льоду m_1 утвориться з $m = 1 \text{ кг}$ переохолодженої води, якщо

занурити в неї кусок льоду? Вважати, що питома теплоємність переохолодженої води не залежить від температури та дорівнює теплоємності звичайної води.

2.371. Визначити зміну ентропії ΔS льоду, маса якого $m = 30$ г, під час його перетворення в пару, якщо початкова температура льоду $T_1 = 233$ К, а температура пари $T_2 = 373$ К. Вважати, що теплоємності води та льоду є сталими, усі процеси відбуваються при нормальному тиску.

2.372. Встановити зміну ентропії ΔS системи вода–залізо під час занурення $m_2 = 100$ г заліза з температурою $T_2 = 573$ К у воду, що має температуру $T_1 = 288$ К та масу $m_1 = 1$ кг. Випаровуванням води нехтувати.

2.373. Перехід від парамагнітного стану деяких металів до феромагнітного у разі зниження температури не супроводжується виділенням або поглинанням теплоти. Які висновки можна зробити щодо характеру цього фазового переходу? Наведіть інші приклади таких переходів.

2.374. Чи існує межа поділу між фазами при фазовому переході другого роду? Вказати, які з наведених нижче характеристик є однаковими для обох фаз у разі фазового переходу другого роду: а) ентропія; б) теплоємність; в) коефіцієнт об'ємного розширення; г) швидкість поширення пружних хвиль; д) густина.

2.375. Питома теплота пароутворення води $2,44$ МДж/кг, а густина пари при 100°C дорівнює $0,598$ кг/м³. Скориставшись рівнянням Клапейрона – Клаузіуса, визначити швидкість зміни температури кипіння $\frac{dT}{dz}$ (К/км) залежно від висоти, взявши за початок відліку рівень моря, а

температуру повітря вважаючи постійною і такою, що дорівнює 300 К.

2.376. Є дві наповнені до країв склянки води: одна – з кип'ятком, інша – з водою з-під крана. В якій із склянок вода замерзне раніше, якщо їх разом виставити на мороз?

2.377. Зобразити в координатах p, V сім'ю ізотерм насиченої пари.

2.378. Чому під час агрегатних змін з підведенням теплоти при сталому тиску температура не змінюється?

2.379. Як одержати перегріту (переохолоджену) рідину й перенасичену пару? Де ці явища використовуються?

2.380. Як змінюється ентропія речовини під час фазових переходів: плавленні, кипінні, конденсації та кристалізації? Написати рівняння для цих змін ентропії.

2.381. Яка причина утворення туману, що спостерігається іноді вздовж траєкторії руху швидкісних реактивних літаків?

2.382. Як утворюється дощ?

2.383. Чи можна примусити воду кипіти без нагрівання?

2.384. Зобразити діаграму стану води. Вказати на цій діаграмі перетворення льоду в рідину і пару.

2.385. Краплина води під ковпаком, з якого відкачане повітря, замерзає. Чому?

2.386. Чи кипітиме вода в пробірці, вміщеній у киплячу воду?

2.387. Відомо, що коли воду підсолити, то температура її кипіння стає вищою. Як при цьому зміниться густина насиченої водяної пари, коли вода досягне температури кипіння?

2.388. Чому в сухому повітрі людина може витримувати температуру понад 100°C ?

Розділ 3. ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ

3.1. ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

Закон взаємодії нерухомих точкових зарядів q_1 і q_2 (закон Кулона)

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (3.1.1)$$

де $\mathbf{r}$ – радіус-вектор, проведений від одного заряду до іншого; $\mathbf{F}$ – сила, що діє на заряд, до якого напрямлений радіус-вектор $\mathbf{r}$.

Напруженість електростатичного поля

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}, \quad (3.1.2)$$

де $\mathbf{F}$ – сила, що діє на точковий позитивний заряд q , вміщений у дану точку поля.

Напруженість електростатичного поля точкового заряду q

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}, \quad (3.1.3)$$

де $\mathbf{r}$ – радіус-вектор, проведений від заряду в задану точку поля.

Принцип суперпозиції електростатичних полів

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i. \quad (3.1.4)$$

Лінійна, поверхнева та об'ємна густини зарядів відповідно

$$\tau = \frac{dq}{dl}; \quad \sigma = \frac{dq}{dS}; \quad \rho = \frac{dq}{dV}. \quad (3.1.5)$$

Напруженість електростатичного поля (за модулем):

а) точкового диполя з електричним моментом p_e

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}, \quad (3.1.6)$$

де $p_e = ql$, l – плече диполя; θ – кут між електричним моментом диполя p_e і радіусом-вектором $\mathbf{r}$, що визначає положення даної точки відносно центра диполя;

б) рівномірно зарядженої нескінченної нитки (або циліндра радіуса R) на відстані r від її осі (для $r \geq R$ – зовні циліндра)

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}; \quad (3.1.7)$$

в) рівномірно зарядженої нескінченної площини

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}; \quad (3.1.8)$$

г) сфери радіуса R , заряд q якої рівномірно розподілений по її поверхні, на відстані r від центра сфери

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r \geq R); \quad (3.1.9)$$

д) сфери радіуса R , заряд q якої рівномірно розподілений по її об'єму, на відстані r від центра сфери

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (r \leq R), \\ E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad (r \geq R). \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Потік вектора напруженості $\mathbf{E}$ крізь площадку dS

$$d\Phi_E = \mathbf{E} d\mathbf{S} = E_n dS, \quad (3.1.11)$$

де $d\mathbf{S}$ – вектор, модуль якого дорівнює dS , а напрям збігається з нормаллю $\mathbf{n}$ до площини, $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$; E_n – проекція вектора $\mathbf{E}$ на додатну нормаль до площини dS .

Потік вектора напруженості $\mathbf{E}$ крізь довільну поверхню S

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_S E_n dS. \quad (3.1.12)$$

Електростатична теорема Гаусса

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i, \quad (3.1.13)$$

де $\sum_{i=1}^N q_i$ – алгебрична сума зарядів усередині замкненої поверхні S .

Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля

$$\oint_L \mathbf{E}_t dl = 0, \quad (3.1.14)$$

де E_t – проекція вектора $\mathbf{E}$ на додатний напрям дотичної до замкнутого контуру L .

Потенціал поля точкового заряду

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (3.1.15)$$

Потенціал поля, яке створюється системою зарядів,

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i. \quad (3.1.16)$$

Потенціал поля точкового диполя

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (3.1.17)$$

Момент сил, що діють на диполь в однорідному електричному полі,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_e \mathbf{E}], \quad (3.1.18)$$

або

$$M = p_e E \sin \alpha, \quad (3.1.19)$$

де α – кут між напрямками векторів $\mathbf{p}$ і $\mathbf{E}$.

У випадку неоднорідного електричного поля, яке має симетрію відносно осі Ox , сила, що діє на диполь у такому полі,

$$F_x = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha, \quad (3.1.20)$$

де $\frac{\partial E}{\partial x}$ – ступінь неоднорідності поля в напрямі Ox .

Потенціальна енергія диполя в зовнішньому полі

$$W_n = -\mathbf{p}_e \mathbf{E}. \quad (3.1.21)$$

Робота сил електростатичного поля під час переміщення заряду q з точки 1 у точку 2

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.1.22)$$

Зв'язок між напруженістю $\mathbf{E}$ електростатичного поля й потенціалом φ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad } \varphi, \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= \int_1^2 E_l dl. \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Закон Кулона. Напруженість електричного поля точкового заряду.
Сила, що діє на заряд в електричному полі

3.1. Якого заряду q набула б мідна куля, радіус якої $R = 10$ см, якби вдалося забрати в неї всі електрони провідності? Вважати, що на кожний атом міді припадає один електрон провідності.

3.2. Визначити сумарний заряд q атомних ядер, які містяться в 1 м^3 міді.

3.3. Чому дорівнює сумарний заряд q одного моля електронів?

3.4. Порівняти силу кулонівської взаємодії F_e двох електронів із силою їх гравітаційної взаємодії F_g .

3.5. Якою мала б бути маса m'_p протона, для того щоб сила електростатичного відштовхування між двома протонами зрівноважилась силою їх гравітаційного притягання?

3.6. Який заряд q мають дві однаково заряджені краплини води, радіус яких $r_0 = 7,6 \cdot 10^{-5}$ м, якщо сила взаємного гравітаційного притягання їх зрівноважується силою кулонівського відштовхування? Краплини вважати матеріальними точками.

3.7. Діелектричне тіло, що має форму куба, заряджено однорідно з поверхневою густиною $\sigma = 1$ мкКл/м². Якою буде поверхнева густина електричного заряду σ , якщо тіло привести в рух у напрямі одного з його ребер зі швидкістю $v = 0,5$ с (с – швидкість світла у вакуумі)?

3.8. Дві однакові кульки, маса кожної $m = 20$ мг, підвішені в повітрі на невагомих нерозтяжних непровідних нитках, що закріплені в одній точці підвісу і мають довжину $l = 0,2$ м. Одну з кульок відвели вбік, надали їй заряду і потім відпустили. Після дотику з другою кулькою вони розійшлися так, що нитки утворили кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити модуль заряду q , який надали першій кульці.

3.9. Заряджена кулька, маса якої $m = 10$ г, підвішена в повітрі в точці A на невагомій нерозтяжній непровідній нитці, що утворює кут $\alpha = 45^\circ$ з вертикаллю, рухається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 10$ рад/с по колу радіуса $r = 5$ см (рис. 3.1). У точці B міститься інша нерухома заряджена кулька. Визначити модулі зарядів кульок q , вважаючи їх однаковими за умови, що $AO = OB$.

3.10. Чому при визначенні напруженості електричного поля використовується малий пробний заряд?

3.11. Три однакових заряди ($q = 0,1$ мкКл кожний) розміщені у вершинах рівностороннього трикутника. Який негативний заряд q_1 треба розмістити в центрі трикутника, щоб система перебувала в рівновазі? Чи буде ця рівновага стійкою?

3.12. Навколо нерухомого точкового заряду $q_0 = +1$ нКл рівномірно обертається під дією сил притягання негативно заряджена маленька кулька. Чому дорівнює відношення заряду кульки q до її маси m , якщо радіус орбіти $R = 2$ см, а кутова швидкість обертання $\omega = 3$ рад/с?

3.13. На дно посудини з маслом вміщено діелектричну кулю, діаметр якої $d = 2,8$ см, рівномірно заряджену зарядом $q = 2$ мкКл. Густина масла $\rho = 820$ кг/м³, речовини кулі $\rho_1 = 926$ кг/м³. Визначити напруженість елек-

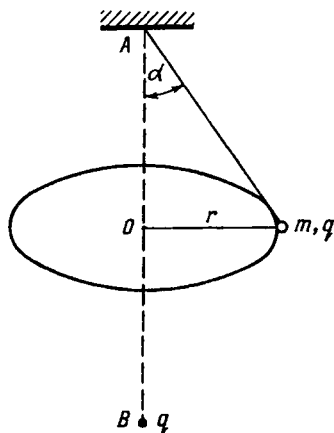


Рис. 3.1

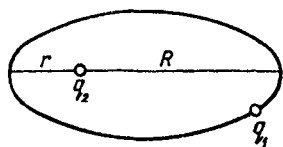


Рис. 3.2

тричного поля в маслі, при якій куля почне спливати. Лінії напруженості однорідного електричного поля напрямлені вертикально вгору.

3.14. Маятник складається з металевої кульки, підвішеної на невагомій нерозтяжній непровідній нитці. Як зміниться період його коливань, якщо

кульці надати позитивного заряду, а іншу кульку, заряджену негативно, розмістити знизу на одній вертикалі з ниткою підвісу маятника?

3.15. Заряджена частинка масою m , яка має заряд q_1 , рухається навколо нерухомого точкового заряду q_2 по еліптичній орбіті (рис. 3.2). Мінімальна відстань між зарядом і частинкою q_1 дорівнює r , а максимальна — R . Чому дорівнює період обертання частинки навколо заряду q_2 ?

3.16. Тіло масою m з позитивним електричним зарядом q кинути під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 . Рух тіла відбувається одночасно в полі тяжіння і однорідному електричному полі з напруженістю E . Лінії напруженості напрямлені вертикально вниз. Визначити час польоту тіла t , відстань польоту l і висоту максимального підйому $h_{\max}$.

3.17. На вертикальній пластині достатньо великих розмірів рівномірно розподілений електричний заряд з поверхневою густиною $\sigma = 3 \text{ нКл/см}^2$. До пластини прикріплена нитка з підвішеною на ній кулькою, маса якої $m = 1 \text{ г}$. Кулька має заряд того самого знака, що й пластина. Обчислити заряд q кульки, якщо нитка утворює з вертикаллю кут $\alpha = 30^\circ$.

3.18. В однорідному електричному полі напруженістю $E = 1,5 \text{ кВ/м}$, що напрямлене вертикально вниз, рівномірно обертається кулька, маса якої $m = 1 \text{ г}$ і позитивний заряд $q = 0,2 \text{ мкКл}$. Кулька підвішена на нитці, довжина якої $l = 20 \text{ см}$. Кут відхилення нитки від вертикалі $\alpha = 30^\circ$. Визначити період T обертання кульки і силу натягу F_n нитки.

Принцип суперпозиції електричних полів

3.19. Вважаючи протон і електрон, з яких складається атом водню, за точкові заряди, що розміщуються на відстані $r = 5 \cdot 10^{-9} \text{ см}$, визначити модуль E напруженості електричного поля в точках B і C (рис. 3.3).

3.20. Досить довга нитка рівномірно заряджена з лінійною густиною τ . Визначити модуль E напруженості електричного поля в точці A , яка міститься навпроти кінця нитки на відстані a від неї.

3.21. Рівномірно заряджена тонка нитка, довжина якої $l = 20 \text{ см}$, має лінійну густина заряду $\tau = 10 \text{ нКл/м}$. На відстані $a = 10 \text{ см}$ від нитки, навпроти її середини, міститься точковий заряд $q = 1 \text{ нКл}$. Яка сила F діє на цей заряд з боку зарядженої нитки?

3.22. Тонке півкільце радіуса $R = 10$ см, рівномірно заряджене з лінійною густиною $\tau = 1$ мкКл/м, розташоване у вакуумі. Визначити силу F взаємодії півкільця з точковим зарядом $q = 20$ нКл, що міститься у центрі кривизни, і модуль E напруженості електричного поля у цій точці.

3.23. Однакові точкові заряди $q_1 = q_2 = 3$ нКл розміщені на відстані $l = 10$ см один від одного. Визначити напруженість E електричного поля у точках, які лежать на перпендикулярі до середини відрізка, що сполучає заряди, на відстані $h = 5$ см від середини. На якій відстані $h_{\max}$ напруженість досягає максимуму?

3.24. Тонке кільце, радіус якого $R = 10$ см, заряджене з лінійною густиною $\tau = 8$ нКл/м. Визначити модуль E напруженості електричного поля у точках, що лежать: а) на осі кільця на відстані $x = 15$ см від його центра; б) у центрі кільця; в) на великій відстані $x \gg R$ від кільця. На якій відстані $x_{\max}$ напруженість поля досягне максимального значення? Обчислити це значення.

3.25. Тонкий однорідний диск радіуса R заряджений рівномірно з поверхневою густиною σ . Визначити напруженість E електричного поля у вакуумі: а) на висоті h над диском на осі симетрії; б) у центрі диска; в) на великій відстані $x \gg R$ від диска.

3.26. Дві довгі однойменно заряджені нитки розміщені на відстані $l = 10$ см одна від одної. Лінійна густина заряду на нитках $\tau = 10$ мкКл/м. Встановити модуль та напрям вектора напруженості E результуючого електричного поля в точці, що міститься на відстані $x_0 = 10$ см від кожної нитки.

3.27. Дві довгі паралельні нитки рівномірно заряджені з лінійною густиною $\tau = 0,5$ мкКл/м. Відстань між нитками $l = 45$ см. Визначити максимальне значення модуля E напруженості електричного поля в площині симетрії цієї системи, розміщеній між нитками.

3.28. Визначити напруженість E електричного поля у центрі рівномірно зарядженої півсфери. Поверхнева густина заряду на півсфері $\sigma = 3$ нКл/м².

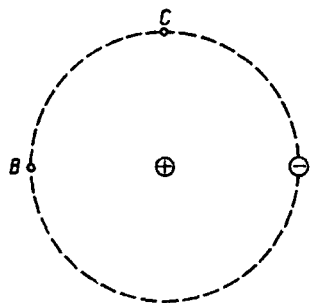


Рис. 3.3

Електричний диполь

3.29. Електричний диполь із зарядами $q_1 = +90$ нКл, $q_2 = -90$ нКл, відстань між якими $l = 10$ см, перебуває в повітрі. Визначити модуль E напруженості електричного поля: а) на осі диполя на відстані $l/4$ від одного з його

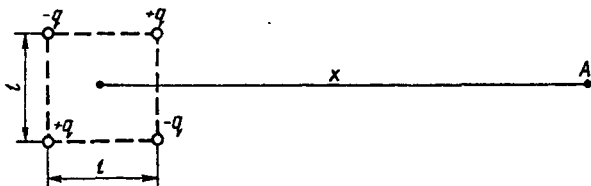


Рис. 3.4

зарядів; б) у центрі диполя; в) на перпендикулярі до осі диполя, що проходить через один із його зарядів, на відстані $l/2$; г) на перпендикулярі до осі диполя, поставленому з його середини, на відстані $l/2$.

3.30. Диполь з електричним моментом $p_e = 0,12$ нКл·м утворений двома точковими зарядами $q = \pm 1$ нКл. Обчислити модуль E напруженості поля для точок: а) осі диполя; б) площини, яка перпендикулярна до осі диполя і проходить через його центр. Точки містяться на відстані $r = 80$ см від центра диполя.

3.31. Електричні заряди розміщені у вершинах квадрата зі стороною l , як показано на рис. 3.4 (квадруполь). Визначити модуль E напруженості електричного поля, яке створюється квадруполем, у точці A , що розміщена на відстані x від центра квадрата, за умови $x \gg l$.

3.32. Диполь з електричним моментом $p_e = 200$ пКл·м міститься в неоднорідному полі, неоднорідність якого характеризується величиною $dE/dx = 1$ МВ/м² у напрямі осі диполя. Обчислити силу, що діє на диполь у цьому напрямі.

3.33. Точковий диполь з електричним моментом $p_e = 5$ пКл·м вільно розмістився в полі точкового заряду $q = 100$ нКл на відстані $r = 10$ см від нього. Визначити для цієї точки величину $|dE/dr|$, що характеризує ступінь неоднорідності поля в напрямі силової лінії, і силу F , що діє на диполь.

3.34. Диполь з електричним моментом $p_e = 7$ пКл·м міститься в полі довгої нитки, зарядженої рівномірно з лінійною густиною $\tau = 300$ нКл/м на відстані $r = 8$ см від неї. Обчислити силу F , яка діє на диполь, якщо вектор дипольного електричного моменту p_e орієнтований: а) уздовж нитки; б) у напрямі силових ліній поля.

3.35. Визначити силу взаємодії двох молекул водяної пари, диполі яких є продовженням один одного. Електричний дипольний момент молекули води $p_e = 6,2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. Молекули містяться одна від одної на відстані $x = 10^{-7}$ см.

3.36. Визначити взаємну потенціальну енергію W_n двох молекул водяної пари, вважаючи їх точковими диполями з електричними моментами $p_e =$

$= 6,2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. Диполі перебувають у стані стійкої рівноваги на відстані $x = 10^{-5}$ см один від одного.

3.37. Диполь з електричним моментом $p_e = 2$ нКл·м міститься в однорідному електричному полі, напруженість якого $E = 30$ кВ/м. Вектор дипольного електричного моменту $\mathbf{p}_e$ утворює кут $\alpha_0 = 60^\circ$ з напрямом силових ліній поля. Визначити роботу, виконану зовнішніми силами під час повертання диполя на кут $\beta = 30^\circ$.

3.38. Перпендикулярно до осі диполя з електричним моментом $p_e = 12$ пКл·м утворюється однорідне електричне поле напруженістю $E = 300$ кВ/м. Під дією сил поля диполь починає обертатися відносно осі, яка проходить через його центр. Встановити кутову швидкість диполя в той час, коли диполь проходить положення рівноваги. Момент інерції диполя відносно осі, яка проходить перпендикулярно до осі диполя через його центр, $I = 2 \cdot 10^{-9}$ кг·м².

3.39. Визначити енергію W диполя, електричний момент якого $p_e = 4 \cdot 10^{-9}$ Кл·м. Диполь міститься в зовнішньому однорідному електричному полі напруженістю $E = 3 \cdot 10^2$ В/м, а вісь диполя утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з напрямом напруженості поля.

3.40. Диполь з електричним моментом $p_e = 60$ пКл·м вільно встановився в електричному полі плоского конденсатора. Поверхнева густина заряду на пластинах конденсатора $\sigma = 10$ нКл/м². Як зміниться потенціальна енергія диполя, якщо повернути його на кут $\alpha = 30^\circ$?

Потік вектора напруженості.

Електростатична теорема Гаусса

3.41. Чому дорівнює потік Φ_D вектора електричного зміщення $\mathbf{D}$ крізь сферичні поверхні S_1 і S_2 та крізь довільні замкнені поверхні S і S_3 (рис. 3.5)?

3.42. Чи можуть перетинатися: силові лінії; екіпотенціальні поверхні? Пояснити.

3.43. На деякій відстані від нескінченної рівномірно зарядженої площини розміщений круг радіуса $r = 15$ см, який паралельний площині. Поверхнева густина заряду площини $\sigma = 2$ мкКл/м². Обчислити потік Φ_E вектора напруженості $\mathbf{E}$ електричного поля крізь круг.

3.44. На відстані $\alpha = 30$ см від нескінченної рівномірно зарядженої нитки розташована кругла площадка, радіус якої $r = 1$ мм (рис. 3.6). Визначити приблизно потік Φ_E вектора напруженості $\mathbf{E}$ крізь цю площадку, якщо її площина утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з лінією напруженості електричного поля, що проходить через центр площадки. Лінійна густина заряду нитки $\tau = 30$ нКл/м.

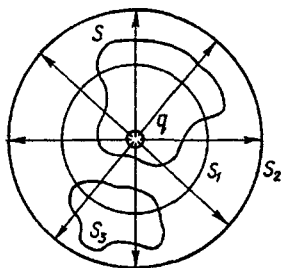


Рис. 3.5

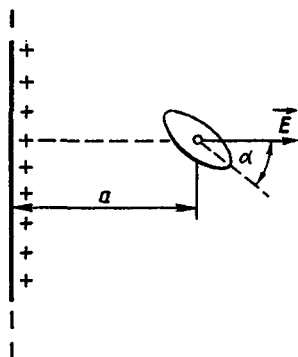


Рис. 3.6

3.45. У центрі куба міститься точковий заряд q . Чому дорівнює потік Φ_E вектора напруженості $\mathbf{E}$: а) крізь повну поверхню куба; б) крізь одну з його граней?

3.46. Заряд $q = 0,5$ мкКл міститься у вершині кругового конуса, висота якого $h = 30$ см і радіус основи $r = 10$ см, у вакуумі. Обчислити потік Φ_D вектора електричного зміщення $\mathbf{D}$ крізь поверхню конуса.

3.47. Визначити потік Φ_E вектора напруженості електричного поля $\mathbf{E}$ крізь бічну поверхню конуса, висота якого $h = 20$ см і радіус основи $r = 10$ см. На осі конуса на однакових відстанях від вершини й центра основи розміщений заряд $q = 1$ мкКл. Конус міститься у вакуумі.

3.48. Обчислити потік Φ_E вектора напруженості електричного поля $\mathbf{E}$ крізь бічну поверхню прямого кругового циліндра, висота якого $h = 20$ см, а радіус основи $r = 10$ см. Точковий заряд $q = 0,3$ мкКл міститься: а) на осі циліндра на середині висоти; б) у центрі основи.

3.49. Електричне поле створюється двома нескінченними паралельними пластинами, які рівномірно заряджені з поверхневими густинами зарядів $\sigma_1 = 2$ нКл/м² і $\sigma_2 = -5$ нКл/м². Визначити модуль E напруженості поля: а) між пластинами; б) поза пластинами.

3.50. На пластинах плоского конденсатора міститься електричний заряд $q = 10$ нКл. Площа кожної пластини конденсатора $S = 100$ см², діелектрик – повітря. Визначити силу F , з якою притягуються пластини. Електричне поле між пластинами вважати однорідним.

3.51. Два нескінченних тонкостінних коаксіальних циліндри радіусів $R_1 = 5$ см і $R_2 = 10$ см рівномірно заряджені з поверхневими густинами зарядів $\sigma_1 = 10$ нКл/м² і $\sigma_2 = -3$ нКл/м². Простір між циліндрами

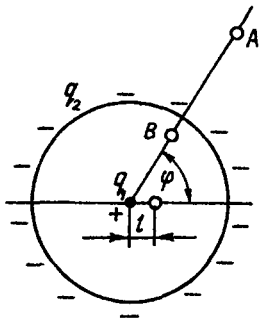


Рис. 3.7

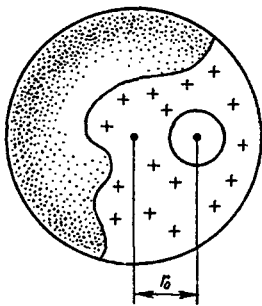


Рис. 3.8

заповнений повітрям. Визначити модуль E напруженості поля в точках, що містяться на відстанях $r_1 = 2$ см, $r_2 = 6$ см, $r_3 = 15$ см від осі циліндрів.

3.52. Точковий заряд $q_1 = 20$ нКл розміщується в центрі непровідної сферичної поверхні радіуса $R = 15$ см, на якій рівномірно розподілений заряд $q_2 = -20$ нКл. Визначити напруженість електричного поля в точках A і B , які віддалені від центра сфери на відстані $r_A = 20$ см, $r_B = 10$ см. Чому дорівнюватиме напруженість E поля в точці A , якщо заряд q_1 змістити на відстань $l = 1$ мм від центра сфери в напрямі, який утворює з радіусом-вектором, проведеним у точку A , кут $\varphi = 60^\circ$ (рис. 3.7)?

3.53. Позитивний об'ємний заряд рівномірно розподілений у вакуумі по об'єму необмеженого плоского шару завтовшки d з об'ємною густиною ρ . Визначити напруженість E поля як функцію відстані x від центра шару.

3.54. Кулька радіуса $R = 2$ см заряджена з об'ємною густиною $\rho = 0,7$ мкКл/м³. Обчислити модуль E напруженості поля на відстанях $r_1 = 1$ см і $r_2 = 3$ см від центра кульки.

3.55. Усередині однорідно зарядженої кулі з об'ємною густиною заряду ρ міститься сферична порожнина, центр якої зміщений відносно центра кулі на відстань r_0 (рис. 3.8). Визначити напруженість E поля всередині порожнини. Якою вона буде при $r_0 = 0$?

Вказівка. Скористатися принципом суперпозиції полів позитивно об'ємно зарядженої кулі і негативно об'ємно зарядженої кулі з радіусом порожнини.

3.56. Електричне поле створене рівномірно зарядженим з об'ємною густиною заряду ρ циліндром. Радіус циліндра R , довжина нескінченна. Визначити напруженість E поля як функцію відстані r від осі циліндра.

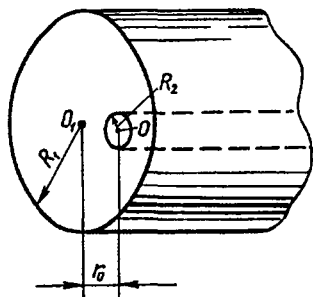


Рис. 3.9

3.57. Усередині рівномірно зарядженого з об'ємною густиною ρ циліндра радіуса R_1 міститься циліндрична порожнина радіуса R_2 (рис. 3.9). Вісь порожнини зміщена відносно осі циліндра на відстань r_0 . Радіус циліндра в багато разів менший, ніж його довжина. Визначити напруженість поля E на радіальній прямій, яка проходить через вісь циліндричної порожнини, залежно від відстані r від осі циліндра (див. вказівку до задачі 3.55).

3.58. Куля радіуса R має позитивний заряд, об'ємна густина якого залежить тільки від відстані r до її центра і виражається як $\rho = \rho_0(1 - r/R)$, де ρ_0 – постійна. Вважаючи, що діелектрична проникність скрізь $\epsilon = 1$, визначити: а) модуль напруженості електричного поля всередині та за межами кулі як функцію r ; б) максимальне значення модуля напруженості $E_{\max}$ та відповідне йому значення $r_{\max}$.

Робота з переміщення електричного заряду. Потенціал.

Зв'язок потенціалу електростатичного поля з напруженістю

3.59. Електричне поле створене зарядом $q = 4$ мкКл, який міститься в діелектричному середовищі з проникністю $\epsilon = 2$. Визначити роботу A електричних сил з переміщення заряду $q_0 = 200$ нКл з точки a в точку b , що лежать на відстанях $r_a = 2$ см і $r_b = 5$ см від заряду q .

3.60. На відстані $r_1 = 0,5$ м від поверхні відокремленої металевої кулі радіуса $R = 10$ см з поверхневою густиною заряду $\sigma = 50$ мкКл/м² міститься заряд q . Щоб наблизити заряд q на відстань $r_2 = 10$ см до поверхні кулі, потрібно виконати роботу $A = 1,5$ Дж. Обчислити значення заряду.

3.61. У вершинах правильного шестикутника, сторона якого $a = 5$ см, розміщені точкові заряди $q = 6,6$ нКл кожний. Визначити роботу A , виконану полем під час переміщення заряду $q_1 = 3,3$ нКл з центра шестикутника до середини однієї зі сторін.

3.62. Нескінченна нитка заряджена рівномірно. Лінійна густина заряду $\tau = 0,1$ мкКл/м. Відстань від нитки до точкового заряду $q = 50$ нКл зросла у $\eta = 3$ рази. Визначити роботу A сил поля з переміщення заряду.

3.63. Електрон рухається в напрямі силових ліній однорідного електричного поля напруженістю $E = 120$ В/м. Яку відстань s він пролетить у вакуумі до повної втрати швидкості, якщо його початкова швидкість $v_0 = 1\,000$ км/с? Скільки часу t триватиме політ?

3.64. Два однакових за модулем точкових електричних заряди розміщено на осі Ox . Один заряд $q_+ = 2$ нКл міститься в точці з координатою $x_+ = 1$ см, інший $q_- = -2$ нКл – у точці з координатою $x_- = -1$ см. Визначити роботу A сил електричного поля з переміщення заряду $q_1 = 4$ нКл з точки $x_1 = 100$ см у точку $x_2 = -100$ см.

3.65. У полі нерухомого точкового заряду $q = -1,5$ нКл у напрямі до заряду рухається електрон. На відстані $r = 5$ см від заряду електрон мав швидкість $v = 6 \cdot 10^6$ м/с. Визначити мінімальну відстань r_0 , на яку наблизиться електрон до заряду.

3.66. Два електрони з однаковою початковою кінетичною енергією $E = 100$ еВ рухаються вздовж прямої лінії з нескінченності назустріч один одному. Визначити мінімальну відстань $r_{\min}$ їх зближення.

3.67. Від позитивно зарядженої пластини вертикально розміщеного плоского конденсатора починає рухатися без початкової швидкості частинка, заряд і маса якої відповідно $q = 2$ мкКл і $m = 2,5$ г. Визначити відстань h , на яку опуститься частинка, коли вона перебуватиме посередині між пластинами конденсатора, якщо конденсатор вміщено у вакуум. Напруга на конденсаторі $U = 600$ В, відстань між пластинами $d = 20$ см.

3.68. У плоскому конденсаторі, який вміщено у вакуум, зависла заряджена краплина ртуті. Відстань між пластинами конденсатора $d = 1$ см, до них прикладена різниця потенціалів $U_1 = 1000$ В. Раптом різниця потенціалів зменшилась до значення $U_2 = 995$ В. За який час t краплина досягне нижньої пластини, якщо вона спочатку була на середині відстані між пластинами?

3.69. Пробій повітря за нормальних умов настає тоді, коли напруженість електричного поля $E_0 = 10^6$ В/м. Обчислити найбільший заряд q , що його може вмістити заряджена куля, і потенціал ϕ , до якого можна зарядити цю кулю. Радіус кулі $R = 10$ см.

3.70. Тонкий стрижень завдовжки $l = 10$ см рівномірно заряджений зарядом $q = 3$ нКл. Визначити модуль E напруженості поля і потенціал ϕ у точці, що лежить на осі стрижня на відстані $x_0 = 20$ см від ближчого його кінця.

3.71. Тонке кільце радіуса $R = 5$ см позитивно заряджене зарядом $q = 17$ нКл. Визначити потенціал ϕ : а) у центрі кільця; б) у точці, що лежить на осі кільця на відстані $h = 10$ см від його центра.

3.72. Металевий диск обертається навколо своєї осі, перпендикулярної до площини диска, з частотою $\nu = 100$ с⁻¹. Радіус диска $R = 10$ см. Яка різниця потенціалів $\Delta\phi$ виникне між центром диска та точками, що лежать на його ободі?

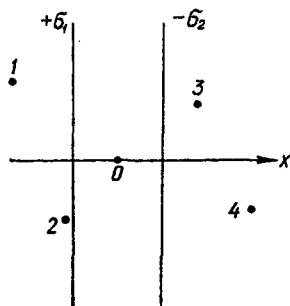


Рис. 3.10

3.73. Дві нескінченні паралельні площини містяться на відстані $d = 0,5$ см одна від одної. На площинах рівномірно розподілені заряди, поверхневі густини яких відповідно $\sigma_1 = 0,2$ мкКл/м² і $\sigma_2 = -0,3$ мкКл/м². Визначити різницю потенціалів $\Delta\phi$ між площинами.

3.74. За даними задачі 3.25 визначити у тих самих точках потенціал ϕ електростатичного поля у вакуумі.

3.75. Прямий довгий циліндричний провідник радіуса $r_1 = 1,5$ см позитивно заряджений

рівномірно з лінійною густиною $\tau = 30$ нКл/м. Яка різниця потенціалів $\Delta\phi$ між поверхнею циліндра та точкою, що міститься на відстані $r_2 = 3,5$ см від осі циліндра?

Вказівка. Використати розв'язки задач 3.51, 3.53–3.56.

3.76. Заряд рівномірно розподілений у вакуумі по об'єму нескінченно великої пластини. Товщина пластини d , об'ємна густина заряду ρ . Визначити потенціал ϕ як функцію відстані x від середини пластини. Вважати що потенціал посередині пластини дорівнює нулеві.

Вказівка. Використати розв'язки задач 3.51, 3.53–3.56.

3.77. Заряд q рівномірно розподілений у вакуумі в об'ємі кулі радіуса $R = 15$ см з об'ємною густиною $\rho = 2$ мкКл/м³. Обчислити потенціал ϕ : а) у центрі кулі; б) на поверхні кулі; в) у точках, що лежать від центра кулі на відстані $r_1 = 10$ см $< R$ і $r_2 = 20$ см $> R$.

Вказівка. Використати розв'язки задач 3.51, 3.53–3.56.

3.78. Заряд з об'ємною густиною $\rho = 2$ мкКл/м³ міститься в об'ємі циліндричної форми радіуса $r_0 = 2$ см. Обчислити різницю потенціалів $\Delta\phi$ між точками, що лежать від осі циліндра на відстані $r_1 = 1$ см і $r_2 = 3$ см.

Вказівка. Використати розв'язки задач 3.51, 3.53–3.56.

3.79. Простір між двома концентричними сферами радіусів R_1 і R_2 заряджений з об'ємною густиною заряду $\rho = \alpha/r^2$, де α – стала величина. Визначити повний заряд q , а також модуль E напруженості й потенціал ϕ електричного поля як функції відстані r від центра сфер.

3.80. Математичному маятнику, маса якого $m = 1$ г і період коливань $T_1 = 1$ с, надали заряду $q = 10^{-8}$ Кл. Маятник розмістили в однорідному електричному полі, створеному плоским конденсатором, пластини якого розташовані горизонтально. Період коливань при цьому зменшився до $T_2 = 0,8$ с. Відстань між пластинами на $\Delta d = 1$ см більша від довжини нитки маятника. Визначити: силу F , яка діє на маятник з

боку електричного поля; напрям електричного поля; різницю потенціалів U між пластинами; поверхневу густину σ зарядів на пластинах.

3.81. Дві паралельні нескінченні площини заряджені різнойменними зарядами з поверхневими густинами відповідно $+\sigma_1$ і $-\sigma_2$. Абсциси вказаних на рис. 3.10 точок такі: $x_1 = -3$ м, $x_2 = -1$ м, $x_3 = +2$ м, $x_4 = +3$ м. Різниця потенціалів між точками 2 і 1 $\varphi_2 - \varphi_1 = 400$ В. Яка з поверхневих густин ($+\sigma_1$ чи $-\sigma_2$) є більшою за абсолютним значенням? Чому дорівнює різниця потенціалів $\varphi_4 - \varphi_3$?

3.82. Знайти вираз для потенціалу φ таких електростатичних полів:
а) $\mathbf{E} = a(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$; б) $\mathbf{E} = 2axy\mathbf{i} + a(x - y^2)\mathbf{j}$; в) $\mathbf{E} = ay\mathbf{i} + (ax + bz)\mathbf{j} + by\mathbf{k}$.

3.2. ПРОВІДНИКИ В ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОМУ ПОЛІ

Напруженість електричного поля:

а) всередині провідника

$$\mathbf{E} = 0; \quad (3.2.1)$$

б) поблизу поверхні провідника у вакуумі

$$E = E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3.2.2)$$

Електроємність відокремленого провідника

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (3.2.3)$$

Ємність конденсаторів:

а) плоского

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}; \quad (3.2.4)$$

б) циліндричного

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}; \quad (3.2.5)$$

в) сферичного

$$C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (3.2.6)$$

Ємність батареї конденсаторів у разі послідовного і паралельного з'єднань відповідно

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}, \quad C = \sum C_i. \quad (3.2.7)$$

**Рівноважний розподіл зарядів у провіднику.
Метод дзеркальних відображень**

3.83. На якому фізичному явищі ґрунтується метод електростатичного захисту?

3.84. Чому провідники для дослідів з електростатики роблять порожнистими?

3.85. Накреслити графік залежності потенціалу й напруженості електростатичного поля від відстані до центра зарядженої металевої кулі радіуса r , оточеної товстою металевою оболонкою, внутрішній радіус якої R_1 ($R_1 > r$), а зовнішній R_2 .

3.86. Як розподіляться заряди на заряджених мідній та сталевій кулях під час їх дотикання? Маса куль є однаковими.

3.87. Чи виникне струм у провіднику, яким з'єднані металеві кулі різних радіусів, якщо надати їм однакових негативних зарядів?

3.88. В однорідне електричне поле напруженістю $E_0 = 2$ кВ/м внесено тонку металеву пластину, площа якої перпендикулярна до напрямку електричного поля. Чому дорівнює поверхнева густина заряду на пластині?

3.89. Велику вертикальну металеву пластину з поверхневою густиною заряду σ на кожному боці помістили в однорідне електричне поле напруженістю E перпендикулярно до ліній напруженості. Визначити напруженість поля всередині й зовні пластини та поверхневу густина зарядів, яка виникає на її правому й лівому боках.

3.90. Велика металева пластина розташована у вертикальній площині та заземлена (рис. 3.11). На відстані $a = 10$ см від пластини міститься нерухома точка, до якої на нитці підвішена маленька кулька. Довжина нитки $l = 12$ см, маса кульки $m = 0,1$ г. Під час надання кульці заряду q нитка відхилилася від вертикалі на кут $\alpha = 30^\circ$. Обчислити заряд q кульки.

3.91. Точковий заряд $q = 10^{-8}$ Кл міститься на відстані $d = 3$ см від плоскої металевої пластини, яка заземлена. Визначити силу взаємодії між зарядом і пластиною.

3.92. Три різноименних точкових заряди розміщені у вершинах квадрата з діагоналлю $l = 50$ см, як показано на рис. 3.12. Точка O – центр квадрата, AOB – прямий кут, утворений двома металевими напівплощинами. Визначити силу F , що діє на заряд $-q$, якщо його числове значення $q = 11$ мкКл.

3.93. Два точкових заряди $q = 2$ нКл розміщені на відстанях $h = 5$ см від металевої площини і на відстані $2h = 10$ см один від одного. Визначити сили, що діють на кожний заряд.

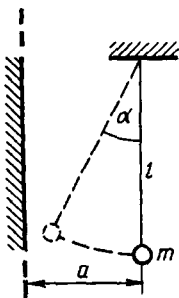


Рис. 3.11

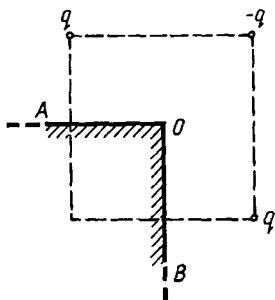


Рис. 3.12

3.94. Довга нитка, яка рівномірно заряджена з лінійною густиною заряду $\tau = 1$ мкКл/м, підвішена паралельно нескінченній провідній площині на відстані $h = 10$ см від неї. Визначити напруженість і потенціал електричного поля на поверхні провідника в точках, що лежать на прямій, яка перпендикулярна до поверхні й проходить крізь нитку.

Електроємність. Конденсатори. З'єднання конденсаторів у батареї

3.95. Визначити ємність C відокремленої металевої кулі радіуса $R = 5$ см у повітрі.

3.96. Кулька, заряджена до потенціалу $\phi = 1$ кВ, має поверхневу густину заряду $\sigma = 180$ нКл/м². Визначити радіус кульки.

3.97. Обчислити ємність C плоского повітряного конденсатора, площа пластин якого $S = 100$ см², відстань між ними $d = 2$ мм. Чому дорівнюватиме заряд q кожної пластини, якщо конденсатор підімкнути до клем батареї з напругою $U = 24$ В?

3.98. Пластини плоского конденсатора, відстань між якими $d = 12$ см, з'єднані з кондуктором електростатичної машини, яка дає різницю потенціалів 12 кВ. Побудувати графік зміни потенціалу між пластинами конденсатора. За графіком визначити потенціал поля на відстанях 3, 6 і 9 см від позитивно зарядженої пластини. Визначити напруженість E поля між пластинами конденсатора.

3.99. Як зміниться ємність плоского конденсатора, якщо між його обкладками розмістити металеву пластину, товщина якої становить $\eta = 0,6$ відстані між обкладками конденсатора?

3.100. Двом однаковим кулям, що з'єднані тонким дротом, надали загального заряду $q = 0,6$ мкКл. Радіуси кульок $r_1 = 5$ см. Одну з них

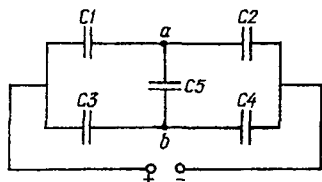


Рис. 3.13

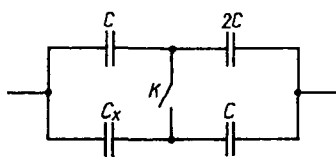


Рис. 3.14

оточили концентричною сферою радіуса $r_2 = 10$ см і заземлили. Яким буде заряд q_1 на цій кулі?

3.101. Є дві провідні кулі. Одна з них ємністю $C_1 = 10$ пФ має заряд $q = 150$ пКл, а інша, радіус якої $r_2 = 2$ см, заряджена до потенціалу $U = 30$ В. Визначити поверхневу густину зарядів на кулях після з'єднання їх тонким довгим провідником.

3.102. Внутрішній радіус сферичного повітряного конденсатора $R_1 = 5$ см, зовнішній $R_2 = 7$ см. На конденсатор подано напругу $U = 40$ кВ. Чи буде пробитий конденсатор, якщо пробивна напруженість електричного поля в повітрі $E_{пр} = 30$ кВ/см?

3.103. Радіус внутрішньої обкладки повітряного сферичного конденсатора $r = 1$ см, радіус зовнішньої обкладки $R = 4$ см. Між обкладками прикладена різниця потенціалів $U = 3$ кВ. Обчислити напруженість електричного поля E на відстані $x = 3$ см від центра конденсатора.

3.104. Радіус внутрішньої сфери повітряного сферичного конденсатора $R_1 = 9$ см, радіус зовнішньої сфери $R_2 = 10$ см. Зовнішня сфера заземлена, а внутрішня має потенціал $U = 5$ кВ. Якщо в простір між сферами налити гасу, то напруга на конденсаторі спаде. Щоб одержати попереднє значення напруги, внутрішній сфері потрібно додатково надати заряду Δq . Обчислити числове значення цього заряду.

3.105. Вакуумний циліндричний конденсатор має радіус внутрішнього циліндра $R_1 = 2$ см і зовнішнього $R_2 = 3$ см. Між циліндрами прикладена різниця потенціалів $U = 2,3$ кВ. Яку швидкість набуде електрон під дією цього конденсатора, якщо він рухатиметься з відстані $r_1 = 2,7$ см до відстані $r_2 = 2,5$ см від осі циліндра?

3.106. Два конденсатори зарядили відповідно до напруг $U_1 = 200$ В і $U_2 = 50$ В і з'єднали паралельно. Чому дорівнюватиме різниця потенціалів між обкладками, якщо $C_1 = 2C_2$?

3.107. Два конденсатори зарядили відповідно до напруг $U_1 = 300$ В, $U_2 = 100$ В і з'єднали паралельно. Встановити відношення ємностей, якщо різниця потенціалів між обкладками конденсаторів стала дорівнювати $U = 250$ В.

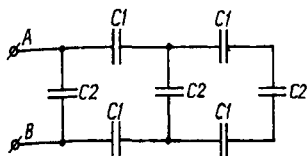


Рис. 3.15

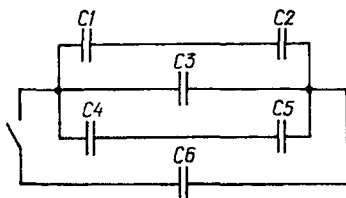


Рис. 3.16

3.108. Два конденсатори ємностями $C_1 = 0,2$ мкФ і $C_2 = 0,4$ мкФ з'єднали послідовно і підімкнули до джерела напруги $U = 200$ В. Визначити заряди q_1 і q_2 конденсаторів та різницю потенціалів U_1 і U_2 між їх обкладками.

3.109. Два конденсатори ємностями C_1 і C_2 , які розраховані на максимальні напруги відповідно U_1 та U_2 , з'єднані: а) послідовно; б) паралельно. Яку напругу U можна подати на такі системи конденсаторів?

3.110. Які ємності системи конденсаторів можна одержати, комбінуючи конденсатори ємностями 2, 4 і 6 пФ?

3.111. На рис. 3.13 зображена схема з'єднання конденсаторів. Визначити ємність батареї конденсаторів за умови, що ємність конденсаторів $C_1 = C_3 = C$; $C_2 = C_4 = C_5 = 2C$.

3.112. У схемі (рис. 3.14) ємність батареї конденсаторів у разі замикання ключа K не змінюється. Визначити ємність C_x , якщо $C = 4$ мкФ.

3.113. Обчислити загальну ємність C системи конденсаторів $C_1 = 2$ мкФ і $C_2 = 1$ мкФ. Напруга подається до точок A і B (рис. 3.15).

3.114. До конденсатора ємністю C_6 , який заряджено до потенціалу U , приєднали батарею з $n = 5$ конденсаторів тієї самої ємності (рис. 3.16). Визначити заряд на кожному з конденсаторів.

3.115. Дві провідні кулі радіусів $a = 5$ см розміщені на відстані $r = 50$ см між їхніми центрами. Кулям надали деяких зарядів, унаслідок чого їхні потенціали стали $\varphi_1 = 0,5$ кВ, $\varphi_2 = 1$ кВ. Якими є заряди куль? Перерозподілом зарядів на кулях, що зумовлений взаємною електростатичною індукцією, нехтувати.

3.116. Якими будуть заряди й потенціали куль, описаних у задачі 3.15, якщо другу кулю заземлити?

3.117. Визначити електроємність системи, яка складається з двох провідних куль радіусів a . Кулі розміщені на відстані r між їхніми центрами, що є значно більшою від радіусів куль.

3.118. Два довгих паралельних циліндричних проводи з радіусами a розміщені у повітрі на відстані d між осями. Визначити взаємну ємність проводів на одиницю довжини за умови, що $d \gg a$.

3.3. ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ В ДІЕЛЕКТРИКАХ

Поляризованість ізотропного діелектрика

$$\mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (3.3.1)$$

де κ – діелектрична сприйнятливість.

Поверхнева густина зв'язаних зарядів

$$\sigma' = P_n. \quad (3.3.2)$$

де P_n – проекція поляризованості на зовнішню нормаль до поверхні.

Електричне зміщення

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (3.3.3)$$

де ϵ – діелектрична проникність, $\epsilon = 1 + \kappa$.

Напруженість поля в однорідному та ізотропному діелектрику, який заповнює простір між еквіпотенціальними поверхнями, ослаблюється в ϵ разів:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon}. \quad (3.3.4)$$

Теорема Гаусса для електростатичного поля в діелектриках

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = \sum q_i, \quad (3.3.5)$$

де $\sum q_i$ – алгебрична сума сторонніх (вільних) електричних зарядів, які містяться всередині замкненої поверхні S .

Граничні умови на межі поділу двох діелектриків:

$$E_{1t} = E_{2t}; \quad (3.3.6)$$

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (3.3.7)$$

Поляризація діелектриків

3.119. Між обкладками зарядженого плоского конденсатора міститься пластинка з фарфору, яка дотикається до його пластин. У скільки разів η зміниться різниця потенціалів, якщо вийняти пластинку з конденсатора?

3.120. Плоский конденсатор заповнено слюдою ($\epsilon = 7$). Площа кожної пластини $S = 100 \text{ см}^2$, її заряд $q = 40 \text{ нКл}$, між пластинами прикладена напруга $U = 600 \text{ В}$. Визначити відстань d між пластинами.

3.121. Визначити ємність C циліндричного конденсатора, довжина якого $l = 5 \text{ см}$, радіус зовнішньої обкладки $R_2 = 1,5 \text{ см}$, радіус внутрішньої обкладки $R_1 = 0,3 \text{ см}$. Простір між обкладками заповнено парафіном.

3.122. Радіус внутрішньої кулі повітряного сферичного конденсатора $R_1 = 3,5$ см, радіус зовнішньої кулі $R_2 = 4$ см. Між кулями прикладена різниця потенціалів U_0 . Якщо простір між сферами заповнити рідким діелектриком ($\epsilon = 4$), то напруга на конденсаторі зменшиться. Щоб одержати попереднє значення напруги U_0 , внутрішній сфері потрібно надати додаткового заряду $\Delta q = 650$ нКл. Визначити напругу U_0 .

3.123. Дві однойменно заряджені кульки, підвішені на нитках однакової довжини, опускаються в рідкий діелектрик, густина якого $\rho_1 = 0,8 \cdot 10^3$ кг/м³. Якою має бути діелектрична проникність середовища ϵ , щоб кут розходження ниток у повітрі та в рідині був однаковим? Густина матеріалу кульок $\rho = 1,6 \cdot 10^3$ кг/м³.

3.124. Два однакових повітряних конденсатори з'єднано послідовно в батарею, яку підімкнено до джерела струму. Визначити, як зміниться напруга на одному з конденсаторів, якщо інший помістити в трансформаторне масло.

3.125. Діелектрична проникність середовища між пластинами плоского конденсатора рівномірно змінюється від $\epsilon_1 = 3$ до $\epsilon_2 = 7$. Площа кожної пластини $S = 200$ см², відстань між пластинами $d = 1$ см. Визначити ємність C конденсатора.

3.126. Плоский конденсатор, між обкладками якого міститься скляна пластинка ($\epsilon = 6$) завтовшки $d = 2$ мм, заряджений до напруги $U = 200$ В. Нехтуючи розміром зазору між пластинкою й обкладками, визначити поверхневу густину σ вільних зарядів, а також поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів (зарядів поляризації) на склі.

3.127. До пластин плоского конденсатора, відстань між якими $d = 3$ см, прикладена різниця потенціалів $U = 1000$ В. Простір між пластинами заповнюється діелектриком ($\epsilon = 7$). Визначити поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів і зміну $\Delta\sigma$ поверхневої густини заряду на пластинах у разі заповнення конденсатора діелектриком. Розв'язати задачу, враховуючи, що заповнення конденсатора діелектриком відбувається: а) при ввімкненому джерелі різниці потенціалів; б) після від'єднання конденсатора від джерела напруги.

3.128. Між пластинами плоского конденсатора, які розміщуються на відстані $d = 5$ мм одна від одної, прикладена напруга $U = 900$ В. Простір між пластинами заповнено діелектриком ($\epsilon = 3$). Визначити: напруженість електричного поля E в діелектрику; електричне зміщення D у діелектрику; діелектричну сприйнятливість χ діелектрика; поляризованість P діелектрика; поверхневу густину σ зарядів на пластинах конденсатора; поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів.

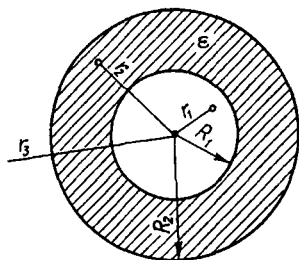


Рис. 3.17

3.129. Плоский конденсатор, відстань між пластинами якого $d = 4$ мм, занурено в гас. Яку напругу треба прикласти до конденсатора, щоб поверхнева густина зв'язаних зарядів у гасі набула значення $\sigma' = 4,4$ нКл/см²?

3.130. Нескінченна плоскопаралельна скляна пластина ($\epsilon = 7$) вміщена в однорідне електричне поле перпендикулярно до нього. Напруженість поля $E_0 = 400$ В/м. Визначити напруженість поля E та електричне зміщення D всередині пластини, поляризованість P скла та поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів.

3.131. Металевій ізольованій кулі радіуса $R = 10$ см надали заряду $q = 5 \cdot 10^{-6}$ Кл, потім на поверхню кулі нанесли шар діелектрика завтовшки $h = 2$ см. Чому дорівнюють густини зв'язаних зарядів та повні поляризаційні заряди на внутрішній і зовнішній поверхнях шару діелектрика, якщо діелектрична проникність діелектрика $\epsilon = 2$?

3.132. Точковий заряд $q = 1,5$ мкКл оточений концентричним з ним шаром діелектрика ($\epsilon = 3$). Внутрішній радіус сферичного шару $R_1 = 5$ см, зовнішній $R_2 = 7$ см (рис. 3.17). Обчислити значення зв'язаних зарядів q' на поверхнях сферичного шару, а також поляризованість P і напруженість електричного поля E у точках, що віддалені від центра на $r_1 = 3$ см, $r_2 = 6$ см, $r_3 = 9$ см.

3.133. Простір між обкладками плоского конденсатора заповнений діелектриком, діелектрична проникність якого змінюється в напрямі, перпендикулярному до обкладок, за лінійним законом від значення ϵ_1 поблизу однієї обкладки до $\epsilon_2 > \epsilon_1$ біля іншої. Конденсатор перебуває під напругою U , причому позитивний вільний заряд виникає на обкладці, біля якої ϵ має менше значення. Площа кожної обкладки дорівнює S , а відстань між ними d_1 . Визначити: а) ємність C конденсатора; б) знак і середнє значення об'ємної густини $\langle \rho' \rangle$ зв'язаних зарядів, які виникають у середині діелектрика.

Умови на межі поділу діелектриків

3.134. Між обкладками плоского конденсатора, площа яких $S = 100$ см², розміщуються дві плоскопаралельні пластинки з фарфору та ебоніту завтовшки d_1 та d_2 (рис. 3.18). Відстань між обкладками конденсатора $d = 2$ см. До обкладок прикладена різниця потенціалів $U = 500$ В. Визначити модулі векторів зміщення D та напруженості E електричного поля в кож-

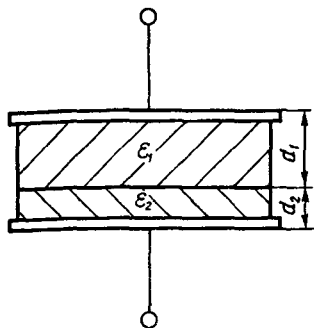


Рис. 3.18

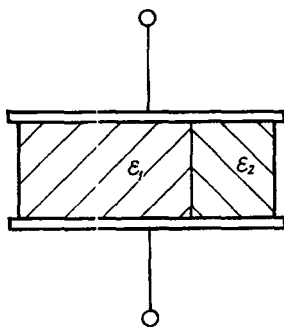


Рис. 3.19

ному шарі, спад напруги U в кожному шарі, ємність C конденсатора, поверхневу густину заряду σ на обкладках у разі, коли $d_1 = d_2 = 1$ см.

3.135. Визначити ємність плоского конденсатора, якщо простір між обкладками заповнено діелектриками з проникностями ϵ_1 і ϵ_2 , як показано на рис. 3.19. Відстань між обкладками конденсатора d , а відповідні кожному діелектрику площі поверхні обкладки становлять S_1 і S_2 .

3.136. Площа обкладок плоского повітряного конденсатора $S = 200$ см², відстань між ними $d = 3$ мм. Конденсатор заряджається від джерела з напругою $U = 150$ В. Потім його від'єднують від батареї і між обкладками вміщують діелектричну пластинку з фарфору ($\epsilon = 5$) такої самої площі S , її товщина $l = 1$ мм. Визначити: початкову ємність C конденсатора; заряд q на кожній обкладці до введення діелектрика; зв'язаний заряд $q_{\text{зв}}$, що виникає на поверхні фарфорової пластинки; напруженість електричного поля E_1 між кожною обкладкою конденсатора і поверхнею діелектрика; напруженість електричного поля E_2 в діелектрику; різницю потенціалів U_1 між обкладками після введення діелектрика; ємність C_1 конденсатора з діелектриком.

3.137. Плоский повітряний конденсатор, відстань між пластинами якого $d_1 = 6$ см, а площа кожної пластини $S = 200$ см², підімкнутий до батареї з напругою $U = 600$ В. У конденсатор вміщують діелектричну пластинку завтовшки $d_2 = 3$ см. Визначити зміну заряду Δq на пластинах конденсатора, якщо діелектрична проникність матеріалу вміщеної пластинки $\epsilon = 2,8$.

3.138. На плоский повітряний конденсатор, товщина повітряного шару в якому $d = 1,5$ см, подається напруга $U = 39$ кВ. Чи буде пробитий конденсатор, якщо: а) гранична напруженість електричного поля в повітрі

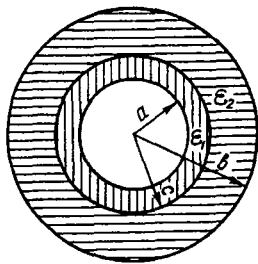


Рис. 3.20

$E_{\text{гр}} = 30 \text{ кВ/см}$; б) між його обкладками помістити скляну пластинку ($\epsilon = 7$), товщина якої $d_1 = 0,3 \text{ см}$? Гранична напруженість електричного поля для скла $E_{\text{гр,с}} = 100 \text{ кВ/см}$.

3.139. Відстань між пластинами плоского конденсатора $d = 5 \text{ мм}$, різниця потенціалів $U = 150 \text{ В}$, площа пластин $S = 200 \text{ см}^2$. На нижній пластині лежить плитка парафіну завтовшки $d_1 = 4 \text{ мм}$. Визначити поверхневу густину зв'язаних зарядів σ' на парафіні та ємність C конденсатора.

3.140. Гірська порода складається з плоских паралельних шарів кварцу ($\epsilon_1 = 4,8$), кальциту ($\epsilon_2 = 7,5$) і вапняку ($\epsilon_3 = 10$). Товщини шарів відповідно $d_1 = 0,5 \text{ м}$, $d_2 = 1 \text{ м}$ і $d_3 = 1,5 \text{ м}$. Вважаючи, що порода міститься в однорідному електричному полі, силові лінії якого перпендикулярні до межі поділу шарів, обчислити напруженості поля в кожному шарі, а також поверхневу густину зв'язаних зарядів на них, якщо до всієї породи прикладена різниця потенціалів $U = 1000 \text{ В}$.

3.141. Простір між обкладками сферичного конденсатора заповнений двома концентричними шарами діелектриків з діелектричною проникністю $\epsilon_1 = 3$ (шар, що прилягає до внутрішньої обкладки) і $\epsilon_2 = 7$. Радіуси обкладок $a = 10 \text{ см}$ і $b = 12 \text{ см}$. Межа поділу діелектриків розміщена на відстані $c = 11 \text{ см}$ від центра (рис. 3.20). Визначити ємність C конденсатора та розподіл зв'язаних зарядів у діелектриках, якщо заряд внутрішньої обкладки $q = 20 \text{ нКл}$.

3.142. Металева куля радіуса $R_1 = 5 \text{ см}$ оточена сферичним шаром діелектрика ($\epsilon = 7$), товщина якого $d = 1 \text{ см}$, та другою металевою поверхнею радіуса $R_2 = 7 \text{ см}$, концентричною з першою. Чому дорівнює електроємність C такого конденсатора? Яким має бути радіус R металевої кулі, щоб вона в необмеженому діелектрику мала таку саму ємність?

3.143. Однорідне електричне поле, напруженість якого в повітрі $E_1 = 2 \text{ В/м}$, утворює з нормаллю до скляної пластинки кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити вектори напруженості E_2 , електричного зміщення D_2 та поляризованості P_2 у склі.

3.4. ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ

Енергія взаємодії системи точкових зарядів

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi_i, \quad (3.4.1)$$

де ϕ_i – потенціал, що створюється в тій точці, де міститься заряд q_i , усіма зарядами, крім i -го.

Енергія відокремленого зарядженого провідника

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (3.4.2)$$

Енергія зарядженого конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (3.4.3)$$

Об'ємна густина енергії

$$w_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (3.4.4)$$

Сили, що діють в електричному полі,

$$F_x = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{q=\text{const}} = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{\varphi=\text{const}}, \quad (3.4.5)$$

де W – енергія, яка виражена як функція від заряду й параметра x або як функція від потенціалу й параметра x .

8. Сила притягання між двома пластинами зарядженого плоского конденсатора

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S}{2}. \quad (3.4.6)$$

Сила, що діє на одиницю площі поверхні зарядженого провідника, оточеного рідким або газоподібним діелектриком, дорівнює об'ємній густині енергії поля поблизу поверхні й напрямлена назовні провідника:

$$F = w_e = \frac{ED}{2}. \quad (3.4.7)$$

Сила, що діє в електричному полі на одиницю площі межі поділу двох діелектриків, дорівнює різниці об'ємних густин енергії електростатичних полів з обох боків межі поділу й напрямлена в бік діелектрика з меншою діелектричною проникністю:

$$F = w_{e2} - w_{e1}. \quad (3.4.8)$$

Енергія системи електричних зарядів.

Енергія заряджених провідників

3.144. Три точкових заряди розміщені у вершинах рівностороннього трикутника. Два з цих зарядів є однойменними і кожний з них дорівнює q ; а знак третього – протилежний. Яким має бути значення третього заряду q_1 , щоб енергія взаємодії системи зарядів дорівнювала нулеві?

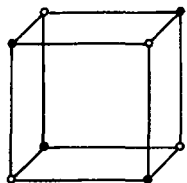


Рис. 3.21

3.145. Визначити енергію W взаємодії точкових зарядів $q = 15$ нКл, які розміщені у вершинах квадрата зі стороною $a = 10$ см, якщо: а) заряди є однаковими; б) заряди є однаковими за абсолютним значенням, але два з них негативні й заряди одного знака містяться в протилежних вершинах квадрата.

3.146. Елементарний кристал кухонної солі (рис. 3.21) – це куб зі стороною $d = 2,82 \cdot 10^{-8}$ см, у вершинах якого розміщені іони натрію (білі кружечки) і хлору (чорні кружечки). Вважаючи, що заряд іона за абсолютним значенням дорівнює зарядові електрона, визначити енергію W електростатичної взаємодії іонів ізольованого елементарного кристала.

3.147. Заряджена куля A радіуса $r_1 = 2$ см стикається з незарядженою кулею B , радіус якої $r_2 = 3$ см. Після того, як кулі роз'єднали, виявилось, що енергія кулі B $W = 0,4$ Дж. Який заряд q_1 був на кулі A до зіткнення?

3.148. Віддалені одна від однієї металеві кулі радіусами $R_1 = 25$ см і $R_2 = 15$ см мають заряди відповідно $q_1 = 0,12$ мкКл і $q_2 = 0,5$ мкКл. Яка кількість теплоти Q виділиться в тонкому провіднику, якщо кулі з'єднати між собою?

Енергія зарядженого конденсатора.

Енергія електростатичного поля. Густина енергії

3.149. Конденсатори ємностями $C_1 = 2$ мкФ і $C_2 = 4$ мкФ, що мають заряди $q_1 = 8$ мкКл і $q_2 = 6$ мкКл, з'єднали паралельно. Визначити зміну ΔW енергії конденсаторів.

3.150. До конденсатора ємністю $C_1 = 2$ мкФ, зарядженого до напруги $U_1 = 600$ В, приєднали паралельно незаряджений конденсатор ємністю $C_2 = 1$ мкФ. Яка кількість енергії W виділиться під час утворення іскри, якщо конденсатори з'єднати?

3.151. Визначити енергію W електростатичного поля, яке утворюється у повітрі металевою сферою радіуса $R = 5$ см. Сфері надано заряду $q = 200$ нКл.

3.152. Дві концентричні сферичні поверхні, які вміщено у вакуум, заряджені однаковими зарядами $q = 3$ мкКл. Радіуси цих поверхонь $R_1 = 1$ м і $R_2 = 2$ м. Визначити енергію W електростатичного поля, що міститься у сферичному шарі між цими сферами.

3.153. Визначити енергію W електростатичного поля у сферичному повітряному конденсаторі, якщо радіус його внутрішньої сфери $R_1 = 10$ см,

а зовнішньої $R_2 = 30$ см. У точці, що лежить на відстані $r_1 = 15$ см від центра, напруженість поля $E_1 = 5$ В/м.

3.154. Визначити енергію W електростатичного поля зарядів, що рівномірно розподілені в об'ємі кулі радіуса $R = 10$ см. Повний заряд кулі $q = 40$ пКл. Яка частка η енергії поля локалізована поза кулею?

3.155. Визначити енергію W електростатичного поля для розподілу зарядів, який дано у задачі 3.79.

3.156. Коаксіальний кабель (рис. 3.22) складається з центрального провідника, діаметр якого $D_1 = 2$ см, і металевій оболонки діаметра $D_2 = 4$ см, проміжок між якими заповнений діелектриком ($\epsilon = 6$). Металева оболонка заземлена, а центральний провідник перебуває під напругою $U = 600$ В. Обчислити енергію W електростатичного поля кабелю на довжині $l = 1$ м.

3.157. Металева сфера радіуса $R = 3$ см має електричний заряд $q = 20$ нКл. Сфера обмежена шаром парафіну, товщина якого $d = 2$ см. Визначити енергію W електростатичного поля в шарі діелектрика.

3.158. Вважаючи електрон і протон, з яких складається атом водню, точковими зарядами, що містяться на відстані $r = 53$ пм, обчислити густину енергії w_e електричного поля на середині відстані між ними.

3.159. Визначити об'ємну густину енергії w_e електричного поля, яке створюється нескінченною рівномірно зарядженою ниткою на відстані $r = 3$ см від неї. Лінійна густина заряду на нитці $\tau = 0,2$ мКл/м. Діелектрична проникність середовища $\epsilon = 3$.

3.160. Простір між пластинами плоского конденсатора заповнений парафіном. Об'ємна густина енергії електричного поля у парафіні $w_e = 0,49$ Дж/м³. Обчислити поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів на поверхні парафіну.

3.161. Густина енергії поля зарядженого конденсатора $w_e = 300$ Дж/м³. З якою силою F притягуються обкладки конденсатора, якщо площа кожної з них $S = 100$ см²?

3.162. Визначити силу притягання F між пластинами плоского конденсатора, якщо площа кожної пластини S , відстань між ними d , діелектрична проникність середовища між пластинами ϵ . Розв'язати задачу за таких умов: а) конденсаторові надали електричного заряду q , після чого його від'єднали від джерела напруги; б) конденсатор приєднали до джерела постійної напруги U . Як залежить сила притягання від відстані між пластинами та діелектричної проникності середовища?

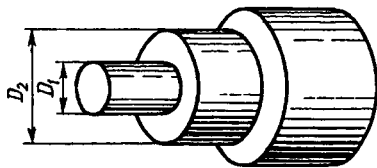


Рис. 3.22

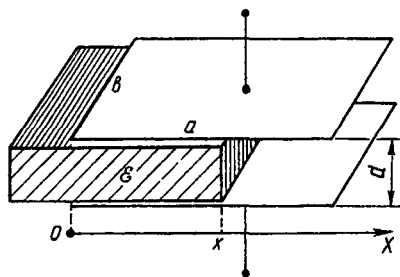


Рис. 3.23

3.163. Об'ємна густина енергії електричного поля всередині зарядженого плоского конденсатора з твердим діелектриком ($\epsilon = 6$) $w_e = 2,5$ Дж/м³. Обчислити тиск p , що створюється пластинами, площа яких $S = 20$ см², на діелектрик, а також силу F' , яку потрібно прикласти до пластин, щоб їх відокремити від діелектрика.

3.164. На поверхні сфери радіуса R рівномірно розподілений заряд q . Визначити силу, яка діє на одиницю поверхні (електростатичний тиск p).

3.165. З якою силою F втягується в плоский конденсатор із зарядом q діелектрична пластина, коли вона входить у простір між обкладками на відстань x (рис. 3.23)? Товщина пластини є трохи меншою, ніж відстань між обкладками d , розміри пластини і обкладок $a \times b$, діелектрична проникність діелектрика ϵ .

3.166. Плоский повітряний конденсатор зарядили до різниці потенціалів $U = 60$ В і вимкнули джерело ЕРС. Площа кожної пластини $S = 200$ см², відстань між ними $d = 0,5$ см. Пластины конденсатора розміщено вертикально. Знизу підводять посудину з непровідною рідиною ($\epsilon = 2$) так, що вона заповнює половину об'єму між пластинами конденсатора. Чому дорівнює ємність C конденсатора? Обчислити напруженість поля E_1 у повітряній частині проміжку між пластинами і E_2 в частині, заповненій рідиною. Визначити зменшення ΔW енергії конденсатора. На що витратилась ця енергія? Вважати, що межа поділу рідини й повітря є плоскою.

3.167. Плоский конденсатор ємністю $C = 60$ пФ зарядили в повітрі до різниці потенціалів $U = 400$ В і від'єднали від джерела ЕРС. Після занурення конденсатора в рідкий діелектрик вертикально до половини висоти його пластин енергія конденсатора зменшилась на $\Delta W = 1,2$ мкДж. Визначити діелектричну проникність ϵ діелектрика.

3.168. Плоский повітряний конденсатор заряджений до різниці потенціалів $U = 500$ В. Площа кожної пластини $S = 150$ см², відстань між ними $d_1 = 0,5$ см. Яку роботу A треба виконати, щоб збільшити відстань між пластинами до відстані $d_2 = 0,8$ см, за таких умов: а) конденсатор від'єднаний від джерела напруги; б) конденсатор підімкнутий до джерела постійної напруги.

3.169. Плоский повітряний конденсатор, відстань між пластинами якого $d = 5$ см, а площа пластин $S = 500$ см², під'єднаний до батареї, яка підтримує на конденсаторі постійну напругу $U = 2$ кВ. У конденсатор паралельно пластинам вводять металеву плиту завтовшки $d_1 = 1$ см. Яку роботу A виконує при цьому батарея?

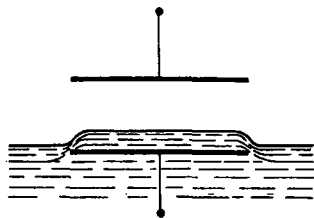


Рис. 3.24

3.170. Усередині плоского конденсатора, площа пластин якого $S = 200$ см², а відстань між ними $d = 0,1$ см, міститься пластинка зі скла ($\epsilon = 5$), яка повністю заповнює простір між пластинами конденсатора. Як зміниться енергія конденсатора, якщо повільно вийняти скляну пластинку? Розв'язати задачу за таких умов: а) конденсатор увесь час приєднаний до батареї з ЕРС $\mathcal{E} = 300$ В; б) конденсатор був спочатку підімкнутий до тієї самої батареї, а потім його від'єднали і після цього пластинку вийняли. Визначити механічну роботу A , яка затрачається на видалення пластинки в обох випадках.

3.171. Усередині плоского конденсатора розміщується паралельно обкладкам пластинка, товщина якої становить $\eta = 0,6$ відстані між обкладками. Ємність конденсатора, коли пластинки немає, $C = 20$ нФ. Конденсатор спочатку приєднали до джерела постійної напруги $U = 200$ В, потім від'єднали і після цього повільно вийняли пластинку з конденсатора. Визначити роботу A , виконану проти електричних сил при видаленні пластинки, якщо вона: а) металева; б) скляна.

3.172. Простір між пластинами плоского конденсатора заповнено діелектриком (фарфор), об'єм якого $V = 40$ см³. Конденсатор спочатку приєднали до джерела постійної напруги, потім від'єднали. Після цього поверхнева густина зв'язаних зарядів на діелектрику $\sigma' = 6$ мкКл/м². Обчислити роботу A , яку треба виконати проти сил електричного поля, щоб видалити діелектрик з конденсатора.

3.173. Одна з пластин розташованого горизонтально плоского конденсатора занурена під поверхню рідини з густиною ρ і діелектричною проникністю ϵ (рис. 3.24). Площа кожної пластини S . На яку висоту h підніметься рівень рідини в конденсаторі, якщо йому надати заряду q ?

3.174. Плоский конденсатор занурений одним кінцем у спирт ($\epsilon = 25$). Яку різницю потенціалів U треба прикласти, щоб спирт піднявся на висоту $h = 1$ см, якщо відстань між пластинами $d = 1$ мм (рис. 3.25)? Поверхневим натягом нехтувати.

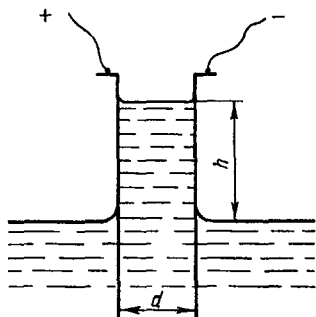


Рис. 3.25

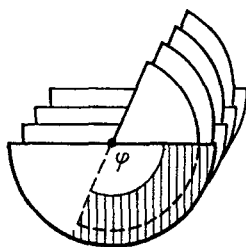


Рис. 3.26

3.175. Пластины конденсатора змінної ємності (рис. 3.26) мають форму півкругів радіуса r , відстань між сусідніми рухомими й нерухомими пластинами дорівнює l . Всього є n проміжків між пластинами. Визначити обертальний момент M , який діє на пластины, за таких умов: а) конденсаторові надали заряду q , після чого його від'єдали від джерела напруги; б) на конденсаторі підтримується постійна напруга U .

3.5. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

Сила струму

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (3.5.1)$$

де dq – заряд, який проходить крізь деяку поверхню за проміжок часу dt .

Для постійного струму

$$I = \frac{q}{t}. \quad (3.5.1a)$$

Густина струму

$$\mathbf{j} = \frac{I}{S_{\perp}} \mathbf{k}, \quad (3.5.2)$$

де $\mathbf{k}$ – одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом упорядкованого руху позитивних зарядів.

Густина струму в металах

$$\mathbf{j} = en\langle \mathbf{u} \rangle, \quad (3.5.3)$$

де e – елементарний заряд; n – концентрація носіїв; $\mathbf{u}$ – середня швидкість їх упорядкованого руху.

Опір однорідного провідника сталого перерізу S

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.5.4)$$

де ρ – питомий опір; l – довжина провідника.

Залежність питомого опору від температури:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (3.5.5)$$

де ρ, ρ_0 – питомі опори відповідно при t і 0°C ; t – температура, $^\circ\text{C}$; α – температурний коефіцієнт опору.

Опір провідників при послідовному й паралельному з'єднаннях відповідно

$$R = \sum R_i; \quad \frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}. \quad (3.5.6)$$

Закон Ома:

а) для однорідної ділянки кола
$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}; \quad (3.5.7)$$

б) для неоднорідної ділянки кола
$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \xi_{12}}{R} = \frac{U}{R}; \quad (3.5.8)$$

в) для замкненого кола
$$I = \frac{\xi}{R + r}, \quad (3.5.9)$$

де $\varphi_1 - \varphi_2$ – різниця потенціалів на кінцях ділянки кола; R – опір кола (або ділянки кола); U – напруга на ділянці кола; ξ_{12} – ЕРС джерел струму, які входять до ділянки; ξ – ЕРС усіх джерел струму кола.

Закон Ома в диференціальній формі

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3.5.10)$$

де σ – питома електропровідність, $\sigma = \frac{1}{\rho}$; ρ – питомий опір; E – напруженість електричного поля.

Робота струму за час t

$$A = IU t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (3.5.11)$$

Потужність струму

$$P = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (3.5.12)$$

Кількість теплоти Q , яка виділяється на ділянці кола за час t (закон Джоуля-Ленца),

$$Q = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (3.5.13)$$

Закон Джоуля–Ленца в диференціальній формі

$$w = \sigma E^2, \quad (3.5.14)$$

де w – питома теплова потужність струму.

Правила Кірхгофа для розгалужених кіл:

1. Алгебрична сума сил струмів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулеві:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0, \quad (3.5.15)$$

де n – кількість струмів, які сходяться у вузлі.

Струми, які входять у вузол, вважають додатними, а ті, що виходять, – від’ємними, або навпаки.

2. У будь-якому замкненому контурі, довільно обраному в розгалуженому колі, алгебрична сума добутків сил струмів на опори відповідних ділянок контуру дорівнює алгебричній сумі електрорушійних сил, що діють у цьому контурі:

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k. \quad (3.5.16)$$

Напрямок обходу контуру (за або проти руху стрілки годинника), напрями струмів на всіх ділянках кола вибирають довільно. Струми вважаються додатними, якщо їхній напрям збігається з напрямом обходу, а протилежні цьому напрямку – від’ємними. ЕРС джерел струму вважають додатними, якщо напрям обходу збігається з напрямом збільшення потенціалу.

Опір однорідного середовища

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\epsilon_0}{\sigma C}, \quad (3.5.17)$$

де C – ємність конденсатора, обкладками якого є електроди.

Залежність густини струму насичення від температури (формула Річардсона – Дешмана)

$$j_n = B T^2 e^{-\frac{A}{kT}}, \quad (3.5.18)$$

де B – емісійна стала, для чистих металів $B = 602 \text{ кА}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^2)$; A – робота виходу електрона з металу; k – стала Больцмана.

Закон Ома для електролітів

$$\mathbf{j} = q \alpha n_0 (u_+ + u_-) \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3.5.19)$$

де q – заряд іона, $q = ze$; тут z – валентність, e – елементарний заряд; α – ступінь дисоціації; n_0 – кількість молекул розчиненої речовини в одиниці об’єму розчину; u_+ , u_- – рухливості позитивних і негативних іонів; σ – питома електропровідність електроліту.

Еквівалентна електропровідність

$$\Lambda = \frac{\sigma}{\eta}, \quad (3.5.20)$$

де η – еквівалентна концентрація, $\eta = n_0 z / N_A$; тут N_A – число Авогадро.

Перший закон Фарадея

$$m = kIt, \quad (3.5.21)$$

де k – електрохімічний еквівалент.

Другий закон Фарадея

$$k = \frac{1}{F} \frac{A}{z}, \quad (3.5.22)$$

де F – число Фарадея, $F = 9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль; A – атомна маса.

Кількість пар іонів, які щосекунди рекомбінують в одиниці об'єму газу.

$$\Delta n_r = rn^2. \quad (3.5.23)$$

де r – коефіцієнт рекомбінації; n – кількість пар іонів у одиниці об'єму.

Умова статистичної рівноваги в газі під час несамостійного розряду:

$$\Delta n_i = \Delta n_r + \Delta n_j, \quad (3.5.24)$$

де Δn_i – кількість пар іонів, що утворюються за секунду в одиниці об'єму під дією іонізатора; Δn_j – кількість пар іонів, які щосекунди залишають одиницю об'єму газу під дією поля.

У випадку плоских електродів

$$\Delta n_j = \frac{j}{qd}, \quad (3.5.25)$$

де j – густина струму; q – заряд іона; d – відстань між електродами.

При малих густинах струму, який проходить у газі, має місце закон Ома

$$\mathbf{j} = qn(u_+ + u_-)\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}. \quad (3.5.26)$$

Дебаївський радіус екранування

$$r_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{2n_0 e^2}}, \quad (3.5.27)$$

де n_0 – рівноважна концентрація електронів (іонів).

Умова ідеальності плазми

$$\frac{e^2 n_0^{1/3}}{4\pi\epsilon_0} \ll kT. \quad (3.5.28)$$

Закон Ома для ділянки кола. Опір провідників

3.176. Електрон в атомі водню обертається навколо ядра. Визначити, який струм I він створює та швидкість v електрона на цій орбіті, якщо радіус орбіти $r = 53$ пм.

3.177. Який заряд q пройде по провіднику, якщо сила струму рівномірно збільшується від $I_1 = 0$ до $I_2 = 5$ А протягом часу $t = 10$ с?

3.178. Сила струму в провіднику змінюється з часом згідно з рівнянням $I = 5 + 3t$, де I – сила струму, А; t – час, с. Яка кількість електрики q проходить крізь поперечний переріз провідника за час від $t_1 = 3$ с до $t_2 = 8$ с?

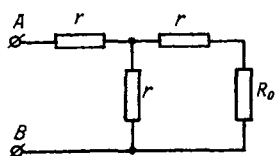


Рис. 3.27

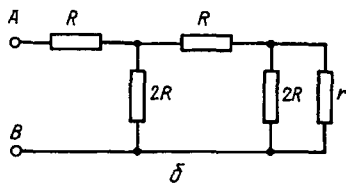
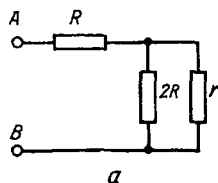


Рис. 3.28

При якій силі постійного струму I крізь поперечний переріз провідника за цей час проходить така сама кількість електрики?

3.179. До амперметра, опір якого $R_a = 0,27$ Ом, приєднано паралельно шунт опором $R = 0,09$ Ом. Обчислити силу струму в колі, якщо амперметр показує $I = 2$ А.

3.180. Що потрібно зробити, щоб прилад, ціна поділки якого $i_0 = 10$ мкА, шкала приладу має $n = 100$ поділок, а внутрішній опір $r = 100$ Ом, можна було використати: а) як вольтметр для вимірювання напруги до $U = 100$ В; б) як амперметр для вимірювання струму до $I = 1$ А?

3.181. Якщо вольтметр з'єднати послідовно з резистором, опір якого $R = 10$ кОм, то при напрузі $U = 120$ В він покаже $U_1 = 50$ В. Якщо його з'єднати послідовно з резистором, опір R_x якого невідомий, то при тій самій напрузі він покаже $U_2 = 10$ В. Визначити опір резистора R_x .

3.182. Яким має бути опір r (рис. 3.27), щоб опір між клемми A і B був таким, що дорівнює R_0 ? Опір R_0 вважати відомим.

3.183. На рис. 3.28 зображено два електричних кола, до яких входять резистори з відомими опороми R і $2R$ та резистор з невідомим опором r . При якому значенні r опори обох кіл, виміряні між точками A і B , будуть однаковими і яким буде загальний опір $R_{\text{заг}}$ кіл?

3.184. Два провідники виготовлені з одного матеріалу. У скільки разів довжина одного провідника більша від довжини іншого, коли відомо, що $R_1 = 8R_2$, а $m_1 = 2m_2$?

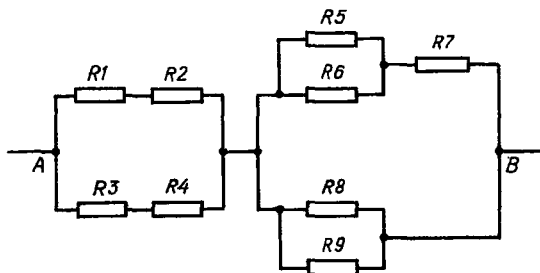


Рис. 3.29

3.185. Визначити опір ділянки кола між точками A і B (рис. 3.29), якщо опори $R_1 = R_3 = R_5 = R_7 = R_8 = R_9 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = R_4 = R_6 = 20 \text{ Ом}$.

3.186. Визначити опір ділянки кола між точками A і B (рис. 3.30), якщо опори $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 1 \text{ Ом}$, $R_3 = R_6 = 12 \text{ Ом}$.

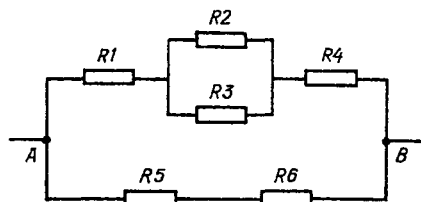


Рис. 3.30

3.187. У мідному провіднику, площа поперечного перерізу якого $S = 0,5 \text{ см}^2$, проходить струм силою $I = 1,5 \text{ А}$. З якою силою F діє електричне поле в цьому провіднику на кожний носій струму?

3.188. До лампи розжарювання за допомогою мідного провідника підведено струм, сила якого $I = 0,2 \text{ А}$. Площа поперечного перерізу провідника $S = 5 \text{ мм}^2$. Температура вольфрамової нитки діаметра $d = 0,02 \text{ мм}$ під час горіння лампи $t = 2000 \text{ }^\circ\text{C}$. Визначити напруженість електричного поля E у міді та вольфрамі.

3.189. На кінцях залізного провідника, довжина якого $l = 1 \text{ м}$ і діаметр $d = 1 \text{ мм}$, підтримується напруга $U = 12 \text{ В}$. Визначити густину струму j та кількість електронів N , які проходять крізь поперечний переріз провідника за 1 с .

3.190. Обчислити опір R графітового провідника, що виготовлений у вигляді прямого кругового зрізаного конуса (рис. 3.31) заввишки $h = 25 \text{ см}$. Радіуси його основ $r_1 = 15 \text{ мм}$ і $r_2 = 10 \text{ мм}$. Температура провідника дорівнює $20 \text{ }^\circ\text{C}$.

3.191. Простір між обкладками сферичного конденсатора, радіуси яких r_1 і r_2 , заповнено слабопровідною однорідною речовиною з питомим опором ρ . Визначити силу струму I виходу крізь конденсатор, якщо різниця потенціалів між обкладками U .

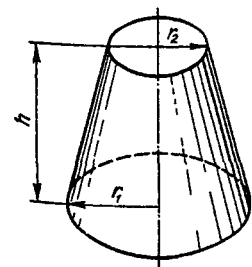


Рис. 3.31

3.192. У необмеженому середовищі, питомий опір якого $\rho = 10^2 \text{ Ом}\cdot\text{м}$, розміщується металева куля діаметра $d = 0,1 \text{ м}$. Визначити опір R системи куля – необмежене середовище.

3.193. Між коаксіальними циліндричними електродами, радіуси яких $r_1 = 10 \text{ см}$ і $r_2 = 10,5 \text{ см}$, міститься провідне середовище. Питома електрична провідність матеріалу електродів є значно більшою, ніж питома електрична провідність середовища, питомий опір якого $\rho = 3,9 \text{ мкОм}\cdot\text{м}$. Визначити опір R сере-

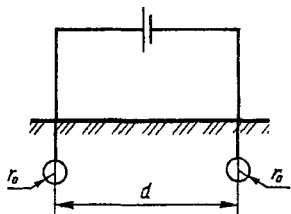


Рис. 3.32

довшиця між електродами, якщо довжина їх $l = 20$ см.

3.194. Мідну кулю, радіус якої $r_1 = 5$ см, опускають у півсферичний келих радіуса $r_2 = 10$ см, наповнений водою, так, що куля і келих є концентричними. Питома електрична провідність води $\sigma = 10^{-3}$ См/м. Визначити електричний опір між кулею та келихом.

3.195. Між двома плоскими електродами з площею перерізу $S = 200$ см² кожний міститься провідна речовина, питома електрична провідність якої змінюється лінійно в напрямі, перпендикулярному до електродів, від $\sigma_1 = 10^{-3}$ См/м біля поверхні першого електроду до $\sigma_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ См/м біля поверхні другого. Обчислити опір середовища між електродами, відстань між якими $d = 5$ см.

3.196. Для скорочення витрат проводів використовують землю як провідник електричного струму (заземлення ліній передач). Електричне коло можна зобразити так, як показано на рис. 3.32. Електродами є сфери радіуса $r_0 = 1$ м. Питома електрична провідність Землі $\sigma = 10^{-2}$ См/м. Вважаючи відстань між електродами $d \ll r_0$, визначити опір R заземлення. Як залежить опір заземлення від відстані між електродами?

3.197. Довгий провідник круглого перерізу радіуса a виготовлений з матеріалу, питомий опір якого залежить тільки від відстані r до осі провідника за законом $\rho = \alpha / r^2$, де α – стала. Визначити опір R одиниці довжини такого провідника та напруженість електричного поля E в провіднику, при якій у ньому проходить струм I .

3.198. Пластини плоского конденсатора приєднані до джерела постійної напруги $U = 300$ В. Пластини зближуються зі швидкістю $v = 1$ мм/с. Визначити силу струму I в провідниках у момент, коли пластини перебувають на відстані $d = 2$ мм одна від одної. Площа пластин $S = 400$ см².

3.199. Конденсатор ємністю $C = 1$ мкФ розряджається через резистор, опір якого $R = 4$ МОм. Через який проміжок часу t від початку розрядження: а) початкова напруга U_0 на пластинах конденсатора зменшиться у 2 рази; б) початковий заряд q_0 зменшиться в $e = 2,718$ рази?

3.200. Плоский конденсатор, заповнений кварцом, втрачає за час $t_1 = 3$ хв половину свого заряду. Діелектрична проникність кварцу $\epsilon = 3,75$. Враховуючи, що витікання заряду відбувається тільки крізь діелектричну прокладку, визначити питомий опір кварцу. Яка частина заряду залишиться на конденсаторі через час $t_2 = 7$ хв від початку розрядження?

3.201. Плоский конденсатор з пластинами розміру $a \times b$ ($a = 2$ см), що розміщуються одна від одної на відстані $d = 1$ см, приєднано до батареї з ЕРС $\mathcal{E} = 100$ В і внутрішнім опором $r = 5$ Ом. У коло ввімкнено гальванометр, опором якого можна нехтувати. У конденсатор вводять зі швидкістю $v = 1$ м/с уздовж сторони b скляну пластинку завтовшки d . Діелектрична проникність скла $\epsilon = 5$. Яку силу струму I покаже гальванометр під час введення скляної пластинки у конденсатор?

Закон Ома для повного кола. Правила Кірхгофа

3.202. Два джерела струму, електрорушійні сили яких $\mathcal{E}_1 = 60$ В і $\mathcal{E}_2 = 35$ В, з'єднані між собою так, як показано на рис. 3.33. Визначити різницю потенціалів між точками a і b в обох випадках. Відношення внутрішніх опорів джерел $r_2 / r_1 = 1,5$.

3.203. У колі, зображеному на рис. 3.34, електрорушійні сили $\mathcal{E}_1 = 1,5$ В, $\mathcal{E}_2 = 1$ В, опори $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 50$ Ом і $R_3 = 80$ Ом. Обчислити силу струму, який проходить крізь резистор R_1 .

3.204. Визначити різницю потенціалів $\phi_1 - \phi_2$ між точками 1 і 2 схеми (рис. 3.35), якщо опори $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, електрорушійні сили $\mathcal{E}_1 = 5$ В, $\mathcal{E}_2 = 2$ В. Внутрішніми опорами джерел струму нехтувати.

3.205. Джерела струму з різними ЕРС з'єднані, як зображено на рис. 3.36. Електрорушійні сили джерел пропорційні їх внутрішнім опорам $\mathcal{E} = \alpha r$, де α – стала. Опором провідників нехтувати. Визначити струм I у колі та різницю потенціалів між точками A і B .

3.206. У схемі (рис. 3.37) електрорушійна сила $\mathcal{E} = 5$ В, опори $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 6$ Ом. Внутрішній опір джерела струму $r = 0,1$ Ом. Визначити сили струмів, що проходять крізь резистори R_1 і R_2 .

3.207. У схемі (рис. 3.38) електрорушійні сили $\mathcal{E}_1 = 1,5$ В, $\mathcal{E}_2 = 2$ В, $\mathcal{E}_3 = 2,5$ В, опори $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом. Внутрішнім опором джерел струму нехтувати. Визначити сили струмів у всіх ділянках кола та різницю потенціалів $\phi_A - \phi_B$ між точками A і B .

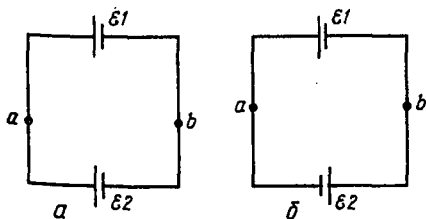


Рис. 3.33

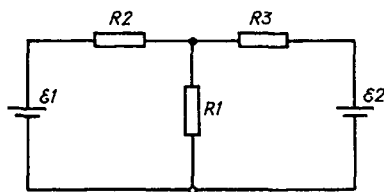


Рис. 3.34

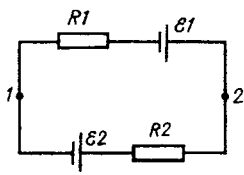


Рис. 3.35

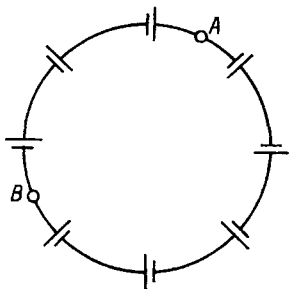


Рис. 3.36

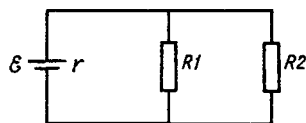


Рис. 3.37

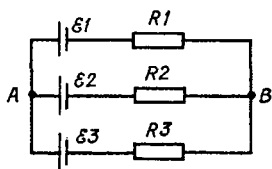


Рис. 3.38

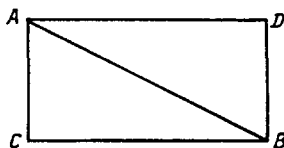


Рис. 3.39

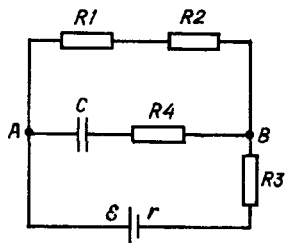


Рис. 3.40

3.208. Чому дорівнює опір дротяного каркаса у вигляді прямокутника зі сторонами a і b та діагоналлю, якщо струм проходить від точки A до точки B (рис. 3.39)? Опір одиниці довжини дроту дорівнює γ . Визначити також опір каркаса, коли струм проходить від точки C до точки D .

3.209. Електричне коло складається з батареї, електрорушійна сила якої $\mathcal{E} = 3$ В, внутрішній опір $r = 1$ Ом, конденсатора ємністю $C = 2$ мкФ і чотирьох резисторів $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом (рис. 3.40). Визначити заряд на обкладках конденсатора. Опором з'єднувальних провідників нехтувати.

3.210. До якої напруги зарядяться конденсатори C_1 і C_2 , приєднані до джерела (рис. 3.41), за умови, коли електрорушійна сила $\mathcal{E} = 2,2$ В, опори $r = 0,4$ Ом, $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, ємності $C_1 = 2$ мкФ, $C_2 = 3$ мкФ?

3.211. За допомогою вольтметра, внутрішній опір якого $R_{\text{вн}} = 200$ Ом, вимірюють напругу на резисторі. Опір резистора $R = 10$ Ом (рис. 3.42). Внутрішній опір джерела ЕРС $r = 1$ Ом. Обчислити, яку відносну похибку δ допускають під час вимірювання, вважаючи, що вольтметр має нескінченно великий опір, тобто його вмикання не змінює сили струму в колі.

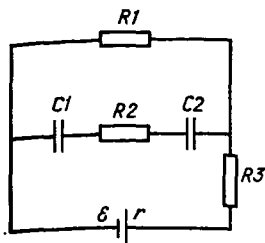


Рис. 3.41

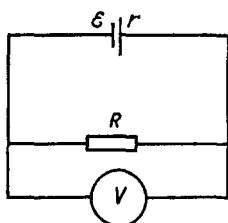


Рис. 3.42

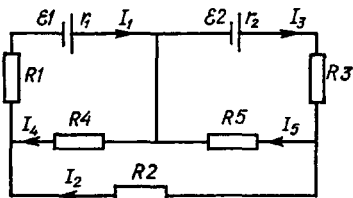


Рис. 3.43

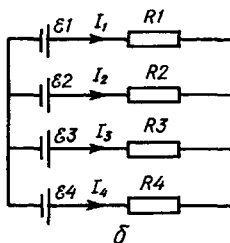
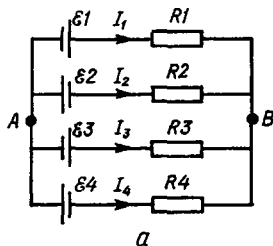


Рис. 3.44

3.212. Встановити розподіл струмів у колі (рис. 3.43), якщо електрорушійні сили $\mathcal{E}_1 = 12$ В, $\mathcal{E}_2 = 8$ В, опори $r_1 = 4$ Ом, $r_2 = 3$ Ом, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $R_3 = 29$ Ом, $R_4 = 8$ Ом, $R_5 = 16$ Ом.

3.213. На рис. 3.44 зображено два розгалужених кола постійного струму. Визначити значення струмів, що проходять крізь резистори в обох колах, коли електрорушійні сили $\mathcal{E}_1 = 1$ В, $\mathcal{E}_2 = 2$ В, $\mathcal{E}_3 = 3$ В, $\mathcal{E}_4 = 4$ В, опори $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом. Внутрішнім опором джерел струму та опором з'єднувальних провідників нехтувати. Як зміняться струми у колі (рис. 3.44, а), якщо роз'єднати провідники у точках А і В?

Робота і потужність електричного струму

3.214. До кінців свинцевого дроту завдовжки $l = 5$ см і діаметра $d = 0,2$ мм прикладена напруга $U = 100$ В. Через який проміжок часу t дріт почне плавитись? Точка плавлення свинцю $t_{\text{пл}} = 327$ °С. Початкову температуру дроту вважати такою, що дорівнює нулеві. Зміною теплоємності свинцю під час нагрівання і розсіюванням теплоти в навколишнє середовище нехтувати.

3.215. Грозава хмара перебуває на висоті $h = 500$ м від поверхні Землі. Визначити енергію розряду W між Землею та хмарою, якщо за

час $t = 0,1$ с пройшов струм, сила якого $I = 200$ А. Напруженість електричного поля, яке вважається однорідним, $E = 2 \cdot 10^5$ В/м.

3.216. Визначити роботу A електричних сил і кількість теплоти Q , що виділяється протягом часу $t = 1$ с: а) в акумуляторі, який заряджається струмом $I_1 = 1$ А при напрузі на полюсах акумулятора $U = 2$ В, коли ЕРС акумулятора $\mathcal{E}_1 = 1,3$ В; б) у батареї акумуляторів, яка дає на зовнішній споживач струм $I_2 = 1$ А при різниці потенціалів на полюсах акумулятора $U_2 = 2$ В, коли ЕРС батареї $\mathcal{E}_2 = 2,6$ В.

3.217. З яким коефіцієнтом корисної дії η працює свинцевий акумулятор, ЕРС якого $\mathcal{E} = 2,15$ В, якщо в зовнішньому колі з опором $R = 0,25$ Ом проходить струм $I = 5$ А? Яку максимальну корисну потужність $P_{\max}$ може дати акумулятор у зовнішньому колі? Як при цьому зміниться ККД?

3.218. Який зовнішній опір R треба підключити до $n = 5$ однакових послідовно з'єднаних джерел (ЕРС кожного $\mathcal{E} = 1,5$ В і внутрішній опір $r = 0,3$ Ом), щоб потужність, яка віддається в зовнішнє коло (корисна потужність), була максимальною? Якими при цьому будуть сила струму I у колі і повна потужність P батареї?

3.219. Коли сила струму $I = 5$ А, то зовнішнє коло джерела споживає потужність $P_1 = 9,5$ Вт, якщо ж опір зовнішнього кола $R = 0,225$ Ом, то споживана потужність $P_2 = 14,4$ Вт. Визначити максимальну потужність $P_{\max}$ в зовнішньому колі. Чому дорівнюватиме при цьому ККД η джерела?

3.220. До затискачів джерела струму, внутрішній опір якого $r = 1$ Ом, під'єднують два однакових резистори з опорами $R = 0,5$ Ом кожний. Спочатку резистори вмикають у коло послідовно, а потім – паралельно. Визначити відношення потужностей, які споживаються в зовнішньому колі у першому і другому випадках.

3.221. Напруга на шинах електростанції $U = 10$ кВ, відстань від споживача $l = 500$ км. Станція передає споживачеві потужність $P = 100$ кВт, причому втрата напруги не повинна перевищувати $\eta = 5$ %. Обчислити: силу струму I в проводах; площу S їх поперечного перерізу; масу m_1 міді, яка потрібна для проведення проводки. Як зміниться необхідна кількість m_2 міді, якщо напругу на вході лінії збільшити у $n = 10$ разів?

3.222. Обчислити силу струму в підвідних проводах під час короткого замикання, якщо на двох плитках з опорами $R_1 = 200$ Ом і $R_2 = 500$ Ом при вмиканні їх по черзі виділяється однакова потужність $P = 200$ Вт.

3.223. Сила струму в провіднику, опір якого $R = 100$ Ом, рівномірно збільшується від нуля до $I_{\max} = 10$ А протягом часу $t_1 = 30$ с. Визначити кількість теплоти Q , яка виділяється за цей час у провіднику.

3.224. Визначити кількість теплоти Q , що виділяється в провіднику, опір якого $R = 10$ Ом, за час $t = 30$ с, якщо: а) сила струму рівномірно

спадає від $I_0 = 3$ А до $I = 0$; 6) напруга на провіднику змінюється за законом $U = k\sqrt{t}$, де $k = 2$ В·с^{-1/2}.

3.225. Визначити питому теплову потужність w струму, якщо довжина провідника $l = 0,2$ м, а на його кінцях підтримується різниця потенціалів $U = 4$ В. Питомий опір провідника $\rho = 1$ мкОм·м.

3.226. Для розжарювання нитки електричної лампи потрібна напруга U_1 . Внаслідок випаровування діаметр нитки зменшився на α %. Якою має бути напруга U_2 , щоб температура нитки не змінилась? Тепловіддача пропорційна площі поверхні нитки.

3.227. У мідному провіднику завдовжки $l = 2$ м, площа поперечного перерізу якого $S = 0,4$ мм², проходить струм. При цьому кожну секунду виділяється $Q = 0,35$ Дж теплоти. Скільки електронів n проходить за час $t = 1$ с крізь поперечний переріз цього провідника?

3.228. Скільки витків N нікелінового дроту потрібно намотати на фарфоровий циліндр діаметра $d = 1,5$ см, щоб виготовити кип'ятильник, в якому протягом часу $t = 5$ хв закипить вода при початковій температурі $T = 283$ К? Маса води $m = 200$ г, діаметр дроту $d_1 = 0,2$ мм, напруга $U = 220$ В. Коефіцієнт корисної дії $\eta = 60$ %.

3.229. Якщо напруга в електричній мережі $U_1 = 120$ В, то вода в електричному чайнику закипає через $t_1 = 20$ хв. Якщо напруга в колі $U_2 = 110$ В, то при тій самій початковій температурі вода закипить через $t_2 = 28$ хв. Вважаючи, що втрати теплоти від чайника в навколишнє середовище пропорційні часові нагрівання, визначити, через який час t_3 закипить вода в чайнику, якщо напруга в колі $U_3 = 100$ В.

3.230. Струм проходить від мідної трубки радіуса $r = 2$ мм до мідної трубки радіуса $R = 4$ см вздовж плоскої алюмінієвої фольги завтовшки $d = 0,1$ мм (рис. 3.45). Яка кількість теплоти Q виділиться в алюмінієвій фользі за час $t = 0,5$ с, якщо проходитиме струм, сила якого $I = 5$ А?

3.231. Конденсатор ємністю $C = 5$ мкФ приєднано до джерела постійного струму, напруга якого $U = 200$ В (рис. 3.46). Потім перемикач Π переводиться з положення 1 в положення 2. Визначити кіль-

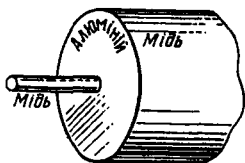


Рис. 3.45

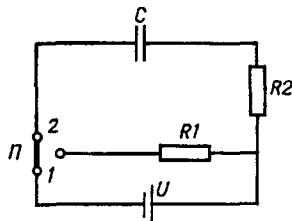


Рис. 3.46

кість теплоти Q , що виділяється в резисторі R_1 . Опір $R_1 = 500$ Ом, опір $R_2 = 300$ Ом. Опором провідників, за допомогою яких з'єднують елементи кола, нехтувати.

Струм у вакуумі, електролітах і газах

3.232. Визначити силу струму насичення I_n в електронній лампі з вольфрамовим катодом завдовжки $l = 3$ см і діаметра $d = 0,1$ мм, якщо температура $T = 2700$ К. Емісійна стала для вольфраму $B = 60$ А/(см²·К²), робота виходу електрона з вольфраму $A = 4,54$ еВ.

3.233. Чому дорівнює робота виходу електронів із металу, якщо підвищення температури нитки розжарювання, зробленої із цього металу, від 2000 К до 2001 К збільшує силу струму насичення в електронній лампі на 1 %?

3.234. У скільки разів струм насичення термоелектронної емісії з торійованого вольфрамового катода при робочій температурі $T = 1800$ К буде більшим, ніж струм насичення з чистого вольфрамового катода при тій самій робочій температурі? Емісійна стала та робота виходу електрона для чистого і торійованого вольфраму відповідно $B_1 = 60$ А/(см²·К²), $A_1 = 4,54$ еВ і $B_2 = 3$ А/(см²·К²), $A_2 = 2,63$ еВ.

3.235. На аноді двохелектродної лампи протягом часу $t = 1$ год її роботи виділяється кількість енергії $W = 63$ Дж. Струм насичення в лампі $I_n = 6,3$ мА. Вважаючи, що теплота виділяється тільки за рахунок кінетичної енергії електронів, визначити швидкість v електронів, які вдаряються об анод, та кількість електронів n_0 , що вилітають з катода за одну секунду.

3.236. Пучок електронів в осцилографі прискорюється анодною напругою $U_a = 500$ В. Обчислити відхилення s променя на екрані, якщо напруга на відхильних пластинах $U = 30$ В, довжина їх $l = 5$ см, відстань між ними $d = 1$ см, а відстань між відхильними пластинами і екраном $L = 10$ см.

3.237. Визначити коефіцієнт дисоціації α водного розчину азотної кислоти, концентрація якої $c = 0,064$ г/см³, якщо питомий опір розчину $\rho = 32$ мОм·м, рухливість позитивних іонів $u_+ = 3,26 \cdot 10^{-7}$ м²/(В·с), а негативних $u_- = 6,4 \cdot 10^{-8}$ м²/(В·с).

3.238. Визначити питомий опір ρ водного розчину хлористого калію KCl, концентрація якого $c = 0,1$ г/см³, коли відомо, що коефіцієнт дисоціації цього розчину $\alpha = 0,77$, рухливість позитивних іонів $u_+ = 6,7 \cdot 10^{-8}$ м²/(В·с), а негативних $u_- = 6,8 \cdot 10^{-8}$ м²/(В·с).

3.239. Яку кількість електроенергії W потрібно витратити для одержання алюмінію масою $m = 2$ кг, якщо електроліз відбувається при напрузі $U = 15$ В, $\eta = 75$ %? Атомна маса алюмінію $A = 27$ г/моль.

3.240. Електролітична ванна, наповнена розчином мідного купоросу, з'єднана з батареєю акумуляторів, електрорушійна сила якої $\mathcal{E} = 4 \text{ В}$ і внутрішній опір $r = 0,1 \text{ Ом}$. Визначити: масу m міді, яка виділяється за 10 хв , якщо ЕРС поляризації $\mathcal{E}_{\text{пол}} = 1,5 \text{ В}$, а опір розчину $R_p = 0,5 \text{ Ом}$; відношення заряду q іона міді до його маси m_0 . Мідь є двоцвалентною.

3.241. Під час електролізу розчину розкладається мідний купорос, маса якого $m = 4,77 \text{ г}$, за час $t = 1 \text{ год}$. Визначити кількість N іонів міді, які нейтралізуються щосекунди на аноді. Який заряд q кожного іону?

3.242. Дві електролітичні ванни з'єднані послідовно. У першій ванні міститься розчин хлористого заліза FeCl_2 , а в другій – розчин хлорного заліза FeCl_3 . Визначити маси заліза й хлору, що виділяються в кожній ванні, під час проходження електричного заряду $Q = 9,65 \cdot 10^7 \text{ Кл}$.

3.243. Під час електролізу розчину сірчаної кислоти витрачається потужність $P = 37 \text{ Вт}$. Визначити опір R електроліту, якщо за час $t = 500 \text{ хв}$ виділяється водень, маса якого $m = 0,3 \text{ г}$.

3.244. Визначити еквівалентну концентрацію η , еквівалентну електропровідність Λ і коефіцієнт дисоціації α водного розчину хлористого калію KCl . Концентрація розчину $c = 0,1 \text{ г/см}^3$. Питомий опір такого розчину $\rho = 7,4 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ при 18°C , а рухливості іонів K^+ і Cl^- при цій температурі відповідно $u_+ = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, $u_- = 6,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

3.245. Дві електролітичні ванни з'єднані послідовно. У першій ванні виділився цинк, маса якого $m_1 = 3,9 \text{ г}$, у другій за той самий час – залізо, маса якого $m_2 = 2,24 \text{ г}$. Атомні маси цинку й заліза відповідно $A_1 = 65 \text{ г/моль}$, $A_2 = 56 \text{ г/моль}$. Валентність цинку $z_1 = 2$. Яка валентність z_2 заліза?

3.246. Дві електролітичні ванни з'єднані послідовно. Залежність швидкості виділення металів на електродах від часу графічно зображена на рис. 3.47. Відомо, що протягом часу $t = 10 \text{ хв}$ виділилася мідь, маса якої $m_1 = 50 \text{ г}$, і невідомий метал, маса якого $m_2 = 150 \text{ г}$. Визначити електрохімічний еквівалент k невідомого металу. Встановити залежність струму від часу.

3.247. Найчистіша вода при температурі 18°C має питому електропровідність $\sigma = 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ 1/(\text{См}\cdot\text{см})}$. Вважаючи, що електропровідність води зумовлена дисоціацією молекули води H_2O на іони H^+ і $(\text{OH})^-$, встановити ступінь дисоціації α води при цій температурі, якщо рухливості іонів H^+ і $(\text{OH})^-$ відповідно $u_+ = 3,26 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, $u_- = 1,80 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

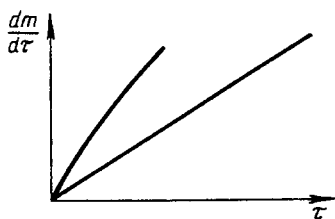


Рис. 3.47

3.248. Обчислити рівноважну концентрацію n іонів у сухому атмосферному повітрі, якщо в ньому під впливом космічного випромінювання та залишків радіоактивних речовин, що наявні в земній корі, щосекунди виникає в середньому $\Delta n_i = 6,4$ пари іонів у 1 см^3 , а коефіцієнт рекомбінації $r = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{с}$.

3.249. Визначити густину струму провідності j в атмосфері, якщо концентрація одновалентних іонів, які зумовлюють провідність, $n = 10^9 \text{ м}^{-3}$. Напруженість електричного поля Землі $E = 130 \text{ В/м}$. Рухливість позитивних іонів $u_+ = 1,37 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$, а негативних $u_- = 1,89 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$.

3.250. У сухому атмосферному повітрі проходить струм, густина якого $j = 10^{-20} \text{ А/см}^2$, відстань між електродами $d = 3 \text{ см}$, рівноважна концентрація іонів $n = 10^2 \text{ см}^{-3}$, коефіцієнт рекомбінації $r = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{с}$. Чи виконується в цьому разі закон Ома? Іони вважати однозарядними.

3.251. Площа електродів іонізаційної камери $S = 100 \text{ см}^2$, відстань між ними $d = 6,5 \text{ см}$. Іонізатор створює у 1 см^3 щосекунди $\Delta n_i = 10^9 \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ однакових іонів кожного знаку. Коефіцієнт рекомбінації $r = 10^{-6} \text{ см}^3/\text{с}$. Рухливості іонів $u_+ = u_- = 1 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Яка найбільш можлива кількість n_0 пар іонів у 1 см^3 камери? Який струм I проходить між електродами іонізаційної камери, якщо до електродів прикладена різниця потенціалів $U = 20 \text{ В}$? Яку частку струму насичення I_n становить визначений струм? Через який час t після припинення дії іонізатора кількість іонів n_i внаслідок рекомбінації зменшиться у 2 рази?

3.252. Електрон влітає в однорідне електричне поле проти напрямку його напруженості. Пройшовши різницю потенціалів $U = 6 \text{ В}$, він стикається з атомом водню. Якою має бути початкова швидкість електрона, щоб іонізувати атом водню? Енергія іонізації атома водню $\epsilon_{i0} = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$.

3.253. Іонізований газ містить електрони, іони та нейтральні молекули. Внаслідок дії зовнішнього електричного поля електрони та іони, прискорюючись, збільшують свою енергію й під час зіткнення з нейтральною молекулою можуть її іонізувати. Які частинки – електрони чи іони – ефективніше іонізують газ?

3.254. Чи можна вважати, що простір між електродами люмінесцентної лампи заповнений плазмою?

3.255. Чи можна розглядати сукупність електронів провідності та іонів металу як ізотермічну плазму?

3.256. Чому одна з характеристик плазми називається радіусом екранування?

3.257. Посудину з лінійними розмірами $l = 10 \text{ см}$ заповнено газом, який містить однозарядні іони обох знаків. Концентрація іонів $n = 10^8 \text{ м}^{-3}$ при температурі $T = 1000 \text{ К}$. Чи можна вважати цей газ плазмою?

3.258. У плазмі тліючого розряду електронна температура $T = 5 \cdot 10^4$ К. Чи буде ця плазма ідеальною, якщо її тиск $p = 10^3$ Па? Вважати, що стан плазми описується рівнянням стану класичного ідеального газу.

3.6. ПОСТІЙНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

Індукція магнітного поля, яке утворюється елементом струму Idl (закон Біо – Савара – Лапласа),

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I [d\mathbf{r}]}{r^3}, \quad (3.6.1)$$

де μ_0 – магнітна стала; μ – відносна магнітна проникність середовища; $d\mathbf{l}$ – вектор елемента довжини провідника, проведений у напрямі струму; $\mathbf{r}$ – радіус-вектор, проведений з середини елемента струму в точку, в якій визначається $d\mathbf{B}$.

Зв'язок магнітної індукції $\mathbf{B}$ і напруженості $\mathbf{H}$ магнітного поля:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}. \quad (3.6.2)$$

Принцип суперпозиції (накладання) магнітних полів

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}. \quad (3.6.3)$$

Магнітні поля найпростіших систем:

а) точкового заряду q , що рухається з нерелятивістською швидкістю $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{q [\mathbf{v} \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (3.6.4)$$

де $\mathbf{r}$ – радіус-вектор, проведений від заряду в дану точку поля:

б) прямолінійного відрізка провідника зі струмом (за модулем)

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2), \quad (3.6.5)$$

де r_0 – відстань від провідника до точки; φ_1, φ_2 – кути між напрямом струму й напрямом від кінців провідника до точки, в якій визначається індукція магнітного поля:

в) нескінченно довгого прямого провідника зі струмом (за модулем)

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r_0}; \quad (3.6.6)$$

г) на осі колового струму

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{(R^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (3.6.7)$$

де $\mathbf{p}_m$ – магнітний момент колового струму, $\mathbf{p}_m = I S \mathbf{n}$; тут S – площа, яка охоплюється струмом; $\mathbf{n}$ – одиничний вектор додатної нормалі, напрям якого визначають за

правилом гвинта: R – радіус колового струму; r – відстань від центра колового струму до даної точки;

д) соленоїда в довільній точці, що лежить на його осі (за модулем),

$$B = \frac{\mu_0 \mu n I}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1), \quad (3.6.8)$$

де n – кількість витків на одиницю довжини соленоїда; α_1, α_2 – кути між напрямом поля в соленоїді й відрізками прямих, проведених з даної точки до кінців соленоїда;

е) у середині достатньо довгого соленоїда в точці, віддаленій від його кінців,

$$B = \mu_0 \mu n I. \quad (3.6.9)$$

Сила, що діє з боку магнітного поля на внесений у нього елемент електричного струму (сила Ампера),

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{B}]. \quad (3.6.10)$$

Сила взаємодії двох прямих, нескінченно довгих паралельних провідників зі струмами I_1 і I_2 :

$$dF = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b} dl, \quad (3.6.11)$$

де b – відстань між провідниками; dl – відрізок провідника.

У разі сумісної дії електричного $\mathbf{E}$ і магнітного $\mathbf{B}$ полів сила, яка діє на заряджену частинку із зарядом q , що рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$ (сила Лоренца),

$$\mathbf{F}_\text{Л} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (3.6.12)$$

Холлівська поперечна різниця потенціалів

$$\Delta\varphi = R_X \frac{IB}{b}, \quad (3.6.13)$$

де b – товщина пластинки; R_X – постійна Холла, $R_X = 1/(en)$; тут n – концентрація електронів.

Циркуляція вектора $\mathbf{B}$ (закон повного струму для магнітного поля у вакуумі)

$$\oint_L B_l dl = \mu_0 \sum I_k, \quad (3.6.14)$$

де L – контур довільної форми; B_l – проекція вектора індукції на дотичну до контуру L у напрямі обходу; dl – елемент довжини контуру; $\sum I_k$ – алгебрична сума сил струмів, що охоплюються контуром.

Потік вектора $\mathbf{B}$ крізь довільну поверхню S

$$\Phi_B = \int_S B_n dS, \quad (3.6.15)$$

де B_n – проекція вектора $\mathbf{B}$ на напрям нормалі до площини; dS – елементарна площа.

$$\oint_S B_n dS = 0. \quad (3.6.16)$$

Момент сил, що діють на контур зі струмом у магнітному полі,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}]. \quad (3.6.17)$$

Елементарна робота з переміщення провідника зі струмом у магнітному полі

$$dA = Id\Phi, \quad (3.6.18)$$

де $d\Phi$ – магнітний потік, який перетинається провідником.

Робота з переміщення замкнутого контуру зі струмом у магнітному полі

$$A = I\Delta\Phi, \quad (3.6.19)$$

де $\Delta\Phi$ – зміна магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром.

Магнітне поле прямого, колового та соленоїдного струмів

3.259. Двома нескінченно довгими проводами, відстань між якими $d = 10$ см, в одному напрямі проходять струми, сила кожного $I = 20$ А. Визначити індукцію магнітного поля B в точці, що міститься на відстані $r_1 = 8$ см від одного і $r_2 = 6$ см від іншого проводів.

3.260. Два довгих прямих провідники зі струмами, сила кожного $I = 10$ А, розміщені взаємно перпендикулярно. Обчислити індукцію магнітного поля B в точці, що лежить на середині перпендикуляра до осей цих провідників, якщо довжина перпендикуляра $d = 10$ см.

3.261. Струм, сила якого $I = 16$ А, проходить по нескінченно довгому проводу, зігнутому під прямим кутом (рис. 3.48). Визначити індукцію магнітного поля B в точках, що містяться на відстані $r = 10$ см від вершини: а) на продовженні однієї зі сторін кута; б) на бісектрисі кута.

3.262. По проводу, який зігнуто у вигляді квадрата зі стороною $a = 60$ см, проходить постійний струм. Сила струму $I = 3$ А. Визначити індукцію магнітного поля B у центрі квадрата.

3.263. При якій силі струму I , що проходить по тонкому провідному кільцю радіуса $R = 0,2$ м, індукція магнітного поля B в точці, рівновіддаленій від усіх точок кільця на відстань $r = 0,3$ м, дорівнюватиме 20 мкТл?

3.264. Тангенс-гальванометром називається вертикально розташована плоска котушка великого діаметра. У центрі котушки розміщено невеличку магнітну стрілку, яка може обертатися навколо вертикальної осі (компас). Площину котушки встановили у площині магнітного меридіана Землі. Обчислити горизонтальну складову індукції магнітного поля Землі B_H ,

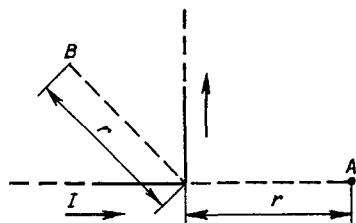


Рис. 3.48



Рис. 3.49

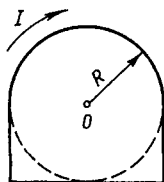


Рис. 3.50

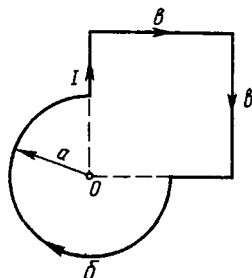
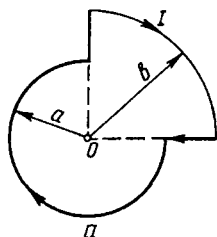


Рис. 3.51

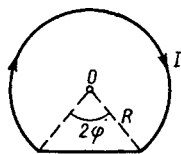


Рис. 3.52

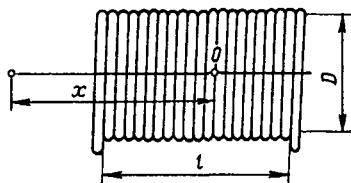


Рис. 3.53

якщо сила струму в котушці $I = 0,5$ А, кількість витків $N = 5$, радіус котушки $R = 30$ см, кут відхилення стрілки $\alpha = 15^\circ$.

3.265. По тонкому дротяному кільцю проходить струм. Не змінюючи сили струму в провіднику, йому надали форму квадрата. У скільки разів зміниться індукція магнітного поля в центрі контуру?

3.266. Нескінченно довгий тонкий провідник зі струмом, сила якого $I = 20$ А, має згин (плоску петлю) радіуса $R = 5$ см. Визначити в точці O індукцію магнітного поля B , створеного цим струмом (рис. 3.49).

3.267. По плоскому контуру з тонкого провідника проходить струм, сила якого $I = 20$ А (рис. 3.50). Визначити індукцію магнітного поля B в точці O . Радіус кола $R = 5$ см.

3.268. Визначити напруженість магнітного поля H в точці O контурів зі струмом I , які показано на рис. 3.51, а, б.

3.269. Струм, сила якого $I = 12$ А, проходить по замкнутому провіднику (рис. 3.52). Радіус зігнутої частини провідника $R = 0,12$ м, кут $2\varphi = 90^\circ$. Визначити індукцію магнітного поля B в точці O .

3.270. У соленоїді завдовжки $l = 1$ м, що містить $N = 1\,000$ витків, рівномірно намотаних, проходить струм, сила якого $I = 1$ А (рис. 3.53). Діаметр соленоїда $D = 2$ см. Визначити індукцію магнітного поля B в точках, що лежать від його середини на відстані $x = 0; 25; 40; 45; 50; 60$ см.

Магнітне поле заряду, що рухається

3.271. Електрон, що рухається прямолінійно, створює в точці, яка міститься від нього на відстані $r = 10$ нм, магнітне поле. Максимальне значення напруженості магнітного поля $H_{\max} = 640$ А/м. Визначити швидкість v електрона.

3.272. Точковий заряд рухається зі швидкістю $v = 900$ м/с. У деякий момент часу в точці спостереження A напруженість електричного поля цього заряду $E = 600$ В/м, а кут між векторами E і v $\alpha = 30^\circ$. Обчислити індукцію магнітного поля B даного заряду в точці A в цей момент часу.

3.273. Згідно з теорією Бора електрон в атомі водню рухається навколо ядра по коловій орбіті радіуса $r = 53$ пм. Визначити індукцію магнітного поля B , яку створює електрон у центрі колової орбіти.

Сила Ампера

3.274. По мідному стрижню, що лежить поперек двох горизонтальних рейок, розміщених на відстані $d = 0,3$ м одна від одної, проходить струм силою $I = 50$ А. Маса стрижня $m = 0,14$ кг. Магнітне поле, яке перпендикулярне до площини рейок, спричиняє рівномірний рух стрижня. Визначити індукцію магнітного поля B , якщо коефіцієнт тертя ковзання стрижня об рейки $f = 0,6$.

3.275. По двох паралельних провідниках, довжина кожного $l = 3$ м, проходять струми однакової сили. Відстань між провідниками $d = 1$ см. Струми взаємодіють між собою із силою $F = 0,5$ мН. Визначити силу струму I в провідниках.

3.276. По довгій горизонтальній шині проходить струм, сила якого $I = 500$ А. На якій відстані d від шини паралельно їй у тій самій вертикальній площині має бути розміщений довгий мідний провід, по якому проходить такої самої сили струм, щоб провід перебував у рівновазі? Чи буде ця рівновага стійкою? Площа перерізу проводу $S = 25$ мм².

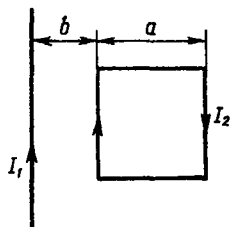


Рис. 3.54

3.277. У магнітне поле прямого струму, сила якого $I_1 = 20$ А, вміщено дрітну квадратну рамку. Сторона рамки $a = 10$ см. По рамці проходить струм, сила якого $I_2 = 9$ А. Провідник зі струмом розміщується в площині рамки. Одна сторона рамки паралельна прямому струмові й міститься від нього на відстані $b = 5$ см (рис. 3.54). Визначити результуючу силу F , що діє на рамку.

3.278. Провід у вигляді тонкого півкільця радіуса $R = 10$ см міститься в однорідному магнітному полі, індукція якого $B = 50$ мТл. По проводу проходить струм, сила якого $I = 10$ А. Визначити силу F , що діє на провід, якщо лінії індукції: а) лежать у площині півкільця перпендикулярно до його діаметра; б) перпендикулярні до площини півкільця. Як зміниться сила, якщо провід випрямити?

3.279. По тонкому провіднику у вигляді кільця радіуса $r = 20$ см проходить струм, сила якого $I = 100$ А. Перпендикулярно до площини кільця збуджено однорідне магнітне поле, індукція якого $B = 20$ мТл. Обчислити силу F , що розтягує кільце.

3.280. Два прямолінійних довгих паралельних провідники розміщені на відстані $r_1 = 10$ см один від одного. По провідниках в одному напрямі проходять струми, сили яких $I_1 = 20$ А і $I_2 = 30$ А. Яку роботу треба виконати (на одиницю довжини), щоб розсунути ці провідники на відстань $r_2 = 20$ см?

Магнітний момент. Контур зі струмом у магнітному полі

3.281. Визначити магнітний момент p_m колового витка зі струмом, якщо радіус витка $R = 10$ см, індукція магнітного поля у його центрі $B = 6$ мкТл.

3.282. Вважаючи, що електрон в атомі водню обертається по коловій орбіті радіуса $r = 53$ пм, обчислити його орбітальний магнітний момент p_m . Визначити також відношення орбітального магнітного моменту p_m до моменту імпульсу L орбітального руху електрона.

3.283. Тонке кільце, маса якого $m = 15$ г, радіус $r = 12$ см, рівномірно заряджене з лінійною густиною $\tau = 10$ нКл/м. Кільце рівномірно обертається відносно осі, яка є перпендикулярною до площини кільця й проходить через її центр. Визначити відношення магнітного моменту p_m колового струму, що створюється кільцем, до його моменту імпульсу L .

3.284. Заряд $q = 0,2$ мкКл рівномірно розподілений по поверхні диска радіуса $R = 10$ см, який рівномірно обертається з частотою $\nu = 20$ с⁻¹ відносно осі, перпендикулярної до площини диска. Вісь проходить через

його центр. Визначити магнітний момент p_m колового струму, що створюється диском, та встановити відношення магнітного моменту до моменту імпульсу (p_m/L), якщо маса диска $m = 100$ г.

3.285. На осі колового струму, сила якого $I_1 = 10$ А, радіус $R = 10$ см, на відстані $h = 2$ м від його центра розміщено невеликий виток, по якому проходить струм силою $I_2 = 2$ А. Вісь колового струму лежить у площині витка, площа якого $S = 8$ см². Визначити механічний момент M , що діє на виток.

3.286. Прямокутна рамка, по якій проходить струм силою $i = 2$ А, розміщена в однорідному магнітному полі так, що її площа перпендикулярна до лінії магнітної індукції. Індукція магнітного поля $B = 1$ Тл. На рамку починає діяти сталий зовнішній обертальний момент $M = 1$ Нм. Яку кутову швидкість ω матиме рамка, коли вона повернеться на кут $\varphi = 180^\circ$, якщо її момент інерції $I = 10^{-2}$ кг·м², а площа $S = 10^3$ см²? Сила струму під час обертання рамки підтримується незмінною.

3.287. По витку радіуса $R = 2$ см проходить струм, сила якого $I = 0,5$ А. Виток підвішений у магнітному полі Землі, горизонтальна складова якого $B_r = 20$ мкТл. Коли виток перебуватиме в стійкій рівновазі і чому при цьому дорівнюватиме індукція магнітного поля в його центрі?

3.288. Рамка дзеркального гальванометра, що має $N = 500$ витків, площа її $S = 2$ см², підвішена на тонкій нитці завдовжки $l = 10$ см у проміжку між полюсами магніту, який створює магнітне поле, напрямлене радіально до осі обертання рамки. Індукція магнітного поля $B = 0,20$ Тл. Яка ціна поділки шкали c , якщо вона розташована на відстані $L = 1,0$ м від дзеркальца, а поділки нанесені через $d = 1,0$ мм? Радіус нитки $r = 50$ мкм, а модуль зсуву матеріалу нитки $G = 45$ ГПа.

Сила Лоренца

3.289. Електрон, на який діє прискорювальна різниця потенціалів $U = 3,5$ кВ, влітає в однорідне магнітне поле, індукція якого $B = 0,01$ Тл, перпендикулярно до лінії магнітної індукції й рухається по колу радіуса $R = 2$ см. Обчислити відношення заряду електрона до його маси.

3.290. Визначити релятивістські маси електрона та протона, що рухаються в магнітному полі, індукція якого $B = 1$ Тл, по колу радіуса $R = 10$ см.

3.291. З однієї точки в одному напрямі з однаковими швидкостями $v = 10^6$ см/с вилітає потік іонів водню й дейтерію. Однорідне магнітне поле, індукція якого $B = 2$ мТл, напрямлене перпендикулярно до швидкості. Визначити відстань Δx між точками, в яких іони, що описали півколо, зіткнулися з площиною, перпендикулярною до напрямку початкової швидкості.

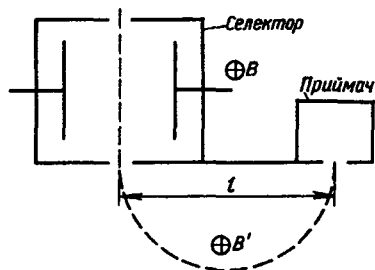


Рис. 3.55

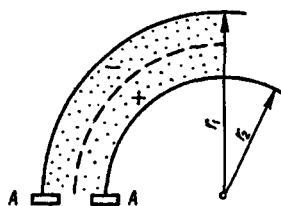


Рис. 3.56

3.292. Електрон, прискорений різницею потенціалів $U = 3$ кВ, влітає в магнітне поле соленоїда під кутом $\alpha = 30^\circ$ до його осі. Кількість витків соленоїда $N = 2000$, його довжина $l = 25$ см, сила струму $I = 2,5$ А. Визначити крок h гвинтової траєкторії електрона в магнітному полі соленоїда.

3.293. Електрон рухається в однорідному магнітному полі, індукція якого $B = 4$ мТл. Визначити період T обертання електрона.

3.294. Електрон рухається по колу радіуса $R = 1$ см в однорідному магнітному полі, індукція якого $B = 0,2$ Тл. Визначити магнітний момент p_m еквівалентного колового струму.

3.295. До пластин конденсатора, відстань між якими $d = 1$ см, прикладено напругу $U = 20$ В. Перпендикулярно до напрямку електричного поля в конденсаторі накладено однорідне магнітне поле. Визначити індукцію B магнітного поля, при якому протон, що влетів у конденсатор паралельно його пластинам зі швидкістю $v = 2$ мм/с, рухатиметься прямолінійно.

3.296. Електрон влітає в суміжні за напрямом однорідні електричне та магнітне поля зі швидкістю $v = 1$ Мм/с. Напруженість електричного поля $E = 100$ В/м, індукція магнітного поля $B = 10^{-4}$ Тл. Обчислити прискорення a електрона, якщо напрям його швидкості: а) є перпендикулярним до векторів $\mathbf{E}$ та $\mathbf{B}$; б) збігається із загальним напрямом векторів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$.

3.297. Індукція магнітного поля циклотрона $B = 1$ Тл. Яка частота ν прискорювального поля між дуантами, якщо в циклотроні прискорюються протони?

3.298. У мас-спектрометрі Бейнбриджа (рис. 3.55) відстань між вихідною щілиною селектора швидкостей і вхідною щілиною реєструючого іони приладу $l = 40$ см. Індукція магнітного поля $B' = B = 5 \cdot 10^{-2}$ Тл. У разі повільної зміни напруженості електричного поля селектора спостерігаються піки іонного струму в приймачі при значеннях $E_1 = 120$ В/см і $E_2 = 160$ В/см. Визначити атомні маси A_1 і A_2 відповідних іонів, вважаючи їх однозарядними. Ідентифікувати ці іони, тобто вказати, якому хімічному елементу вони відповідають.

3.299. У конденсаторі, електродами якого є частини коаксіальних циліндричних поверхонь радіусами $r_1 = 6$ см і $r_2 = 5$ см, уздовж осі циліндрів діє однорідне магнітне поле, індукція якого $B = 0,2$ Тл. Крізь вузьку щілину в діафрагмі AA (рис. 3.56) у конденсатор влітає α -частинка, енергія якої $\varepsilon = 10^3$ еВ. Яку різницю потенціалів U потрібно прикласти між електродами конденсатора, щоб α -частинка рухалась у конденсаторі на однаковій відстані від електродів? Зовнішній електрод має від'ємний потенціал.

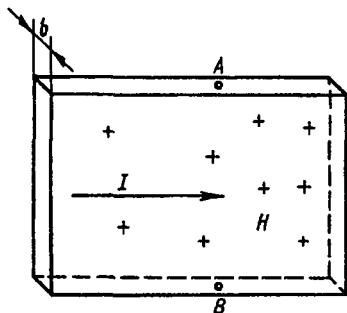


Рис. 3.57

3.300. Діаметр дуантів циклотрона, призначеного для прискорення протонів, $d = 1$ м, індукція магнітного поля, під дією якого протони рухаються по колу, $B = 11,2$ Тл. Амплітуда напруги між дуантами $U = 100$ кВ. Визначити максимальну енергію W , яку можуть одержати протони, та швидкість v при виході їх із циклотрона, а також час t , протягом якого відбувалось прискорення. Показати, що для нерелятивістської частинки період її обертання по колу не залежить від прискорювальної напруги.

3.301. Для одержання частинок великих енергій їх розганяють в електричних полях до швидкостей, близьких до швидкості світла у вакуумі. У резонансних прискорювачах рух частинок по кругових орбітах відбувається внаслідок дії однорідного магнітного поля. Виходячи з умови, що доцентровою силою є сила Лоренца, встановити зв'язок між повною релятивістською енергією частинки ε , індукцією магнітного поля B , циклічною частотою обертання частинки на орбіті ω та її зарядом q .

3.302. У металевій стрічці завтовшки $b = 0,1$ мм проходить струм, сила якого $I = 10$ А. Стрічка розміщена в магнітному полі, напруженість якого $H = 8 \cdot 10^4$ А/м. Лінії напруженості є перпендикулярними до стрічки. Визначити різницю потенціалів U_{AB} між точками A і B (рис. 3.57). Концентрація електронів провідності $n = 9 \cdot 10^{27}$ м $^{-3}$.

3.303. Показати, що під час проходження струму в провіднику, який міститься в однорідному магнітному полі з індукцією B , нормальною до напрямку струму, відношення напруженості поля Холла до напруженості поля, яке створює струм у провіднику, $E_x/E = B/(ner)$, де n – концентрація електронів провідності, r – питомий опір провідника.

3.304. Визначити, у скільки разів постійна Холла в міді є більшою, ніж у алюмінію, коли відомо, що в алюмінії на один атом у середньому припадає два електрони, а в міді – 0,8 вільного електрона. Густина міді та алюмінію відповідно 8,93 та 2,7 г/см 3 .

Циркуляція вектора магнітної індукції $\mathbf{B}$

3.305. Визначити циркуляцію вектора магнітної індукції $\mathbf{B}$ вздовж контуру L (рис. 3.58). Напрямок обходу вказаний на рисунку, сили струмів $I_1 = I_2 = 1 \text{ А}$, $I_3 = 2 \text{ А}$.

3.306. Визначити циркуляцію вектора магнітної індукції $\mathbf{B}$ для замкнених контурів 1, 2 і 3 (рис. 3.59), якщо сили струмів $I_1 = 1 \text{ А}$ та $I_2 = 2 \text{ А}$.

3.307. Визначити, застосувавши теорему про циркуляцію вектора магнітної індукції $\mathbf{B}$, індукцію магнітного поля на осі тороїду без осердя. По обмотці тороїду з $N = 2000$ витків проходить струм, сила якого $I = 5 \text{ А}$. Діаметр тороїду по середній лінії $D = 50 \text{ см}$.

3.308. Обчислити індукцію магнітного поля B довгого прямого проводу радіуса $R = 3 \text{ мм}$ у точках, які лежать на відстанях $r_1 = 2 \text{ мм}$ і $r_2 = 5 \text{ мм}$ від його осі. Сила струму в проводі $I = 6 \text{ А}$.

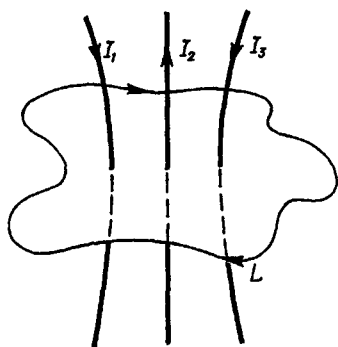


Рис. 3.58

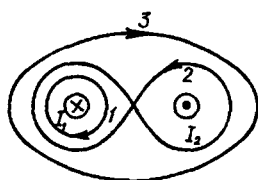


Рис. 3.59

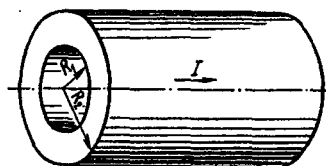


Рис. 3.60

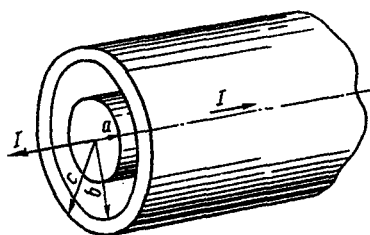


Рис. 3.61

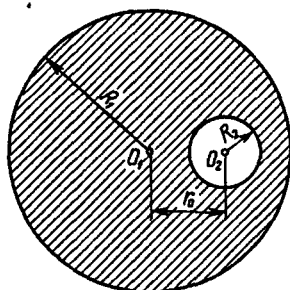


Рис. 3.62

3.309. Струм силою I проходить по порожнистому провідному циліндру вздовж його осі (рис. 3.60). Внутрішній радіус циліндра R_1 , зовнішній – R_2 . Густина струму по перерізу провідника є однаковою. Визначити індукцію магнітного поля B на відстанях від осі: а) $r < R_1$; б) $R_1 < r < R_2$; в) $r > R_2$.

3.310. Кабель зроблений з проводу та охоплюючого його коаксіального провідного циліндра, по якому проходить струм у напрямі, протилежному до напрямку струму в проводі (рис. 3.61). Сила струму $I = 10$ А, густини струмів є однаковими по перерізу. Радіус центрального проводу $a = 5$ мм, внутрішній і зовнішній радіуси циліндра відповідно $b = 10$ мм і $c = 14$ мм. Простір між проводом і циліндром заповнено діелектриком. Визначити магнітну індукцію на різних відстанях r від осі: а) у середині центрального проводу, $r_1 = 3$ мм; б) у просторі між провідниками, $r_2 = 7$ мм; в) у середині циліндра, $r_3 = 13$ мм; г) поза кабелем, $r_4 = 20$ мм.

3.311. Уздовж осі довгого провідного циліндра радіуса R_1 проходить постійний струм силою I . У середині міститься циліндрична порожнина радіуса R_2 , вісь якої зміщена відносно осі циліндра на відстань r_0 (рис. 3.62). Визначити індукцію магнітного поля як функцію відстані осі циліндра в будь-якій точці радіальної прямої, що проходить через вісь циліндричної порожнини.

3.312. Застосувавши теорему про циркуляцію вектора магнітної індукції, довести, що магнітне поле нескінченного довгого соленоїда: а) однорідне; б) дорівнює нулеві зовні соленоїда.

Потік вектора магнітної індукції.

Робота з переміщення провідника зі струмом у магнітному полі

3.313. В однорідному магнітному полі, індукція якого $B = 0,05$ Тл, розміщується плоский контур. Площа контуру $S = 20$ см². Визначити магнітний потік Φ , що пронизує контур, якщо площина його утворює кут $\Phi = 30^\circ$ з лініями індукції.

3.314. У середній частині соленоїда, який містить $n = 10$ витків на кожний сантиметр довжини, вміщено круговий виток діаметра $d = 1$ см. Площина витка розміщена під кутом $\alpha = 30^\circ$ до осі соленоїда. Визначити магнітний потік Φ , що пронизує виток, якщо по обмотці соленоїда проходить струм, сила якого $I = 10$ А.

3.315. В одній площині з нескінченно довгим проводом, по якому проходить струм силою $I = 5$ А, розміщено прямокутну рамку ($l_1 = 20$ см, $l_2 = 10$ см). Довші сторони рамки є паралельними прямому струмові, ближча до проводу сторона рамки розміщена на відстані $a = 5$ см від нього. Визначити потік вектора $\mathbf{B}$ крізь площину рамки.

3.316. Струм, сила якого $I = 10$ А, проходить по довгому прямому провіднику круглого перерізу. Обчислити магнітний потік Φ , який пронизує одну з половин осьового перерізу провідника на довжині $l = 2$ м.

3.317. Соленоїд, довжина якого $l = 3$ м і площа поперечного перерізу $S = 20$ см², містить $N = 3\,500$ витків. Визначити повний магнітний потік, зчеплений з усіма витками соленоїда Ψ , якщо сила струму в обмотці $I = 10$ А.

3.318. В однорідне магнітне поле, індукція якого $B = 0,05$ Тл, вміщено прямий провідник завдовжки $l = 10$ см, розміщений перпендикулярно до ліній магнітної індукції. По провіднику проходить струм, сила якого $I = 2$ А. Під дією сил поля провідник перемістився на відстань $x = 4$ см. Обчислити роботу A сил поля.

3.319. Квадратний контур зі стороною $a = 10$ см, по якому проходить струм, міститься в магнітному полі ($B = 0,8$ Тл) під кутом $\alpha = 50^\circ$ до ліній магнітної індукції. Сила струму $I = 6$ А. Яку роботу A треба виконати, щоб не змінюючи силу струму в контурі, змінити його форму на колову?

3.320. В однорідному магнітному полі, індукція якого $B = 1$ Тл, розміщується плоска котушка з $N = 100$ витків радіуса $r = 10$ см, площа якої утворює кут $\beta = 60^\circ$ з напрямом поля. По котушці проходить струм, сила якого $I = 10$ А. Визначити роботу A , яку потрібно виконати для видалення цієї котушки з магнітного поля.

3.321. Плоский контур зі струмом, сила якого $I = 50$ А, розміщено в однорідному магнітному полі ($B = 0,6$ Тл) так, що нормаль до контуру є перпендикулярною до ліній магнітної індукції. Визначити роботу A , яка

виконується силами поля у разі повільного повертання контуру навколо осі, розміщеної в площині контуру, на кут $\alpha = 30^\circ$. Площа контуру $S = 200$ см². При повороті контуру сила струму підтримується незмінною.

3.322. В одній площині з нескінченно довгим проводом, по якому проходить струм силою $I = 5$ А, розміщено прямокутну рамку ($l_1 = 20$ см, $l_2 = 10$ см). По рамці проходить струм, сила якого $I_1 = 0,2$ А. Довші сторони рамки є паралельними прямому струмові, ближча до про-

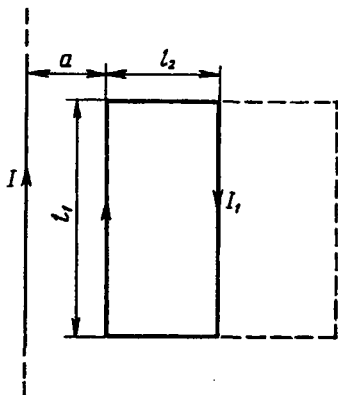


Рис. 3.63

відстані $a = 5$ см, струм у ній того самого напрямку, що й у проводі (рис. 3.63). Визначити роботу $A_{\text{зовн}}$, яку треба виконати, щоб повернути рамку на кут $\alpha = \pi$ навколо дальшої довгої сторони рамки.

3.7. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ

ЕРС електромагнітної індукції (закон Фарадея)

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.7.1)$$

Якщо контур, в якому індукується ЕРС, містить N витків, то

$$\mathcal{E} = -N d\Phi/dt = -d\Psi/dt, \quad (3.7.1a)$$

де Ψ – потокозчеплення, $\Psi = N\Phi$.

Різниця потенціалів U , яка виникає на кінцях провідника завдовжки l , що рухається зі швидкістю v в однорідному магнітному полі з індукцією B ,

$$U = Blv \sin \alpha, \quad (3.7.2)$$

де α – кут між векторами v і B .

ЕРС індукції, що виникає в рамці, яка містить N витків й обертається з кутовою швидкістю ω в однорідному магнітному полі,

$$\mathcal{E} = BNS\omega \sin \omega t. \quad (3.7.3)$$

Кількість електрики, що проходить у контурі під час зміни потокозчеплення,

$$Q = \Delta\Psi/R. \quad (3.7.4)$$

Потокозчеплення контуру

$$\Psi = LI, \quad (3.7.5)$$

де L – індуктивність контуру.

Індуктивність довгого соленоїда та тонкого тороїду

$$L = \mu_0 \mu n^2 V, \quad (3.7.6)$$

де n – кількість витків на одиницю довжини соленоїда (тороїду); V – об'єм соленоїда (тороїду).

ЕРС самоіндукції

$$\mathcal{E}_a = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.7.7)$$

Взаємна індуктивність контурів:

$$\Phi_{12} = L_{12} I_2. \quad (3.7.8)$$

ЕРС взаємної індукції

$$\mathcal{E}_{12} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (3.7.9)$$

Миттєві значення сили струму, що виникають під час замикання та розмикання електричного кола з постійною ЕРС $\mathcal{E}_0$, у колі, яке має:

а) індуктивність L та опір R

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right); \quad I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}; \quad (3.7.10)$$

б) ємність C та опір R

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (3.7.11)$$

Енергія магнітного поля струму

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (3.7.12)$$

Взаємна енергія двох струмів

$$W_{12} = L_{12}I_1I_2. \quad (3.7.13)$$

Об'ємна густина енергії магнітного поля

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}. \quad (3.7.14)$$

Електромагнітна індукція

3.323. Встановити напрям індукційного струму в металевому кільці, якщо вздовж його осі вводиться постійний магніт, спрямований південним полюсом у центр кільця. Те саме, якщо магніт виводиться.

3.324. Прямий дрід, довжина якого $l = 40$ см, рухається в однорідному магнітному полі зі швидкістю $v = 5$ м/с перпендикулярно до ліній магнітної індукції. Різниця потенціалів між кінцями дроту $U = 0,6$ В. Обчислити індукцію магнітного поля B .

3.325. Провідник AB (рис. 3.64) завдовжки $l = 30$ см міститься в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,1$ Тл. На кінцях провідника підтримується постійна різниця потенціалів $U_0 = 4$ мВ. Напрями поля й провідника є взаємно перпендикулярними. Якої найбільшої швидкості $v_{\max}$ може досягти провідник, якщо йому надати можливість вільно рухатися? Магнітна проникність середовища дорівнює одиниці.

3.326. Горизонтальний стрижень завдовжки $l = 1$ м обертається навколо вертикальної осі, що проходить через один із його кінців. Вісь обертання є паралельною векторові індукції магнітного поля ($B = 50$ мкТл). Якою має бути частота обертання n , щоб різниця потенціалів U на кінцях цього стрижня дорівнювала 1 мВ?

3.327. Металевий диск радіуса $R = 15$ см, площа якого перпендикулярна до вектора індукції магнітного поля, обертається з частотою $n = 10 \text{ с}^{-1}$ (вісь обертання диска паралельна лініям магнітної індукції й проходить через його центр). Індукція магнітного поля $B = 3 \text{ мТл}$. Визначити різницю потенціалів $\Delta\phi$ між центром і краєм диска: а) якщо поля немає; б) за наявності поля.

3.328. В однорідному магнітному полі, індукція якого $B = 0,84 \text{ Тл}$, з невеликою швидкістю обертається квадратна рамка, що містить невелику кількість витків мідного дроту. Площа поперечного перерізу дроту $S = 0,5 \text{ мм}^2$, сторона рамки $a = 5 \text{ см}$. Кінці рамки короткозамкнені. Максимальна сила струму, індукованого в рамці під час обертання, $I_{\text{max}} = 1,9 \text{ А}$. Визначити частоту n обертання рамки.

3.329. Рамка, площа якої $S = 200 \text{ см}^2$, рівномірно обертається з частотою $n = 10 \text{ с}^{-1}$ в однорідному магнітному полі. Індукція поля $B = 0,2 \text{ Тл}$. Вісь обертання лежить у площині рамки й перпендикулярна до ліній магнітної індукції. Чому дорівнює середнє значення ЕРС індукції $\langle \mathcal{E} \rangle$ за час, протягом якого магнітний потік збільшиться від нуля до максимального значення?

3.330. У магнітному полі Землі (горизонтальна складова індукції $B_r = 20 \text{ мкТл}$) вертикально розміщені паралельні проводи, до яких підімкнуто конденсатор ємністю $C = 10 \text{ мкФ}$ (рис. 3.65). По проводах, відстань між якими $l = 1 \text{ м}$, може ковзати без тертя металевий брусок, опускаючись під дією сили тяжіння. Маса бруска $m = 1 \text{ кг}$. Визначити прискорення бруска a та силу струму I в проводах. Площина рамки є перпендикулярною до магнітного меридіана Землі.

3.331. Квадратна рамка з тонкого проводу, опір якої $R = 0,02 \text{ Ом}$, розміщена біля прямого проводу зі струмом. Провід лежить у площині рамки й паралельний двом її сторонам, відстані до яких відповідно $l_1 = 10 \text{ см}$, $l_2 = 20 \text{ см}$. Визначити силу струму I в проводі, якщо при його вмиканні крізь рамку пройшла кількість електрики $q = 639 \text{ нКл}$.

3.332. Квадратна дрітjana рамка, сторона якої $a = 10 \text{ см}$, та довгий прямий провід зі струмом, сила якого $I = 10 \text{ А}$, розміщені в одній пло-

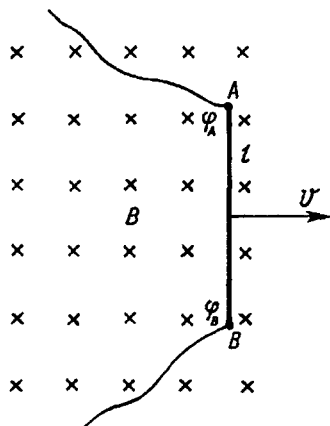


Рис. 3.64

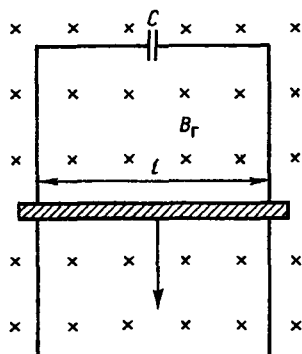


Рис. 3.65

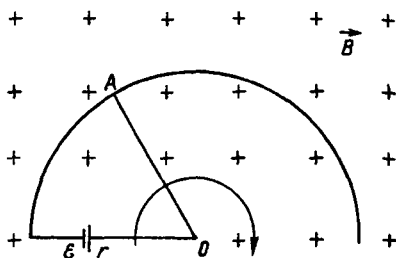


Рис. 3.66

щині (див. рис. 3.54). Рамку поступально переміщують праворуч зі швидкістю $v = 0,5$ м/с. Обчислити ЕРС індукції $\mathcal{E}_i$ в рамці через $t = 3$ с після початку руху, якщо в початковий момент часу рамка перебувала від проводу на відстані $b = 2$ см.

3.333. Тонкий мідний провід, маса якого $m = 5$ г, зігнутий у вигляді квадрата й кінці його замкнені. Квадрат розміщено в однорідному магнітному полі ($B = 0,2$ Тл) так, що його площина є перпендикулярною до ліній магнітної індукції. Визначити заряд q , який пройде по проводу, якщо квадрат потягнути за протилежні вершини й витягнути в лінію.

3.334. Замкнене коло складається з послідовно ввімкнутих джерела постійної ЕРС $\mathcal{E}$ з внутрішнім опором r і стрижня OA (рис. 3.66). Стрижень, що має довжину l і опір R , обертається з кутовою швидкістю ω і ковзає по провідному півкільцю, опором якого можна нехтувати. Півкільце міститься в однорідному магнітному полі індукції B , перпендикулярному до площини півкільця. Визначити різницю потенціалів U на кінцях стрижня, потужність P_Q теплових втрат та механічну потужність P .

3.335. У вертикальному магнітному полі з великої висоти падає кільце діаметра d , зроблене з тонкого дроту, питомий опір і густина матеріалу якого відповідно ρ і D . Площина кільця весь час є горизонтальною. Визначити швидкість v падіння кільця, яка встановилась, якщо індукція поля змінюється з висотою за законом $B = B_0(1 + \alpha h)$.

3.336. Усередині соленоїда, який має $N_1 = 400$ витків проводу, рівномірно розподілених по його довжині $l = 40$ см, міститься коротка котушка радіуса $r = 2$ см, що має $N_2 = 500$ витків проводу з опором $R = 10$ Ом. Визначити максимально можливий заряд q , що індукується в котушці під час її повороту на кут $\alpha = 180^\circ$, якщо в соленоїді проходить струм, сила якого $I = 10$ А.

3.337. До балістичного гальванометра з внутрішнім опором $r = 31 \text{ Ом}$ приєднано кільце радіуса $R = 1 \text{ м}$, виготовлене з алюмінієвого дроту, площа поперечного перерізу якого $S = 1 \text{ мм}^2$. На яку відстань l відхиляється “зайчик” на шкалі, якщо кільце, що лежить на горизонтальній поверхні стола, перевернути з одного боку на інший? Вертикальна складова індукції магнітного поля Землі $B_z = 50 \text{ мкТл}$. “Зайчик” відхиляється на 1 мм під час проходження через рамку гальванометра заряду 10^{-8} Кл (балістична стала гальванометра $c_0 = 10^{-8} \text{ Кл/мм}$).

3.338. У магнітному полі, індукція якого змінюється за законом $B = \alpha + \beta t^2$, де $\alpha = 10^{-1} \text{ Тл}$, $\beta = 10^{-2} \text{ Тл/с}^2$, розміщена рамка зі стороною $a = 20 \text{ см}$. Площина рамки є перпендикулярною до ліній магнітної індукції. Визначити кількість теплоти Q , яка виділяється в рамці за перші $t = 5 \text{ с}$, якщо опір рамки $R = 0,5 \text{ Ом}$.

3.339. Магнітний потік крізь нерухомий контур опору R змінюється за час t за законом $\Phi = at(t - t_0)$. Встановити кількість теплоти Q , яка виділяється в контурі за цей час. Індуктивністю контуру нехтувати.

3.340. Усередині соленоїда, який має $N = 300$ витків проводу, довжину $l = 50 \text{ см}$ і перебуває у вакуумі, міститься металеве кільце. Площа кільця $S = 5 \text{ см}^2$, його опір $R = 0,02 \text{ Ом}$. Площина кільця є перпендикулярною до осі соленоїда. Сила струму в соленоїді збільшується за законом $I = kt$, де $k = 1 \text{ А/с}$. Як будуть напрямлені сили, що діють на кільце? Чому дорівнюватиме сила F , яка діє на одиницю довжини кільця, через час $t = 5 \text{ с}$ після ввімкнення струму?

Самоіндукція та взаємоіндукція

3.341. У котушці, що має $N = 1000$ витків проводу, сила струму за допомогою реостата рівномірно збільшується зі швидкістю $dI/dt = 0,1 \text{ А/с}$. Діаметр перерізу котушки $d = 10 \text{ см}$, довжина її $l = 50 \text{ см}$. На котушку надіто кільце такого самого діаметра з мідного проводу, площа поперечного перерізу якого $S = 2 \text{ мм}^2$. Вважаючи, що магнітні потоки, які проникають у котушку й кільце, у будь-який момент дорівнюють один одному, обчислити силу струму I в кільці.

3.342. Індуктивність соленоїда, намотаного в один шар на немагнітний каркас, $L = 0,5 \text{ мГн}$. Довжина соленоїда $l = 0,6 \text{ м}$, діаметр $D = 2 \text{ см}$. Визначити відношення n кількості витків соленоїда до його довжини.

3.343. На круглому дерев'яному циліндрі розміщується обмотка з мідного дроту, маса якого $m = 50 \text{ г}$. Відстань $l = 60 \text{ см}$ між крайніми витками є значно більшою від діаметра циліндра. Опір обмотки $R = 300 \text{ Ом}$. Яка індуктивність L обмотки?

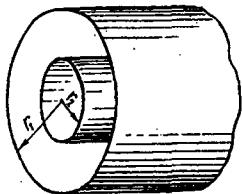


Рис. 3.67

3.344. Скільки метрів тонкого проводу треба взяти для виготовлення соленоїда завдовжки $l_0 = 100$ см індуктивністю $L = 1$ мГн, якщо діаметр перерізу соленоїда значно менший, ніж його довжина?

3.345. По двох довгих паралельних проводах проходить однаковий струм у протилежних напрямках. Визначити індуктивність L

двопроводної лінії на ділянці $l = 1$ км. Радіус проводу $R = 1$ мм, відстань між осевими лініями $d = 0,4$ м.

В к а з і в к а. Врахувати тільки внутрішній магнітний потік, тобто потік, що пронизує контур, обмежений проводами.

3.346. Визначити індуктивність L/l одиниці довжини кабелю, що являє собою два тонкостінних коаксіальних металевих циліндри (рис. 3.67), якщо радіус зовнішнього циліндра у $\eta = 3,6$ раза більший, ніж радіус внутрішнього. Магнітну проникність середовища між циліндрами вважати такою, що дорівнює одиниці.

3.347. На загальний каркас намотано дві котушки. Визначити взаємну індуктивність котушок L_{12} , якщо постійний струм у першій котушці, сила якого $I_1 = 5$ А, утворює в другій магнітне потокозчеплення $\Psi = 40$ мВб.

3.348. Два соленоїди (індуктивність першого $L_1 = 0,36$ Гн, другого $L_2 = 0,64$ Гн) однакової довжини та практично з однаковими площами поперечного перерізу вставлені один в один. Визначити взаємну індуктивність L_{12} соленоїдів.

3.349. Обчислити взаємну індуктивність L_{12} довгого прямого проводу й прямокутної рамки зі сторонами $a = 10$ см і $b = 15$ см. Рамка та прямий провід лежать в одній площині. Близька до проводу сторона рамки, довжина якої b , паралельна проводу й віддалена від нього на відстань $l = 8$ см.

Струми під час замикання і розмикання кола

3.350. Діаметр каркаса соленоїда $d = 0,1$ м. Соленоїд має $N = 500$ витків. Після підімкнення його до акумулятора з ЕРС $\mathcal{E} = 12$ В через час $t = 10^{-3}$ с сила струму в колі досягла значення $I = 2$ А. Визначити довжину l соленоїда, якщо його опір $R = 3$ Ом. Опором акумулятора й підвідних провідників нехтувати.

3.351. В обмотці соленоїда, опір якого $R = 1$ Ом, а індуктивність $L = 20$ мГн, проходить струм. Сила струму $I = 5$ А. Чому дорівнює енергія W магнітного поля соленоїда через час $t = 1$ с після від'єднання джерела напруги та короткого замикання кінців обмотки?

3.352. Обмотка соленоїда містить один шар витків мідного дроту, що прилягають один до одного. Діаметр дроту $d = 0,2$ мм, діаметр соленоїда $D = 5$ см. У соленоїді проходить струм, сила якого $I_0 = 1$ А. Визначити, яка кількість електрики q пройде крізь обмотку, якщо кінці її з'єднати між собою. Товщиною ізоляції нехтувати.

3.353. Обмотка соленоїда містить один шар витків мідного дроту діаметра $d = 0,2$ мм, які щільно прилягають один до одного. Діаметр соленоїда $D = 5$ см, кількість витків $N = 400$. По соленоїду проходить струм, сила якого $I_0 = 1$ А. Визначити кількість теплоти Q , що виділяється в обмотці за час $t = 0,1$ мкс після того, як її кінці замкнено коротко.

3.354. Визначити, за який час t сила струму замикаання I досягне $\eta = 0,98$ граничного значення, якщо джерело струму замикають на котушку, опір якої $R = 10$ Ом, а індуктивність $L = 0,4$ Гн.

3.355. Обчислити ємність C конденсатора, коли відомо, що до початку його розрядження через деякий опір напруга на ньому була $U_0 = 100$ В, сила струму I_0 в початковий момент часу $t = 0$ становила 10 А, а через час $t = 10$ мкс сила струму $I = 4$ А.

3.356. До конденсатора, зарядженого до напруги $U_0 = 200$ В, ємність якого $C_1 = 1$ мкФ, підключений заряджений конденсатор ємністю $C_2 = 2$ мкФ. Встановити залежність сили струму в колі від часу, якщо опір провідників, що з'єднують обкладки конденсаторів, $R = 1$ кОм. Яка кількість теплоти Q виділяється в провідниках під час проходження струму?

3.357. Плоский конденсатор с круглими пластинами діаметра $D = 50$ см і відстанню між ними $d = 2$ мм заповнений діелектриком, діелектрична проникність якого $\epsilon = 5,5$. Конденсатор підключений до джерела постійної напруги $U_0 = 1$ кВ через резистор, опір якого $R = 100$ кОм. Визначити індукцію магнітного поля B між пластинами конденсатора на відстані $r = 10$ см від його осі через проміжок часу $t = 1$ мс після підімкнення.

Енергія магнітного поля

3.358. Соленоїд містить $N = 1000$ витків проводу. Сила струму в його обмотці $I = 1$ А, а магнітний потік крізь переріз соленоїда $\Phi = 0,1$ мВб. Визначити енергію W магнітного поля в соленоїді.

3.359. Струм, сила якого $I = 20$ А, проходить по порожнистій тонкостінній трубі радіуса $r_1 = 2,5$ см і повертається по суцільному провіднику радіуса $r_2 = 1$ мм, прокладеному вздовж осі труби (рис. 3.68). Довжина труби $l = 20$ см. Визначити енергію W магнітного поля системи.

3.360. На тор квадратного перерізу рівномірно намотана котушка, яка містить $N = 1000$ витків (рис. 3.69). Внутрішній радіус тора $R_1 = 8$ см,

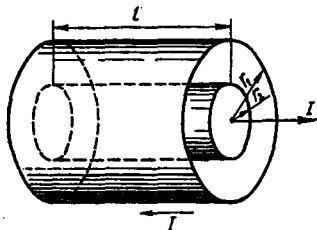


Рис. 3.68

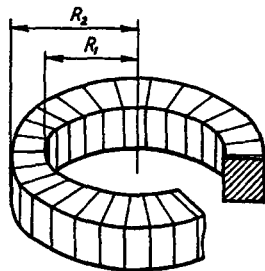


Рис. 3.69

зовнішній $R_2 = 10$ см. По обмотці проходить струм, сила якого $I = 5$ А. Осердя є ферромагнітним. Визначити енергію W магнітного поля струму.

3.361. Два соленоїди намотані на немагнітний каркас один на одний. Кількість витків соленоїдів $N_1 = 1200$ і $N_2 = 750$, площа поперечного перерізу $S = 20$ см², довжина $l = 1$ м. По обмотках соленоїдів проходять струми, сила яких відповідно $I_1 = 3$ А і $I_2 = 7$ А. Обчислити енергію W магнітного поля струмів.

3.362. Соленоїд завдовжки $l = 0,5$ м, площа поперечного перерізу якого $S = 2$ см², має індуктивність $L = 0,2$ мГн. Якою має бути сила струму I , щоб об'ємна густина енергії магнітного поля всередині соленоїда $w_m = 1$ мДж/м³?

3.8. МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ

Намагніченість ізотропного магнетика

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}, \quad (3.8.1)$$

де χ – магнітна сприйнятливість магнетика; $\mathbf{H}$ – напруженість магнітного поля.

Зв'язок між векторами $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}, \quad (3.8.2)$$

де μ_0 – магнітна стала.

Для однорідного та ізотропного магнетика

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}. \quad (3.8.3)$$

Зв'язок між магнітною проникністю й магнітною сприйнятливістю речовини:

$$\mu = 1 + \chi. \quad (3.8.4)$$

Циркуляція вектора напруженості $\mathbf{H}$ магнітного поля

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I, \quad (3.8.5)$$

де $\sum I$ – алгебрична сума макроскопічних струмів (струмів провідності), які охоплюються контуром L .

Граничні умови на межі поділу двох магнетиків:

а) нормальна складова вектора $\mathbf{B}$ є неперервною

$$B_{1n} = B_{2n}; \quad (3.8.6)$$

б) тангенціальна (паралельна межі поділу) складова вектора $\mathbf{H}$ є неперервною

$$H_{1t} = H_{2t}. \quad (3.8.7)$$

Магнітна індукція в зазорі між полюсами електромагніту

$$B = \frac{NI}{l_1/(\mu_0\mu_1) + l_2/(\mu_0\mu_2)}, \quad (3.8.8)$$

де l_1, l_2 – довжини осердя й зазору вздовж осьової лінії.

3.363. Як впливає зовнішнє магнітне поле на рух електронів в атомах речовини?

3.364. Як поведуться легкі невеликі стрижні з діамагнітного (бісмут) і парамагнітного (магній) матеріалів, що вільно підвішені між полюсами електромагніту?

3.365. Струм, сила якого $I = 4$ А, проходить уздовж колового контуру радіуса $r = 20$ см, який занурено у воду. Магнітна сприйнятливість води $\chi = -0,72 \cdot 10^{-6}$. Знайти намагніченість J у центрі кола. На скільки відрізняється магнітна індукція B в центрі кола у воді порівняно з магнітною індукцією B_0 у вакуумі?

3.366. Довгий круглий стрижень з титану розміщено вздовж однорідного магнітного поля. Магнітна сприйнятливість титану $\chi = 1,5 \cdot 10^{-5}$. Яку частину індукції сумарного магнітного поля B становить індукція магнітного поля молекулярних струмів B' ?

3.367. Соленоїд, що має довжину $l = 20$ см, площу поперечного перерізу $S = 10$ см² і кількість витків $N = 400$, міститься в діамагнітному середовищі. Індуктивність його $L = 1$ мГн. Обчислити індукцію магнітного поля B і намагніченість J усередині соленоїда, якщо по ньому проходить струм, сила якого $I = 2$ А.

3.368. Вздовж осі нескінченного прямого круглого циліндра зі скла радіуса $r_0 = 2$ см по тонкому проволу проходить струм, сила якого $I = 1$ А. Зовні циліндра міститься повітря. Визначити напруженість магнітного поля H , індукцію B і намагніченість J у точках, що віддалені від осі на $r_1 = 1,5$ см і $r_2 = 4$ см. Магнітна сприйнятливість скла $\chi = -1,26 \cdot 10^{-6}$.

3.369. Площа поперечного перерізу соленоїда із залізним осердям $S = 10$ см². Довжина соленоїда $l = 1$ м. Визначити магнітну проникність μ

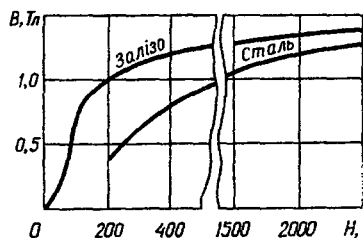


Рис. 3.70

матеріалу осердя, якщо магнітний потік, що пронизує цю площу, $\Phi = 1,4$ мВб. Якій силі струму, що проходить крізь соленоїд, відповідає цей магнітний потік, якщо індуктивність соленоїда $L = 0,44$ Гн?

Вказівка. Розв'язуючи задачі 3.369–3.380, використовувати графік намагнічення, зображений на рис. 3.70.

3.370. У соленоїд завдовжки $l = 10$ см, що має $N = 300$ витків, уведено залізне осердя. По соленоїду проходить струм, сила якого $I = 1$ А. Обчислити намагніченість J заліза всередині соленоїда, якщо його магнітні властивості описані за допомогою графіка, зображеного на рис. 3.70.

3.371. Соленоїд намотано на залізне осердя, площа поперечного перерізу якого $S = 5$ см². При силі струму $I = 5$ А магнітний потік $\Phi = 200$ мкВб. Визначити кількість витків, що припадають на одиницю довжини соленоїда.

3.372. На залізне осердя намотано соленоїд, який має $N_1 = 500$ витків мідного дроту. Площа поперечного перерізу осердя $S_1 = 5$ см², його довжина $l = 30$ см. Площа поперечного перерізу дроту $S_2 = 1$ мм². Чому дорівнюватиме індуктивність L соленоїда у разі під'єднання його до акумулятора, ЕРС якого $\mathcal{E} = 1,26$ В? Внутрішнім опором акумулятора й опором з'єднувальних провідників нехтувати.

3.373. На залізному осерді у вигляді тора міститься обмотка, кількість витків якої $N = 700$. Середній діаметр тора $D = 20$ см, площа поперечного перерізу $S = 6$ см². Визначити потік магнітної індукції Φ крізь поперечний переріз осердя, магнітну проникність μ заліза, а також намагніченість J , якщо сила струму $I = 0,5$ А.

3.374. На залізному кільці, середній діаметр якого $D = 30$ см і площа поперечного перерізу $S = 5$ см², міститься обмотка з $N = 800$ витків. В обмотці проходить струм, сила якого $I = 3$ А. У кільці зроблено поперечний проріз завширшки $l = 2$ мм (рис. 3.71). Нехтуючи розсіянням поля біля країв прорізу, обчислити: магнітну проникність μ заліза для цих умов; потік магнітної індукції Φ крізь поперечний переріз кільця; повну енергію магнітного поля W , енергію поля в залізному кільці W_1 та в повітряному зазорі W_2 ; індуктивність L обмотки.

В к а з і в к а . Рекомендуємо обчислення індуктивності L виконати двома способами, виразивши її через потік магнітної індукції Φ і енергію магнітного поля W .

3.375. На залізне кільце середнього діаметра $D = 25$ см намотано $N = 1\,200$ витків проводу. У кільці зроблено поперечний проріз, внаслідок чого утворився повітряний зазор завширшки $l_{п.з} = 5$ мм (рис. 3.71). Якщо по обмотці проходить струм силою $I = 2,5$ А, то напруженість магнітного поля в зазорі $H = 570$ кА/м. Визначити магнітну проникність μ заліза за цих умов. Розсіянням поля біля країв зазору нехтувати.

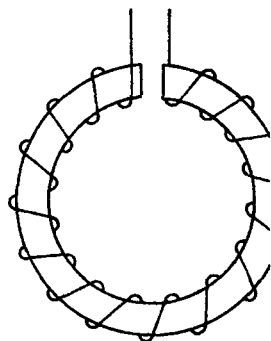


Рис. 3.71

3.376. Вектор індукції магнітного поля у вакуумі B_0 утворює кут α_0 з нормаллю до поверхні однорідного ізотропного магнетика.

Магнітна проникність магнетика μ . Визначити індукцію B магнітного поля у магнетик. Який кут α утворює вектор B з нормаллю до поверхні, якщо кут α_0 вважати малим?

3.377. По обмотці тороїду зі сталевим осердям проходить струм, сила якого $I = 2$ А. Обмотка містить $N = 500$ витків. Площа поперечного перерізу тороїду $S = 12$ см², середній радіус $R = 30$ см. Визначити енергію магнітного поля W , яка накопичилась в осерді.

3.378. Визначити магнітну проникність μ заліза, якщо густина енергії магнітного поля в залізному осерді $w_m = 150$ Дж/м³.

3.379. Встановити максимальне значення магнітної проникності $\mu_{\max}$ заліза.

3.380. Визначити, у скільки разів змінилася об'ємна густина енергії w магнітного поля в сталевому осерді тороїду, якщо індукція магнітного поля збільшилася від $B_1 = 0,5$ Тл до $B_2 = 1$ Тл.

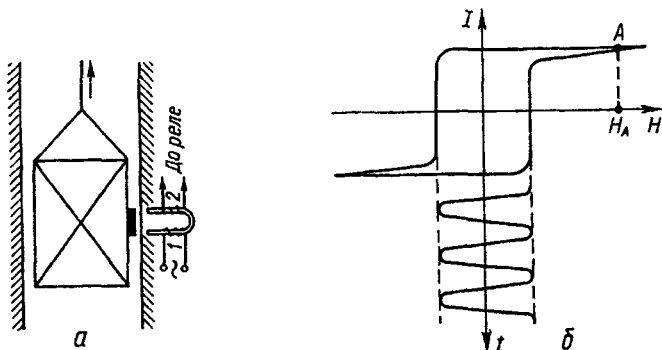


Рис. 3.72

3.381. Один з елементів шахтної автоматики – магнітний вимикач – зображено на рис. 3.72, а. U-подібне осердя зі сплаву пермалюю з практично прямокутною петлею гістерезису (рис. 3.72, б) намагнічується обмоткою 1, яка ввімкнута в коло змінного струму. У вторинній обмотці 2 збуджується ЕРС індукції так, що реле 2 на виході замикається. При проходженні скіпа прикріплений до нього магніт замикає осердя, внаслідок чого струм у вторинній обмотці зникає, реле вимикається, скіп зупиняється. Пояснити роботу такого безконтактного вимикача.

3.9. РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА. ПРИНЦИП ВІДНОСНОСТІ В ЕЛЕКТРОДИНАМІЦІ

Густина струму зміщення

$$\mathbf{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (3.9.1)$$

Система рівнянь Максвелла:

а) польові рівняння в інтегральній формі

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}; \\ \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0; \\ \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}; \\ \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= \int_V \rho dV; \end{aligned} \quad (3.9.2)$$

б) польові рівняння в диференціальній формі

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0; \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \\ \text{div } \mathbf{D} &= \rho, \end{aligned} \quad (3.9.3)$$

де $\mathbf{j}$ – густина струму; ρ – об'ємна густина заряду;

в) матеріальні рівняння для однорідних ізотропних середовищ

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}; \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mu \mathbf{H}; \\ \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (3.9.4)$$

Значення електричного заряду частинки є однаковим в усіх інерціальних системах відліку, тобто є релятивістським інваріантом (дослідний факт).

Зв'язок між значеннями напруженості $\mathbf{E}$ електричного та індукції $\mathbf{B}$ магнітного полів у деякій точці системи відліку K та значеннями $\mathbf{E}'$ та $\mathbf{B}'$ цих величин у системі K' , яка рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$ відносно системи K (перетворення полів):

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel}; & B'_{\parallel} &= B_{\parallel}; \\ E'_{\perp} &= \frac{E_{\perp} + [\mathbf{vB}]}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & B'_{\perp} &= \frac{B_{\perp} - [\mathbf{vE}]/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (3.9.5)$$

Символами $\parallel$ і $\perp$ позначено поздовжні та поперечні відносно вектора $\mathbf{v}$ складові векторів.

Перетворення проекцій векторів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$ у випадку, коли K' -система рухається в додатному напрямі осі Ox K -системи:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x; & E'_y &= \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & E'_z &= \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \\ B'_x &= B_x; & B'_y &= \frac{B_y + vE_z/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & B'_z &= \frac{B_z - vE_y/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (3.9.6)$$

Якщо треба одержати формули оберненого перетворення (від K' - до K -системи), то у формулах (3.9.5) і (3.9.6) потрібно всі штриховані величини замінити на нештриховані й навпаки, а також знак перед v .

Рівняння Максвелла

3.382. Індукція однорідного магнітного поля всередині циліндра радіуса $R = 0,1$ м лінійно зростає з часом за законом $B = \alpha t$, де $\alpha = 10^{-3}$ Тл/с. Магнітне поле напрямлене вздовж осі циліндра, поза яким поля немає. Чому дорівнюватиме напруженість вихрового електричного поля $\mathbf{E}$ на відстані $r = 0,2$ м від осі циліндра?

3.383. На циліндричне залізне осердя, крізь яке проходить магнітний однорідний потік $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t$, надіто тор з діелектрика, діелектрична проникність якого ϵ . У торі двома близькими розрізами зроблено вузький повітряний зазор (рис. 3.73). Визначити напруженість електричного поля $\mathbf{E}$ в зазорі в точці A залежно від відстані r до осі циліндра.

3.384. Непровідне тонке кільце, маса якого $m = 30$ г, заряджене зарядом $q = 6$ мкКл і може вільно обертатися навколо своєї осі. У початковий момент кільце перебувало в спокої, магнітного поля не було. Після ввімкнення однорідного магнітного поля, направленого перпендикулярно до площини кільця, індукція магнітного поля почала зростати за законом

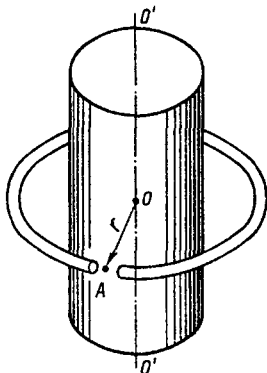


Рис. 3.73

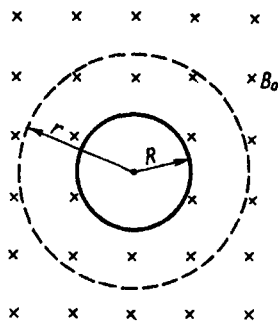


Рис. 3.74

$B(t) = \alpha t^2$, де $\alpha = 10^{-2}$ Тл/с². Встановити кутову швидкість обертання ω кільця через $t = 3$ с.

3.385. Поза циліндром радіуса $R = 10$ см індукція однорідного магнітного поля лінійно зростає з часом за законом $B_0 = \alpha t$, де $\alpha = 10^{-3}$ Тл/с. Як має змінюватися з часом індукція однорідного магнітного поля B усередині циліндра (рис. 3.74), щоб електрон рухався по колу радіуса $r = 15$ см? У початковий момент часу швидкість електрона дорівнювала нулеві.

3.386. Напруженість однорідного електричного поля всередині плоского конденсатора – двох круглих пластин радіуса $R = 10$ см (рис. 3.75) – лінійно зростає з часом за законом $E = \alpha t$, де $\alpha = 9 \cdot 10^{10}$ В/(м·с). Чому дорівнюватиме індукція магнітного поля B усередині конденсатора на відстані від його осі: а) $r_1 = 5$ см; б) $r_2 = 15$ см?

3.387. Під час заряджання конденсатора з круглими паралельними пластинами радіуса $R = 10$ см по провіднику, що з'єднує пластини, проходить струм силою $I = 0,5$ мА за час $t = 2$ мс (рис. 3.75). Обчислити напруженість E електричного та індукцію B магнітного полів у просторі між пластинами на відстані $r = 5$ см від його осі.

3.388. Напруга на обкладках круглого плоского конденсатора зростає з часом за законом $U = \alpha t$. Радіус обкладок R , відстань між ними d . По осі конденсатора встановлено невеликий циліндр з діелектрика радіуса $r < R$ з діелектричною проникністю ϵ . Визначити індукцію магнітного поля B_0 на бічній поверхні циліндра і $B_{\text{кр}}$ на краю конденсатора.

3.389. Середовище між обкладками плоского конденсатора ємністю C має діелектричну проникність ϵ і невелику електропровідність σ . До обкладок конденсатора прикладена різниця потенціалів U , після чого

вони були ізолювані. Встановити закон зміни заряду з часом на кожній з обкладок і силу струму зміщення $I_{зм}$, який проходить крізь конденсатор.

3.390. Довгий прямий соленоїд має n витків на одиницю довжини. По ньому проходить змінний струм, сила якого $I = I_0 \sin \omega t$. Визначити густину струму зміщення $j_{зм}$ як функцію відстані r від осі соленоїда. Радіус перерізу соленоїда R .

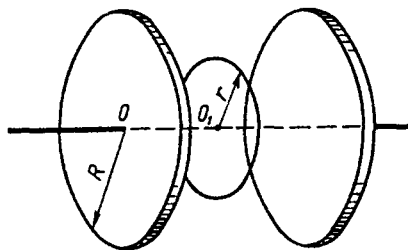


Рис. 3.75

3.391. Точковий заряд $q > 0$ рухається з нерелятивістською швидкістю $v = \text{const}$. Визначити густину струму зміщення $j_{зм}$, що утворюється зарядом поблизу траєкторії на відстані r від нього.

3.392. Чи існує такий розподіл електричних зарядів, що створює електростатичне поле з напруженістю: а) $\mathbf{E} = x\mathbf{i} + (3x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$; б) $\mathbf{E} = kx\mathbf{i} - ky\mathbf{j}$?

3.393. Чи може існувати електромагнітне поле, яке виражене рівняннями: $E_x = E_y = 0$; $E_z = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \cos(y - ct)$; $B_x = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \cos(y - ct)$;

$$B_y = B_z = 0?$$

Принцип відносності в електродинаміці

3.394. Які дослідні факти підтверджують незалежність значення заряду від швидкості руху його носіїв?

3.395. Заряджена частинка рухається зі сталою швидкістю. Чим відрізняються електричні поля частинки в системі спокою частинки та в лабораторній системі відліку?

3.396. У вакуумі рухається заряджена частинка зі сталою швидкістю відносно K -системи. При цьому в деякій точці простору в цій системі спостерігається змінне з часом електричне поле. Чи означає це, що вказана частинка випромінює електромагнітні хвилі? Чи зміниться відповідь, якщо частинка рухатиметься зі сталою швидкістю в середовищі?

3.397. Електроємність плоского конденсатора в системі відліку, відносно якої він перебуває в стані спокою, $C = 3$ пФ. Визначити його електроємність C' у системі відліку, яка рухається відносно конденсатора зі швидкістю $v = 0,2 c$ так, що вектор $\mathbf{v}$ залишається паралельним обкладкам конденсатора.

3.398. Різниця потенціалів між обкладками плоского конденсатора в системі відліку, відносно якої він перебуває у стані спокою, $U = 25$ В. Яка різниця потенціалів U' між обкладками цього самого конденсатора в системі, відносно якої він рухається зі швидкістю $v = 0,2$ с перпендикулярно до його обкладок?

3.399. У прискорювачі на зустрічних пучках електрони рухаються назустріч один одному. Енергія електронів у кожному з пучків $E = 3,5$ ГеВ. У скільки разів n відрізняються густини струмів у кожному з пучків у лабораторній системі та в системі відліку, зв'язаній з одним із пучків?

3.400. Паралельно зарядженій нитці зі швидкістю $v = 0,8$ с відносно нитки рухається α -частинка. Визначити силу F' , що діє на α -частинку в системі відліку, в якій частинка перебуває в спокої, а також силу F у системі спокою нитки. Уздовж нитки розподілений позитивний заряд з лінійною густиною $\tau = 25$ мКл/м у системі спокою нитки. Відстань, на якій перебуває α -частинка від нитки, $r = 5$ мм.

3.401. Уздовж довгого стрижня рівномірно розподілений заряд, лінійна густина якого $\tau = 5$ мКл/м. Обчислити напруженість електричного поля E' та індукцію магнітного поля B' у системі відліку, яка рухається відносно стрижня зі швидкістю $v = 0,6$ с уздовж його осі, у точці, що лежить на відстані $r = 5$ см від осі стрижня.

3.402. Електричний заряд рівномірно розподілений по об'єму парафінового циліндра радіуса $R = 2$ см. Об'ємна густина заряду циліндра $\rho = 2$ мКл/м³. Циліндр рухається вздовж своєї осі зі швидкістю $v = 0,4$ с відносно лабораторної системи відліку. Визначити модулі й напрями векторів напруженості електричного та індукції магнітного полів у лабораторній системі відліку в точках, що лежать від осі циліндра на відстані: а) $r_1 = 1,5$ см; б) $r_2 = 2,5$ см.

3.403. В інерціальній K -системі у стані спокою міститься диполь, електричний момент якого $p_e = 0,1$ нКл·м. Обчислити напруженість E' електричного та індукцію B' магнітного полів в інерціальній K' -системі, яка рухається відносно K -системи зі сталою швидкістю $v = 0,6$ с перпендикулярно до електричного моменту диполя, у точці, що лежить: а) на осі диполя на відстані $r_1 = 1$ м від його центра; б) на прямій, яка перпендикулярна до осі диполя й проходить через його центр, на відстані $r_2 = 1$ м від центра.

3.404. Уздовж нескінченної провідної площини проходить поверхневий струм. Сила струму, яка припадає на одиницю довжини площини в напрямі, перпендикулярному до напрямку струму, $J = 1$ кА/м. Застосувавши формули перетворення полів, визначити індукцію магнітного поля B , яке створюється таким плоским струмом.

3.405. Коловий провідник зі струмом радіуса $R = 5$ см і магнітним моментом $p_m = 1,5 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ перебуває у стані спокою в лабораторній системі відліку. Визначити напруженість E' електричного та індукцію B' магнітного полів у системі відліку, яка рухається відносно провідника зі швидкістю $v = 20$ м/с перпендикулярно до його осі, у точці, що лежить на осі колового провідника на відстані $r = 15$ см від його центра. Вважати, що електричного поля провідника в його системі спокою немає.

3.406. Однойменні точкові електричні заряди q_1 і q_2 рухаються паралельно один одному зі швидкостями v_1 і v_2 . Визначити силу, з якою діє перший заряд на другий у лабораторній системі відліку в той момент часу, коли відстань між ними є найменшою.

3.407. Довгий соленоїд, сила електричного струму в якому $I = 0,2$ А, кількість витків $n = 10^3$ на одиницю довжини, рухається перпендикулярно до своєї осі зі швидкістю $v = 3 \cdot 10^7$ м/с. Визначити індукцію магнітного поля B соленоїда в системі відліку, відносно якої він рухається. Чому дорівнює і як напрямлена напруженість електричного поля E , яке спостерігається в цій системі?

3.408. Довгий прямий провідник зі струмом, сила якого $I = 2,5$ А, рухається зі швидкістю $v = 3$ м/с відносно лабораторної системи відліку вздовж напрямку струму. Обчислити напруженість E електричного та індукцію B магнітного полів у точці, що лежить на відстані $r = 5$ см від провідника у лабораторній системі відліку. Вважати, що електричного поля в системі спокою провідника немає.

3.409. В інерціальній K -системі існують два взаємно перпендикулярних поля – електричне, напруженість якого $E = 30$ кВ/м, та магнітне, індукція якого $B = 25$ мкТл. З якою швидкістю v має рухатись K' -система, щоб у ній реєструвалося: а) тільки електричне поле; б) тільки магнітне поле? Вважати, що вектор v перпендикулярний до E і B .

3.410. На рис. 3.76 зображено так звану уніполярну машину, основою якої є постійний циліндричний магніт, що обертається навколо своєї осі. Якщо за допомогою контактів A і B , які ковзають по поверхні магніту, з'єднати провідник з віссю та поверхнею магніту, то вздовж провідника AB пройде струм. Як можна пояснити виникнення цього струму?

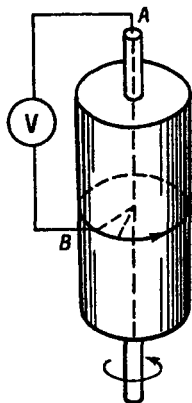


Рис. 3.76

Розділ 4. КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

4.1. КІНЕМАТИКА ГАРМОНІЧНОГО КОЛИВАЛЬНОГО РУХУ

Гармонічне коливання описується законом

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{або} \quad x = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (4.1.1)$$

де x – значення величини, що здійснює коливання, у даний момент часу t ; A – амплітуда; $\omega_0 t + \varphi$ – фаза коливань, тут ω_0 – циклічна частота, $\omega_0 = 2\pi/T$, T – період, φ – початкова фаза коливань. (У подальших формулах використовується закон косинуса.) Швидкість v і прискорення a також змінюються за гармонічним законом

$$\begin{aligned} \dot{x} = v_x(t) &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2), \\ \ddot{x} = a_x(t) &= -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Закон гармонічних коливань у комплексній формі

$$\hat{x} = \hat{A} e^{i\omega_0 t} = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)}, \quad (4.1.3)$$

де $\hat{A}$ – комплексна амплітуда, $\hat{A} = A e^{i\varphi}$.

Додавання двох гармонічних коливань однакового напрямку з однаковими частотами:

а) амплітуда результуючого коливання

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}; \quad (4.1.4)$$

б) початкова фаза результуючого коливання

$$\varphi = \arctg \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (4.1.5)$$

Рівняння траєкторії точки, що одночасно бере участь у двох коливаннях однакової частоти, напрямки яких є взаємно перпендикулярними:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (4.1.6)$$

Кінематика гармонічних коливань

4.1. Точка здійснює гармонічні коливання за законом $x = 4 \sin(0,5\pi t + 0,25\pi)$, де x – зміщення, см. Зобразити на одному рисунку у відповідному масштабі графіки залежності від часу зміщення x , швидкості v_x і прискорення a_x . Як співвідносяться фази коливань цих величин?

4.2. На рис. 4.1, а – в зображено графіки гармонічних коливань. Для кожного графіка обчислити період T , частоту ν , амплітуду A , початкову фазу φ коливання, а також зміщення x від положення рівноваги через деякий час t після початку кожного з коливань: $t_a = 6$ с, $t_b = 200$ с, $t_c = 2,5$ год. За графіками гармонічних коливань (рис. 4.2) встановити закон руху кожного з них.

4.3. Записати закон гармонічного коливального руху, якщо швидкість точки в момент проходження положення рівноваги $v_{\max} = 3,14$ см/с, період коливань $T = 4$ с, зміщення точки від положення рівноваги у початковий момент часу $x(0) = 1,41$ см, а точка рухається при цьому: а) від положення рівноваги; б) до положення рівноваги.

4.4. Амплітуда гармонічних коливань точки $A = 5$ см, амплітуда швидкості $v_{\max} = 7,85$ см/с. Обчислити циклічну частоту ω коливань і максимальне прискорення $a_{\max}$ точки.

4.5. Точка здійснює коливання за законом синуса з періодом $T = 12$ с. У деякий момент часу зміщення x точки дорівнювало 1 см. Коли фаза коливань збільшилась удвічі, швидкість v точки стала дорівнювати $\frac{1}{6}$ см/с. Визначити амплітуду A коливань.

4.6. Точка, що здійснює гармонічні коливання за законом $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, де x – зміщення, см, у певний момент часу t_1 має зміщення $x_1 = 4$ см, швидкість $v_1 = 5$ см/с і прискорення $a_1 = -80$ см/с². Визначити: амплітуду A і період T коливань точки; фазу коливань $\omega t_1 + \varphi$ у момент часу, що розглядається; максимальні швидкість $v_{\max}$ та прискорення $a_{\max}$ точки; час Δt проходження шляху, що дорівнює половині амплітуди коливань при русі: а) з положення рівноваги; б) з точки, координата

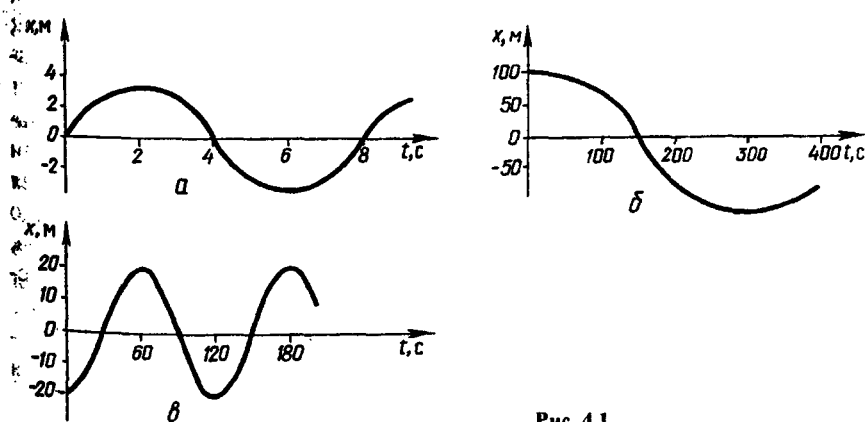


Рис. 4.1

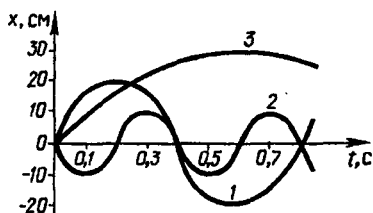


Рис. 4.2

якої $x = A/2$, у напрямі від положення рівноваги.

4.7. Точка здійснює коливання за законом $x = 10 \sin 3t$, де x – зміщення, см. У деякий момент часу прискорення становило $a_1 = 45 \text{ см/с}^2$. Визначити модуль швидкості $|v_1|$ точки в цей момент часу.

4.8. Точка здійснює коливання за законом $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, де $A = 4 \text{ см}$. Визначити початкову фазу φ , якщо: а) $x(0) = 2 \text{ см}$, $v(0) < 0$; б) $x(0) = -2 \text{ см}$, $v(0) < 0$; в) $x(0) = 2 \text{ см}$, $v(0) > 0$; г) $x(0) = -2 \text{ см}$, $v(0) > 0$. Побудувати векторну діаграму для моменту часу $t = 0$.

Додавання коливань

4.9. Встановити закон руху, що здійснюється внаслідок додавання двох однаково напрямлених гармонічних коливань, які задані рівняннями: а) $x_1 = 5 \sin(10t + 0,75\pi)$, $x_2 = 6 \sin(10t + 0,25\pi)$; б) $x_1 = 2 \sin 2t$, $x_2 = 4 \cos 2t$, де x_1 , x_2 – зміщення, см.

4.10. Точка бере участь одночасно у двох коливаннях однакового напрямку, які відбуваються за законами $x_1 = A \cos \omega t$ і $x_2 = A \cos 2\omega t$. Визначити швидкість v і прискорення a точки через час $t = T/12$ після початку коливань, а також максимальну швидкість v_{max} точки.

4.11. Користуючись методом векторних діаграм, визначити амплітуду результуючого коливання при додаванні однаково напрямлених коливань: а) $x_1 = 6 \cos(\pi t + \pi/2)$, $x_2 = 8 \cos \pi t$; б) $x_1 = A_1 \cos(\omega t - \varphi)$, $x_2 = A_2 \cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$, $x_3 = A_3 \cos(\omega t - \varphi + \pi)$ за додаткової умови $A_1 > A_3$, а початкова фаза результуючого коливання має дорівнювати нулеві; в) $x_1 = 5 \cos \omega t$, $x_2 = 5 \cos(\omega t + \pi/3)$, $x_3 = 5 \cos(\omega t + 7\pi/6)$. Записати рівняння результуючого коливання в кожному випадку.

4.12. Користуючись методом векторних діаграм, додати велику кількість m однаково напрямлених гармонічних коливань: а) якщо амплітуди коливань $dA_1, dA_2, \dots, dA_m$ є однаковими, а кожне наступне коливання відстає за фазою від попереднього на однакове мале значення, так що різниця фаз першого і останнього становить π ; б) за таких самих умов, але амплітуди коливань монотонно зменшуються, а фази першого і останнього відрізняються на 2π .

4.13. Чому гармонічні коливання зручно описувати в комплексній формі? Як використати закон додавання комплексних чисел для додавання гармонічних коливань?

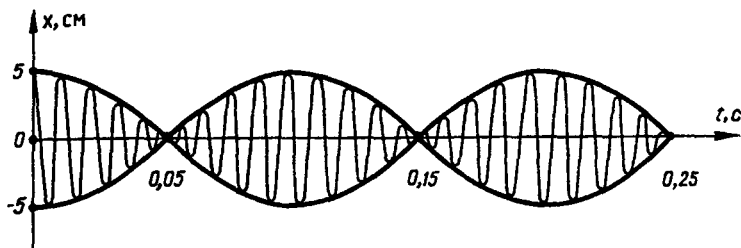


Рис. 4.3

4.14. На рис. 4.3 зображено графік, який є результатом додавання двох гармонічних коливань одного напрямку з однаковими амплітудами й початковими фазами, що дорівнюють нулеві. Визначити амплітуди A_1 і A_2 та частоти ω_1 і ω_2 цих коливань.

4.15. Точка здійснює одночасно два гармонічних коливання, які відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках і описуються рівняннями: а) $x = 5 \sin \omega t$, $y = 2 \sin \omega t$; б) $x = A_1 \sin \omega t$, $y = A_2 \sin \omega(t + \tau)$, де $A_1 = 2$ см, $A_2 = 1$ см, $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$, $\tau = 0,5$ с; в) $x = 2 \cos \omega t$, $y = -\cos 2\omega t$, тут x, y – зміщення, см. Записати рівняння траєкторії руху точки та побудувати її, вказавши напрям руху.

4.16. Точка рухається по колу радіуса a , центр якого міститься в початку координат, з кутовою швидкістю ω . На які два рухи можна розкласти рух цієї точки, якщо вона рухається: а) за рухом стрілки годинника; б) проти руху стрілки годинника?

4.17. Два камертони звучать одночасно, їх частоти $\nu_1 = 256$ Гц і $\nu_2 = 258$ Гц. Визначити період T зміни результуючої амплітуди.

4.18. Точка здійснює одночасно два гармонічних коливання, які відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках і описуються рівняннями $x = A \sin \omega t$ і $y = A \cos 2\omega t$. Встановити рівняння траєкторії руху точки, а також модулі швидкості v і прискорення a точки як функції часу t .

4.19. Кулька закріплена, як показано на рис. 4.4. Жорсткість усіх пружин є однаковою. У момент часу $t = 0$ кульці надають горизонтального імпульсу, а коли вона дійде до крайнього положення, їй додатково надають такого самого за модулем вертикального імпульсу. Яку траєкторію описує кулька? Як зміниться відповідь, якщо: а) вертикальний

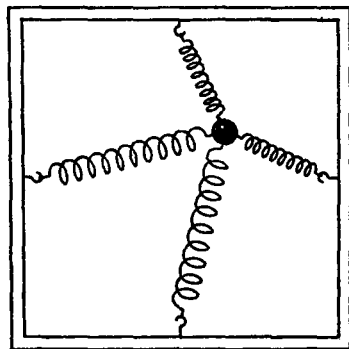


Рис. 4.4

імпульс більший (менший) за горизонтальний; б) жорсткість вертикальних і горизонтальних пружин відрізняється? Вважати, що на кульку діють сили тільки з боку пружин.

4.20. В електронному осцилографі електронний промінь відхиляється у двох взаємно перпендикулярних напрямках. Коливання променя описуються рівняннями $x = A \sin 3\omega t$, $y = A \cos 2\omega t$. Побудувати траєкторію світної точки на екрані, додержуючись масштабу. Прийняти $A = 4$ см.

4.2. ДИНАМІКА ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ. ГАРМОНІЧНИЙ ОСЦИЛЯТОР

Сила, під дією якої система здійснює гармонічні коливання (квазіпружна, або повертальна, сила), пропорційна зміщенню й напрямлена протилежно до нього:

$$F_x = -kx, \quad (4.2.1)$$

де k – постійний коефіцієнт квазіпружної сили; x – відхилення системи від положення рівноваги.

Рух одновимірному гармонічному осцилятору масою m описується диференціальним рівнянням

$$m \ddot{x} = -kx, \quad \text{або} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.2.2)$$

розв'язок якого має вигляд $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, де ω_0 – власна частота гармонічного осцилятора.

Періоди гармонічних коливань простих коливальних систем:

а) пружинного маятника з коефіцієнтом жорсткості пружини k

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}; \quad (4.2.3)$$

б) математичного маятника завдовжки l

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad (4.2.4)$$

в) фізичного маятника з моментом інерції I відносно осі коливань і відстанню a від центра мас тіла до точки підвісу

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}; \quad (4.2.5)$$

г) крутильного маятника з моментом інерції I відносно осі коливань і жорсткістю D тонкого стрижня по відношенню до крутіння

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (4.2.6)$$

Фазова площина осцилятора – двовимірний простір, осями якого є x і $\dot{x}/\omega_0$.

Кінетична і потенціальна енергії гармонічного осцилятора

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi); \quad (4.2.7)$$

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (4.2.8)$$

Повна енергія осцилятора

$$E = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}. \quad (4.2.9)$$

Якщо повна енергія системи виражається квадратичною функцією від деякої змінної q та її похідної за часом $\dot{q}$ і зберігається, а саме:

$$E = \frac{\alpha}{2} q^2 + \frac{\beta}{2} \dot{q}^2 = \text{const}, \quad (4.2.10)$$

тоді система здійснює гармонічні коливання $q = q_0 \cos(\omega t + \varphi)$, циклічна частота яких

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (4.2.11)$$

Величину q називають узагальненою координатою (зміщення, кут повороту тощо), α і β – додатними сталими.

Довільний рух коливальної системи з кількома ступенями вільності (зв'язані осцилятори) можна зобразити як суперпозицію нормальних коливань (мод). У системах, які містять N зв'язаних гармонічних осциляторів, кількість мод дорівнює N .

Сила та енергія в гармонічних коливаннях

4.21. Матеріальна точка, маса якої $m = 50$ г, здійснює коливання за законом $x = 10 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$, де x – зміщення, см; $2t + \frac{\pi}{3}$ – аргумент синуса, рад. Визначити максимальні значення сили F_{max} , що повертає точку в положення рівноваги, і кінетичної енергії $W_{\text{кmax}}$.

4.22. Обчислити поворотальну силу F у момент часу $t_1 = 1,25$ с та повну механічну енергію E матеріальної точки, маса якої $m = 10$ г, а коливання здійснюються за законом $x = 0,1 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$, де x – зміщення, м.

4.23. Матеріальна точка, маса якої $m = 10$ г, здійснює гармонічні коливання за законом косинуса з періодом $T = 2$ с і початковою фазою $\varphi = 0$. Повна механічна енергія точки $E = 0,1$ мДж. Визначити амплітуду коливань A і записати закон руху точки. Обчислити максимальне значення F_{max} сили, що діє на точку.

4.24. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання за законом $x = 0,1 \sin 2t$, де x – зміщення, м. У момент часу t_1 , коли сила, що діє на точку, набуває значення $F_1 = -0,01$ Н, точка має потенціальну енергію $U_1 = 0,2$ мДж. Встановити цей момент часу й відповідну фазу коливання.

4.25. На матеріальну точку, маса якої $m = 10$ г, що рухається вздовж осі Ox , діє сила $F_x = 0,02 - x$, де x – координата, м; F_x – сила, Н. У початковий момент часу $t_0 = 0$ матеріальна точка перебувала в положенні, яке визначалося координатою $x_0 = 0,02$ м, і їй було надано імпульсу $p_0 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг·м/с. Встановити, який рух здійснює точка, та записати диференціальне рівняння її руху. Якій координаті x_0 відповідає положення рівноваги? Записати закон руху точки. Знайти повну механічну E і потенціальну U енергії точки в момент часу $t_1 = 2$ с.

4.26. Матеріальна точка, маса якої $m = 10$ г, здійснює гармонічні коливання. Амплітуда коливань $A = 3$ см, частота $\nu = 10$ с $^{-1}$, початкова фаза коливань $\varphi = 0$. Встановити закон, за яким змінюється сила F , що діє на точку. Визначити повну механічну енергію E точки, значення діючої сили F та відношення потенціальної енергії до кінетичної U/W_k для моменту часу, коли точка відхилена від положення рівноваги на $x = 2$ см.

4.27. Яке співвідношення існує між середніми значеннями кінетичної $\langle W_k \rangle$ і потенціальної $\langle U \rangle$ енергій у гармонічних коливаннях?

Математичний і фізичний маятники

4.28. Кулька підвішена на нитці завдовжки $l = 2$ м. Її відхиляють на кут $\alpha = 4^\circ$ і спостерігають коливання. Визначити швидкість кульки під час проходження нею положення рівноваги, вважаючи коливання незгасаючими гармонічними. Перевірити розв'язок, обчисливши швидкість кульки з рівнянь механіки.

4.29. Кулька масою $m = 20$ г, що підвішена на ізолювальній нитці на висоті $h = 15$ см від великої горизонтальної провідної площини, здійснює малі коливання. Після того як кульці надали деякого заряду q , період коливань змінився у $\eta = 3$ рази. Визначити заряд q .

4.30. Встановити закон, згідно з яким змінюється з часом сила натягу F нитки математичного маятника. Маятник коливається за законом $\alpha = \alpha_m \cos \omega t$, маса його m , довжина l .

4.31. Годинник, в якому механічний маятник відрегульовано на певну частоту, підняли на висоту $h = 25$ км над поверхнею Землі. Як зміняться показання цього годинника протягом однієї години?

4.32. Секундний маятник ($T_0 = 2$ с) відрегулювали при температурі $t_0 = 0$ °С. При якій температурі t маятник відставатиме на $\Delta t = 0,5$ хв за добу, якщо температурний коефіцієнт лінійного розширення матеріалу нитки маятника $\alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$?

4.33. Цвях забито в стіну горизонтально. На нього підвішено тонкий обруч, який коливається в площині, паралельній стіні. Радіус обруча $R = 30$ см. Обчислити період T коливань обруча.

4.34. Математичний маятник завдовжки $l_0 = 40$ см і тонкий однорідний стрижень, довжина якого $l = 60$ см, здійснюють малі синхронні коливання навколо горизонтальної осі. Визначити відстань x від центра мас стрижня до цієї осі.

4.35. Однорідний диск радіуса $R = 30$ см здійснює коливання навколо горизонтальної осі, що проходить через: а) одну з твірних циліндричної поверхні диска; б) середину одного з радіусів перпендикулярно до площини диска. Які періоди T_1 і T_2 його коливань?

4.36. На тонкій нитці, довжина якої $l = 20$ см, підвішена куля радіуса $R = 5$ см. Обчислюючи частоту ν коливань цього маятника, дослідник вважав його за математичний. Наскільки помилився дослідник?

4.37. На кінцях тонкого стрижня завдовжки l закріплені тягарці масами m_1 та m_2 . Стрижень коливається навколо горизонтальної осі, що проходить через його середину. Визначити період T коливань стрижня, якщо: а) стрижень невагомий; б) маса стрижня m .

4.38. Лійка з піском підвішена на нитці. Як змінюватиметься період коливань такого маятника, якщо пісок висипається з лійки поступово?

4.39. Стрижень може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, що проходить через його верхній кінець. Невеликий тягарець можна закріплювати в різних місцях стрижня. Як зміниться період коливань, якщо тягарець із середини стрижня перемістити на його нижній кінець?

Пружинний маятник

4.40. Брусок, маса якого $m = 0,5$ кг, лежить на гладкому столі. Його з'єднано горизонтальною пружиною жорсткістю $k = 32$ Н/м зі стіною (рис. 4.5). У початковий момент часу пружину стиснули на $x_0 = 1$ см і відпустили. Встановити закон руху бруска. Тертям нехтувати.

4.41. Брусок масою $M = 5$ кг, який лежить на гладкому столі, з'єднано горизонтальною пружиною жорсткістю $k = 150$ Н/м зі стіною. У брусок влучає і застряє в ньому куля, маса якої $m = 10$ г, що летіла горизонтально вздовж осі пружини зі швидкістю $v = 300$ м/с. Встановити закон руху бруска. Тертям нехтувати.

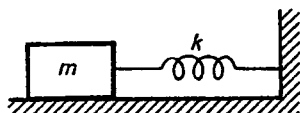


Рис. 4.5

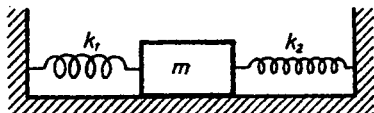
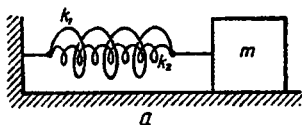
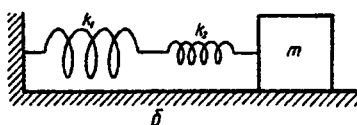


Рис. 4.6

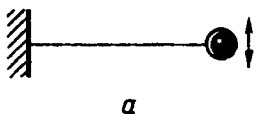


а



б

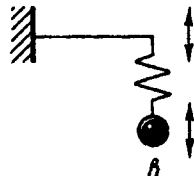
Рис. 4.7



а



б



в

Рис. 4.8

4.42. До спіральної пружини підвішено тягарець, внаслідок чого пружина розтягнулася на $\Delta x = 9$ см. Яким буде період T коливань тягарця, якщо його відтягнути вниз від положення рівноваги, а потім відпустити?

4.43. Наскільки розтягнеться спіральна пружина у разі навантаження її тягарцем, який здійснює на ній малі коливання з частотою $\nu = 2$ Гц?

4.44. Тягарець масою $m = 0,1$ кг, підвішений на спіральній пружині, розтягує її на $\Delta x = 0,1$ мм. Яку амплітуду A матимуть коливання тягарця, якщо повна механічна енергія $E = 1$ Дж?

4.45. Пружинний маятник вивели з положення рівноваги й відпустили. Через який час (у частинах періоду T) кінетична енергія тіла, що коливається, дорівнюватиме потенціальній енергії пружини?

4.46. До спіральної пружини жорсткістю $k = 40$ Н/м підвішено тягарець, маса якого $m = 0,1$ кг. Тягарець відтягнули вниз від положення рівноваги на $x_0 = 8$ см і надали початкової швидкості, спрямованої вниз, $v_0 = 2,8$ м/с. Записати закон руху тягарця.

4.47. Визначити період T малих поздовжніх коливань тіла, маса якого m , у системі, зображений на рис. 4.6, якщо жорсткості пружин k_1 і k_2 . Масами пружин і тертям нехтувати.

4.48. Дві пружини однакової довжини, жорсткості яких k_1 і k_2 , з'єднано: а) паралельно (рис. 4.7, а); б) послідовно (рис. 4.7, б). Визначити періоди T коливань в обох випадках.

4.49. Кулька коливається на тонкому сталевому стрижні з частотою ν_1 (рис. 4.8, а). Потім цю кульку підвішують до пружини, і вона коливається з частотою ν_2 (рис. 4.8, б). Якою буде частота ν коливань кульки, якщо її разом з пружиною прикріпити до кінця стрижня (рис. 4.8, в)? Масами стрижня й пружини нехтувати.

Інші гармонічні осцилятори

4.50. Посередині натягнутої струни завдовжки $l = 50$ см закріплено тягарець, маса якого $m = 10$ г (рис. 4.9). Натяг струни $F = 2$ Н. Встановити період T малих коливань тягарця.

4.51. Ртуть, маса якої $m = 121$ г, міститься в U -подібній трубці (рис. 4.10). Площа поперечного перерізу трубки $S = 0,3$ см². Визначити період T коливань ртуті в трубці, що виникають у разі виведення системи зі стану рівноваги.

4.52. Визначити період T коливань тіла, що вільно рухалося б у тунелі, якби він проходив через центр Землі вздовж її осі. Вважати Землю однорідною кулею. Яким буде рух, якщо густина Землі зростатиме з наближенням до центра?

4.53. Айсберг у вигляді прямої призми коливається вздовж вертикальної осі. Визначити період T малих коливань айсберга, якщо висота його надводної частини $h = 100$ м.

4.54. Диск, маса якого $m = 1$ кг і радіус $R = 10$ см, підвішено на сталевому дроті в горизонтальному положенні (рис. 4.11). Під час повертання диска на кут $\varphi = \pi/6$ рад з положення рівноваги в дроті ви-

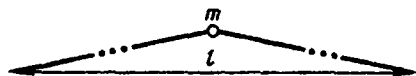


Рис. 4.9

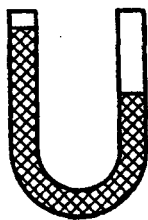


Рис. 4.10

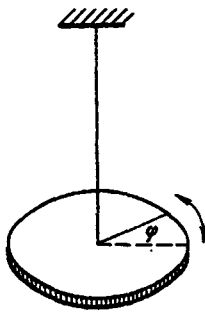


Рис. 4.11

никає момент пружних сил $M = 0,026 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Обчислити період T коливань диска.

4.55. На сталевому дроті радіуса $r = 1 \text{ мм}$ і завдовжки $l = 1 \text{ м}$ підвішено горизонтально врівноважений тонкий стрижень, довжина якого $l_1 = 30 \text{ см}$ і маса $m_1 = 0,15 \text{ кг}$. На кінцях стрижня закріплено мідні кулі радіуса $R = 2,5 \text{ см}$ кожна. Визначити період T крутильних коливань стрижня.

4.56. У середині нескінченного плоского шару рівномірно розподілений позитивний заряд з об'ємною густиною $\rho = 7 \text{ мКл/м}^3$. Встановити частоту ω коливань електрона, вміщеного в цей шар.

4.57. Точковий диполь з електричним моментом $p_e = 100 \text{ пКл}\cdot\text{м}$ вільно встановився в однорідному електричному полі напруженістю $E = 9 \text{ МВ/м}$. Диполь був повернутий на малий кут і вільно відпущений. Визначити частоту ν власних коливань диполя в електричному полі. Момент інерції I диполя відносно осі, що проходить через його центр, дорівнює $4 \cdot 10^{-12} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

4.58. Кругла рамка зі струмом, сила якого $i = 2 \text{ А}$, вільно підвішена в однорідному магнітному полі й здійснює малі крутильні коливання відносно вертикальної осі. Площа рамки $S = 2 \text{ см}^2$, момент інерції $I = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, період коливань $T = 1,2 \text{ с}$. Визначити магнітну індукцію поля B .

4.59. Акустичним резонатором (резонатором Гельмгольца) називають посудину, яка з'єднується із зовнішнім середовищем через невелику трубку – горло (рис. 4.12). Якщо дуги біля горла резонатора, можна почути звукові коливання певного тону. Вважаючи, що рух повітря відбувається тільки в горлі, а повертальна сила виникає внаслідок зміни тиску у великому об'ємі, обчислити власну частоту резонатора за такими даними: $V = 1 \text{ л}$, $l = 7 \text{ см}$, $S = 3 \text{ см}^2$, швидкість звуку $v = 340 \text{ м/с}$.

4.60. Візок, маса якого m_1 , із закріпленим маятником (кулька масою m_2 на нитці завдовжки l) легко підштовхнули вздовж містка. Визначити період T коливань маятника, що виникнуть у такій системі (рис. 4.13).

4.61. Дошка й брусок, що лежить на ній, здійснюють горизонтальні гармонічні коливання з амплітудою $A = 10 \text{ см}$. Визначити коефіцієнт тертя f між дошкою та бруском, якщо останній починає ковзати по дошці, коли її період коливань менший, ніж $T = 1 \text{ с}$.

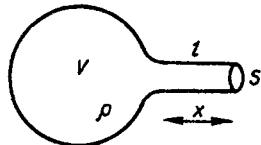


Рис. 4.12

4.62. Горизонтальна платформа здійснює у вертикальному напрямі гармонічні коливання за законом $x = A \cos \omega t$. На платформі лежить шайба з абсолютно непружного матеріалу. За якої умови шайба відділятиметься від платформи?

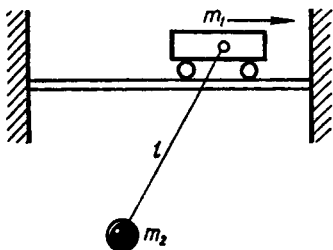


Рис. 4.13

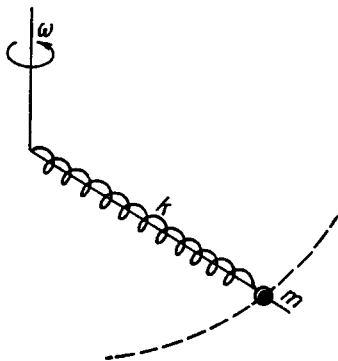


Рис. 4.14

4.63. Частинка масою m міститься в одновимірному полі, її потенціальна енергія залежить від координати x як $U(x) = a - b \cos kx$, де $a, b > 0, k$ – сталі. Встановити період T малих коливань частинки навколо положення рівноваги.

4.64. У двохатомній молекулі атоми здійснюють коливання, які приблизно можна вважати гармонічними. Вираз для потенціальної енергії, запропонований Морзе, має вигляд $U(x) = D(1 - e^{-ax})^2$, де D, a – константи, $D \approx 5$ еВ, $a = 6 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$. Вважаючи, що маса атома $m \approx 2 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$, оцінити частоту ω електромагнітної хвилі, яку випромінює така молекула.

4.65. Визначити період T коливань математичного маятника, закріпленого на візку, який: а) рухається горизонтально з прискоренням $a = 2 \text{ м/с}^2$; б) рухається вгору вздовж похилої площини, яка утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом, з прискоренням $a = 2 \text{ м/с}^2$; в) розміщується в ліфті, що підіймається вгору з прискоренням $a = 2 \text{ м/с}^2$.

4.66. Встановити період T малих коливань кулі масою m на стрижні, який обертається з кутовою швидкістю ω в горизонтальній площині навколо вертикальної осі, що проходить через його кінець (рис. 4.14). Куля з'єднана з кінцем стрижня пружиною жорсткістю k . За якої умови коливання неможливі?

4.67. Який вигляд матиме на фазовій площині $(\theta, \dot{\theta}/\omega_0)$ фазова траєкторія незгасаючих гармонічних коливань математичного маятника $\theta = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$, де θ – кутове зміщення? Як зображуються на фазовій площині вільні коливання з різними амплітудами? У чому полягає ізохронність коливань?

**Закон збереження енергії
(метод узагальнених координат) у коливальних процесах**

4.68. Однорідна кулька радіуса r катається по внутрішній поверхні сферичної чашки радіуса $R > r$ (рис. 4.15). Визначити власну частоту ω_0 малих коливань кульки біля положення рівноваги, якщо вона: а) ковзає; б) котиться без проковзування.

4.69. Циліндр масою m і радіуса R з'єднаний зі стіною невагомою пружиною жорсткістю k (рис. 4.16). Визначити період T малих коливань системи, якщо циліндр котиться по поверхні без проковзування. Масою пружини й тертям на осі циліндра нехтувати.

4.70. Математичний маятник з'єднали пружиною зі стіною. Положення рівноваги коливальної системи і її параметри зображено на рис. 4.17. Визначити власну частоту ω_0 малих коливань системи.

4.71. До центра мас C фізичного маятника прикріплено пружину жорсткістю $k = 20$ Н/м, інший кінець пружини закріплено в стіні (рис. 4.18). Маятником є однорідний стрижень, маса якого $m_1 = 0,5$ кг і довжина $l_1 = 60$ см, з'єднаний з кулею. Маса кулі $m_2 = 2$ кг, її радіус $R = 4$ см. Вісь обертання проходить через верхній кінець стрижня. У положенні рівноваги пружина не деформована. Визначити частоту ω_0 коливань маятника.

4.72. Однорідний стрижень масою m і завдовжки l може обертатися навколо горизонтальної осі, яка проходить через його кінець. Іншим кінцем стрижень підвішений на пружині (рис. 4.19) жорсткістю k . У положенні рівноваги стрижень розміщується горизонтально. Визначити частоту ω_0 малих коливань стрижня.

4.73. Блок радіуса r з моментом інерції відносно осі обертання I , тягарець масою m і пружина з коефіцієнтом жорсткості k з'єднані, як показа-

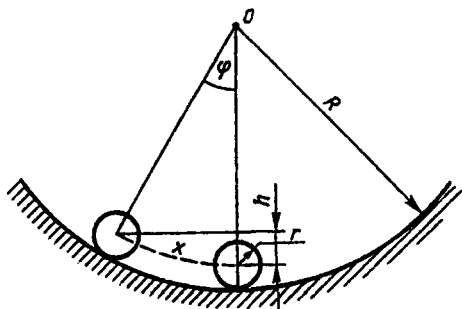


Рис. 4.15

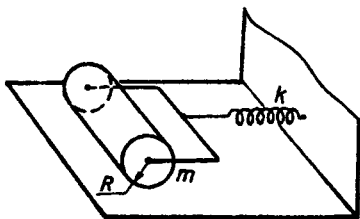


Рис. 4.16

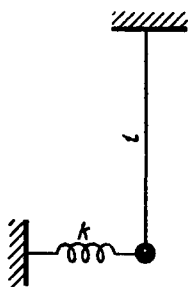


Рис. 4.17

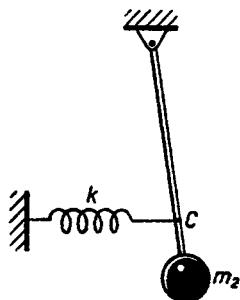


Рис. 4.18

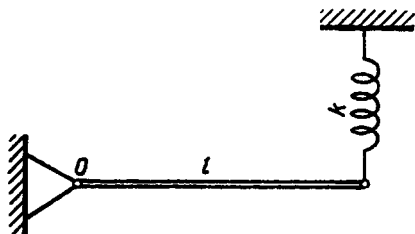


Рис. 4.19

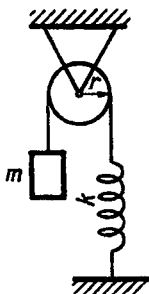


Рис. 4.20

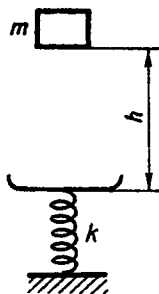


Рис. 4.21

но на рис. 4.20. Шнур не може проковзувати по блоку. Визначити період T коливань тягарця.

4.74. Кусок пластиліну, маса якого $m = 0,1$ кг, упав на шальку пружинної ваги з висоти $h = 10$ см і прилип до неї (рис. 4.21). Визначити амплітуду A і період T коливань шальки, якщо маси її й пружини є незначними, а жорсткість пружини $k = 40$ Н/м.

4.75. Чи можуть бути гармонічними коливання з великою амплітудою?

Коливальні системи з двома ступенями вільності

4.76. Два бруски масами m_1 і m_2 з'єднані невагомою пружиною жорсткістю k і лежать на гладкій горизонтальній площині (рис. 4.22). Пружину трохи розтягнули і одночасно відпустили бруски. Визначити період T коливань системи.

4.77. На гладенькій горизонтальній поверхні стоїть візок масою M (рис. 4.23). Визначити період T коливань горизонтального пружинного маятника масою m , що міститься на візку. Жорсткість пружини дорівнює k .

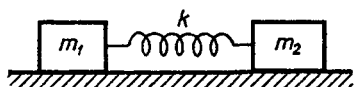


Рис. 4.22

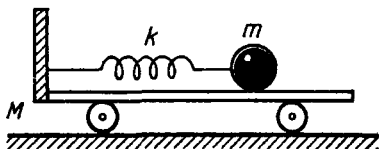


Рис. 4.23

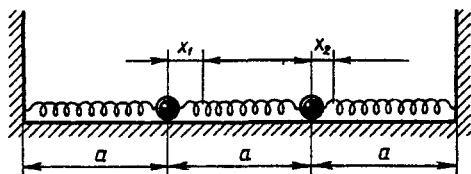


Рис. 4.24

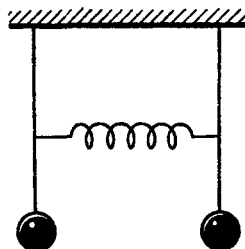


Рис. 4.25

4.78. Визначити власну частоту ω_0 коливань двохатомної молекули NaCl, розглядаючи її як гармонічний осцилятор зі сталою міжатомної взаємодії $k = 120$ Н/м. Маси атомів Na і Cl відповідно становлять 23 а. о. м. і 35 а. о. м. Якій частині спектра відповідає випромінювання молекули NaCl?

4.79. Два тіла з однаковими масами $m = 1$ кг можуть ковзати по поверхні без тертя. Тіла з'єднані зі стінами і одна з одною трьома однаковими невагомими пружинами. Коефіцієнт жорсткості пружин $k = 66,7$ Н/м. Рівноважна довжина пружин a (рис. 4.24). Визначити частоту й форму нормальних коливань (мод).

4.80. Два маятники з'єднані між собою пружиною (рис. 4.25) і можуть коливатися у вертикальній площині, яка проходить через лінію, що сполучає їхні точки підвісу. Які нормальні коливання (моди) маятників? Чи обмінюватимуться маятники енергією, якщо вони здійснюють нормальні коливання? Скільки мод матиме система, якщо маятники можуть здійснювати коливання одночасно і в площині рисунка, і в перпендикулярному напрямі?

4.3. ЗГАСАЮЧІ МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

Диференціальне рівняння згасаючих коливань

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0; \quad (4.3.1)$$

його розв'язок (для $\beta < \omega_0$)

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.3.2)$$

де β – коефіцієнт згасання; ω – частота згасаючих коливань,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (4.3.3)$$

Логарифмічний декремент згасання δ і добротність Q коливальної системи:

$$\delta = \beta T; \quad (4.3.4)$$

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega_0}{2\beta}, \quad \text{якщо } \delta \ll 1, \quad (4.3.5)$$

де T – період згасаючих коливань, $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Закон втрат енергії осцилятора з часом

$$E = E_0 e^{-2\beta t}. \quad (4.3.6)$$

4.81. Як поводить себе маятник, занурений у рідину з великою в'язкістю (наприклад, у гліцерин)? Чи будуть згасаючі коливання гармонічними? Що розуміють під періодом згасаючих коливань?

4.82. Тіло, маса якого $m = 1$ кг, здійснює коливання під дією квазіпружної сили ($k = 10$ Н/м). Визначити коефіцієнт опору r в'язкого середовища, якщо період згасаючих коливань $T = 2,1$ с.

4.83. Амплітуда згасаючих коливань за час $t_1 = 20$ с зменшилась у 2 рази. У скільки разів вона зменшиться за час $t_2 = 1$ хв?

4.84. Визначити кількість N повних коливань, після яких енергія системи зменшилась у $n = 2$ рази. Логарифмічний декремент згасання $\delta = 0,01$.

4.85. Амплітуда коливань маятника завдовжки $l = 1$ м за час $t = 10$ хв зменшилась у 2 рази. Визначити логарифмічний декремент згасання δ системи.

4.86. Якою буде добротність Q осцилятора, власна частота коливань якого $\nu_0 = 1$ кГц, а час релаксації, протягом якого амплітуда коливань зменшується в e разів, $\tau = 60$ с?

4.87. Вантаж підвішено на пружині, жорсткість якої $k = 0,1$ Н/м, і занурено в середовище. Коефіцієнт опору середовища $r = 0,05$ кг/с. Маса вантажу $m = 1$ кг. Визначити добротність Q коливальної системи.

4.88. Після $N = 10$ повних коливань точки її амплітуда коливань зменшилась від $A_0 = 10$ см до $A = 6$ см. Коефіцієнт згасання $\beta = 0,2$. Записати закон руху точки.

4.89. За час $t = 100$ с система робить $N = 100$ коливань. За цей самий час амплітуда коливань зменшується в e разів. Обчислити: коефіцієнт згасання коливань β ; логарифмічний декремент згасання δ ; добротність Q системи; відносне зменшення енергії системи за період коливань?

4.90. Добротність коливальної системи $Q = 3$, частота вільних коливань $\omega = 150 \text{ с}^{-1}$. Визначити власну частоту ω_0 коливань системи.

4.91. Амплітуда згасаючих коливань осцилятора за час $\tau = 6,93 \text{ с}$ зменшилась у $n = 8$ разів. Як за цей час зменшилась механічна енергія осцилятора? Чому дорівнює коефіцієнт згасання β ?

4.92. Вантаж масою $m = 500 \text{ г}$, який підвішено до спіральної пружини жорсткістю $k = 20 \text{ Н/м}$, здійснює пружні коливання в деякому середовищі. Логарифмічний декремент згасання коливань $\delta = 0,004$. Визначити кількість N повних коливань, які має здійснити вантаж, щоб енергія коливань зменшилась у $n = 2$ рази. За який час Δt відбудеться це зменшення?

4.93. Тягарець, маса якого $m = 0,1 \text{ кг}$, закріплено на вертикальний пружині жорсткістю $k = 10 \text{ Н/м}$. Сила опору руху пропорційна швидкості, коефіцієнт пропорційності $r = 0,87 \text{ кг/с}$. Тягарець відхилили на відстань $x_{m0} = 2 \text{ см}$ від положення рівноваги й відпустили без поштовху. Записати закон руху тягарця.

4.94. За умовами задачі 4.93 визначити шлях s , який пройшов тягарець до зупинки.

4.95. За умовами задачі 4.93 визначити, яку частку енергії η втрачає система за півперіод коливань.

4.96. Тіло, маса якого $m = 0,5 \text{ кг}$, прикріплено до стіни пружиною (див. рис. 4.5) і міститься у в'язкому середовищі. Жорсткість пружини $k = 50 \text{ Н/м}$, коефіцієнт опору руху $r = 10 \text{ кг/с}$. Спочатку тіло перебувало в положенні рівноваги і в початковий момент часу $t = 0$ одержало швидкість $v_0 = 1 \text{ м/с}$ у горизонтальному напрямі. Визначити максимальне відхилення $x_{\max}$ тіла в напрямі швидкості. Побудувати графік залежності зміщення від часу.

4.97. Чому в балістичному гальванометрі використовують режим критичного згасання?

4.98. Чим відрізняються фазові траєкторії для згасаючих осциляторів з різними добротностями?

4.99. Встановити відстань між сусідніми точками перетину осі Ox фазовою кривою коливань, початкова амплітуда яких $A_0 = 1 \text{ см}$ і логарифмічний декремент $\delta = 0,01$, у момент часу $t = 100 \text{ с}$, якщо період коливань $T = 1 \text{ с}$.

4.100. Осцилятор має період коливань $T = 1 \text{ мкс}$, а коефіцієнт згасання $\beta = 10 \text{ с}^{-1}$. Скільки разів фазова крива для осцилятора перетне вісь Ox за час $\Delta t = 1 \text{ с}$? У скільки разів зменшиться за цей час радіус фазової кривої?

4.101. Точка здійснює малі коливання поблизу положення рівноваги. В першому випадку початкове зміщення точки від положення рівноваги

дорівнює x_{01} , у другому – x_{02} . Початкова швидкість точки дорівнює нулеві. Визначити проміжок часу t , за який точка переходить з початкового положення в положення рівноваги, в обох випадках, якщо коливання: а) незгасаючі з частотою ω_0 ; б) згасаючі з частотою ω і коефіцієнтом згасання β .

4.4. ВИМУШЕНІ МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

Диференціальне рівняння вимушених коливань

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (4.4.1)$$

де $f_0 = F_0/m$, F_0 – амплітуда змушувальної сили, має розв'язок в усталеному режимі

$$x = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (4.4.2)$$

де A – амплітуда вимушених коливань; φ – зсув фаз між силою і зміщенням:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}; \quad (4.4.3)$$

$$\tan \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (4.4.4)$$

Резонансна частота

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (4.4.5)$$

Резонансна амплітуда

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (4.4.6)$$

Спектр коливань (сукупність гармонічних коливань, на яку можна розкласти періодичне негармонічне коливання) математично зображується як ряд гармонічних функцій:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \quad (4.4.7)$$

де $n\omega$ – частоти, які є кратними основній частоті; n – номер гармоніки (обертону).

4.102. На гармонічний осцилятор масою $m = 10$ г, який здійснює коливання з коефіцієнтами квазіпружної сили $k = 10^2$ Н/м і згасання $\beta = 1$ с⁻¹, діє змушувальна сила, що змінюється за законом $F = 0,1 \cos 90t$, де F – сила, Н. Встановити закон, за яким відбуваються коливання. Порівняти значення амплітуди коливань з амплітудою в резонансі.

4.103. Період власних коливань пружинного маятника $T_0 = 0,55$ с. У в'язкому середовищі період T цього самого маятника становить $0,56$ с. Визначити резонансну частоту $\nu_{\text{рез}}$ коливань.

4.104. Амплітуда вимушених коливань, частоти яких $\omega_1 = 100 \text{ с}^{-1}$ і $\omega_2 = 300 \text{ с}^{-1}$, є однаковою за умови незмінної амплітуди змушувальної сили. Обчислити резонансну частоту $\omega_{\text{рез}}$.

4.105. Частота вільних коливань системи $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$, резонансна частота $\omega_{\text{рез}} = 99 \text{ с}^{-1}$. Визначити власну частоту ω_0 і добротність Q цієї системи.

4.106. Довга пружна дошка перекинута через канавку. Під дією ваги хлопчика, який стоїть на ній нерухомо, дошка ввігнулася на $h = 10$ см. Хлопчик іде зі швидкістю $v = 3,6$ км/год. Яка ширина l кроку спричинить сильне розгойдування дошки?

4.107. Вантаж масою $m = 0,5$ кг підвішений на пружині, коефіцієнт пружності якої $k = 0,49$ Н/см, і поміщений у масло. Коефіцієнт опору руху в маслі $r = 0,5$ кг/с. На верхній кінець пружини діє вертикальна змушувальна сила, що змінюється за законом $F = 0,98 \sin \omega t$, де F – сила, Н. При якій частоті змушувальної сили амплітуда вимушених коливань буде максимальною? Чому вона дорівнює?

4.108. Кулька масою $m = 50$ г коливається на легкій нитці, довжина якої $l = 1$ м. Вважаючи, що коефіцієнт опору повітря $r = 0,1$ кг/с, визначити: частоту власних коливань ν_0 ; резонансну частоту коливань $\nu_{\text{рез}}$; резонансну амплітуду $A_{\text{рез}}$, якщо амплітудне значення змушувальної сили $F_0 = 0,01$ Н.

4.109. Вантаж, маса якого $m = 0,5$ кг, підвішений на вертикальній пружині жорсткістю $k = 40$ Н/м у в'язкому середовищі. Сила в'язкого тертя пропорційна швидкості з коефіцієнтом тертя $r = 0,5$ кг/с. У початковий момент часу, коли зміщення вантажу від положення рівноваги становило $x_0 = 0,1$ м, на вантаж почала діяти зовнішня періодична сила $F = 2 \cos 8t$, Н. Записати закон руху в перехідному режимі. За час t_0 після початку коливань амплітуда вільних коливань зменшується в $\eta = 100$ разів і вони практично припиняються. Визначити цей час.

4.110. Чому дорівнює відношення максимальної амплітуди зміщення до амплітуди зміщення при дуже малій частоті?

4.111. Тіло масою $m = 0,1$ кг підвішено на пружині жорсткістю $k = 10$ Н/м. Верхня частина пружини перебуває під дією вертикальної сили $F = 10^{-3} \cos \omega t$, Н. Коливання відбуваються у в'язкому середовищі. Визначити максимальну силу тертя $F_{\text{т max}}$, що заважає рухові, якщо при резонансі амплітуда $A_{\text{рез}} = 0,1$ м.

4.112. На тіло масою $m = 10$ г, яке здійснює коливання за законом $x = 0,1 \exp(-6t) \cos 10,5 \pi t$, де x – зміщення, м, у деякий момент часу почала діяти зовнішня періодична сила F , внаслідок чого коливання

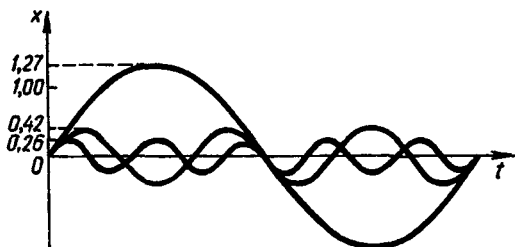


Рис. 4.26

стали гармонічними, їх амплітуда $A = 5$ см і циклічна частота $\omega = 10 \pi \text{ с}^{-1}$. За яким законом змінюється змушувальна сила F з часом? Визначити зсув фаз ϕ між силою і зміщенням та період T_0 власних коливань.

4.113. За умовами задачі 4.102 визначити середню за часом потужність $\langle P \rangle$, що поглинається системою: а) удалині від резонансу; б) у резонансі.

4.114. Користуючись співвідношенням між фазами змушувальної сили F та швидкості v , пояснити походження резонансного підсилення коливань.

4.115. У чому полягає різниця між вимушеними коливаннями та автоколиваннями? Вказати, якими – вимушеними чи автоколиваннями – є коливання: а) верхівок дерев, які розгойдуються вітром; б) маятника годинника; в) крил літака під дією зустрічного потоку повітря; г) мосту від автомобілів, що проїжджають по ньому; д) мембрани динаміка; е) двигуна автомобіля; є) молоточка електричного дзвінка; ж) повітря в духових інструментах; з) струн смичкових інструментів.

4.116. На математичний маятник діє періодична сила $f(t)$, розкладання якої у ряд Фур'є має вигляд $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos 1,57nt + B_n \sin 1,57nt)$. При

яких довжинах маятника він здійснюватиме сильні коливання?

4.117. На рис. 4.26 зображено перші три гармоніки складного коливання. Яким буде графік складного коливання? Записати його у вигляді Фур'є-розкладання.

4.118. Показати дію періодичних поштовхів на осцилятор на фазовій площині. Як змінюватиметься амплітуда коливань гармонічного осцилятора, якщо на нього діятимуть поштовхи з періодами: а) $T = T_0 + \Delta$; б) $T = T_0 - \Delta$; в) $T = T_0$; г) $T = nT_0$; д) $T = T_0/4$; е) $T = T_0/2$, де T_0 – період власних коливань осцилятора, $\Delta \ll T_0$? Час дії поштовху $\tau \ll T_0$. Згасанням нехтувати.

4.5. ПРУЖНІ ХВИЛІ. ЕЛЕМЕНТИ АКУСТИКИ

Рівняння плоскої стаціонарної хвилі, яка поширюється в напрямі осі Ox :

$$\xi(x, t) = f(at - bx), \quad (4.5.1)$$

де $\xi(x, t)$ – зміщення частинки середовища, яка виконує коливання під час проходження хвилі; f – довільна однозначна функція; a і b – сталі; v – фазова швидкість поширення хвилі, $v = a/b$.

Рівняння плоскої гармонічної хвилі, що поширюється вздовж осі Ox :

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (4.5.2)$$

де A – амплітуда хвилі; ω – циклічна частота; k – хвильове число, $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$, тут λ – довжина хвилі, $\lambda = vT = v/\nu$, ν – фазова швидкість поширення хвилі, $\nu = dx/dt$; φ – початкова фаза коливань (у подальшому вважається такою, що дорівнює нулеві).

Рівняння сферичної і циліндричної хвиль відповідно

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr), \quad (4.5.3)$$

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - kr), \quad (4.5.4)$$

де A_0 – розмірні сталі, що чисельно дорівнюють амплітуді коливань на відстані 1 м від джерела хвилі.

Одновимірне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (4.5.5)$$

Фазова швидкість поздовжніх пружних хвиль у тонких стрижнях і наближено в суцільному пружному середовищі

$$v = \sqrt{E/\rho}, \quad (4.5.6)$$

де E – модуль Юнга; ρ – густина середовища.

Фазова швидкість поперечних хвиль

$$v = \sqrt{G/\rho}, \quad (4.5.7)$$

де G – модуль зсуву.

Для плоскої поздовжньої хвилі, що поширюється вздовж осі Ox , відносна деформація ділянки середовища

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (4.5.8)$$

механічне напруження (закон Гука)

$$\sigma = E \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (4.5.9)$$

Об'ємна густина енергії середовища під час поширення в ньому пружної хвилі

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (4.5.10)$$

Густина потоку енергії (вектор Умова)

$$\mathbf{j} = w\mathbf{v}. \quad (4.5.11)$$

Інтенсивність пружної хвилі

$$I = \langle |\mathbf{j}| \rangle_T = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v, \quad (4.5.12)$$

де $\langle \mathbf{j} \rangle_T$ – середнє за період значення густини потоку енергії, що переноситься хвилею.

Швидкість звуку в ідеальних газах і рідинах:

$$v_r = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \quad v_p = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{\beta \rho}}, \quad (4.5.13)$$

де R – універсальна газова стала; T – температура; M – молярна маса газу; γ – показник адіабати; p , ρ – тиск і густина незбуреного газу; K – модуль об'ємної пружності (всєбічного стиску); β – коефіцієнт адіабатичної стисливості.

Амплітуда звукового тиску (акустичний тиск)

$$(\Delta p)_0 = \rho A \omega v, \quad (4.5.14)$$

де A – амплітуда коливань частинок середовища, $A = \xi_0$.

Інтенсивність звуку в газах

$$I = \frac{(\Delta p)_0^2}{2\rho v}. \quad (4.5.15)$$

Амплітуда швидкості частинок газу

$$(\dot{\xi})_0 = \frac{(\Delta p)_0}{\rho v}. \quad (4.5.16)$$

Питомий акустичний імпеданс (для плоских хвиль – акустичний, або хвильовий, опір) середовища

$$Z = \rho v, \quad (4.5.17)$$

де ρ – густина середовища; v – швидкість хвиль.

При нормальному падінні звукової хвилі на плоску поверхню поділу двох середовищ:

а) амплітудні коефіцієнти відбиття V і проходження W хвиль ($Z_2 > Z_1$):

$$V = \frac{A'_1}{A_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad W = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad (4.5.18)$$

де A_1 , A'_1 , A_2 – амплітуди відповідно падаючої, відбитої та тієї, що проходить, хвилі;

б) енергетичні коефіцієнти відбиття R та проникнення D :

$$R = \frac{I'_1}{I_1} = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2, \quad D = \frac{I_2}{I_1} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}, \quad R + D = 1, \quad (4.5.19)$$

де I_1 , I'_1 , I_2 – інтенсивності відповідно падаючої, відбитої та тієї, що пройшла, хвилі.

Амплітуда плоскої хвилі, яка поширюється в однорідному поглинальному середовищі,

$$A = A_0 e^{-\gamma x}, \quad (4.5.20)$$

де A_0 – амплітуда хвилі, що падає на середовище; γ – коефіцієнт поглинання; x – відстань, яку проходить хвиля.

Рівень гучності у децибелах (дБ)

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}, \quad (4.5.21)$$

де I – інтенсивність звуку; I_0 – поріг чутності, $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м².

Згасання хвилі у децибелах

$$L_{12} = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}. \quad (4.5.22)$$

Акустичний ефект Доплера

$$\nu = \nu_0 \frac{v_{зв} \pm v_{пр}}{v_{зв} \mp v_{дж}}, \quad (4.5.23)$$

де ν – частота, яку реєструє приймач; ν_0 – частота, яку випромінює джерело; $v_{зв}$ – швидкість звуку; $v_{пр}$, $v_{дж}$ – швидкості відповідно приймача і джерела звуку відносно середовища, в якому поширюються звукові хвилі. Верхні знаки беруться у разі зближення, нижні – віддалення джерела і приймача.

Умови інтерференційних максимумів при інтерференції гармонічних хвиль завдовжки λ :

$$\Delta = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.5.24)$$

Умови мінімумів:

$$\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.5.25)$$

де Δ – різниця ходу хвиль від їх джерел до точки спостереження, $\Delta = r_2 - r_1$.

Рівняння стоячої гармонічної хвилі, яка виникає у разі накладання двох плоских хвиль з однаковою амплітудою:

$$\xi = 2A \cos kx \cos \omega t. \quad (4.5.26)$$

Власні частоти струни завдовжки l , закріпленої з обох кінців,

$$\nu_n = \frac{v}{2l} n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.5.27)$$

Швидкість поперечних хвиль у струні

$$v = \sqrt{\frac{F_n}{\mu}}, \quad (4.5.28)$$

де F_n – сила натягу струни; μ – лінійна густина; $\mu = \rho S$, тут ρ – густина матеріалу струни, S – площа її поперечного перерізу.

$$\omega = \omega(k), \quad (4.5.29)$$

де k – хвильове число.

Групова швидкість

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \quad (4.5.30)$$

Зв'язок групової та фазової швидкостей (формула Релея):

$$u = v + k \frac{dv}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (4.5.31)$$

Розподіл зміщень і деформацій у пружній хвилі

4.119. Як описати одиничний імпульс, який поширюється в додатному напрямі осі Ox , якщо форма його не змінюється?

4.120. Який процес описує функція $\xi = f(at - bx)$, де f – довільна функція? Який зміст має величина a/b ?

4.121. Які з наведених нижче функцій задовольняють хвильове рівняння:

- | | |
|--|--|
| а) $\xi(x, t) = at + bx$; | е) $\xi(x, t) = \ln(at - bx)$; |
| б) $\xi(x, t) = at^2 - bx$; | є) $\xi(x, t) = (at + bx)^2$; |
| в) $\xi(x, t) = \xi_m \cos(\omega t - kx)$; | ж) $\xi(x, t) = \exp(at - bx)$; |
| г) $\xi(x, t) = \cos(at + bx^2)$; | з) $\xi(x, t) = A \exp i(\omega t - kx)$; |
| д) $\xi(x, t) = (at + bx)^{1/2}$; | и) $\xi(x, t) = A \exp i(\omega t + kx)$? |

4.122. Який характер руху мають частинки пружного середовища, в якому вздовж осі Ox поширюється плоска хвиля? Чи збігається напрям руху частинок з напрямом поширення хвилі?

4.123. Ультразвукові пружні хвилі поширюються в повітрі, воді та сталі. Їх частота $\nu = 100$ МГц. Якими є довжини звукових хвиль у цих середовищах?

4.124. Плоска хвиля задана рівнянням $\xi = A \cos(\omega t - kx)$. Для моменту часу $t = \pi/(2\omega)$ побудувати графіки зміщень ξ , швидкостей $\dot{\xi}$ частинок середовища та відносної деформації ділянки середовища $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$. Порівняти ці графіки.

4.125. Плоска гармонічна хвиля, період якої $T = 0,25$ с і амплітуда $A = 3$ см, поширюється в пружному непоглинальному середовищі вздовж осі Ox зі швидкістю $v = 240$ м/с. Чому дорівнює зміщення $\xi(x, t)$ точки середовища, що міститься на відстані $x = 60$ м від джерела хвилі тоді, коли від початку коливань джерела пройшов час $t = 1,5$ с? Початкова фаза хвилі дорівнює нулеві.

4.126. Уздовж осі Ox у пружному непоглинальному середовищі поширюється плоска гармонічна хвиля зі швидкістю $v = 20$ м/с. Дві точки середовища, які містяться на відстанях $x_1 = 12$ м і $x_2 = 15$ м від джерела хвилі, коливаються з амплітудою $A = 0,1$ м і різницею фаз $\Delta\phi = 3\pi/4$. Початкова фаза хвилі дорівнює нулеві. Визначити довжину хвилі λ та записати рівняння хвилі. Обчислити зміщення ξ згаданих точок у момент часу $t = 0,5$ с.

4.127. У гірській породі на відстані $a = 8$ м один від одного розміщені два циліндричних заряди вибухової речовини. Під час вибуху від кожного заряду в породі поширюється циліндрична хвиля напруги. На досліді встановлено, що зміщення частинок породи на відстані r від осі заряду має вигляд $\xi(r) = (A_0/r^{3/2}) \cos \omega(t - r/v)$, де $A_0 = 10^{-3} \text{ м}^{5/2}$, $\omega = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $v = 5 \cdot 10^3$ м/с. Визначити максимальне зміщення $\xi_{\max}$ частинок породи в точці, що міститься на відстані $r = 9$ м від кожного заряду.

4.128. На рис. 4.27 показано залежність зміщення від часу в деякій точці x_0 осі Ox , уздовж якої поширюється плоска синусоїдальна хвиля. Записати рівняння хвилі, якщо $x_0 = 8$ м, фазова швидкість хвилі $v = 6$ м/с.

4.129. Плоска поздовжня гармонічна хвиля, період якої $T = 3,5$ мкс і амплітуда $A = 30$ мкм, поширюється в пружному середовищі вздовж осі Ox . Різниця фаз коливань у точках, що лежать на відстані $\Delta x = 1$ мм одна від одної, дорівнює $\pi/3$. Визначити: швидкість v поширення хвилі; зміщення ξ , швидкість $\dot{\xi}$ і прискорення $\ddot{\xi}$ для точок, в яких відносна деформація середовища $\epsilon = 3 \cdot 10^{-3}$; амплітуду коливань швидкості $\dot{\xi}_{\max}$ частинок середовища.

4.130. Плоска поздовжня гармонічна хвиля поширюється вздовж осі Ox у пружному середовищі, причому її джерело розміщується в площині $x = 0$. Початкова фаза хвилі дорівнює нулеві. Яка відносна деформація ϵ середовища в точці, віддаленій від джерела на відстань $x = \lambda/8$ у момент часу, коли від початку відліку пройшов час $t = T/3$ (T – період)? Максимальна швидкість частинок середовища $\dot{\xi}_{\max} = 0,7$ м/с, швидкість хвилі $v = 3,5$ км/с.

4.131. Джерело гармонічних коливань, що здійснюються за законом $\xi = 200 \cos 188,4 t$, де ξ – зміщення, мкм; t – час, с, з'єднане з торцем довгого мідного стрижня й міститься в площині $x = 0$. Яка довжина λ

поздовжньої пружної хвилі у стрижні? В яких точках стрижня модуль нормального напруження: а) дорівнюватиме нулеві; б) буде максимальним для моменту часу $t = 2$ с?

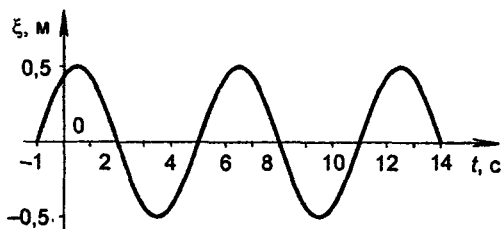


Рис. 4.27

4.132. У сталевому стрижні діаметра $d = 1$ см поширю-

ється поздовжня хвиля, рівняння якої $\xi(x, t) = \xi_0 \cos \frac{2\pi}{T} \left(\frac{x}{v_{\parallel}} - t \right)$, де $\xi_0 = 10^{-4}$ см, $T = 2\pi$ мс. Визначити максимальну силу $F_{\max}$, що діє в перерізі x стрижня.

Швидкість пружних хвиль. Потік енергії

4.133. Визначити швидкість v поздовжніх пружних хвиль у сталевому, мідному та алюмінієвому стрижнях.

4.134. У скільки разів n швидкість поздовжньої хвилі в міді є більшою, ніж швидкість поперечної хвилі?

4.135. Броньбійний снаряд, маса якого $m = 5,6$ кг, швидкість $v = 800$ м/с, влучає в абсолютно жорстку перешкоду. Визначити середню силу F , з якою снаряд діє на перешкоду, і час t удару. Діаметр снаряда $d = 30$ мм, модуль Юнга матеріалу $E = 340$ ГПа, його густина $\rho = 1,9 \cdot 10^4$ кг/м³. Розглянути цей процес як удар пружного циліндра торцем у перешкоду, а час удару визначити часом проходження пружної хвилі вздовж циліндра туди й назад.

4.136. Визначити швидкість $v_{\text{гл}}$ звуку в гліцерині, якщо коефіцієнт стисливості для нього $\beta = 2 \cdot 10^{-10}$ Па⁻¹.

4.137. Під дією поперечної гармонічної сили кінець дуже довгої натягнутої струни коливається з частотою $\nu = 50$ Гц і амплітудою $A = 2$ см. Лінійні густина струни $\mu = 0,1$ г/см, сила натягу $F_n = 1$ кН. Обчислити середній за часом потік $\langle \Phi \rangle$ енергії вздовж струнн.

4.138. Пружна гармонічна хвиля поширюється в мідному стрижні, площа поперечного перерізу якого $S = 3$ см², що розміщений вздовж осі Ox . Визначити потік Φ енергії крізь довільний поперечний переріз стрижня через $1/8$ періоду коливань після того, як швидкість частинок середовища в цьому перерізі набула максимального значення $\dot{\xi}_{\max} = 3,5$ см/с.

4.139. Уздовж сталевої рейки поширюється позовжня пружна хвиля, рівняння якої $\xi = \xi_0 \exp i(\omega t - kx)$. Обчислити модуль напруження $|\sigma|$ у довільному поперечному перерізі з координатою x тоді, коли об'ємна густина енергії хвилі у цьому перерізі $w = 150 \text{ Дж/м}^3$, а хвильове число $k = 1 \text{ м}^{-1}$.

4.140. Визначити амплітуду A незгасаючої сферичної хвилі на відстані $r_2 = 15 \text{ м}$ від точкового джерела в ізотропному середовищі, якщо на відстані $r_1 = 3 \text{ м}$ від нього середня густина потоку енергії $\langle j \rangle = 5 \text{ ГВт/м}^2$. Густина середовища $\rho = 4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга $E = 100 \text{ ГПа}$, частота коливань джерела хвиль $\nu = 15 \text{ кГц}$.

Елементи акустики

4.141. Визначити швидкість $v_{\text{зв}}$ звуку за нормальних умов у гелії, азоті та вуглекислому газі.

4.142. За який час t звукові коливання пройдуть відстань $x_0 = 7 \text{ км}$ між двома поверхнями, якщо температура повітря між ними зменшується за експоненціальним законом $T = T_i \exp(-\alpha x)$ від значення $T_1 = 300 \text{ К}$ на першій поверхні до значення $T_2 = 200 \text{ К}$ на другій?

4.143. Виразити швидкість $v_{\text{зв}}$ звуку в газі через середню швидкість $\langle v \rangle$ його молекул.

4.144. Порівняти швидкість $v_{\text{зв}}$ звуку, середню швидкість $\langle v \rangle$ молекул та максимальну швидкість $\dot{\xi}_{\text{max}}$ коливань частинок повітря, крізь яке проходить звукова хвиля за нормальних умов. Акустичний тиск $(\Delta p)_0 = 10 \text{ Па}$.

4.145. На відстані $R = 3 \text{ км}$ від спостерігача з висоти $h = 4 \text{ км}$ вертикально вдарила блискавка. Який час t спостерігач чутиме грім від неї?

4.146. Три звукові хвилі однакової інтенсивності $I = 50 \text{ мВт/м}^2$ поширюються в повітрі, воді та сталевому стрижні. Які амплітуди звукового тиску $(\Delta p)_0$ у цих середовищах? Порівняти їх з нормальним атмосферним тиском. Вважати, що швидкість звуку в повітрі $v_{\text{п}} = 330 \text{ м/с}$, у воді $v_{\text{в}} = 1500 \text{ м/с}$, у сталі $v_{\text{ст}} = 5100 \text{ м/с}$.

4.147. Амплітуда коливань тиску повітря у звуковій хвилі за нормальних умов $(\Delta p)_0 = 0,01 \text{ Па}$. Якому рівневі гучності L відповідає це значення?

4.148. Рівень гучності авіаційного двигуна $L = 100 \text{ дБ}$. Яка амплітуда A коливань частинок повітря для частоти звуку $\nu = 2 \text{ кГц}$ за нормальних умов?

4.149. Обчислити амплітуду швидкості $\xi_{\max}$ частинок повітря, якщо рівень гучності звуку $L = 60$ дБ. Вважати, що швидкість звуку $v_{\text{зв}} = 330$ м/с.

4.150. Чи може людське вухо реєструвати зміщення молекул повітря на відстань, що порівнянна з діаметром молекули?

4.151. Обчислити амплітуду коливань звукового тиску $(\Delta p)_0$: а) біля порога чутності, інтенсивність звуку $I_{\min} = 10^{-12}$ Вт/м²; б) поблизу більшого порога, $I_{\max} = 10$ Вт/м². Який висновок можна зробити?

4.152. Спочатку джерело звуку рухається назустріч нерухомому спостерігачеві зі швидкістю $v_{\text{дж}} = 40$ м/с, потім спостерігач рухається назустріч нерухомому джерелу з тією самою швидкістю. Чи буде однаковою частота звуку, який сприймає спостерігач в обох випадках? Частота коливань джерела звуку $\nu_0 = 1$ кГц, швидкість звуку $v_{\text{зв}} = 340$ м/с.

4.153. Спостерігач на залізничній платформі чує сигнал поїзда, що проходить повз нього. Коли поїзд наближається, то частота звуку, який сприймає спостерігач, $\nu_1 = 1100$ Гц, а коли поїзд віддаляється, то $\nu_2 = 900$ Гц. Визначити швидкість v поїзда і частоту ν_0 звуку, що випускається сигналом нерухомого поїзда. Вважати, що швидкість звуку $v_{\text{зв}} = 340$ м/с.

4.154. Поїзд, що рухається зі швидкістю $v = 144$ км/год, подає звуковий сигнал, частота якого $\nu_0 = 1$ кГц. Як зміниться частота сигналу, який сприймає спостерігач, якщо він прямує назустріч поїзду з тією самою швидкістю (відносно Землі)?

4.155. Швидкість руху u точкового джерела звуку перевищує швидкість звуку v у середовищі у $M = 1,5$ раз. Визначити кут α , який утворює фронт ударної хвилі з траєкторією джерела звуку.

4.156. Коли літак долає звуковий бар'єр, то людина, яка перебуває на деякій відстані від нього, чує акустичний удар ("постріл"). Пояснити це явище.

4.157. Відомо, що швидкість хвиль на воді від корабля завжди втричі менша від його швидкості. Виходячи з цього, визначити кут α розхилу конуса, що є обвідною хвиль від корабля.

Поглинання, відбивання й заломлення звуку

4.158. Плоска хвиля, рівняння якої $\xi(x, t) = A e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx)$, поширюється в однорідному поглинальному середовищі. Визначити різницю фаз $\Delta\Phi$ коливань у точках, для яких відношення амплітуд зміщення частинок середовища $\eta = 1,02$, якщо коефіцієнт поглинання $\gamma = 0,25$ м⁻¹, довжина хвилі $\lambda = 0,75$ м.

4.159. Від ізотропного джерела у поглинальному середовищі поширюється сферична хвиля. Частота випромінювання $\nu = 150$ Гц. На відстані $r_2 = 15$ м від джерела амплітуда зміщення частинок середовища менша у $\eta = 2,5$ раза, ніж на відстані $r_1 = 10$ м. Визначити коефіцієнт поглинання γ , довжину λ і швидкість v хвилі, якщо різниця фаз коливань у згаданих точках $\Delta\phi = \pi/3$.

4.160. На відстані $r = 100$ м від точкового ізотропного джерела звуку при частоті $\nu = 500$ Гц рівень гучності $L = 20$ дБ. Визначити потужність P джерела звуку.

4.161. Фронт циліндричної пружної хвилі перемістився в радіальному напрямі на відстань $\Delta r = 3$ м від початкового положення $r_1 = 2$ м від осі циліндричної хвильової поверхні. При цьому інтенсивність хвилі зменшилась у $\eta = 4,5$ раза. Визначити коефіцієнт поглинання γ хвилі.

4.162. Коефіцієнт поглинання γ звукових хвиль у повітрі залежить від частоти звуку ν за формулою $\gamma = a\nu^2$, де стала $a = 2 \cdot 10^{-11}$ с²/м. На якій відстані x_0 інтенсивність плоскої звукової хвилі, що поширюється в повітрі вздовж осі Ox , зменшиться в $\eta = 2$ рази для коливань: а) звукових з частотою $\nu = 10^3$ Гц; б) ультразвукових з частотою $\nu = 5 \cdot 10^5$ Гц?

4.163. Кажан підковоніс, що випромінює дуже вузький пучок ультразвукових хвиль інтенсивністю $I_0 = 10$ Вт/м² і частотою $\nu = 0,1$ МГц, виявив хруща на відстані $r = 20$ м. Визначити інтенсивність I_1 відбитої від хруща хвилі, яку сприйняв кажан, якщо коефіцієнт поглинання ультразвуку в повітрі на згаданій частоті за нормального тиску $\gamma = a\nu^2$, де $a = 6 \cdot 10^{-11}$ с²/м.

4.164. Залежність коефіцієнта поглинання γ звукових хвиль від частоти звуку ν визначається за формулою $\gamma = a\nu^2$, де для повітря $a_n = 2 \cdot 10^{-11}$ с²/м, для води $a_v = 3 \cdot 10^{-14}$ с²/м. На якій відстані x згасання плоских ультразвукових хвиль з частотою $\nu = 10^5$ Гц становитиме $L = 30$ дБ у повітрі та у воді?

4.165. За умовами задачі 4.164 обчислити, на яких відстанях x інтенсивність звуку в повітрі та у воді зменшиться в $\eta = 10$ разів.

4.166. Визначити показник заломлення n звукових хвиль на межі повітря – скло. Модуль Юнга для скла $E = 60$ ГПа, густина скла $\rho = 2,6 \cdot 10^3$ кг/м³. Швидкість поширення звуку в повітрі $v_n = 340$ м/с.

4.167. Використовуючи формули геометричної оптики, обчислити фокусну відстань F акустичної лінзи для ультразвукових хвиль, що поширюються у воді. Лінза сталева ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Па), двогнута з радіусами кривизни $R = 4$ м. Покласти швидкість поширення хвиль у воді $v_v = 1497$ м/с, у сталі $v_{ст} = 6100$ м/с.

4.168. Ультразвукова хвиля відбивається від дна водоймища. У скільки разів амплітуда A_1 відбитої від дна хвилі більша за амплітуду A_2 хвилі, що проходить у донну речовину? Густина донної речовини $\rho = 2\,000\text{ кг/м}^3$, а швидкість поздовжньої хвилі в ній $v = 3\,000\text{ м/с}$.

4.169. За яких умов при відбиванні пружної хвилі від плоскої межі поділу двох середовищ відбита хвиля змінює свою фазу на протилежну?

4.170. Плоска звукова хвиля поширюється перпендикулярно до плоскої межі поділу вода – повітря. Скориставшись табл. 4 і 15 дод. Б, встановити, яку частку η становить питомий акустичний опір повітря від питомого акустичного опору води.

4.171. Звукова хвиля поширюється нормально з повітря у воду. Яка частка D енергії проходить? Як зміниться відповідь, якщо звукова хвиля йде з води в повітря?

4.172. Скільки відсотків D звукової енергії можна передати через межу: а) вода – лід; б) вода – сталь?

4.173. Поясніть, чому для передавання енергії у всіх хвильових системах необхідно так зване узгодження імпедансів Z у всіх з'єднаннях (наприклад, з'єднання різних кабелів, генератора з навантаженням).

Інтерференція хвиль. Стоячі хвилі

4.174. Чи можуть інтерферувати: а) векторні хвилі (наприклад, електромагнітні); б) скалярні хвилі (наприклад, температурні); в) векторні хвилі, які лінійно поляризовані у взаємно перпендикулярних напрямках?

4.175. Інтерференційна картина створюється двома точковими когерентними джерелами. Які поверхні становлять множини точок, де спостерігаються максимуми інтенсивності? Яка найменша відстань між ними?

4.176. Звукові хвилі від двох джерел накладаються в деякій точці P простору і збуджують коливання однакового напрямку, однакової частоти й початкової фази. Амплітуди хвиль $A_1 = 0,3\text{ мм}$, $A_2 = 0,4\text{ мм}$, довжина хвилі $\lambda = 21\text{ м}$. Точка P лежить на відстані $r_1 = 8\text{ м}$ і $r_2 = 4,5\text{ м}$ від кожного з джерел. Визначити амплітуду A результуючого коливання в точці P .

4.177. Два точкових джерела S_1 і S_2 , які випромінюють звукові хвилі однакової амплітуди, частоти і фази, розміщені на відстані $d = 10\text{ см}$ одне від одного в повітрі. Інтерференція хвиль спостерігається на прямій, яка є паралельною відрізку S_1S_2 і лежить на досить великій відстані $l = 10\text{ м}$ від нього. Відстань між сусідніми максимумами інтенсивності $\Delta x = 20\text{ см}$. Швидкість звуку $v_{\text{зв}} = 340\text{ м/с}$. Визначити частоту ν звуку.

4.178. Дві звукові хвилі, акустичний тиск яких змінюється за законами

$$\Delta p_1 = (\Delta p)_0 \cos\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{3}\right) \text{ і } \Delta p_2 = \frac{(\Delta p)_0}{2} \sin\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{3}\right), \text{ поширюються}$$

в одному напрямі. Яким буде результуючий акустичний тиск Δp ? Обчислити Δp : а) у точці $x_1 = \lambda$ в момент часу $t_1 = 0$; б) у точці $x_2 = 8\lambda$ в момент часу $t_2 = \pi/4\omega$, якщо $(\Delta p)_0 = 10^{-2}$ Па.

4.179. У пружному однорідному середовищі поширюються дві плоскі гармонічні хвилі: одна – вздовж осі Ox , інша – вздовж осі Oy . Частоти обох хвиль є однаковими. Чи буде мати місце інтерференція хвиль, якщо обидві хвилі: а) поперечні й напрями коливань однакові; б) поздовжні? Який характер руху частинок пружного середовища в площині xOy в обох випадках?

4.180. Чи переносить енергію хвиля, рівняння якої $\xi(x,t) = A \cos kx \cos \omega t$?

4.181. Які перетворення енергії відбуваються в стоячій хвилі у пружному середовищі?

4.182. На струні завдовжки $l = 1,5$ м утворилась стояча хвиля, причому відстані між точками, в яких коливання відбуваються з амплітудою $A = 4$ мм, дорівнюють $\Delta x_1 = 9$ см і $\Delta x_2 = 16$ см. Визначити довжину хвилі λ та амплітуду $\xi_{\max}$ у пучності. Якому обертонові відповідають ці коливання?

4.183. Період коливань однакових зустрічних хвиль $T = 6$ с, амплітуда коливань $A = 10$ см. Визначити зміщення $\xi_{\max}$ точок, які лежать у пучності стоячої хвилі в момент часу, коли фази коливань обох хвиль збігаються, а також через $t_1 = 0,5$ с і $t_2 = 1$ с після моменту збігання фаз.

4.184. Стояча хвиля утворюється під час накладання падаючої хвилі і хвилі, відбитої від межі поділу середовищ, перпендикулярної до напрямку поширення хвилі. Швидкість поширення звукових коливань $v = 340$ м/с, частота $\nu = 3,4$ кГц. Встановити відстань від межі поділу середовищ вузлів і пучностей стоячої хвилі, якщо відбиття відбувається: а) від менш густого середовища; б) від більш густого середовища.

4.185. Сталева струна рояля, довжина якої $l = 1$ м, дає частоту основного тону $\nu_1 = 256$ Гц (нота “до” першої октави). Визначити швидкість v хвилі на струні та силу натягу F_n струни, вважаючи, що діаметр струни $d = 1$ мм.

4.186. Сталева струна рояля, довжина якої $l = 1$ м і діаметр $d = 1$ мм, натягнута із силою $F_n = 4,7$ кН. Якою буде частота биття ν_b , якщо збудити коливання струни й камертона, частота якого $\nu_{\text{кам}} = 440$ Гц?

4.187. Вантовий міст висить на сталевих канатах, довжина яких від $l_1 = 100$ м до $l_2 = 190$ м. При достатньо сильному вітрі канати починають коливатись. Визначити частоти власних коливань канатів. Механічне напруження в канатах $\sigma = 60$ МПа.

4.188. Алюмінієвий стрижень завдовжки $l = 80$ см закріплений у середині. Встановити три найменші частоти поздовжніх власних коливань стрижня.

4.189. Труба завдовжки $L = 170$ см заповнена повітрям і закрита з одного кінця. Визначити основну частоту та частоту третьої гармоніки можливих власних коливань повітряного стовпа в трубі. Вважати, що швидкість звуку в повітрі $v = 340$ м/с.

4.190. У відкритій з обох кінців трубі, яка заповнена повітрям, утворилися стоячі звукові хвилі. Довжина труби $l = 0,85$ м. Визначити частоту перших трьох гармонік і зобразити їх.

4.191. Відкрита з одного кінця труба завдовжки $l = 0,75$ м заповнена гасом. Визначити частоту перших двох нормальних коливань (гармонік), якщо коефіцієнт стисливості гасу $\beta = 7 \cdot 10^{-10}$ Па $^{-1}$.

4.192. У струні, яка закріплена з обох кінців, збудили третю гармоніку. Маса струни $m = 9$ г, частота основного тону $\nu_1 = 440$ Гц, амплітуда зміщення в пучностях струни $A = 2$ мм. Визначити максимальну кінетичну енергію $W_{\text{кmax}}$ струни.

Дисперсія хвиль. Фазова і групова швидкості

4.193. Хвильовий пакет утворено двома плоскими хвилями: $\xi(x,t) = A \cos(1000t - 4x)$, $\xi(x,t) = A \cos(1010t - 4,2x)$. Визначити фазові швидкості v_1 , v_2 кожної хвилі та групову швидкість u пакета.

4.194. Хвильовий пакет утворено двома сферичними хвилями $\xi(r,t) = \frac{A}{r} \cos(100t - 5r)$, $\xi(r,t) = \frac{A}{r} \cos(103t - 4r)$. Визначити фазові швидкості v_1 , v_2 кожної хвилі та групову швидкість u пакета.

4.195. Який вигляд має дисперсійне співвідношення $\omega(k)$ для хвиль: а) поперечних у струні; б) звукових у газах? Чи має місце дисперсія для цих хвиль?

4.196. За допомогою луни можна вимірювати відстань до перешкоди. Якою швидкістю звуку – фазовою чи груповою – користуються при цьому?

4.197. Для хвиль на поверхні глибокої води дисперсія описується рівнянням $\omega^2 = gk + \sigma k^3/\rho$, де g – прискорення вільного падіння; k – хвильове число;

σ – коефіцієнт поверхневого натягу води, $\sigma = 0,073$ Н/м; ρ – густина води. За якої умови фазова швидкість хвиль дорівнює груповій? Для хвиль якої довжини λ це відбувається? Чому дорівнює при цьому фазова швидкість u хвилі? Обчислити групову швидкість u капілярних хвиль (жмурів) завдовжки $\lambda = 0,1$ см. У скільки разів u вона перевищує фазову швидкість?

4.6. ВІЛЬНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛИВАННЯ

Період власних коливань електричного коливального контуру, опір якого $R = 0$, індуктивність L , ємність C (формула Томсона),

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (4.6.1)$$

Повна енергія коливального контуру

$$W = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}. \quad (4.6.2)$$

Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань заряду в коливальному контурі

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (4.6.3)$$

У разі $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ закон зміни заряду конденсатора коливального контуру

$$q = q_{m0}e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.6.4)$$

де

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (4.6.5)$$

У разі слабого згасання $\left(\frac{CR^2}{L} \ll 1\right)$ добротність контуру

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.6.6)$$

Вільні незгасаючі коливання

4.198. Як можна збудити вільні коливання в електричному коливальному контурі? Як можна збільшити добротність контуру, не змінивши частоти вільних коливань?

4.199. Як зміниться власна частота коливань у контурі, якщо:
1) між обкладками повітряного конденсатора контуру ввести діелектрик;
2) у контурну котушку ввести осердя: а) з феромагнетика; б) з діамагнетика?

4.200. Конденсатор, площа кожної з пластин якого $S = 100 \text{ см}^2$, і котушка без магнітного осердя завдовжки $l = 35 \text{ см}$, площа поперечного перерізу якої $S_1 = 5 \text{ см}^2$ та кількість витків $N = 150$, з'єднані паралельно. Пластины конденсатора розділені шаром слюди завтовшки $d = 1 \text{ мм}$. Визначити частоту коливань ν цього коливального контуру.

4.201. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $C = 0,01 \text{ мкФ}$ і котушки індуктивністю $L = 4 \text{ мГн}$, опір його дуже малий. Конденсатор зарядили до напруги $U_{\text{max}} = 300 \text{ В}$. Через який проміжок часу t після замикаання ключа сила струму в контурі досягне найбільшого значення I_{max} ? Чому воно дорівнюватиме?

4.202. Напруга на обкладках конденсатора коливального контуру змінюється за законом $U = 30 \cos 10^3 \pi t$, де U – напруга, В. Ємність конденсатора $C = 0,3 \text{ мкФ}$. Визначити період T коливань, встановити закон зміни $I(t)$ сили струму в контурі та індуктивність L котушки.

4.203. Сила струму в коливальному контурі змінюється за законом $I = -0,02 \sin 400 \pi t$, А. Індуктивність контуру $L = 1 \text{ Гн}$. Обчислити: період T коливань; ємність C конденсатора; максимальну енергію $W_{L, \text{max}}$ магнітного поля котушки; максимальну енергію $W_{C, \text{max}}$ електричного поля конденсатора. Встановити закон зміни напруги U_C на конденсаторі.

4.204. Визначити енергію W_L магнітного поля котушки індуктивності коливального контуру, після того як з моменту початку коливань пройде час, що становить $\frac{1}{8}$ періоду. Максимальна напруга на конденсаторі $U_0 = 500 \text{ В}$, ємність конденсатора $C = 1 \text{ мкФ}$. Активним опором нехтувати.

Вільні згасаючі коливання

4.205. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $C = 7 \text{ мкФ}$ і котушки індуктивністю $L = 0,23 \text{ Гн}$ та опором $R = 40 \text{ Ом}$. Конденсаторові надали заряду $q_{m0} = 56 \text{ мкКл}$ і приєднали його до котушки. Визначити період T коливань, логарифмічний декремент згасання δ та встановити закон зміни $U(t)$ напруги на конденсаторі з часом.

4.206. Контур складається з конденсатора ємністю $C = 2 \text{ нФ}$ і котушки індуктивністю $L = 10 \text{ мГн}$ та опором $R = 14 \text{ Ом}$. Конденсатор заряджають від батареї з ЕРС $\mathcal{E} = 3,5 \text{ В}$ і приєднують до котушки. Записати рівняння $I(t)$ згасаючих коливань сили струму, визначити логарифмічний декремент згасання коливань δ та енергію W_L магнітного поля котушки в момент часу, коли значення сили струму дорівнює значенню початкової амплітуди I_{m0} .

4.207. Визначити омичний опір R коливального контуру, індуктивність якого $L = 1$ Гн, якщо за час $t = 0,01$ с амплітуда напруги на конденсатор зменшується в $\eta = 4$ рази.

4.208. Коливальний контур має ємність $C = 0,2$ мкФ, індуктивність $L = 15$ мГн і активний опір $R = 7$ Ом. Через яку кількість N коливань амплітуда сили струму в цьому контурі зменшиться в $\eta = 5$ разів?

4.209. Визначити добротність Q коливального контуру, який складається з котушки індуктивністю $L = 0,79$ мГн, конденсатора ємністю $C = 0,35$ нФ і резистора опором $R = 15$ Ом. Згасання є слабким.

4.210. Визначити, яка кількість повних коливань N_e має минути, щоб амплітуда струму в коливальному контурі зменшилася в e разів? Параметри контуру: індуктивність $L = 1$ Гн, ємність $C = 0,5$ мкФ, опір $R = 30$ Ом.

4.211. Як зміниться логарифмічний декремент згасання δ , якщо, не змінюючи довжини котушки в коливальному контурі, збільшити кількість витків на ній у n разів? Вважати, що діаметр витків не змінюється.

4.212. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $C = 10$ мкФ і котушки індуктивністю $L = 2$ мГн та активним опором $R = 10$ Ом. Визначити відношення енергії W_L магнітного поля котушки до енергії W_C електричного поля конденсатора в момент часу, що відповідає максимуму сили струму в контурі.

4.213. Яку енергію втрачає за період коливальний контур з ємністю $C = 0,05$ мкФ, індуктивністю $L = 2$ нГн та опором $R = 1$ мОм, якщо максимальна напруга на конденсаторі $U_{m0} = 200$ В?

4.214. Контур складається з конденсатора ємністю $C = 0,05$ мкФ і котушки індуктивністю $L = 2$ мГн, логарифмічний декремент згасання коливань $\delta = 0,03$. Визначити час t , за який енергія в цьому контурі зменшиться в $n = 5$ разів.

4.215. Власна частота коливань контуру, в якому збуджують згасаючі коливання, $\nu_0 = 8$ кГц, добротність $Q = 72$. Встановити закон, за яким зменшується повна енергія W контуру з часом t . Яка частка η початкової енергії W_0 збережеться в контурі за час $\tau = 1$ мс?

4.216. Коливальний контур складається з котушки індуктивністю $L = 1$ мГн, двох послідовно з'єднаних конденсаторів ємністю $C = 5$ мкФ кожний і резистора опором $R = 1$ Ом. Чи зміниться характер коливань, якщо конденсатори з'єднати паралельно?

4.217. Чи виникнуть у контурі вільні коливання, якщо до котушки індуктивністю $L = 1$ мГн і опором $R = 50$ Ом підімкнути заряджений конденсатор ємністю $C = 2$ мкФ?

4.7. ВИМУШЕНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛИВАННЯ. ЗМІННИЙ СТРУМ

Якщо напруга в колі змінного струму, яке містить послідовно з'єднані резистор опором R , котушку індуктивністю L і конденсатор ємністю C , змінюється за законом

$$U = U_m \cos \omega t, \quad (4.7.1)$$

то сила струму в колі

$$I = I_m \cos (\omega t - \varphi), \quad (4.7.2)$$

де U_m , I_m – амплітудні значення відповідно напруги і сили струму. Кут φ – зсув фаз між зовнішньою напругою і силою струму в колі, визначається з формули

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (4.7.3)$$

Закон Ома для змінного струму

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (4.7.4)$$

() Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (4.7.5)$$

називається повним опором кола змінного струму, а величина

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (4.7.6)$$

називається реактивним опором.

Якщо користуватись комплексною формою зображення величин, що гармонічно змінюються, то комплексна напруга

$$\hat{U} = U_m e^{i\omega t} \quad (4.7.7)$$

і комплексний струм

$$\hat{I} = I_m e^{i(\omega t - \varphi)}, \quad (4.7.8)$$

зв'язані законом Ома в комплексній формі

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{Z}, \quad (4.7.9)$$

де

$$\hat{Z} = |Z| e^{i\varphi} \quad (4.7.10)$$

називається комплексним електричним опором або імпедансом.

Тут

$$|Z| = \frac{U_m}{I_m}. \quad (4.7.11)$$

Імпеданси найпростіших елементів:

а) опору R

$$\hat{Z}_R = R; \quad (4.7.12)$$

б) індуктивності L

$$\hat{Z}_L = i\omega L = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}}; \quad (4.7.13)$$

в) ємності C

$$\hat{Z}_C = -\frac{i}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\frac{\pi}{2}}; \quad (4.7.14)$$

г) послідовного з'єднання резистора опором R , котушки індуктивністю L та конденсатора ємністю C

$$\hat{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (4.7.15)$$

Якщо резистор, котушка й конденсатор з'єднані довільно, тоді модуль імпедансу $|\hat{Z}|$ називається повним опором, дійсна частина імпедансу – активним опором, уявна частина – реактивним опором.

Послідовне і паралельне з'єднання імпедансів відповідно

$$\hat{Z} = \sum_k \hat{Z}_k; \quad \frac{1}{\hat{Z}} = \sum_k \frac{1}{\hat{Z}_k}. \quad (4.7.16)$$

У колі послідовного з'єднання резистора, котушки й конденсатора максимальне значення амплітуди сили струму досягається за умови

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.7.17)$$

(резонанс напруг, або послідовний резонанс).

При цьому

$$I_m = \frac{U_m}{R}; \quad (U_{Im})_{\text{рез}} = (U_{Cm})_{\text{рез}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_m = Q U_m, \quad (4.7.18)$$

де Q – добротність контуру.

Якщо коло утворене двома паралельними гілками з реактивними опорами різного характеру: R_1 , L і R_2 , C у нерозгалуженій частині кола, найменший струм досягається за умови

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}},$$

а при $R_1 \ll \omega L$ і $R_2 = 0$ $\omega_{\text{рез}}^2 LC \approx 1$ і резонансний опір контуру

$$Z_{\text{рез}} = \frac{L}{R_1 C} = Q \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.7.19)$$

(резонанс струмів, або паралельний резонанс).

Середня за період коливань потужність, що виділяється в колі змінного струму,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi = \frac{1}{2} R I_m^2 = I_{\text{ef}} U_{\text{ef}} \cos \varphi, \quad (4.7.20)$$

де I_{ef} , U_{ef} – ефективні (діючі) значення синусоїдного струму і напруги,

$$I_{\text{ef}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U_{\text{ef}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Коефіцієнт потужності

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} \hat{Z}}{|\hat{Z}|}, \quad (4.7.21)$$

де Re – дійсна частина комплексного опору $\hat{Z}$. У разі послідовного з'єднання резистора, котушки й конденсатора

$$\cos \varphi = \frac{R}{|\hat{Z}|}. \quad (4.7.22)$$

Послідовне з'єднання резистора, котушки й конденсатора в колі. Резонанс напруг

4.218. Котушку з активним опором $R = 5$ Ом та індуктивністю $L = 9,6$ мГн підімкнули до джерела напруги, яка змінюється за законом $U = 141 \sin 314t$, де U – напруга, В. Встановити закон $I(t)$ зміни сили струму в котушці.

4.219. До кінців кола, яке складається з послідовно з'єднаних конденсатора і резистора з активним опором $R = 100$ Ом, прикладено змінну напругу з амплітудою $U_m = 100$ В. При цьому амплітуда сили струму, що встановилася в колі, $I_m = 0,7$ А. Визначити зсув фаз φ між струмом і загальною напругою на ділянці кола.

4.220. Коло, яке складається з послідовно з'єднаних резистора активним опором $R = 50$ Ом, котушки індуктивністю $L = 20$ мГн і конденсатора ємністю $C = 1$ мкФ (рис. 4.28), увімкнено в мережу синусоїдної напруги з амплітудою $U_m = 180$ В і частотою $\omega = 314$ с⁻¹. Визначити амплітуду I_m сили струму в колі, зсув фаз φ між струмом I у колі і зовнішньою напругою U та миттєві значення напруги на індуктивності U_L і конденсаторі U_C .

4.221. У коливальному контурі, елементи якого з'єднані послідовно, ємність $C = 0,1$ мкФ, індуктивність $L = 1$ мГн і опір $R = 10$ Ом. У колі діє зовнішня

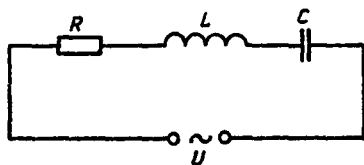


Рис. 4.28

змінна напруга, амплітуда якої $U_m = 10$ В. Яка частота ν цієї напруги, якщо амплітуда сили струму $I_m = 1$ А?

4.222. Коло, що складається з послідовно з'єднаних конденсатора ємністю $C = 30$ мкФ, резистора опором $R = 35$ Ом і котушки індуктивністю $L = 0,26$ Гн, підімкнуте до генератора синусоїдної напруги, частоту якого можна змінювати при сталій амплітуді. Визначити частоту ω , при якій спостерігається максимум амплітуди напруги: а) на конденсаторі; б) на котушці.

4.223. При вимушених коливаннях на резонансній частоті в контурі з послідовним з'єднанням елементів зовнішня напруга змінюється за законом $U = 50 \cos 10^4 \pi t$, де U – напруга, мВ. Ємність конденсатора контуру $C = 0,1$ мкФ. Визначити період T коливань, індуктивність L котушки, її активний опір R та встановити закон $I(t)$ зміни сили струму з часом, якщо добротність контуру $Q = 30$. Згасання є малим.

4.224. При вимушених коливаннях на резонансній частоті струму в контурі, елементи якого з'єднані послідовно, напруга на конденсаторі змінюється за законом $U_C = 25 \cos 10^3 \pi t$, де U_C – напруга на конденсаторі, В. Ємність конденсатора $C = 1$ мкФ. Визначити індуктивність L котушки та встановити закон $I(t)$ зміни сили струму з часом.

4.225. На коливальний контур, елементи якого з'єднані послідовно, подана зовнішня напруга. Частота напруги $\omega = 314$ с⁻¹. Сумарне падіння напруги на котушці й конденсаторі дорівнює нулеві. Індуктивність котушки $L = 0,1$ Гн. Визначити ємність C конденсатора.

4.226. Коливальний контур, елементи якого з'єднані послідовно, має такі параметри: індуктивність $L = 0,82$ мГн, опір $R = 60$ Ом, ємність $C = 400$ пФ. У коло підімкнута зовнішня змінна напруга, амплітудне значення якої $U_m = 0,1$ В. Визначити резонансну частоту $\nu_{\text{рез}}$ і спади напруг на конденсаторі й котушці під час резонансу.

4.227. Маємо коливальний контур з послідовним з'єднанням елементів. Індуктивність котушки $L = 0,1$ Гн, ємність конденсатора $C = 5$ мкФ, опір резистора $R = 10$ Ом. На яких частотах ν_1 і ν_2 амплітуда вимушених коливань струму дорівнює половині амплітуди сили струму при резонансі?

4.228. Визначити добротність Q коливального контуру з послідовним з'єднанням елементів, резонансна частота якого $\nu_{\text{рез}} = 600$ кГц, ємність $C = 350$ пФ, активний опір $R = 15$ Ом. Згасання вважати малим.

4.229. У коливальному контурі, елементи якого з'єднані послідовно, діє зовнішня змінна напруга. Амплітуда напруги $U_m = 5$ В на резонансній частоті. Якою є добротність Q контуру, якщо резонансна напруга на конденсаторі $U_{mC_{\text{рез}}} = 150$ В?

Паралельне з'єднання котушки й конденсатора в колі. Резонанс струмів

4.230. Коло складається з конденсатора ємністю $C = 35$ мкФ, паралельно якому підімкнуто резистор. Омичний опір резистора $R = 80$ Ом (рис. 4.29). Визначити повний опір Z кола змінному струму з частотою $\nu = 50$ Гц і зсув фаз ϕ між напругою і струмом.

4.231. Коло змінного струму з частотою $\nu = 50$ Гц містить конденсатор, паралельно якому підімкнуто котушку індуктивністю $L = 0,2$ Гн (рис. 4.30). Сила струму в нерозгалуженій частині кола дорівнює нулеві. Визначити ємність C конденсатора.

4.232. У контурі, що складається з паралельно з'єднаних конденсатора ємністю $C = 1$ нФ і котушки індуктивністю $L = 1$ мГн та активним опором $R = 100$ Ом, прикладена резонансна напруга. Амплітуда напруги $U_m = 5$ В (рис. 4.31). Визначити резонансну частоту $\nu_{\text{рез}}$, сили струмів I_{m1} , I_{m2} у гілках та повну силу струму.

4.233. Контур, елементи якого з'єднані паралельно, має резонансну частоту $\nu = 14,4$ МГц. Ємність конденсатора $C = 24$ пФ. Добротність контуру $Q = 76$. Яка амплітуда I_m сили струму до розгалуження, якщо амплітуда напруги на контурі при резонансі $U_m = 12$ В?

4.234. Коло складається з паралельно з'єднаних конденсатора ємністю $C = 0,3$ мкФ і котушки активним опором $R = 45$ Ом та індуктивністю $L = 15$ мГн. Чому дорівнює повний опір Z кола змінного струму, частота якого $\nu = 0,5$ кГц? При якій частоті $\omega_{\text{рез}}$ змінної напруги, прикладеної до кінців кола, реактивний опір кола перетворюється в нуль (резонанс струмів)? Яким буде повний опір $Z_{\text{рез}}$ кола при резонансі?

4.235. Резистор активним опором $R = 25$ Ом, котушка індуктивністю $L = 0,37$ Гн і конденсатор ємністю $C = 42$ мкФ з'єднані паралельно й підімкнуті до джерела змінної напруги $U = 150 \sin 314t$, де U – напруга, В. Обчислити амплітудне значення I_m повного струму і зсув фаз ϕ між повним струмом і напругою.

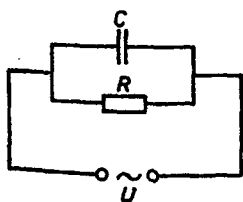


Рис. 4.29

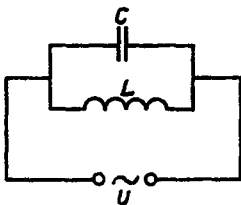


Рис. 4.30

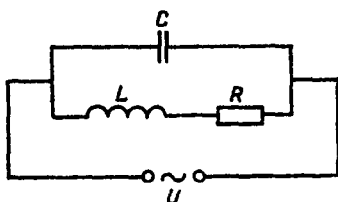


Рис. 4.31

4.236. У коло змінного струму паралельно підімкнuto котушку індуктивністю $L = 0,2$ Гн та активним опором $R = 5$ Ом і конденсатор ємністю $C = 20$ мкФ. Напруга на клеммах змінюється за законом $U = 312 \cos 314t$, де U – напруга, В. При якій частоті ν струму він буде мінімальним у нерозгалуженій частині кола?

Потужність у колі змінного струму

4.237. Яку середню потужність $\langle P \rangle$ споживає контур, елементи якого з'єднані послідовно, якщо в ньому підтримуються незгасаючі коливання? Активний опір контуру $R = 0,4$ Ом, амплітуда сили струму $I_m = 30$ мА.

4.238. По котушці з індуктивним опором $X_L = 30$ Ом і повним опором $Z = 50$ Ом проходить струм, діюче значення якого $I_{\text{ef}} = 2$ А. Визначити різницю фаз ϕ між струмом і напругою, а також середню теплову потужність $\langle P \rangle$, що виділяється в котушці.

4.239. Коливальний контур містить конденсатор ємністю $C = 2,2$ нФ та котушку індуктивністю $L = 0,16$ мГн. Визначити активний опір R котушки, якщо для підтримування в контурі вимушених коливань з амплітудою напруги на конденсаторі $U_{mc} = 0,9$ В потрібно, щоб середня потужність $\langle P \rangle = 100$ мкВт.

4.240. Визначити добротність Q контуру, який містить конденсатор ємністю $C = 2$ мкФ та котушку індуктивністю $L = 5$ мГн, якщо для підтримування незгасаючих коливань з амплітудою напруги на конденсаторі $U_{mc} = 10$ В потрібно підводити до контуру середню потужність $\langle P \rangle = 10$ мВт. Згасання вважати малим.

4.241. Контур, елементи якого з'єднані послідовно, складається з конденсатора ємністю $C = 10$ мкФ і котушки індуктивністю $L = 0,01$ Гн та омичним опором $R = 4$ Ом. Яку середню потужність $\langle P \rangle$ споживає контур при вимушених резонансних коливаннях, якщо амплітуда напруги на конденсаторі $U_{mc} = 1$ В?

4.242. Котушка індуктивністю $L = 0,65$ Гн і активним опором $r = 15$ Ом з'єднана послідовно з безіндуктивним резистором, опір якого R . Між кінцями цього кола прикладено змінну напругу, діюче значення якої $U_{\text{ef}} = 220$ В і частота $\omega = 314$ с⁻¹. Яким має бути значення опору R у колі, щоб почала виділятися максимальна теплова потужність $\langle P \rangle_{\text{max}}$? Чому вона дорівнюватиме?

4.243. Коефіцієнт потужності в колі з послідовно з'єднаними конденсатором і резистором $\cos \phi_1 = 0,6$. Яким буде коефіцієнт потужності $\cos \phi_2$, якщо резистор з'єднати з конденсатором паралельно?

4.244. Котушка індуктивністю $L = 90$ мГн і активним опором $R = 40$ Ом підімкнута спочатку до джерела постійної напруги U_0 , а потім до генератора синусоїдної напруги, діюче значення якої $U_{\text{ef}} = U_0$. Частота генератора $\nu = 50$ Гц. У скільки разів η потужність, що споживається котушкою, стане меншою?

4.245. Плоский конденсатор, діелектриком в якому є слюда, включено в коло змінного струму. Частота струму $\nu = 50$ Гц. Перебуваючи під напругою, конденсатор поглинає деяку потужність, причому коефіцієнт потужності $\cos \varphi = 0,1$. Визначити питомий опір ρ діелектрика.

4.246. Чи залежить резонансна частота в механічних і електричних системах від коефіцієнта опору?

4.247. Чим може бути небезпечним резонанс напруг?

4.248. Чому при передаванні електроенергії намагаються збільшити коефіцієнт потужності $\cos \varphi$? Чи залежить нагрівання проводів від значення цього коефіцієнта?

4.8. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

Фазова швидкість електромагнітних хвиль у середовищі

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (4.8.1)$$

де c – швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі, $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^8$ м/с; ϵ , μ –

відповідно діелектрична і магнітна проникності середовища.

Рівняння плоскої монохроматичної лінійно поляризованої електромагнітної хвилі, яка поширюється вздовж осі Ox в однорідному ізотропному середовищі (початкова фаза взята такою, що дорівнює нулеві),

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - kx); \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_m \cos(\omega t - kx). \quad (4.8.2)$$

Зв'язок між модулями векторів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ у біжучій хвилі:

$$\sqrt{\epsilon_0\epsilon}E = \sqrt{\mu_0\mu}H. \quad (4.8.3)$$

Об'ємна густина енергії електромагнітного поля

$$w = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0\mu H^2}{2}. \quad (4.8.4)$$

Вектор густини потоку електромагнітної енергії (вектор Пойнтінга)

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (4.8.5)$$

Інтенсивність біжучої монохроматичної електромагнітної хвилі

$$I = \langle \mathbf{S} \rangle = \langle w \rangle v. \quad (4.8.6)$$

Для плоскої хвилі

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon}{\mu_0\mu}} E_m^2. \quad (4.8.7)$$

Середня за часом об'ємна густина енергії електромагнітного поля та інтенсивність плоскої електромагнітної хвилі у вакуумі відповідно:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_m^2; \quad I = \langle w \rangle c = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_m^2. \quad (4.8.8)$$

Тиск електромагнітної хвилі на поверхню

$$p = \langle w \rangle (1 + R) \cos^2 i, \quad (4.8.9)$$

де R – коефіцієнт відбиття; i – кут падіння.

Середня за часом густина потоку енергії осцилюючого з частотою ω диполя (інтенсивність випромінювання на відстані r)

$$\langle S(r, \theta) \rangle = \frac{\omega^4 p_m^2 \sin^2 \theta}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2}, \quad (4.8.10)$$

де θ – кут між радіусом-вектором r і віссю диполя.

Середня за часом потужність випромінювання диполя

$$\langle P \rangle = \frac{1}{12 \pi \epsilon_0} \frac{\omega^4 p_m^2}{c^3}. \quad (4.8.11)$$

При інтерференції двох сферичних або циліндричних хвиль однакової інтенсивності I_0 результуюча інтенсивність

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta), \quad (4.8.12)$$

де δ – різниця фаз, $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$, тут Δ – різниця ходу хвиль від їх джерел до точки спостереження, $\Delta = r_2 - r_1$.

Якщо точка спостереження достатньо віддалена ($r \gg d$, $r \gg \lambda$), то

$$\delta = kd \sin \theta, \quad (4.8.13)$$

де k – хвильове число, $k = 2\pi/\lambda$; d – відстань між джерелами; θ – кут між напрямом спостереження і нормаллю до прямої, що сполучає джерела.

Залежність результуючої інтенсивності від кута θ для розміщених на одній прямій N точкових джерел однакової інтенсивності I_0 :

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}. \quad (4.8.14)$$

Плоскі монохроматичні електромагнітні хвилі

4.249. Визначити довжину λ електромагнітної хвилі, частота якої $\nu = 130$ МГц, у силіції. Діелектрична проникність силіцію $\epsilon = 12$, магнітна $\mu = 1$.

4.250. Електромагнітна хвиля, частота якої $\nu = 3$ МГц, переходить з вакууму в немагнітне середовище. Діелектрична проникність середовища $\epsilon = 4$. Визначити зміну $\Delta\lambda$ довжини хвилі.

4.251. Як змінюється кольорове сприйняття світла оком людини, яка дивиться з води?

4.252. Визначити швидкість v поширення електромагнітної хвилі в коаксіальному кабелі, заповненому діелектриком, діелектрична проникність якого $\epsilon = 2,4$.

4.253. Плоска електромагнітна хвиля падає перпендикулярно до поверхні плоскопаралельного шару завтовшки $l = 10$ м з немагнітної речовини, діелектрична проникність якої зменшується від значення $\epsilon_1 = 7$ на передній грані до $\epsilon_2 = 3$ на задній грані за лінійним законом. Визначити час t поширення хвилі в цьому шарі.

4.254. Яка довжина λ електромагнітної хвилі в повітрі відповідає частоті коливань у контурі з індуктивністю $L = 0,4$ мГн і ємністю $C = 100$ пФ?

4.255. Коливальний контур радіоприймача має конденсатор змінної ємності з максимальною ємністю $C = 500$ пФ. Якими мають бути характеристики котушок індуктивності, щоб приймач працював у діапазонах $\lambda_1 = 300$ м і $\lambda_2 = 30$ м?

4.256. У вакуумі поширюється плоска електромагнітна хвиля, напруженість електричного поля якої описується рівнянням $E = e_y E_m \cos(\omega t - kx)$, де e_y – орт осі Oy , $E_m = 160$ В/м, $k = 0,51$ м⁻¹. Визначити напруженість магнітного поля H хвилі в точці з координатою $x = 7,7$ м у моменти часу: а) $t = 0$; б) $t = 33$ нс.

4.257. Використовуючи рівняння Максвелла в диференціальній формі, показати, що плоска електромагнітна хвиля, яка поширюється вздовж осі Ox , є поперечною.

Енергія електромагнітних хвиль

4.258. Плоска монохроматична електромагнітна хвиля поширюється в вакуумі в напрямі осі Ox . Амплітуда напруженості електричного поля $E_m = 30$ В/м. Визначити інтенсивність I хвилі.

4.259. Плоска електромагнітна хвиля з частотою $\omega = 10^8$ Гц поширюється в немагнітному середовищі, електропровідність якого $\sigma = 20$ мСм/м і діелектрична проникність $\epsilon = 6$. Інтенсивність хвилі $I = 4$ мВт/м². Обчислити амплітудні значення густин струмів провідності $(j_{пр})_m$ та зміщення $(j_{зм})_m$, які виникають у середовищі.

4.260. Пробій у повітрі відбувається при напруженості електричного поля $E = 30$ кВ/см. Якою у цьому разі є середня густина по-

току енергії $\langle S \rangle$ плоских електромагнітних хвиль не дуже великої частоти?

4.261. Чому дорівнюють амплітуди напруженостей електричного E_m і магнітного H_m полів плоскої електромагнітної хвилі у повітрі з такою інтенсивністю, яка є: а) у сфокусованому випромінюванні потужного лазера ($I = 10^{14}$ Вт/см²); б) у потоці сонячної енергії на верхніх шарах земної атмосфери ($I = 1,35$ кВт/м² – так звана сонячна стала)?

4.262. Генератор ультракоротких електромагнітних хвиль випромінює їх рівномірно в усіх напрямках. Потужність генератора $P = 1,2$ Вт. Визначити середнє значення густини енергії $\langle w \rangle$ електромагнітного поля на відстані $r = 1$ м від генератора.

4.263. Яка енергія W переноситься плоскою гармонічною електромагнітною хвилею, амплітуда напруженості електричного поля якої $E_m = 50$ мкВ/м, за час $t = 10$ хв крізь перпендикулярну до напрямку поширення хвилі поверхню, якщо її площа $S = 1$ м²?

4.264. Яка максимальна напруга $U_{\max}$ виникає між кінцями приймальної телевізійної антени завдовжки $l = 1$ м, якщо передавач потужністю $P = 100$ кВт міститься на відстані $R = 15$ км від неї?

4.265. У мідному провіднику круглого перерізу, площа якого $S = 5$ мм², а завдовжки $l = 30$ см, проходить струм. Сила струму $I = 10$ А. Визначити потік Φ електромагнітної енергії крізь бічну поверхню провідника й порівняти його з кількістю теплоти, що виділяється за 1 с за законом Джоуля – Ленца. Якого висновку можна дійти?

4.266. Струм, сила якого $I = 0,5$ А, проходить по центральному проводу радіуса $r_1 = 5$ мм прямого коаксіального кабелю в одному напрямі, а вздовж тонкостінної оболонки радіуса $r_2 = 10$ мм – у протилежному. Опір проводів кабелю дуже малий. Встановити значення й напрям вектора Пойнтінга S : а) зовні кабелю; б) у точці між центральним проводом і оболонкою, яка лежить від осі кабелю на відстані $r = 7$ мм; в) у центральному проводі. Напруга джерела струму $U = 16$ В. Визначити також потік енергії крізь поперечний переріз кабелю. Якого висновку можна дійти?

Вказівка. За умовою задачі електричне поле між проводами має тільки радіальну складову.

4.267. В однорідному ізотропному немагнітному середовищі поширюється плоска електромагнітна хвиля, електричне поле якої змінюється за законом $E = e_y E_m \cos(\omega t - kx)$, де e_y – орт осі Oy . Діелектрична проникність середовища $\epsilon = 5$. Визначити вектор Пойнтінга S у точці з координатою $x = 475$ м у момент часу $t = 16$ нс, якщо $E_m = 300$ В/м, $k = 3,3$ м⁻¹, а магнітне поле напрямлене вздовж осі Oz .

4.268. Який тиск p на перешкоду чинить у вакуумі плоска електромагнітна хвиля, якщо коефіцієнт відбиття $R = 0,9$ при куті падіння $i = 60^\circ$? Амплітуда напруженості магнітного поля хвилі $H_m = 0,3$ мА/м.

4.269. Лазер на неодимовому склі має такі параметри: енергія випромінювання $W = 300$ Дж, тривалість імпульсу $\tau = 0,8$ мс, діаметр пучка $d = 8$ мм. Визначити тиск p , який чинить випромінювання на поверхню мішені, якщо воно падає нормально до поверхні у вакуумі і повністю поглинається.

4.270. Амплітуда напруженості електричного поля електромагнітної хвилі $E_m = 150$ В/м. Хвиля падає нормально до стіни у вакуумі і повністю поглинається. Який тиск p чинить хвиля на стіну?

Випускання електромагнітних хвиль. Випромінювання диполя

4.271. У чому полягає відмінність електричного поля хвилі, яку випромінює осцилюючий диполь, від поля статичного диполя?

4.272. Яку поляризацію мають хвилі, що випромінюються осцилюючим диполем?

4.273. Відомо, що на великих відстанях від осцилюючого диполя (у хвильовій зоні, де $r \gg \lambda$) полем випромінювання є сферична хвиля. Чи має поле сферичну симетрію?

4.274. Чому в радіотехніці випромінювальні антени живляться струмом високої частоти?

4.275. Як залежить потік енергії крізь сферичну поверхню, що оточує осцилюючий диполь, від радіуса цієї поверхні?

4.276. Як на основі закону збереження енергії пояснити залежність амплітуд напруженостей поля випромінювання диполя у хвильовій зоні від відстані?

4.277. На відстані $r_1 = 100$ м від осцилюючого диполя у хвильовій зоні в напрямі максимального випромінювання у вакуумі амплітуда напруженості електричного поля $E_m = 20$ мВ/м. Визначити амплітуду індукції B_m магнітного поля в цій точці, а також у точці, що лежить на відстані $r_2 = 200$ м від диполя в напрямі, який утворює кут $\theta_2 = 30^\circ$ з віссю диполя.

4.278. Середня потужність випромінювання осцилюючого диполя $\langle P \rangle = 1$ кВт. Визначити амплітуду напруженості E_m електричного поля та індукції B_m магнітного поля у вакуумі в точці, яка лежить на відстані $r = 1$ км від диполя, а напрям на цю точку утворює кут $\theta = 45^\circ$ з віссю коливань диполя.

4.279. Середня потужність випромінювання диполя $\langle P \rangle = 0,5$ кВт. Електромагнітна хвиля поширюється у вакуумі. Визначити інтенсивність хвилі (середнє значення густини потоку енергії $\langle S \rangle$) у хвильовій зоні на відстані $r = 500$ м у напрямі, що утворює кут $\theta = 35^\circ$ з віссю диполя.

4.280. У напрямі максимального випромінювання у вакуумі на відстані $r = 100$ м від осцилюючого елементарного диполя амплітуда індукції магнітного поля $B_m = 10^{-11}$ Тл. Визначити інтенсивність $\langle S \rangle$ випромінювання диполя в точці, яка лежить на відстані $r_1 = 300$ м від диполя у напрямі, що утворює кут $\theta_1 = \pi/3$ з віссю диполя, та середню за часом потужність $\langle P \rangle$ випромінювання диполя.

4.281. У напрямі максимального випромінювання осцилюючого диполя на відстані $r = 35$ м інтенсивність електромагнітної хвилі $I = 2$ Вт/м². Визначити середню об'ємну густину енергії w електромагнітного поля у вакуумі в точці, яка міститься на відстані $r_1 = 105$ м від диполя у напрямі, що утворює кут $\theta_1 = \pi/4$ з віссю диполя.

4.282. Електромагнітна хвиля випромінюється осцилюючим у вакуумі диполем. На відстані $r = 300$ м від джерела у хвильовій зоні в напрямі максимального випромінювання середня об'ємна густина енергії електромагнітного поля $w = 5$ пДж/м³. Визначити середню потужність $\langle P \rangle$ випромінювання диполя.

4.283. Середня потужність випромінювання радіостанції $\langle P \rangle = 10$ кВт, частота випромінювання $\omega = 10^8$ с⁻¹. Розглядаючи антену радіостанції як елементарний диполь, обчислити максимальну ЕРС індукції $\mathcal{E}_{\max}$, яка наводиться в дротяному контурі. Контуром є квадрат зі стороною $a = 10$ см, розміщений у хвильовій зоні в напрямі максимального випромінювання диполя на відстані $r = 200$ м від нього, причому вектор індукції магнітного поля електромагнітної хвилі напрямлений перпендикулярно до площини контуру.

Інтерференція електромагнітних хвиль

4.284. Мікрохвильовий детектор розміщений на березі озера на висоті $h = 0,5$ м над рівнем води. При повільному сходженні над горизонтом радіозірки, що випромінює мікрохвилі завдовжки $\lambda = 21$ см, детектор реєструє послідовно максимуми і мінімуми інтенсивності сигналу. Під яким кутом α над горизонтом перебуває радіозірка в момент реєстрації першого максимуму? Вважати поверхню озера ідеальним дзеркалом.

4.285. Однакові паралельні антени S_1 і S_2 , віддалені одна від одної на відстань $d = 200$ м, випромінюють радіохвилі на частоті $\nu = 1,2$ МГц (рис. 4.32). Під яким мінімальним кутом θ відносно нормалі до лінії, що

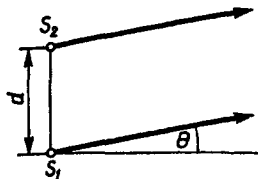


Рис. 4.32

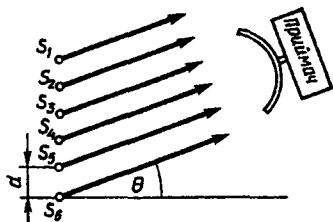


Рис. 4.33

сполучає антени, спостерігається випромінювання інтенсивності $I = 3I_0$ на достатньо великій відстані від антен? Інтенсивність випромінювання кожної антени I_0 .

4.286. Радіопередавач з довжиною хвилі λ складається з двох паралельних диполів, відстань між якими $d = \lambda/2$ (рис. 4.32). Інтенсивність кожного джерела дорівнює I_0 . Спочатку коливання диполів збігалися за фазою, потім були зсунуті на кут $\delta_0 = \pi$. Як зміниться напрям, уздовж якого випромінюється максимум інтенсивності? Чому дорівнює ця максимальна інтенсивність?

4.287. Відстань між двома дипольними випромінювачами хвиль $d = \lambda/4$, де λ – довжина хвилі, що випромінюється (рис. 4.32). Коливання випромінювачів зсунуті за фазою на кут $\delta_0 = \pi/2$. Інтенсивність кожного випромінювача I_0 вважається відомою. Як залежить інтенсивність результуючого випромінювання I від кута θ ? В якому напрямі випромінювання є максимальним? Чи буде кутовий розподіл випромінювання мати дзеркальну симетрію?

4.288. Чим відрізняється випромінювання радіохвиль однією антеною від випромінювання системи антен, розміщених на однаковій відстані в ряд і працюючих синхронно? Як можна спрямувати випромінювання радіохвиль у заданому напрямі?

4.289. На одній прямій на однакових відстанях d розміщені N паралельних синхронізованих диполів однакової інтенсивності I_0 , що випромінюють електромагнітні хвилі завдовжки λ (рис. 4.33). Під якими кутами θ відносно нормалі до лінії, що сполучає диполі, інтенсивність випромінювання буде максимальною, якщо $d < \lambda$? Як зміниться результуюча інтенсивність випромінювання порівняно з I_0 ?

4.290. Якою має бути відстань d (за умовами задачі 4.289), щоб головний максимум випромінювання був спрямований уздовж лінії джерел ($\theta = \pm\pi/2$)?

4.291. Шість однакових синхронізованих дипольних випромінювачів S_i розміщені на одній прямій на відстані d один від одного (рис. 4.33).

Інтенсивність, яка реєструється віддаленим приймачем від окремого випромінювача, $I_0 = 10^{-8} \text{ Вт/м}^2$. В яких напрямках випромінюється максимум інтенсивності? Скільки таких максимумів? Чому дорівнює інтенсивність I у максимумі? Розглянути два варіанти: а) $d = 0,5 \lambda$; б) $d = 2,5 \lambda$, де λ – довжина хвилі випромінювання.

4.292. Чотири однакові синхронізовані антени, що випромінюють на довжині хвилі λ , розміщені в ряд (рис. 4.33) на відстані $d = \lambda/2$ одна від одної. Побудувати діаграму спрямованості випромінювання, проводячи з центра лінії розташування антен промені під різними кутами θ і відкладаючи на них у відповідному масштабі інтенсивність випромінювання I .

4.293. Чотири однакових дипольних джерела електромагнітних хвиль S_i розміщені в ряд (рис. 4.33) на відстані $d = 3 \text{ м}$ один від одного. Вони працюють на частоті $\nu = 50 \text{ МГц}$. Інтенсивність окремого джерела, якщо воно працює саме, на великій відстані від системи $I_0 = 300 \text{ Вт/м}^2$. Випромінювання кожного наступного джерела зсунуто за фазою відносно попереднього на кут $\delta_0 = \pi/2$. Як залежить від кута θ інтенсивність випромінювання I на великих відстанях? В яких напрямках випромінюється максимальна інтенсивність? Чому дорівнює максимальна інтенсивність I_{max} ?

4.294. Радіоастрономічний інтерферометр складається з лінійного ланцюжка приймачів радіовипромінювання. Від приймачів як від джерел вторинних хвиль утворюється інтерференційна картина. Відстань між приймачами $d = 10 \text{ м}$, вони працюють на довжині хвилі $\lambda = 21 \text{ см}$. Визначити кутову відстань між центральним максимумом і головним максимумом першого порядку.

Розділ 5. ОПТИКА

5.1. ФОТОМЕТРИЯ

Світловий потік для інтервалу довжин хвиль $d\lambda$

$$d\Phi = V(\lambda)d\Phi_e, \quad (5.1.1)$$

де $V(\lambda)$ – функція видності; $d\Phi_e$ – потік енергії випромінювання.

Сила світла I – світловий потік, що припадає на одиничний тілесний кут,

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}, \quad (5.1.2)$$

або для ізотропного джерела

$$I = \frac{\Phi}{\Omega} = \frac{\Phi}{4\pi}. \quad (5.1.3)$$

Освітленість

$$E = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dS}, \quad (5.1.4)$$

де $d\Phi_{\text{пад}}$ – світловий потік, що падає на поверхню dS .

Для точкового ізотропного джерела

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha, \quad (5.1.5)$$

де r – відстань від джерела до поверхні, на яку падає світло; α – кут між нормаллю до поверхні і напрямом на джерело (кут падіння).

Характеристики протяжних джерел. Світність

$$R = \frac{d\Phi_{\text{випр}}}{dS}, \quad (5.1.6)$$

де $d\Phi_{\text{випр}}$ – потік, що випромінюється елементом dS поверхні в один бік. Якщо світність поверхні зумовлена її освітленістю, то

$$R = \rho E, \quad (5.1.7)$$

де ρ – коефіцієнт відбиття.

Яскравість B у заданому напрямі – світловий потік, що випромінюється з одиниці видимої поверхні всередину одиничного тілесного кута в заданому напрямі, або сила світла, віднесена до одиниці видимої поверхні джерела випромінювання,

$$B = \frac{d\Phi_{\text{випр}}}{d\Omega dS \cos \theta} = \frac{I}{dS \cos \theta}, \quad (5.1.8)$$

де θ – кут між нормаллю до поверхні та напрямом випромінювання; $dS \cos \theta$ – видима в даному напрямі поверхня випромінювача. В окремому випадку (закон Ламберта) яскравість є однаковою за всіма напрямками:

$$B = \text{const}. \quad (5.1.9)$$

Звідси випливає умова виконання закону Ламберта: сила світла елементарної площадки в будь-якому напрямі

$$I = I_0 \cos \theta, \quad (5.1.10)$$

де I_0 – сила світла в напрямі нормалі до поверхні. Світність косинусних (ламбертових) випромінювачів

$$R = \pi B. \quad (5.1.11)$$

Тілесний кут Ω зв'язаний з плоским кутом 2θ розхилу конуса:

$$\Omega = 2\pi (1 - \cos \theta). \quad (5.1.12)$$

Світловий потік, сила світла, освітленість

5.1. Користуючись функцією видності $V(\lambda)$ (рис. 5.1), визначити, у скільки разів n потік Φ_{e1} енергії від джерела світла жовтого кольору ($\lambda_1 = 0,6$ мкм) має бути більшим за потік Φ_{e2} енергії від джерела світла зеленого кольору ($\lambda_2 = 0,555$ мкм), щоб вони викликали однакове зорове відчуття на однаковій відстані.

5.2. Який потік енергії Φ_e відповідає світловому потокові $\Phi_l = 12$ лм, що утворюється випромінювачем, довжина хвилі якого $\lambda_l = 0,6$ мкм? Вважати, що за довжини хвилі $\lambda = 0,555$ мкм світловому потокові $\Phi_l = 1$ лм відповідає потік енергії $\Phi_e = 1,6$ мВт.

5.3. Світлова віддача η (відношення випущеного світлового потоку до споживаної потужності) електричної лампи, потужність якої $P = 100$ Вт, становить 14 лм/Вт. Визначити світловий потік Φ_l і силу світла I лампи, вважаючи, що вона випромінює рівномірно в усіх напрямках.

5.4. Прожектор випромінює пучок світла у вигляді конуса, кут розхилу якого $2\theta = 30^\circ$. Світловий потік Φ_l прожектора рівномірно розподілений усередині конуса і становить 10^5 лм. Визначити силу світла I прожектора.

5.5. Електрична лампа розміщується над центром стола на висоті $h = 2$ м. На якій відстані r від лампи освітленість на столі є меншою в $n = 5$ разів порівняно з освітленістю центра стола? Лампу вважати точковим джерелом.

5.6. Точкове джерело світла міститься в початку сферичної системи координат. Визначити повний світловий потік Φ_l , що випромінюється джерелом, якщо: а) джерело ізотропне, сила світла його I_0 ; б) джерело неізотропне, сила світла залежить від полярного кута θ за законом $I(\theta) = I_0 \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$); в) елементарним випромінювачем є елемент поверхні

світнього тіла, залежність сили світла якого від полярного кута θ задано законом $I(\theta) = I_0 \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$).

5.7. На двох стовпах однакової висоти $h = 6$ м підвісили дві електроосвітлювальні лампи, сила світла яких $I_1 = 1$ кд і $I_2 = 8$ кд. Відстань між стовпами $l = 30$ м. Встановити місце між стовпами, де освітленість від кожної лампи є однаковою.

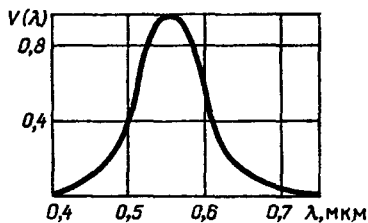


Рис. 5.1

5.8. Над столом на висоті h висить електроосвітлювальна лампа, сила світла якої I . Над лампою на відстані l від неї паралельно поверхні стола розміщено плоске дзеркало. Яка освітленість E поверхні стола безпосередньо під лампою, якщо електроосвітлювальну лампу вважати точковим джерелом світла?

5.9. На відстані $s = 10$ см від вершини вгнутого дзеркала, радіус кривизни якого $R = 60$ см, міститься точкове джерело світла. Воно освітлює екран, розташований перпендикулярно до головної оптичної осі на відстані $a = 70$ см від вершини дзеркала. Визначити освітленість E центра екрана, якщо з віддаленням екрана на відстань $a_1 = 90$ см від дзеркала його освітленість у центрі $E_1 = 320$ лк.

5.10. Над круглим столом радіуса $r = 1$ м висить електроосвітлювальна лампа. На якій висоті h треба її розмістити, щоб освітленість краю стола була найбільшою? Лампу вважати точковим джерелом світла.

5.11. Над центром круглого стола радіуса $r = 80$ см на висоті $h = 60$ см висить лампа, сила світла якої $I = 100$ кд. Визначити: освітленість E_1 у центрі стола; освітленість E_2 краю стола; середню освітленість $\langle E \rangle$ стола. Лампу вважати точковим джерелом світла.

5.12. Освітленість Сонцем поверхні Землі $E \approx 10^5$ лк. Яку освітленість E_1 дає зображення Сонця, отримане за допомогою тонкої лінзи, діаметр якої $D = 3$ см, фокусна відстань $f = 6$ см? Вважати, що діаметр Сонця видно із Землі під кутом $\alpha = 32'$.

Яскравість і світність

5.13. Чи можна за допомогою оптичної системи збільшити яскравість джерела світла?

5.14. Чому вночі ми бачимо вуличні ліхтарі, які розміщуються на різних відстанях від нас, однаково яскравими?

5.15. Джерелом світла в кімнаті є білий матовий сферичний плафон діаметра $d = 10$ см з електроосвітлювальною лампою, сила світла якої $I = 200$ кд.

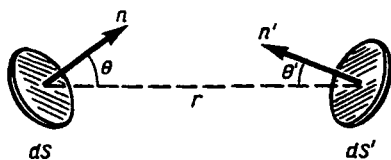


Рис. 5.2

Плафон поглинає $\eta = 20\%$ світлового потоку, що випромінює електроосвітлювальна лампа. Визначити світність R і яскравість B джерела світла.

5.16. Світильник має вигляд матового плафона сферичної форми радіуса $r = 10$ см. Яскравість світиль-

ника $B = 4$ ккд/м² не залежить від напрямку випромінювання. Визначити освітленість E в точці, яка лежить від центра сфери на відстані $r_1 = 2$ м.

5.17. У кінотеатрі на екран розмірами 5×4 м, коефіцієнт відбиття якого $\rho = 0,8$, з об'єктива кіноапарата падає світловий потік $\Phi = 2000$ лм. Визначити освітленість E , світність R і яскравість B кіноекрана, для якого виконується закон Ламберта.

5.18. Люмінесцентна лампа потужністю $P = 10$ Вт, випромінювання якої здійснюється за законом Ламберта, має форму циліндра діаметра $d = 2,5$ см і завдовжки $l = 40$ см. На відстані $r = 5$ м у напрямі, перпендикулярному до осі лампи, освітленість під лампою $E = 2$ лк. Визначити яскравість B , світність R та світлову віддачу η лампи.

5.19. Джерело світла, яке має вигляд невеликої площадки dS , освітлює площадку dS' , яка розміщується на значній відстані r від джерела (рис. 5.2). Джерело dS є ламбертовим, яскравість якого дорівнює B . Визначити освітленість E' площадки dS' , якщо всі величини, позначені на рис. 5.2, вважаються відомими.

5.20. Диск радіуса $R = 20$ см рівномірно світиться й може вважатися ламбертовим джерелом, яскравість якого $B = 800$ кд/м². Визначити освітленість E в точці, що лежить на осі диска, перпендикулярній до його площини, на відстані $h = 1$ м від центра диска.

5.21. Сонце, яке міститься поблизу зеніту, в ясний день створює на горизонтальній поверхні Землі освітленість $E = 7 \cdot 10^4$ лк. Діаметр Сонця видний із Землі під кутом $\alpha = 32'$. Визначити яскравість B_C поверхні Сонця. Поглинанням атмосферою сонячного випромінювання нехтувати.

5.22. Порівняти яскравість B_C Сонця і середню яскравість B ідеально білого матового аркуша паперу, що розміщений горизонтально на поверхні Землі й освітлюється Сонцем.

5.23. Визначити освітленість E горизонтальної земної поверхні, яка створюється нічною півсферою. Вважати, що яскравість безмісячного неба $B = 10^{-4}$ кд/м². Чи буде така освітленість достатньою для орієнтування, яке можливе за мінімальної освітленості 1 лк?

5.2. ГЕОМЕТРИЧНА ОПТИКА

Закон заломлення світла

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad (5.2.1)$$

або для будь-якої кількості заломлень добуток показника заломлення на синус кута між нормаллю і променем є величиною незмінною:

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3 = \dots = \text{const}, \quad (5.2.1a)$$

де i_1 – кут падіння; i_2 – кут заломлення; n_{21} – відносний показник заломлення середовища 2 відносно середовища 1; n_1, n_2 – абсолютні показники заломлення.

Граничний кут повного відбиття

$$\sin i_{\text{гп}} = \frac{n_2}{n_1} (n_2 < n_1). \quad (5.2.2)$$

Формула сферичного дзеркала

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}, \quad (5.2.3)$$

де s, s' – відстані від вершини дзеркала відповідно до предмета і зображення; f – фокусна відстань; R – радіус кривизни дзеркала.

Оптична сила сферичної заломлюючої поверхні

$$\Phi = \frac{n' - n}{R}, \quad (5.2.4)$$

де n, n' – показники заломлення середовищ, які розділені сферичною поверхнею.

Оптична сила тонкої лінзи в середовищі з показником заломлення n_0 :

$$\Phi = -\frac{n_0}{f} = \frac{n_0}{f'} = (n - n_0) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (5.2.5)$$

де n – показник заломлення матеріалу лінзи; R_1, R_2 – радіуси кривизни поверхонь лінзи; f, f' – відповідно передня і задня фокусні відстані.

Формула тонкої лінзи

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}. \quad (5.2.6)$$

Величини, які належать до простору предметів, позначені без штрихів, а до простору зображень – зі штрихами.

Значення відрізків у формулах – алгебричні. Відрізки вважаються додатними, якщо їх напрям збігається з напрямом поширення світла, тобто якщо вони відкладені від початку відліку (вершини заломлюючої поверхні, а для тонкої лінзи – її центра) праворуч, і від'ємними, якщо ліворуч.

Головні фокуси F, F' , вузлові точки N, N' , головні площини H, H' , фокусні відстані f, f' центрованої оптичної системи (рис. 5.3) та її формули:

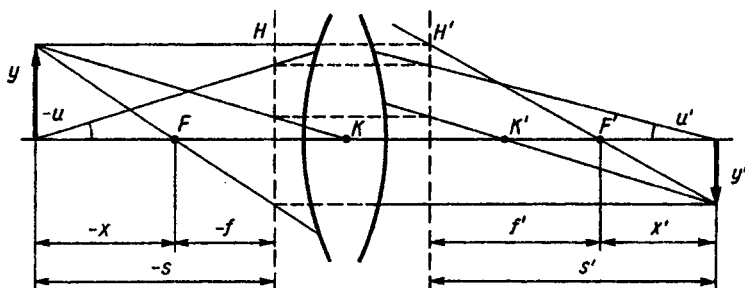


Рис. 5.3

а) Ньютона

$$xx' = ff'; \quad (5.2.7)$$

б) Гаусса

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1; \quad (5.2.8)$$

в) лінійне збільшення

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}. \quad (5.2.9)$$

Оптична сила системи дорівнює відношенню показника заломлення середовища до відповідної фокусної відстані:

$$\Phi = -\frac{n}{f} = \frac{n'}{f'}. \quad (5.2.10)$$

Оптична сила складної системи (у повітрі):

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d \Phi_1 \Phi_2. \quad (5.2.11)$$

Фокусна відстань лінзи завтовшки \$d\$ (у повітрі):

$$f' = -f = \frac{n}{(n-1)} \frac{R_1 R_2}{((n-1)d - n(R_1 - R_2))}. \quad (5.2.12)$$

Положення головних точок лінзи (у повітрі):

$$\begin{aligned} s'_{H'} &= \frac{R_2 d}{n(R_1 - R_2) - (n-1)d}; \\ s_H &= \frac{R_1 d}{n(R_1 - R_2) - (n-1)d}. \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Кутове збільшення:

а) лупи

$$\Gamma = \frac{D}{f'}, \quad (5.2.14)$$

де \$D\$ – відстань найкращого бачення, \$D = 25\$ см;

$$\Gamma = -\frac{f'_{об}}{f'_{ок}}, \quad (5.2.15)$$

де $f'_{об}$, $f'_{ок}$ – задні фокусні відстані об'єктива і окуляра;
в) мікроскопа

$$\Gamma = -\frac{\Delta D}{f'_{об} f'_{ок}}, \quad (5.2.16)$$

де Δ – відстань від заднього фокуса об'єктива до переднього фокуса окуляра. Мінус у формулах збільшення вказує на те, що зображення є перевернутим.

Відбивання і заломлення світла

5.24. Визначити показник заломлення n рідини, якщо промені, що падають на поверхню рідини під кутом $\theta = 40^\circ$ до горизонту, заломлюються в рідині під кутом $i_2 = 35^\circ$.

5.25. Світловий промінь падає з повітря під кутом i на скляну пластинку, показник заломлення якої n . Як мають бути зв'язані між собою величини i та n , щоб відбитий промінь був перпендикулярним до заломленого?

5.26. Промінь світла падає під кутом $i_1 = 30^\circ$ на дно скляної посудини, заповненої водою, і виходить крізь дно в повітря. Під яким кутом i_2 виходить промінь?

5.27. Головний переріз скляної призми має форму рівнобедреного трикутника. Одна з її граней є дзеркальною. Промінь падає нормально на іншу грань і після двох відбиттів виходить крізь основу призми перпендикулярно до неї. Визначити кути призми.

5.28. У скільки разів глибина водоймища здається меншою, ніж вона є в дійсності, якщо дивитися: а) зверху по вертикалі; б) під кутом $i = 60^\circ$ до вертикалі?

5.29. Чому розширюється пучок паралельних променів світла, який входить з повітря у воду під деяким кутом?

5.30. Чому в жаркий день над асфальтовим шосе виникає міраж: асфальт ніби вкритий водою?

5.31. Промінь світла переходить зі скла у воду. За якого найменшого кута падіння i_p спостерігається повне внутрішнє відбиття?

5.32. Пучок монохроматичного світла падає під кутом $i = 45^\circ$ на бічну грань скляної ($n = 1,6$) призми, заломний кут якої $\alpha = 60^\circ$. Визначити кут δ відхилення пучка від первісного напрямку. Яким буде цей кут δ_1 , якщо призму занурити у воду?

5.33. Водолаз стоїть на дні озера з ліхтарем. Визначити мінімальну відстань d від точки, де стоїть водолаз, до тих точок дна, які освітлюються відбитим від поверхні води світлом ліхтаря і які водолаз може спостерігати. Глибина озера $H = 10$ м, джерело світла міститься на дні. Яку картину спостерігатиме водолаз прямо над головою? Зріст водолаза $h = 1,75$ м.

5.34. Світловий промінь пройшов крізь плоскопаралельну пластинку, товщина якої $d = 2$ см. На яку відстань l змістився промінь, що вийшов із пластинки паралельно променю, що падав на пластинку, якщо кут падіння променя $i_1 = 60^\circ$?

5.35. Пучок монохроматичного світла падає на бічну грань скляної призми, яка в перерізі є рівнобедреним трикутником з прямим кутом при вершині. Увійшовши до призми, пучок зазнає повного внутрішнього відбиття від основи призми і виходить крізь другу бічну грань. Визначити найменший кут падіння i_1 пучка на вхідну грань, при якому ще можливе повне внутрішнє відбиття від основи.

5.36. На дні посудини під центром круглої непрозорої пластинки діаметра $D = 2$ см розмістили точкове джерело світла. Посудину поступово заповнюють водою, пластинка при цьому плаває на поверхні. За якої висоти h рівня води промені почнуть виходити з неї?

5.37. На торець скляного світловоду падає світло під кутом α . Яким має бути найменший показник заломлення n скла, щоб світло, яке увійшло у світловод, не могло вийти крізь його бічну стінку незалежно від кута α ?

5.38. Світловод виготовлено з двох сортів скла з різними показниками заломлення: серцевини n_1 і оболонки $n_2 = 1,52$. Яким має бути показник заломлення n_1 , щоб світло виходило з протилежного кінця світловода незалежно від кута падіння на передній торець?

5.39. Чому блищать повітряні бульбашки у воді?

5.40. Як, маючи скляний куб, визначити швидкість монохроматичного світла в ньому?

5.41. Людина наближається до дзеркала зі швидкістю $v_1 = 1$ м/с. З якою швидкістю v_2 вона наближається до свого зображення?

5.42. На шляху променя, який падав перпендикулярно до екрана, встановили невелике плоске дзеркало так, щоб кут падіння променя на нього $i = 88^\circ$. Як змінилось положення світлової плями на екрані, якщо відстань від дзеркала до екрана $l = 0,5$ м?

5.43. Чи можна в плоскому дзеркалі невеликого розміру побачити повне зображення високого дерева?

5.44. Якого мінімального розміру h має бути дзеркало, що висить на стіні, щоб людина, зріст якої H , побачила себе на весь зріст, якщо очі

людини перебувають проти верхнього краю дзеркала? Як залежить розмір дзеркала від відстані між дзеркалом і людиною?

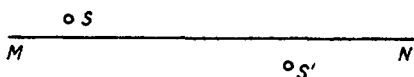


Рис. 5.4

5.45. Два дзеркала утворюють двогранний прямий кут. У площині, перпендикулярній до ребра двогранного кута, на систему під довільним кутом падає промінь світла. Як зміниться напрям поширення світла після двох відбиттів?

Сферичне дзеркало

5.46. Знаючи положення оптичної осі сферичного дзеркала MN , світної точки S та її зображення S' , визначити побудовою положення вершини дзеркала та його центра (рис. 5.4).

5.47. Вгнуте сферичне дзеркало дає на екрані зображення предмета, збільшене в 3 рази й обернене ($\beta = -3$). Відстань від вершини дзеркала до предмета $s = -20$ см. Визначити радіус кривизни R дзеркала.

5.48. Визначити фокусну відстань f вгнутого сферичного дзеркала, якщо відстань між предметом і зображенням $l = 15$ см, а зображення збільшене у 2 рази й обернене ($\beta = -2$).

5.49. Опукле сферичне дзеркало має радіус кривизни $R \approx 40$ см. На відстані $s = -10$ см від дзеркала розміщується предмет, висота якого $h = 5$ см. Визначити положення s' і висоту h' зображення. Побудувати зображення.

5.50. Чому бокові дзеркала на автомобілях роблять опуклими, а не плоскими?

5.51. Чи правдоподібна легенда про те, що Архімед спалив римський флот, сфокусувавши сонячні промені сферичним дзеркалом?

Тонка лінза

5.52. Визначити побудовою хід променів за збиральною (рис. 5.5, а, б) і розсіювальною (рис. 5.5, в, г) лінзами, якщо відомі положення лінз, головної оптичної осі та головних фокусів.

5.53. Визначити побудовою положення тонкої лінзи та її фокусів, якщо відомі положення оптичної осі OO' і пари спряжених точок P і P' (рис. 5.6, а – в). Встановити, яка це лінза.

5.54. Визначити побудовою положення фокусів тонкої лінзи, якщо відомі положення оптичної осі OO' і хід довільного променя (рис. 5.7, а, б).

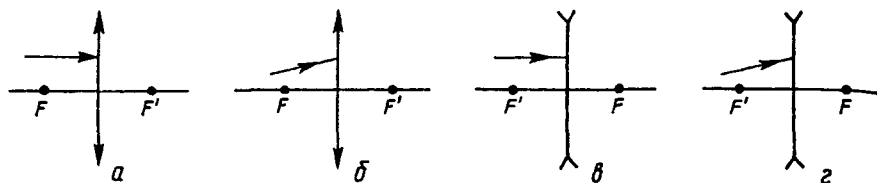


Рис. 5.5

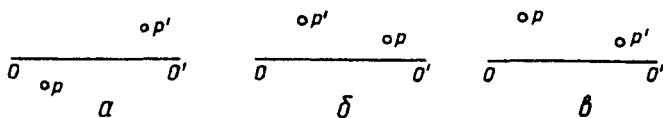


Рис. 5.6

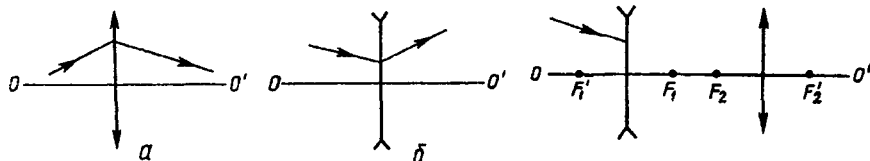


Рис. 5.7

Рис. 5.8

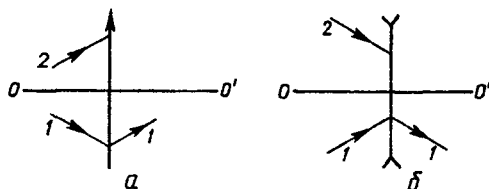


Рис. 5.9

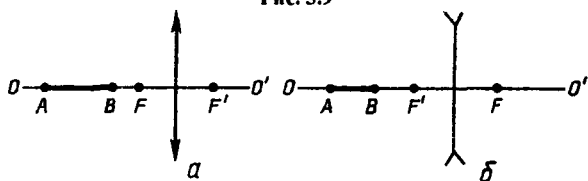


Рис. 5.10

5.55. Визначити побудовою хід променя в системі розсіювальної та збиральної лінз (рис. 5.8).

5.56. Знаючи хід променів 1 і 2 до лінзи, встановити хід променя 2 за збиральною та розсіювальною лінзами, якщо відомі положення лінзи й головної оптичної осі (рис. 5.9, а, б).

5.57. Побудувати зображення відрізків AB , які розміщені на головній оптичній осі, у збиральній і розсіювальній лінзах (рис. 5.10, а, б).

5.58. Зі скла, що має показник заломлення $n = 1,5$, потрібно виготовити лінзу, оптична сила якої в повітрі $\Phi = 5$ дптр. Якими мають бути радіуси кривизни R_1 і R_2 лінзи, якщо вони є однаковими за модулем?

5.59. За яких умов двоопукла скляна лінза, показник заломлення якої $n = 1,6$, стане розсіювальною?

5.60. Визначити оптичну силу Φ двоопуклої лінзи, радіуси кривизни якої $R_1 = 30$ см, $R_2 = -40$ см, виготовленої зі скла ($n = 1,5$).

5.61. Радіуси кривизни поверхонь тонкої двовгнутої скляної лінзи однакові за модулем $-R_1 = R_2 = 50$ см. Показник заломлення скла $n = 1,5$. Визначити оптичну силу Φ_1 лінзи: а) у повітрі; б) у рідині, показник заломлення якої $n_0 = 1,7$. Зробити аналогічний розрахунок для двоопуклої лінзи за тих самих умов задачі.

5.62. Плоско-опукла тонка лінза, яка повернута плоскою стороною до предмета, дає його дійсне збільшене зображення. Як зміниться зображення, якщо лінзу повернути опуклою стороною до предмета?

5.63. Предмет міститься у фокусі розсіювальної лінзи. Визначити відстань s' від лінзи до зображення і збільшення β лінзи, якщо фокусна відстань лінзи $f = 20$ см.

5.64. Фокусна відстань лінзи $f' = 20$ см. На якій відстані s від лінзи треба розмістити предмет, щоб його уявне зображення знаходилося на відстані $s' = -40$ см від лінзи? Яким буде збільшення β ?

5.65. На відстані $s = -20$ см від збиральної лінзи, оптична сила якої в повітрі $\Phi = 10$ дптр, поставили предмет заввишки $h = 5$ см. Визначити положення s' і висоту h' зображення. Зробити рисунок.

5.66. Збиральну лінзу, виготовлену зі скла ($n = 1,5$), що має фокусну відстань у повітрі $f'_n = 10$ см, занурили у воду. Як змінилась її фокусна відстань?

5.67. Двоопукла тонка лінза зі скла ($n = 1,52$) оточена з одного боку водою ($n_a = 1,33$), з іншого – повітрям ($n_n = 1$). Радіуси кривизни обох поверхонь однакові за модулем $R_1 = -R_2 = 20$ см. Визначити фокусні відстані системи.

5.68. Довести, що у двоопуклій лінзі з однаковими за модулем радіусами кривизни поверхонь і показником заломлення $n = 1,5$, яка міститься в повітрі, фокуси збігаються з центрами кривизни. У скільки разів зміниться фокусна відстань, якщо лінзу занурити у воду ($n_a = 1,33$)?

5.69. Визначити задню фокусну відстань f' у повітрі для таких скляних лінз ($n = 1,5$):

а) двоопуклої, радіуси кривизни поверхонь якої $R_1 = 15$ см, $R_2 = -20$ см;

б) плоско-опуклої, $R_1 = \infty$, $R_2 = -20$ см;

в) вгнуто-опуклої, $R_1 = 25$ см, $R_2 = -15$ см (додатний меніск);

г) двовгнутої, $R_1 = -15$ см, $R_2 = 20$ см;

д) плоско-вгнутої, $R_1 = \infty$, $R_2 = 20$ см;

е) опукло-вгнутої, $R_1 = 20$ см, $R_2 = 15$ см (від'ємний меніск).

Зобразити ці лінзи.

5.70. На якій відстані s від двоопуклої лінзи треба розмістити предмет, щоб відстань від нього до його дійсного зображення була мінімальною? Задня фокусна відстань лінзи f' .

5.71. Оптична система складається зі збиральної лінзи, фокусна відстань якої $f' = 30$ см, і плоского дзеркала, розташованого на відстані $a = 15$ см від лінзи перпендикулярно до її оптичної осі. Предмет міститься перед лінзою на відстані $s = -15$ см. Визначити положення s' зображення, яке дає система.

5.72. Як можна визначити фокусну відстань тонкої збиральної лінзи за допомогою плоского дзеркала?

5.73. Збиральну і розсіювальну лінзи розмістили близько одна від одної на оптичній лаві між предметом та екраном. Визначити фокусну відстань f'_2 розсіювальної лінзи, якщо відстань від системи лінз до предмета $s = -50$ см, від лінз до екрана, на якому спостерігається зображення, $s' = 30$ см, а фокусна відстань збиральної лінзи $f'_1 = 10$ см.

5.74. За допомогою лінзи, оптична сила якої $\Phi = 5$ дптр, отримали зображення предмета, однакове за розмірами із самим предметом. На якій відстані s від лінзи треба розмістити предмет, щоб зображення зменшилось у 4 рази?

5.75. За допомогою тонкої лінзи на екрані одержали зображення предмета з п'ятикратним збільшенням. Не змінюючи положення лінзи, екран змістили вздовж оптичної осі на відстань $l = 30$ см. Щоб зображення було різким, змістили й предмет. У цьому разі зображення виявилось у 3 рази більшим за предмет. На яку відстань Δs змістили предмет?

5.76. Чи може промінь, який проходить через оптичний центр тонкої лінзи, заломлюватись?

Центровані оптичні системи

5.77. Точка A розміщена на оптичній осі додатної центрованої оптичної системи, яка міститься в однорідному середовищі. Задано положення переднього фокуса F . Визначити побудовою положення спряженої точки A' і заднього фокуса F' , якщо точка A лежить: а) ліворуч від переднього фокуса F ; б) між точками F і H ; в) праворуч від точки H' (рис. 5.11).

5.78. Точка A розміщена на оптичній осі від'ємної центрованої оптичної системи, яка міститься в однорідному середовищі. Задано положення

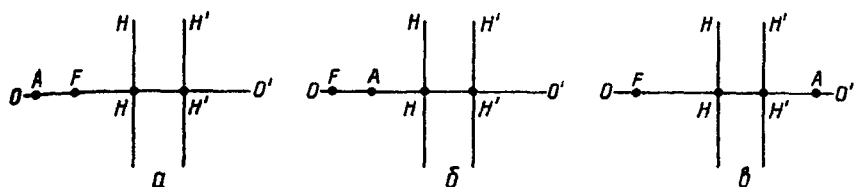


Рис. 5.11

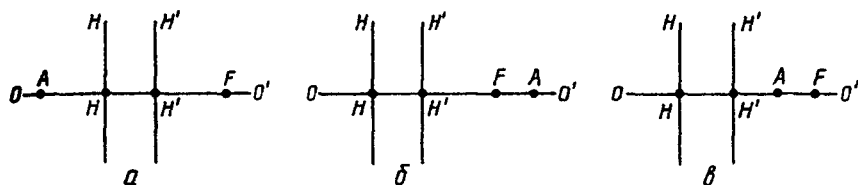


Рис. 5.12

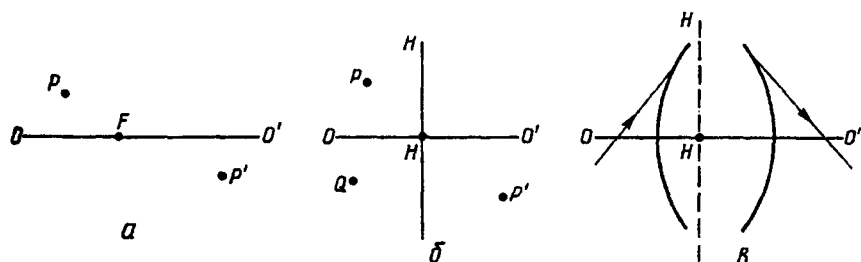


Рис. 5.13

переднього фокуса F . Визначити побудовою положення спряженої точки A' і заднього фокуса F' , якщо точка A лежить: а) ліворуч від точки H ; б) праворуч від точки F ; в) між точками H' і F (рис. 5.12).

5.79. Центрована оптична система розміщується в повітрі. Встановити побудовою: а) положення точок F' і H' , якщо P і P' – спряжені точки, положення точки F відоме (рис. 5.13, а); б) положення точки Q' , що спряжена з точкою Q , якщо P і P' – спряжені точки, положення точки H задано (рис. 5.13, б); в) положення точок F , F' і H' , якщо задані хід променя до й після проходження системи та положення точки H (рис. 5.13, в).

5.80. Визначити фокусні відстані f' , f , фокальні відрізки s'_F , s_F (відстані від вершини поверхні до відповідного фокуса) і положення s'_H , s_H

головних площин товстої скляної лінзи в повітрі, якщо радіуси кривизни заломлюючих поверхонь $R_1 = 30$ мм, $R_2 = -50$ мм, товщина лінзи $d = 20$ мм, показник заломлення скла $n = 1,52$.

5.81. Опукло-вгнута товста скляна лінза з радіусами кривизни $R_1 = 5$ см, $R_2 = 3$ см міститься в повітрі. Товщина лінзи $d = 0,8$ см, показник заломлення скла $n = 1,52$. Визначити положення s'_H , s_H головних площин і фокусні відстані f' , f лінзи.

5.82. Обидві поверхні опукло-вгнутої скляної лінзи мають однакові радіуси кривизни R . Товщина лінзи d , показник заломлення скла n . Визначити оптичну силу Φ й положення s'_H , s_H головних площин. Якою є лінза – збиральною чи розсіювальною?

5.83. Чи може скляна двоопукла лінза в повітрі бути розсіювальною?

5.84. Відстань між точкою та переднім головним фокусом $x = -40$ см, відстань від її зображення до задньої головної площини $s' = 10$ см. Оточуюче середовище є однорідним. Визначити задню фокусну відстань f' системи.

5.85. Визначити поздовжню хроматичну аберацію $\Delta s'$ для плоско-опуклої лінзи, радіус кривизни якої $R = -1$ м, якщо показник заломлення скла, з якого виготовлено лінзу, становить для червоних променів $n_{\text{ч}} = 1,50$, а для фіолетових $n_{\text{ф}} = 1,52$.

Оптичні прилади

5.86. Чи можна сфотографувати уявне зображення?

5.87. Плоске дзеркало дає уявне зображення. Чому ми його бачимо?

5.88. Які з аберацій, що характерні для тонких лінз, дуже послаблені у людського ока?

5.89. Щоб краще бачити, короткозорі люди прижмурюють очі. Чому?

5.90. Коли оптична сила ока є більшою: при розгляданні предметів що містяться на малій чи на великій відстані від нього?

5.91. Яке зображення – уявне чи дійсне – утворюється на сітківці ока під час користування лупою?

5.92. Лупою є двоопукла лінза з однаковими за модулем радіусами кривизни $|R_1| = |R_2| = R$, виготовлена зі скла, показник заломлення якого $n = 1,5$. Визначити радіуси кривизни лінзи, якщо лупа дає збільшення $\Gamma = 5$.

5.93. Яке збільшення Γ дає лупа, що складається з двох лінз, фокусні відстані яких відповідно $f'_1 = 5$ см і $f'_2 = 7$ см? Лінзи складені щільно.

5.94. Відстань найкращого бачення людини $D_1 = 40$ см. Який дефект зору і окулярами якої оптичної сили Φ необхідно виправити?

5.95. Чому телескопи “наближують” віддалені предмети?

5.96. Оптична сила об’єктива телескопа $\Phi = 1$ дптр. Окуляр дає збільшення в $\Gamma_{\text{ок}} = 10$ разів. Встановити збільшення Γ телескопа та накреслити хід променів у ньому.

5.97. Відстань між об’єктивом і окуляром телескопічної системи $L = 12$ см, а її збільшення $\Gamma = -5$. Якою буде оптична сила Φ системи цих лінз, якщо їх скласти щільно?

5.98. Зорова труба, фокусна відстань об’єктива якої $f'_{\text{об}} = 50$ см, встановлена на нескінченність. Трубу треба сфокусувати на предмет, віддалений на 50 м. На яку відстань z і в якому напрямі треба перемістити окуляр труби?

5.99. Фокусні відстані об’єктива й окуляра мікроскопа відповідно $f'_{\text{об}} = 4$ мм і $f'_{\text{ок}} = 40$ мм. Відстань від об’єктива до окуляра $L = 19,4$ см. Визначити збільшення Γ мікроскопа. На якій відстані s від об’єктива розміщується предмет?

5.100. Фокусні відстані об’єктива й окуляра мікроскопа відповідно $f'_{\text{об}} = 5$ мм і $f'_{\text{ок}} = 50$ мм. Предмет розміщено на відстані $s = -5,1$ мм від об’єктива. Визначити довжину L тубуса мікроскопа і його збільшення Γ для нормального ока.

5.101. З якої відстані s зроблено фотознімок дерева заввишки $h = 5$ м, якщо воно має висоту на фотоплівці $h' = 15$ мм? Фокусна відстань об’єктива $f' = 20$ см.

5.102. З літака, що летить на висоті $h_1 = 2$ км, проводять топографічні зйомки місцевості фотоапаратом, фокусна відстань якого $f = 40$ см. Який масштаб знімків? Яким буде масштаб, якщо літак знизиться до висоти $h_2 = 500$ м? Який мінімальний розмір предметів, що розміщуються на Землі, можна розрізнити з висоти 2 км на фотоплівці, якщо мінімальний розмір видимих деталей зображення на плівці становить 0,1 мм?

5.3. ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА

При накладанні двох монохроматичних хвиль однакової частоти результуюча інтенсивність визначається за формулою

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta, \quad (5.3.1)$$

де δ – різниця фаз хвиль, $\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta$, тут Δ – оптична різниця ходу, $\Delta = n_2 s_2 - n_1 s_1$;

n_1, n_2 – показники заломлення; s_1, s_2 – геометричні довжини шляхів відповідних хвиль; λ_0 – довжина хвилі у вакуумі.

Умови інтерференційних максимумів

$$\Delta = \pm m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.3.2)$$

і мінімумів

$$\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.3.3)$$

Ширина інтерференційної смуги

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\varphi}, \quad (5.3.4)$$

де λ – довжина хвилі; φ – кутова відстань між джерелами.

Довжина $l_{\text{ког}}$, час $t_{\text{ког}}$ і радіус $\rho_{\text{ког}}$ когерентності :

$$l_{\text{ког}} = ct_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}; \quad \rho_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda}{\psi}, \quad (5.3.5)$$

де $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ – ступінь монохроматичності світла; $\Delta\lambda$ – інтервал довжин хвиль, які є в даному світловому пучку; ψ – кутовий розмір джерела, $\psi = \frac{\rho}{r}$, тут ρ – розмір джерела; r – відстань до джерела.

Граничний порядок інтерференції, який спостерігається:

$$m_{\text{гр}} \approx \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (5.3.6)$$

У разі відбивання світла від оптично більш густого середовища фаза хвилі змінюється стрибкоподібно на π .

Різниця ходу світлових хвиль, відбитих від тонкої пластинки, яка розташована в повітрі,

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2}, \quad (5.3.7)$$

де b – товщина пластинки; i – кут падіння хвилі.

Радіуси світлого $r_{\text{мсв}}$ і темного $r_{\text{м}}$ кілець Ньютона (прошарок повітряний)

$$r_{\text{мсв}} = \sqrt{\frac{(2m-1)R\lambda}{2}} \quad (m = 1, 2, 3, \dots); \quad (5.3.8)$$

$$r_{\text{м}} = \sqrt{mR\lambda} \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (5.3.9)$$

де m – номер у відбитому світлі; R – радіус кривизни лінзи.

Одержання інтерференції поділом хвильового фронту

5.103. За яких умов при накладанні двох пучків світла однакової частоти завжди, тобто за будь-яких фазових співвідношень, відбувається просто додавання інтенсивностей?

5.104. Різниця ходу Δ двох інтерферуючих хвиль монохроматичного світла дорівнює $0,5 \lambda$. Визначити різницю фаз δ коливань, що збуджуються хвилями в даній точці.

5.105. Встановити зміну ΔL оптичної довжини ходу променя, що поширюється в повітрі, якщо на його шляху розмістити скляну пластинку завтовшки $d = 2$ мм. Розрахунок зробити для нормально падаючого променя і для променя, що падає на пластинку під кутом $i = 60^\circ$.

5.106. Визначити всі довжини хвиль видимої частини спектра (від 380 до 760 нм), які під час накладання двох когерентних світлових хвиль з різницею ходу $\Delta = 2$ мкм будуть максимально: а) підсилені; б) послаблені.

5.107. Стабільність частоти $\Delta\omega/\omega$ гелієво-неонового лазера в одномодовому режимі генерації становить близько 10^{-10} . Лазер випромінює на довжині хвилі $\lambda = 632,8$ нм. Оцінити час $t_{\text{ког}}$ і довжину $l_{\text{ког}}$ когерентності лазера.

5.108. Для випромінювання, що відповідає оранжевій лінії ($\lambda = 605,78$ нм) криптонової лампи, яка використовується в сучасному еталоні довжини, довжина когерентності $l_{\text{ког}} = 0,8$ м. Визначити: час когерентності $t_{\text{ког}}$; інтервал $\Delta\lambda$ довжин хвиль, що випромінюються; кількість m інтерференційних смуг, які розрізняються.

5.109. З якою метою в досліді Юнга (рис. 5.14) світло пропускають крізь малий отвір b у непрозорому екрані A ? Оцінити розмір отвору b , якщо відстань між щілинами $d = 1$ мм, а відстань між екранами A і B $L = 0,3$ м.

5.110. Одна зі щілин S_1 у досліді Юнга (рис. 5.14) закрита червоним світлофільтром, інша щілина S_2 – синім. Джерело випромінює біле світло. Як розподіляється інтенсивність світла на екрані?

5.111. У досліді Юнга на шляху білого світла один раз був установлений фіолетовий світлофільтр ($\lambda_1 = 400$ нм), інший раз – червоний ($\lambda_2 = 650$ нм). Як при цьому змінилась інтерференційна картина на екрані?

5.112. На якій мінімальній відстані d потрібно розмістити щілини S_1 і S_2 у досліді Юнга (рис. 5.14), щоб спостерігати інтерференцію світла без допоміжного екрана A під час освітлення щілин прямими променями Сонця? Сонячний диск видно із Землі під кутом $\varphi = 30'$. Довжину хвилі вважати такою, що $\lambda = 0,55$ мкм.

5.113. Якою може бути відстань d між щілинами для спостереження інтерференційної картини в досліді Юнга (рис. 5.14), якщо джерелом світла є лазер?

5.114. Сферичні хвилі від двох когерентних джерел світла S_1 і S_2 перекриваються. Який вигляд мають інтерференційні смуги на екрані, якщо він розміщений: а) перпендикулярно до лінії джерел S_1S_2 ; б) паралельно лінії джерел S_1S_2 ? Який вигляд має картина в центральній частині екрана за умови б)?

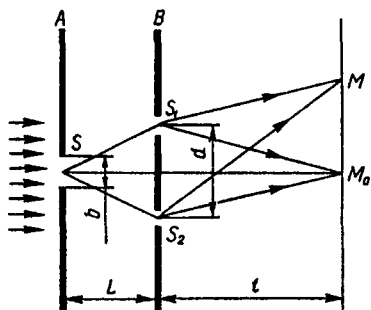


Рис. 5.14

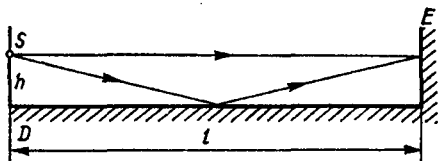


Рис. 5.15

5.115. Дві плоскі когерентні світлові хвилі $E_1 = a_1 \cos(\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})$ і $E_2 = a_2 \cos(\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})$ поширюються під деяким кутом одна до одної в напрямках, що визначаються хвильовими векторами $\mathbf{k}_1$ і $\mathbf{k}_2$. На шляху хвиль розміщують плоский екран. Який вигляд мають інтерференційні смуги на екрані?

5.116. У досліді Юнга відстань між щілинами $d = 2$ мм, а відстань від них до екрана $l = 1,2$ м (рис. 5.14). Встановити відстань Δx між сусідніми інтерференційними смугами, якщо довжина світлової хвилі $\lambda = 600$ нм. Як зміниться відстань між смугами, якщо: а) джерела розмістити на відстані $d_1 = 5$ мм; б) збільшити відстань до екрана у 2 рази?

5.117. На шляху одного з променів у досліді Юнга (рис. 5.14) розміщена трубка завдовжки $l = 2$ см з плоскопаралельними скляними основами. Під час заповнення трубки хлором уся інтерференційна картина на екрані змістилася на $N = 20$ смуг. Обчислити показник заломлення n_x хлору, вважаючи, що показник заломлення повітря $n_n = 1,000\,276$, довжина хвилі, яку випромінює джерело, $\lambda = 589$ нм.

5.118. Визначити довжину світлової хвилі λ_0 , якщо в досліді Юнга (рис. 5.14) відстань від третього інтерференційного максимуму до центральної смуги $x_{\max} = 1,65$ мм, відстань між щілинами $d = 1$ мм, екран розміщений на відстані $l = 1$ м від щілин.

5.119. Відстань між двома уявними джерелами в дзеркалах Френеля $d = 0,5$ мм, відстань від зображення до екрана $l = 2,5$ м. На екрані на відстані $x = 2$ см розміщується $N = 10$ темних смуг. Встановити довжину хвилі λ світла, яке падає на дзеркала Френеля.

5.120. У досліді Ллойда світловий пучок, що поширюється від джерела S , відбивається від дзеркала D і на екрані E інтерферує з прямим пучком, який падає на екран безпосередньо від джерела (рис. 5.15). Відстань від середини щілини джерела до площини дзеркала $h = 2$ мм, від щілини

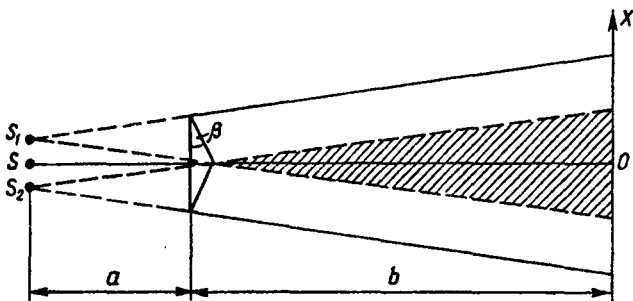


Рис. 5.16

до екрана $l = 2$ м, довжина світлової хвилі $\lambda = 700$ нм. Визначити ширину Δx інтерференційних смуг на екрані.

5.121. На біпризму Френеля (рис. 5.16) падає світло ($\lambda = 600$ нм) від джерела, що має вигляд вузької щілини. Відстань від джерела до біпризми $a = 0,25$ м, від біпризми до екрана $b = 1$ м. Заломний кут призми $\beta = 4 \cdot 10^{-3}$ рад, показник заломлення її $n = 1,5$. Визначити ширину Δx інтерференційних смуг на екрані та максимальну кількість N смуг інтерференції, яку можна спостерігати на екрані.

Одержання інтерференції поділом амплітуди

5.122. Яким умовам, пов'язаним з когерентністю світла, має задовольняти товщина тонкої пластинки, щоб можна було спостерігати інтерференцію під час відбивання від її поверхонь світла: а) від нелазерного джерела (ступінь монохроматичності $\lambda/\Delta\lambda \sim 10^2$); б) від лазера ($\lambda/\Delta\lambda \sim 10^5$)?

5.123. При якій найменшій товщині $b_{\min}$ мильної плівки ($n = 1,33$) під час спостереження її у відбитому світлі вона здається зеленою ($\lambda = 500$ нм)? Світло падає на плівку під кутом $i = 35^\circ$ до нормалі.

5.124. Мильна плівка, яка затягує вертикально розміщений каркас, освітлюється білим світлом. У відбитому світлі спостерігаються кольорові інтерференційні смуги рівної товщини. Чому перед тим, як лопнути, плівка набуває чорного кольору?

5.125. На плівку, показник заломлення якої $n = 1,33$, нормально падає паралельний пучок білого світла. При якій найменшій товщині b_1 плівки вона буде найбільш прозорою для світла, довжина хвилі якого $\lambda_1 = 600$ нм? Якою має бути найменша товщина b_2 плівки, щоб вона одночасно була найпрозорішою для світла, довжини хвиль якого λ_1 і $\lambda_2 = 500$ нм?

5.126. На поверхню скляної пластинки, показник заломлення якої $n_c = 1,5$, нанесли прозору плівку. Показник заломлення плівки $n_{пл} = 1,4$. На поверхню плівки нормально падає світло, довжина хвилі якого $\lambda = 500$ нм. Якою має бути найменша товщина h_{min} плівки, щоб світло не відбивалось від її поверхні?

5.127. Для зменшення втрат світла внаслідок відбивання від поверхні скляні оптичні деталі покривають тонким шаром речовини, показник заломлення якої $n' = \sqrt{n}$, де n – показник заломлення скла (просвітлення оптики). При якій товщині h шару хвилі завдовжки λ , відбиті від передньої та задньої поверхонь шару в напрямі нормалі, повністю гасять одна одну через інтерференцію?

5.128. Чому у відбитому світлі поверхня просвітленої лінзи має пурпуровий колір (суміш червоного та фіолетового)?

5.129. Інтерференційний світлофільтр складається з двох напівпрозорих дзеркал і шару прозорого діелектрика, що міститься між ними. Оптична товщина шару є кратною $\lambda/2$. Світло якої довжини хвилі проходить крізь світлофільтр?

5.130. На тонкий скляний клин, кут між гранями якого $\alpha = 2'$, падає нормально до поверхні монохроматичне світло. Визначити довжину хвилі λ світла, якщо показник заломлення скла $n = 1,55$, а відстань між першою та одинадцятою інтерференційними темними смугами, що спостерігаються у відбитому світлі, $l = 3$ мм.

5.131. Поверхні скляного ($n = 1,5$) клина утворюють між собою кут $\alpha = 0,2'$. На клин нормально до його поверхні падає пучок монохроматичного світла, довжина хвилі якого $\lambda = 0,55$ мкм. Визначити ширину Δx інтерференційних смуг, що спостерігаються на поверхні клина у відбитому світлі.

5.132. Між двома прозорими паралельними пластинками поклали дуже тонкий дріт, унаслідок чого між ними утворився повітряний клин. У простір між пластинками ввели воду. Розглядаючи пластинки у відбитому світлі, довжина хвилі якого $\lambda = 500$ нм, спостерігали інтерференційні смуги завширшки $\Delta x = 3$ мм. Визначити кут α між пластинками клина.

5.133. На поверхню скляного клина нормально падає світло. Чим пояснити, що з наближенням до вершини клина чіткість інтерференційної картини збільшується?

5.134. На поверхню скляного ($n = 1,5$) клина нормально падає світло, довжина хвилі якого $\lambda = 0,7$ мкм і ступінь монохроматичності $\lambda/\Delta\lambda = 10^2$. Кількість інтерференційних смуг у відбитому світлі, які припадають на одиницю довжини поверхні клина, $N = 40$ см⁻¹. Визначити кут α між

поверхнями клина. На якій відстані l від вершини клина зникають інтерференційні смуги?

5.135. Плоско-опукла лінза лежить на плоскій скляній пластинці опуклою стороною вниз. Лінза виготовлена зі скла, показник заломлення якого $n = 1,5$, її оптична сила $\Phi = 1$ дптр. При нормальному падінні світла на плоску межу лінзи радіус першого темного кільця Ньютона у відбитому світлі $r_1 = 0,5$ мм. Визначити довжину світлової хвилі λ .

5.136. Установка для спостереження кілець Ньютона освітлюється монохроматичним світлом, довжина хвилі якого $\lambda = 675$ нм, що падає нормально до пластинки. Відстань між 5-м і 25-м світлими кільцями Ньютона $\Delta r = 9$ мм. Визначити радіус кривизни R опуклої лінзи, якщо спостереження проводять у відбитому світлі.

5.137. Відстань між другим і третім темними кільцями Ньютона у відбитому світлі $\Delta r_1 = 1$ мм. Обчислити відстань Δr_2 між 20-м і 21-м темними кільцями.

5.138. Спектр натрію містить дві лінії, довжини хвиль яких $\lambda_1 = 589$ нм і $\lambda_2 = 589,59$ нм. Яке за номером m темне кільце Ньютона, що відповідає одній із цих ліній, збігається з наступним за номером темним кільцем, що відповідає другій лінії? Спостереження проводять у відбитому світлі.

5.139. Заповнюючи прозорою рідиною простір між лінзою та пластинкою в установці для спостереження кілець Ньютона, радіуси темних кілець у відбитому світлі зменшили у $k = 1,21$ раза. Визначити показник заломлення n рідини.

5.140. Установка для спостереження кілець Ньютона освітлюється білим світлом, яке падає нормально. Між лінзою і пластинкою міститься повітря. Як зміниться інтерференційна картина кілець Ньютона, якщо простір між лінзою та пластинкою заповнити рідиною, показник заломлення n_r якої більший від показника заломлення n_d матеріалу лінзи, але менший від показника заломлення $n_{плс}$ пластинки $n_{плс} > n_r > n_d$ (дослід Юнга)?

5.141. Плоско-опукла лінза радіуса $R = 0,8$ м опуклою поверхнею стикається зі скляною пластинкою. Між пластинкою та лінзою міститься рідина. При спостереженні у відбитому червоному світлі ($\lambda = 650$ нм) радіус 16-го темного кільця Ньютона $r = 2,5$ мм. Чому дорівнює показник заломлення n рідини? Яким стане радіус кільця, якщо лінзу відсунути від пластинки на відстань $h = 3$ мкм?

5.142. Кільця Ньютона спостерігаються у світлі, довжина хвилі якого λ , відбитому від системи двох плоско-опуклих лінз, притисну-

тих одна до одної опуклими поверхнями. Визначити радіус r_m темного кільця, якщо радіуси кривизни опуклих поверхонь лінз дорівнюють відповідно R_1 і R_2 .

Інтерферометри

5.143. Встановити зміщення d рухомого дзеркала в інтерферометрі Майкельсона, якщо інтерференційна картина змістилась на $\Delta N = 400$ смуг. Дослід проводився з монохроматичним світлом, довжина хвилі якого $\lambda = 550$ нм.

5.144. В інтерферометрі Майкельсона спостерігається інтерференційна картина. Який вигляд має картина, якщо падаючий пучок монохроматичного світла: а) розбіжний, дзеркала строго перпендикулярні; б) паралельний, дзеркала розташовані під кутом, відмінним від 90° ? Як треба фокусувати зорову трубу для спостереження інтерференційної картини у кожному з випадків? Як змінюється інтерференційна картина в обох випадках, якщо рухоме дзеркало переміщувати так, щоб відстань від пластинки збільшувалась?

5.145. Інтерферометр Майкельсона освітлюється розбіжним пучком монохроматичного світла, дзеркала інтерферометра є перпендикулярними. Що спостерігається в зоровій трубці, якщо рухоме дзеркало інтерферометра переміщувати зі сталою швидкістю?

5.146. В інтерферометрі Жамена (рис. 5.17) дві однакові трубки завдовжки $l = 10$ см кожна заповнені повітрям ($n_1 = 1,000\,292$). Внаслідок заміни в одній із трубок повітря киснем інтерференційна картина змістилась на $m = 4$ смуги. Визначити показник заломлення n_2 кисню, якщо довжина хвилі $\lambda = 500$ нм.

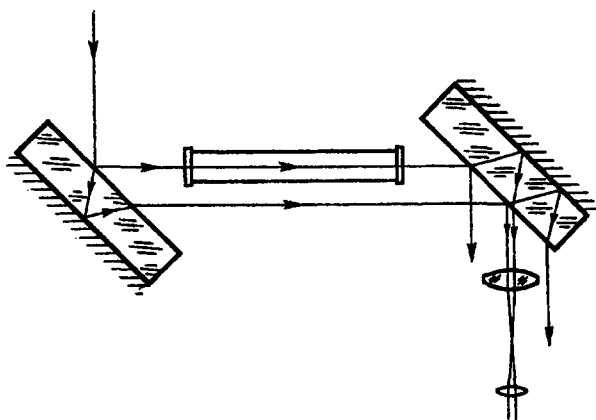


Рис. 5.17

5.147. На скільки смуг m змістилась інтерференційна картина в інтерферометрі Жамена (рис. 5.17), якщо в одне його плече поставили трубку завдовжки $l = 10$ см з газом, показник заломлення якого $n = 1,000\,77$? У другому плечі стоїть така сама трубка, заповнена повітрям ($n_{\text{п}} = 1,000\,292$). Дослідження проводять зі світлофільтром, що пропускає світло, довжина хвилі якого $\lambda = 590$ нм.

5.148. Якість обробки поверхні деталі контролюють за допомогою інтерферометра Лінника. Під час спостереження інтерференційної картини виявилось, що інтерференційні смуги викривились на чотири смуги. Яка глибина h подряпини на поверхні деталі, якщо спостереження проводились у світлі, довжина хвилі якого $\lambda = 500$ нм?

5.149. На еталон Фабрі – Перо падає пучок світла, який розходитьсЯ. Довжина світлової хвилі $\lambda = 0,5$ мкм, товщина еталона $d = 5$ см. На екрані за допомогою лінзи отримують інтерференційну картину смуг рівного нахилу – систему концентричних кілець. Визначити порядок m інтерференції: а) у центрі картини; б) для кільця, що відповідає куту заломлення $r = 5^\circ$. З якою метою намагаються досягти великого порядку інтерференції?

5.4. ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА

Дифракція Френеля на круглому отворі радіуса r . Радіус зовнішньої межі m -ї зони Френеля

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda}. \quad (5.4.1)$$

Кількість відкритих зон Френеля

$$m = \frac{r^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \quad (5.4.2)$$

де a – відстань від джерела до перешкоди; b – відстань від перешкоди до точки спостереження.

Радіус m -ї зони Френеля для плоскої хвилі

$$r_m = \sqrt{b m \lambda}. \quad (5.4.3)$$

Дифракція Фраунгофера на щілині у разі нормального падіння світла. Розподіл інтенсивності за напрямом

$$I_\varphi = I_0 \left[\frac{\sin(\pi b \sin \varphi / \lambda)}{\pi b \sin \varphi / \lambda} \right]^2, \quad (5.4.4)$$

де I_0 – інтенсивність у центрі дифракційної картини; b – ширина щілини; φ – кут дифракції.

Умова максимумів інтенсивності світла

$$b \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) . \quad (5.4.5)$$

Умова мінімумів інтенсивності світла

$$b \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) . \quad (5.4.6)$$

Дифракція світла на дифракційній ґратці у разі нормального падіння світла. Інте-сивність у точці, положення якої визначається кутом дифракції φ :

$$I = I_1 \left[\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right]^2 , \quad . \quad (5.4.7)$$

де I_1 – інтенсивність світла, що проходить крізь одну щілину; N – кількість щілин у ґратці; δ – різниця фаз коливань, $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi$.

Положення головних максимумів інтенсивності

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.4.8)$$

де d – період ґратки; m – порядок головного максимуму.

Положення головних мінімумів інтенсивності

$$b \sin \varphi = \pm k \lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (5.4.9)$$

де b – ширина щілини.

Положення додаткових мінімумів

$$d \sin \varphi = \pm \frac{k'}{N} \lambda \quad (k' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots) . \quad (5.4.10)$$

Кількість головних максимумів у разі нормального падіння хвилі

$$m \leq \frac{d}{\lambda} . \quad (5.4.11)$$

Кутова та лінійна дисперсії дифракційних ґраток відповідно

$$D_\varphi = \frac{\delta \varphi}{\delta \lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi} ; \quad (5.4.12)$$

$$D_l = \frac{\delta l}{\delta \lambda} \approx f D_\varphi , \quad (5.4.13)$$

де $\delta \varphi$ – кутова відстань; δl – лінійна відстань між спектральними лініями, які відрізняються за довжиною хвилі на $\delta \lambda$; f – фокусна відстань лінзи, яка проектує спектр на екран.

Роздільна здатність дифракційної ґратки

$$R = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = mN , \quad (5.4.14)$$

де λ , $\lambda + \delta\lambda$ – довжини хвиль двох спектральних ліній, що розрізняються; N – кількість шілін.

Роздільна сила об'єктива

$$R = \frac{1}{\delta\phi} = \frac{D}{1,22\lambda}, \quad (5.4.15)$$

де $\delta\phi$ – мінімальна кутова відстань між двома світними точками, зображення яких розрізняються; D – діаметр об'єктива.

Формула Брегга – Вульфа

$$2d \sin \theta = \pm m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (5.4.16)$$

де θ – кут ковзання променів, що падають на кристал; d – віддаль між атомними площинами кристала.

Зони Френеля. Дифракція Френеля на простих перешкодах

5.150. Чому в повсякденному житті ми зустрічаємося з дифракцією звукових хвиль, а не світлових?

5.151. Як зміниться дифракційна картина, якщо взяти до уваги, що атоми випромінюють не монохроматичне світло, а цуги хвиль?

5.152. На діафрагму з отвором змінного радіуса падає світло від точкового джерела. На екрані спостерігається дифракційна картина. Як змінюється дифракційна картина зі зміною радіуса діафрагми?

5.153. Визначити радіус r_3 третьої зони Френеля, якщо точкове джерело світла розміщується на відстані $a = 1$ м від непрозорої перешкоди з круглим отвором (рис. 5.18), а відстань між отвором і екраном $b = 1$ м. Дифракційна картина спостерігається в монохроматичному світлі ($\lambda = 500$ нм).

5.154. Обчислити площі перших трьох зон Френеля, якщо плоска монохроматична хвиля ($\lambda = 600$ нм) падає нормально на круглий отвір у непрозорій перешкоді, а дифракційна картина спостерігається на відстані $b = 5$ м від отвору.

5.155. На круглий отвір у непрозорій перешкоді діаметра $D = 5$ мм падає нормально плоска монохроматична хвиля ($\lambda = 500$ нм). За отвором на відстані $b = 2,5$ м від нього розміщено екран. Яким буде центр дифракційної картини на екрані: темним чи світлим?

5.156. Точкове джерело світла, довжина хвилі якого λ , розміщено на відстані a від непрозорої перешкоди з круглим отвором. На відстані b від перешкоди розміщено екран (рис. 5.18). За яких значень радіуса r отвору в точці P спостерігатиметься світла пляма і за яких – темна?

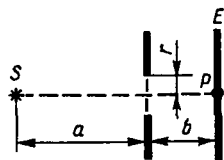


Рис. 5.18

5.157. Як залежить інтенсивність світла в точці P (за умовами задачі 5.156) від діаметра круглого отвору з погляду геометричної оптики?

5.158. На екрані спостерігається дифракційна картина від круглого отвору в непрозорій перешкоді, який освітлюється монохроматичним точковим джерелом (рис 5.18). В отворі вміщується одна зона Френеля. Як зміниться освітленість у центрі картини, якщо перешкоду з отвором забрати?

5.159. Плоска монохроматична хвиля інтенсивністю I_0 падає нормально на перешкоду з круглим отвором. Визначити інтенсивність I світла за перешкодою в точці, для якої в отворі вміщується: а) одна зона Френеля; б) зовнішня або внутрішня половина першої зони Френеля; в) половина першої зони Френеля, причому закрита половина зони вздовж діаметра.

5.160. На шляху плоскої монохроматичної світлової хвилі інтенсивністю I_0 поставлено непрозору перешкоду, що має вигляд круглого диска. Диск закриває першу зону Френеля. За допомогою векторної діаграми визначити інтенсивність I світла в центрі тіні поза диском.

5.161. На круглий отвір у непрозорій перешкоді радіуса $r = 1$ мм падає нормально паралельний пучок світла, довжина хвилі якого $\lambda = 500$ нм. На якій максимальній відстані $b_{\max}$ від отвору на екрані в центрі дифракційної картини спостерігатиметься темна пляма?

5.162. Світло від віддаленого джерела падає на непрозору перешкоду з круглим отвором. На деякій відстані від отвору на екрані спостерігається дифракційна картина. Як змінюється освітленість у центрі дифракційної картини, якщо екран поступово віддаляти від отвору?

5.163. Точкове джерело S монохроматичного світла ($\lambda = 500$ нм) освітлює діафрагму з отвором радіуса $r = 1$ мм (рис. 5.18). Діафрагма переміщується з положення $a_1 = 1$ м у положення $a_2 = 1,75$ м. Скільки разів m спостерігатиметься затемнення в точці P на екрані, якщо джерело S віддалено від нього на відстань $l = 2$ м?

5.164. Точкове джерело світла ($\lambda = 550$ нм), непрозора перешкода з круглим отвором радіуса r та екран розміщені так, як показано на рис. 5.18. Відстані між джерелом світла S і непрозорою перешкодою з круглим отвором та між отвором і екраном відповідно $a = 5$ м, $b = 1$ м. При якому радіусі r отвору інтенсивність світла в точці P буде найбільшою? Як зміниться інтенсивність у цій точці, якщо: а) зменшити площу отвору вдвічі; б) збільшити площу отвору в 1,5 раза; в) збільшити площу отвору вдвічі; г) забрати перешкоду?

5.165. Точкове джерело монохроматичного світла, довжина хвилі якого $\lambda = 500$ нм, розміщено на відстані $a = 2$ м перед непрозорою перешкодою з отвором радіуса $r = 1$ мм (рис. 5.18). Що спостерігається на екрані в точці P , якщо: а) $b = \infty$; б) $b = 0,5$ м; в) $b = 0,22$ м?

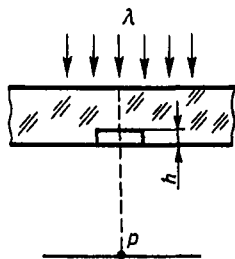


Рис. 5.19

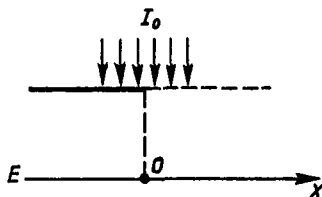


Рис. 5.20

5.166. Плоска світлова хвиля ($\lambda = 0,6$ мкм) падає нормально на скляну пластинку, на протилежному боці якої зроблено круглу циліндричну виїмку (рис. 5.19). Показник заломлення скла $n = 1,5$. Для точки спостереження P у виїмці вміщуються перші півтори зони Френеля. Визначити глибину h виїмки, при якій інтенсивність світла в точці P : а) буде максимальною; б) мінімальною; в) дорівнюватиме інтенсивності падаючого світла. При якій найменшій глибині $h_{\min}$ виїмки виконуються умови $a-v$?

5.167. Як пояснити наявність світлої плями в центрі геометричної тіні від непрозорого круглого диска або кульки? Чому виникають труднощі під час спостереження цієї плями?

5.168. Як залежить інтенсивність плями Пуассона від відстані між екраном, де вона спостерігається, та непрозорим круглим диском? Яка властивість лазерного випромінювання дає змогу спостерігати пляму від порівняно великих перешкод?

5.169. Плоска світлова хвиля падає нормально на непрозору півплощину з прямолінійним краєм, за якою розміщено екран (рис. 5.20). Як змінюється освітленість з віддаленням точки спостереження на екрані від краю геометричної тіні O : а) в освітлену область; б) усередину тіні? Чи є місця, освітленість яких більша, ніж освітленість за відсутності півплощини?

5.170. На Землі спостерігають дифракцію світла далекої зорі від краю Місяця. Оцінити ширину Δx дифракційних смуг поблизу межі тіні від краю Місяця, вважаючи край прямолінійним. Прийняти, що відстань від Землі до Місяця $R = 4 \cdot 10^5$ км.

Дифракція Фраунгофера на щілині. Дифракційна ґратка

5.171. На щілину завширшки $b = 4\lambda$ падає нормально монохроматичне світло. Під яким кутом φ спостерігається мінімум другого порядку? Як зміниться кут дифракції, якщо спостереження проводити в середовищі, показник заломлення якого $n = 1,33$?

5.172. Який найбільший порядок m максимуму можна спостерігати за допомогою щілини завширшки $b = 1$ мкм у разі нормального падіння на неї світла, довжина хвилі якого $\lambda = 400$ нм?

5.173. На вузьку щілину падає нормально монохроматичне світло, довжина хвилі якого $\lambda = 600$ нм. Друга світла дифракційна смуга спостерігається під кутом $\varphi = 1^\circ$. Визначити ширину щілини b .

5.174. На щілину завширшки $b = 0,1$ мм падає нормально монохроматичне світло ($\lambda = 500$ нм). Дифракційна картина спостерігається на екрані, розміщеному на відстані $L = 1$ м від щілини. Обчислити відстань Δl між першою та другою дифракційними смугами, а також ширину l зображення щілини (відстань між першими дифракційними мінімумами, які симетричні відносно головного максимуму).

5.175. Для визначення довжини хвилі, яку випромінює лазер, вивчається явище дифракції на щілині завширшки $b = 21$ мкм. Дифракційні смуги спостерігаються на екрані за допомогою лінзи. Відстань між другою та третьою темними смугами $\Delta l = 0,3$ см, відстань від лінзи до екрана $L = 10$ см. Визначити довжину хвилі λ лазерного випромінювання.

5.176. На щілину завширшки $b = 10$ мкм падає нормально плоска світлова хвиля, довжина якої $\lambda = 0,6$ мкм. Побудувати приблизний графік кутового розподілу I_φ інтенсивності світла в дифракційній картині від щілини на екрані, установленому достатньо далеко. Встановити відношення інтенсивності I_{max} світла в максимумах першого, другого і третього порядків до інтенсивності світла I_0 у центральному максимумі.

5.177. На щілину, за якою на відстані $L = 2$ м розміщено екран, падає нормально біле світло. Який вид дифракції – Френеля чи Фраунгофера – спостерігається і в якому з випадків можна користуватись наближенням геометричної оптики, якщо щілина має ширину: а) $b = 2$ мкм; б) $b = 1$ мм; в) $b = 1$ см?

5.178. На щілину завширшки $b = 40$ мкм, за якою на відстані $L = 0,8$ м розміщено екран, нормально падає плоска монохроматична світлова хвиля. Довжина хвилі $\lambda = 0,5$ мкм. Який вид дифракції спостерігається за таких умов? Визначити ширину Δl центрального максимуму в дифракційній картині.

5.179. Чи завжди для спостереження дифракції Фраунгофера від щілини потрібно встановлювати збиральну лінзу?

5.180. У середині дифракційної картини від щілини спостерігається світла смуга. Як, змінюючи ширину щілини, визначити, який вид дифракції – Френеля чи Фраунгофера – має місце?

5.181. Як зміниться розподіл інтенсивності у фраунгоферовій дифракційній картині від щілини, якщо щілину змістити вбік паралельно екранові без зміни орієнтації?

5.182. Як за допомогою дифракційної ґратки можна визначити швидкість світла у воді?

5.183. На дифракційну ґратку нормально падає монохроматичне світло. Максимум першого порядку відхиляється на кут $\varphi_1 = 3^\circ$. На який кут φ_3 відхиляється максимум третього порядку?

5.184. На дифракційну ґратку, що має $n = 500$ штрихів на один міліметр, падає нормально монохроматичне світло, довжина хвилі якого $\lambda = 500$ нм. Скільки максимумів m можна одержати за допомогою цієї ґратки?

5.185. Чи можуть перекриватись спектри першого та другого порядків, які одержані за допомогою дифракційної ґратки у видимій частині спектра? Довжини хвиль видимого світла містяться у межах 400...760 нм. Визначити умову часткового перекривання спектрів.

5.186. Знаючи межі видимої частини спектра (400...760 нм), розрахувати період d дифракційної ґратки, для якої кутові розміри спектра першого порядку $\Delta\varphi = 20^\circ$.

5.187. У разі освітлення дифракційної ґратки білим світлом спектри другого та третього порядків частково накладаються. На яку довжину хвилі λ в спектрі третього порядку накладається червона межа ($\lambda_{\text{ч}} = 780$ нм) спектра другого порядку? Якою є область перекриття спектрів у видимому діапазоні?

5.188. На дифракційну ґратку, період якої $d = 4$ мкм, падає нормально до її поверхні випромінювання від водневої трубки. За ґраткою розміщено лінзу з фокусною відстанню $f = 0,4$ м, у фокальній площині якої міститься екран. На якій відстані Δx одна від одної розміщуються спектральні лінії з довжинами хвиль $\lambda_1 = 656$ нм і $\lambda_2 = 486$ нм у спектрі третього порядку?

5.189. На дифракційну ґратку падає нормально випромінювання від розрядної трубки з криптоном. П'ятий дифракційний максимум для зеленої лінії, довжина хвилі якої $\lambda_1 = 566$ нм, міститься під кутом $\varphi_1 = 34^\circ 30'$. Визначити кутову відстань $\Delta\varphi$ між зеленою ($\lambda_1 = 566$ нм) та фіолетовою ($\lambda_2 = 404$ нм) лініями у спектрі третього порядку.

5.190. Плоска монохроматична хвиля падає нормально на дифракційну ґратку, кількість штрихів якої $N = 4$. Період ґратки $d = 9$ мкм, ширина однієї щілини $b = 3$ мкм. Побудувати приблизний графік кутового розподілу інтенсивності I_φ світла, яке пройшло через ґратку. Скільки головних максимумів m міститься у межах центрального максимуму від щілини? Які головні максимуми не можуть спостерігатися? Яким є відношення

інтенсивності I_2 головного максимуму другого порядку до інтенсивності I_0 центрального максимуму?

5.191. За умовами задачі 5.190 визначити: повну кількість m головних максимумів під час дифракції світлової хвилі, довжина якої $\lambda = 0,45$ мкм; кутову ширину $\delta\phi_0$ центрального максимуму; кутову ширину $\delta\phi_3$ головного максимуму третього порядку.

5.192. Світло падає нормально на дифракційну ґратку з великою кількістю штрихів. Як зміниться положення максимумів у дифракційній картині, якщо: а) у проміжках між штрихами нанести додаткові штрихи; б) перекрити щілини через одну; в) непрозорою перешкодою зменшити у 2 рази довжину робочої частини ґратки?

5.193. За якої умови всі парні максимуми в дифракційній картині від ґратки зникають?

5.194. Іноді навколо Сонця, Місяця, яскравих зірок, а також навколо земних джерел світла спостерігаються світлі туманні кільця, зовнішні краї яких забарвлені. Їх поява пояснюється дифракцією світла на водяних краплинах. Як забарвлені при цьому зовнішні та внутрішні краї кілець?

5.195. Порівняти спектральний склад світла, що падає на дифракційну ґратку, і того, яке дифрагувало в ґратці.

5.196. Як пов'язана дифракція Фраунгофера зі спектральним розкладанням світла?

Дифракція на кристалічній ґратці

5.197. Монохроматичне рентгенівське випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda = 72,5$ пм, відбивається від природної грані кристала KCl. Максимум другого порядку спостерігається у разі, коли кут ковзання $\theta = 14^\circ 20'$. Встановити віддаль d між сусідніми атомними площинами.

5.198. Обчислити довжину хвилі λ рентгенівського випромінювання, дифракційний максимум другого порядку для якого спостерігається у разі падіння на природну грань кристала NaCl під кутом ковзання $\theta = 11^\circ 30'$. Віддаль між сусідніми атомними площинами ґратки кристала NaCl $d = 280$ пм.

5.199. Пучок рентгенівських променів, що падає на кристал, містить хвилі, довжини яких лежать у діапазоні 95...130 пм. Віддаль між атомними площинами $d = 275$ пм. Чи виникнуть пучки, які максимально підсилюються внаслідок дифракції під час відбивання від кристала?

5.200. На поверхню кристала гіпсу, віддаль між атомними площинами якого $d = 0,303$ нм, падає рентгенівське випромінювання. Якщо кут

падіння $i = 75^\circ 31'$, то для відбитих променів спостерігається дифракційний максимум першого порядку. Обчислити довжину хвилі λ рентгенівського випромінювання.

5.201. Вузький пучок монохроматичного рентгенівського випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda = 32$ пм, падає на полікристалічний зразок. Поза зразком перпендикулярно до рентгенівських променів на відстані $l = 10$ см розташована фотоплівка. Дебаєграма має вигляд концентричних кілець, радіус другого від центральної плями кільця $r = 3,64$ см. Визначити віддаль d між атомними площинами кристала.

5.202. Вузький пучок рентгенівських променів падає під кутом ковзання $\theta = 60^\circ$ на природну грань монокристала NaCl (кухонна сіль). У разі дзеркального відбиття від цієї грані спостерігається максимум другого порядку. Розглядаючи ґратку NaCl як кубічну, визначити довжину хвилі λ рентгенівського випромінювання. Густина кухонної солі $\rho_{\text{к.с}} = 2,16 \cdot 10^3$ кг/м³.

Дисперсія і роздільна здатність оптичних приладів

5.203. Період дифракційної ґратки $d = 2,5$ мкм. Визначити кутову дисперсію D_ϕ ґратки для довжини хвилі $\lambda = 580$ нм у спектрі першого порядку. Обчислити також лінійну дисперсію D_l (мм/нм), якщо фокусна відстань лінзи, яка проектує спектр на екран, $f = 1$ м.

5.204. Визначити кутову дисперсію D_ϕ дифракційної ґратки для довжини хвилі $\lambda = 589$ нм, якщо кут дифракції $\phi = 10^\circ$.

5.205. Як залежить кутова дисперсія D_ϕ дифракційної ґратки від довжини хвилі λ ? Вважати, що світло падає на ґратку нормально.

5.206. На дифракційну ґратку завдовжки $l = 2$ см падає нормально до її поверхні світло. За ґраткою розміщується лінза, фокусна відстань якої $f = 50$ см, у фокальній площині її розміщено екран. Червона лінія ($\lambda = 0,65$ мкм) у спектрі третього порядку спостерігається під кутом дифракції $\phi = 30^\circ$. Обчислити постійну d дифракційної ґратки, роздільну здатність R ґратки в спектрі третього порядку та лінійну дисперсію D_l (мм/нм) ґратки.

5.207. На дифракційну ґратку, кутова дисперсія якої в спектрі другого порядку для довжини хвилі $\lambda = 550$ нм $D_\phi = 1,6 \cdot 10^{-3}$ рад/нм, падає нормально до її поверхні біле світло. За ґраткою міститься лінза, яка проектує спектр на екран. Діапазон довжин хвиль λ видимого світла 400...760 нм. Чи можуть перекриватися спектри першого і другого порядків? У скільки разів спектр другого порядку довший, ніж спектр першого порядку?

5.208. У чому полягає практична цінність дифракційної ґратки з малим періодом d та великою кількістю штрихів N ?

5.209. Яким параметром ґратки визначається найбільша досяжна роздільна здатність R для довжини хвилі λ ?

5.210. Період дифракційної ґратки $d = 0,01$ мм. З якою найменшою кількістю N штрихів має бути ґратка, щоб за її допомогою можна було спостерігати окремо дві складові жовтої лінії натрію ($\lambda_1 = 589$ нм і $\lambda_2 = 589,6$ нм) у спектрах першого та другого порядків? Визначити найменшу довжину l робочої частини ґратки в обох випадках.

5.211. Якою має бути мінімальна довжина l робочої частини дифракційної ґратки, щоб вона розділила в спектрі другого порядку дві лінії спектра ртуті ($\lambda_1 = 313,156$ нм і $\lambda_2 = 313,184$ нм)? Період ґратки $d = 2$ мкм.

5.212. Довжина робочої частини дифракційної ґратки $l = 2$ см, період ґратки $d = 2,5$ мкм. Визначити роздільну здатність R ґратки в спектрі третього порядку. Яка найменша різниця довжин хвиль $\delta\lambda$ двох ліній, що розділяються, у зеленій ділянці спектра ($\lambda = 550$ нм)?

5.213. Чому має дорівнювати мінімальна кількість N штрихів у дифракційній ґратці, щоб розділити в спектрі другого порядку дві лінії калію, довжини хвиль яких $\lambda_1 = 691,2$ нм і $\lambda_2 = 693,9$ нм? Яка при цьому найменша довжина l робочої частини ґратки?

5.214. Чи можливо спостерігати дифракцію рентгенівського випромінювання ($\lambda = 1$ нм) на оптичних дифракційних ґратках?

5.215. Як змінюється дифракційна картина зі збільшенням кута падіння променів на ґратку?

5.216. Який вигляд має умова, що визначає положення головних максимумів у разі похилого падіння променів на дифракційну ґратку під кутом i до нормалі?

5.217. Рентгенівське випромінювання падає на дифракційну ґратку ($N = 1\,200$ мм⁻¹) під кутом $i = 88^\circ$. Кут дифракції для спектра першого порядку $\varphi = 89^\circ$. Визначити довжину хвилі λ випромінювання.

5.218. Яку максимальну довжину хвилі λ можна спостерігати в спектрі дифракційної ґратки, період якої d , якщо промені падають на ґратку: а) нормально; б) похило?

5.219. У фазових відбивальних дифракційних ґратках штрихам надається спеціальна форма (наприклад, трикутника), яка періодично змінює фазу відбитої світлової хвилі. Рівняння такої ґратки має вигляд $d(\sin \psi + \sin \varphi_{\max}) = \pm m\lambda$, де ψ – кут падіння; $\varphi_{\max}$ – напрям на головний максимум. 1. Як визначається напрям φ_0 на нульовий максимум?

2. Як розташовані максимуми інших порядків? 3. Із якою кількістю штрихів на 1 мм має бути ґратка, щоб при кутах $\psi \approx \varphi \approx 75 \dots 80^\circ$ давати спектр у різних ділянках оптичного діапазону?

5.220. Чому голографування потребує лазерних джерел світла?

5.221. Чому не існує строго паралельних пучків променів? Оцінити дифракційну розбіжність θ випромінювання: а) лазера, якщо $\lambda \sim 0,6$ мкм та діаметр його дзеркал $d \sim 1$ см; б) радіотелескопа діаметра $d \sim 20$ м, який випромінює хвилі завдовжки $\lambda \sim 1$ м.

5.222. Діаметр зіниці людського ока змінюється у межах $2 \dots 8$ мм. Чому найбільша гострота зору має місце, коли діаметр зіниці ока $d = 3 - 4$ мм?

5.223. Чому за допомогою оптичного мікроскопа неможливо бачити молекули?

5.224. Які переваги має використання в астрономічних телескопах дзеркал великого діаметра?

5.225. Кутова відстань між двома зірками становить 10^{-6} рад. Яким має бути мінімальний діаметр об'єктива $D_{\min}$ телескопа, щоб розділити ці зірки для світла, довжина хвилі якого $\lambda = 550$ нм?

5.226. Для лазерної локації Місяця використовують гелієво-неоновий лазер, що випромінює паралельний пучок світла кругового перерізу діаметра $d = 5$ см, довжина хвилі якого $\lambda = 0,63$ мкм. Яким буде радіус R світлової плями на поверхні Місяця? Відстань від Землі до Місяця $D = 3,84 \cdot 10^8$ м.

5.227. Випромінювання неперервного лазера на вуглекислому газі ($\lambda = 10,6$ мкм) – це паралельний пучок кругового перерізу діаметра $d = 6$ см. На якій мінімальній площі S можна сконцентрувати енергію випромінювання лазера за допомогою лінзи, фокусна відстань якої $f = 20$ см?

5.5. ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА

Площина поляризації – це площина, в якій відбуваються коливання світлового вектора $\mathbf{E}$.

Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \varphi, \quad (5.5.1)$$

де I , I_0 – інтенсивності відповідно плоскополяризованого світла, що пройшло крізь поляризатор, і падаючого плоскополяризованого світла; φ – кут між площинами поляризації падаючого світла і пропускання поляризатора.

Ступінь поляризації частково поляризованого світла, яке пройшло крізь поляризатор,

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (5.5.2)$$

де $I_{\max}$, $I_{\min}$ – максимальна і мінімальна інтенсивності світла.

Співвідношення між модулями векторів електричної напруженості (світлових векторів) падаючої $E_{\text{пад}}$, відбитої $E_{\text{відб}}$ та заломленої $E_{\text{зал}}$ хвиль (формули Френеля):

$$\begin{aligned} E_{\text{відб}} \parallel &= E_{\text{пад}} \parallel \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)}; & E_{\text{зал}} \parallel &= E_{\text{пад}} \parallel \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r) \cos(i-r)}; \\ E_{\text{відб}} \perp &= -E_{\text{пад}} \perp \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}; & E_{\text{зал}} \perp &= E_{\text{пад}} \perp \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)}, \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

де $E_{\parallel}$, $E_{\perp}$ – компоненти вектора, що лежать у площині падіння і перпендикулярно до неї.

Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} i_{\text{Б}} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (5.5.4)$$

де $i_{\text{Б}}$ – кут падіння, за якого відбита світлова хвиля є максимально поляризованою; n_2 , n_1 – показники заломлення відповідно середовища, на яке падає світло, і середовища, з якого падає світло на межу поділу.

Ступінь поляризації під час відбивання і заломлення світла на межі двох діелектриків

$$\Delta = \frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{I_{\perp} + I_{\parallel}}, \quad (5.5.5)$$

де $I_{\perp}$, $I_{\parallel}$ – інтенсивності світла, коливання світлового вектора якого відповідно є перпендикулярними і паралельними площині падіння.

Зсув фаз між коливаннями звичайного і незвичайного променів, що виходять з кристала, якщо напрям падаючого світла перпендикулярний до осі кристала:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_o - n_e) d, \quad (5.5.6)$$

де n_o , n_e – показники заломлення відповідно звичайного і незвичайного променів.

Товщина d пластинки у чверть хвилі задовольняє співвідношення

$$\Delta = d(n_o - n_e) = \pm \left(m + \frac{1}{4} \right) \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.5.7)$$

де знак плюс відповідає оптично від'ємному кристалу, знак мінус – оптично додатному.

Кут φ повороту площини поляризації оптично активними речовинами:

а) у твердих тілах

$$\varphi = \alpha l, \quad (5.5.8)$$

де α – стала обертання; l – довжина шляху, який пройшло світло в оптично активній речовині;

б) у розчинах

$$\varphi = [\alpha]cl, \quad (5.5.9)$$

де $[\alpha]$ – питоме обертання; c – концентрація оптично активної речовини в розчині.

Кут повороту площини поляризації у разі проходження світла крізь речовину, яка міститься в однорідному магнітному полі індукцією B ,

$$\varphi_{\text{магн}} = VIB, \quad (5.5.10)$$

де V – стала Верде.

Подвійне променезаломлення в ізотропній речовині, яку вміщено в електричне поле,

$$\delta = 2\pi BIE^2, \quad (5.5.11)$$

де δ – різниця фаз між звичайним і незвичайним променями; B – коефіцієнт Керра; l – довжина шляху променя; E – напруженість електричного поля.

Закон Малюса. Закон Брюстера

5.228. Чи є поляризованим монохроматичне світло? Якщо воно є поляризованим, то як?

5.229. За допомогою якого простого досліду можна довести, що світлові вектори в природному світлі орієнтовані симетрично відносно напрямку поширення?

5.230. Кут між головними площинами поляризатора та аналізатора $\varphi_1 = 60^\circ$. У скільки разів зміниться інтенсивність світла, що виходить з аналізатора, якщо кут зменшити до $\varphi_2 = 30^\circ$?

5.231. Природне світло проходить крізь поляризатор й аналізатор. Інтенсивність світла, яке виходить з аналізатора, становить $\eta = 25\%$ інтенсивності природного світла. Визначити кут φ між площинами пропускання поляризатора та аналізатора.

5.232. У скільки разів η послаблюється інтенсивність світла, що проходить крізь два ніколі, площини поляризації яких утворюють кут $\varphi = 60^\circ$, якщо в кожному ніколі втрачається $k = 10\%$ падаючого на нього світлового потоку?

5.233. Природне світло падає на систему з трьох послідовно розміщених поляроїдів. Площини пропускання перших двох поляроїдів утворюють кут $\varphi = 65^\circ$, а напрям площини пропускання третього поляроїда збігається з напрямом площини першого. Коефіцієнт пропускання кожного поляроїда $\tau = 90\%$. У скільки разів η зменшиться інтенсивність світла після проходження системи?

5.234. Природне світло проходить послідовно крізь поляризатор й аналізатор. Поляризатор освітлюється паралельним пучком променів,

освітленість його $E_1 = 80$ лк. Освітленість екрана, розміщеного поза аналізатором, $E_2 = 10$ лк. Визначити кут φ між головними площинами поляризатора й аналізатора, якщо кожний поляризатор поглинає частку $k = 5\%$ світла, що проходить крізь нього.

5.235. Природне світло інтенсивністю I_0 проходить крізь поляризатор й аналізатор, головні площини яких утворюють кут $\varphi = 30^\circ$. Після проходження системи світло падає на дзеркало і, відбившись, знову проходить крізь неї. Якою буде інтенсивність I світла після його зворотного проходження?

5.236. Визначити показник заломлення скла n , якщо у разі відбивання від нього світлового пучка в повітрі кут максимальної поляризації i_B становить 60° . Як зміниться кут максимальної поляризації, якщо скло занурити у воду?

5.237. Встановити найменше значення кута $i_{B\min}$ повної поляризації під час падіння світла з повітря на поверхню речовини, показник заломлення якої $n \geq 1$.

5.238. Визначити кут i_B повної поляризації світла у разі його відбивання від межі повітря – лід, якщо показник заломлення льоду $n = 1,308$.

5.239. Визначити швидкість v поширення світла у воді, якщо кут i_B максимальної поляризації під час відбивання світла від води становить 53° .

5.240. Показати, що у разі падіння пучка природного світла під кутом Брюстера i_B на межу поділу двох середовищ відбитий і заломлений промені є взаємно перпендикулярними.

5.241. На якій кутовій висоті α має бути Сонце, щоб відбите від поверхні води сонячне світло повністю поляризувалося?

5.242. Світловий пучок проходить крізь рідину, налиту в скляну посудину ($n_1 = 1,5$), і відбивається від дна. Відбитий пучок є повністю поляризованим у разі відбивання від дна під кутом $i_B = 42^\circ 37'$. Визначити показник n заломлення рідини. Під яким кутом i має падати на дно посудини пучок світла, що проходить у рідині, щоб мало місце повне внутрішнє відбиття?

5.243. Пучок природного світла падає під кутом Брюстера i_B на межу поділу скло ($n_1 = 1,5$) – вода ($n_2 = 1,33$). Визначити кут α між падаючим і заломленим пучками.

5.244. Пучок плоскополяризованого світла відбивається від межі поділу вода ($n_1 = 1,33$) – скло ($n_2 = 1,5$). За яких умов інтенсивність відбитого світла майже дорівнює нулеві? Встановити відповідний кут падіння.

Ступінь поляризації. Формули Френеля

5.245. Природне світло інтенсивністю $I_{\text{пр}}$ проходить крізь поляризатор. Відносні втрати на відбивання і поглинання світла становлять k . Чому дорівнює інтенсивність I_1 і ступінь поляризації P_1 світла поза поляризатором?

5.246. Частково поляризоване світло, ступінь поляризації якого $P = 0,75$, пропускають крізь поляризатор. У скільки разів максимальна інтенсивність світла відрізняється від мінімальної?

5.247. Частково поляризоване світло падає на поляризатор. Під час повороту поляризатора на кут $\beta = 30^\circ$ відносно положення, що відповідає мінімальній інтенсивності, інтенсивність світла збільшується в $k = 2$ рази. Визначити ступінь поляризації P світла.

5.248. Частково поляризоване світло падає на поляризатор. Під час повороту поляризатора на кут $\beta = 40^\circ$ відносно положення, що відповідає максимальній інтенсивності, інтенсивність пучка зменшується в $k = 1,5$ рази. Нехтуючи поглинанням світла в поляризаторі, встановити відношення інтенсивності $I_{\text{пр}}$ природної складової світла до інтенсивності $I_{\text{пол}}$ поляризованого світла та ступінь поляризації P світла.

5.249. Ступінь поляризації частково поляризованого світла $P = 0,2$. Встановити відношення інтенсивності $I_{\text{пр}}$ природної складової світла до інтенсивності $I_{\text{пол}}$ поляризованого світла.

5.250. Застосувавши формули Френеля, визначити ступінь поляризації Δ світла, відбитого від поверхні води під кутами $i' = 0; 45; 57$ і 90° . Падаюче світло є природним.

5.251. Користуючись формулами Френеля, визначити ступінь поляризації Δ заломленого у воду світла, якщо кути падіння на поверхню води $i = 20; 45; 60$ і 80° . Падаюче світло є природним.

5.252. Природне світло падає на поверхню води ($n = 1,33$) під кутом Брюстера. Визначити ступінь поляризації Δ заломленого світла, скориставшись формулами Френеля.

5.253. Пучок природного світла падає на поверхню води ($n = 1,33$) під кутом Брюстера. Визначити коефіцієнт відбиття ρ (відношення інтенсивності відбитого світла до інтенсивності падаючого).

Подвійне променезаломлення

5.254. На одновісний кристал нормально падає плоскополяризоване світло. Кут між площиною поляризації світла і площиною головного перерізу кристала дорівнює α . Встановити відношення інтенсивностей звичайного I_o і незвичайного I_e променів.

5.255. За нормального падіння світла на пластинку з одновісного кристала, вирізану паралельно оптичній осі, спостерігають подвійне заломлення променів. Чому дорівнює кут між нормаллями до хвильових поверхонь звичайних і незвичайних променів?

5.256. Як одержати світло, поляризоване по колу?

5.257. Природне світло падає перпендикулярно до пластинки кварцу, що вирізана паралельно оптичній осі. Показники заломлення кварцу для звичайного і незвичайного променів відповідно $n_o = 1,5442$ і $n_e = 1,5533$. Визначити оптичну різницю ходу Δ звичайного і незвичайного променів, якщо товщина пластинки $d = 0,02$ мм.

5.258. Лінійно поляризоване світло ($\lambda = 585$ нм) падає перпендикулярно до пластинки, вирізаної з одновісного кристала паралельно оптичній осі. Показники заломлення кристала для звичайного і незвичайного променів відповідно $n_o = 1,658$ і $n_e = 1,486$. При якій найменшій товщині $d_{\min}$ пластинки різниця фаз δ між звичайним і незвичайним променями на виході з пластинки дорівнює $\pi/2$? Яким буде світло, що виходить із пластинки?

5.259. Як відрізнити світло, поляризоване по колу, від природного?

5.260. Лінійно поляризоване світло ($\lambda = 585$ нм) падає перпендикулярно до кристалічної пластинки кварцу завтовшки $d = 225$ мкм, яка вирізана паралельно оптичній осі. Показники заломлення кварцу для звичайного і незвичайного променів відповідно $n_o = 1,5442$ і $n_e = 1,5533$. Яким буде світло на виході з пластинки?

5.261. Лінійно поляризоване світло ($\lambda = 589$ нм) падає перпендикулярно до пластинки з одновісного кристала, яка вирізана паралельно оптичній осі. Різниця показників заломлення кристала для звичайного і незвичайного променів для деякої довжини хвилі $n_o - n_e = 0,172$. Якою має бути найменша товщина $d_{\min}$ пластинки, щоб вона пропускала світло без зміни напрямку коливань?

5.262. Плоскополяризоване світло проходить крізь кристалічну пластинку. З якою метою для спостереження інтерференції поза кристалічною пластинкою розміщують поляризатор?

Обертання площини поляризації. Штучна анізотропія

5.263. У кювету цукрометра наливо 5%-й розчин цукру, який повертає площину поляризації на кут $\varphi = 4,5^\circ$. Визначити концентрацію c_1 такого розчину цукру, який повертає площину поляризації на кут $\varphi_1 = 9^\circ$.

5.264. Якою є масова концентрація c цукру в розчині, якщо у разі проходження світла крізь трубку з розчином завдовжки $l = 15$ см кут

повороту площини поляризації $\varphi = 20^\circ$? Питоме обертання $[\alpha]$ цукру дорівнює $1,17 \cdot 10^{-2}$ рад $\cdot$ м²/кг.

5.265. Кварцова пластинка завтовшки $d_1 = 2,25$ мм вирізана перпендикулярно до оптичної осі й розміщена між двома поляризаторами, площини пропускання яких є паралельними. Пластинка повертає площину поляризації монохроматичного світла на кут $\varphi_1 = 45^\circ$. При якій товщині d_2 кварцової пластинки світло не виходитиме з другого поляризатора?

5.266. Між схрещеними поляризаторами розміщено кварцову пластинку. Стала обертання кварцу для зеленої області спектра, в якій проходить дослід, $\alpha = 29,7$ град/мм. Якої товщини d має бути пластинка кварцу, щоб поле зору стало максимально світлим? Як треба вирізати відносно оптичної осі кварцову пластинку? Чи проходитиме у зворотному напрямі крізь перший поляризатор світло, якщо його відбити дзеркалом, установленим поза другим поляризатором?

5.267. Між двома поляризаторами, площини пропускання яких утворюють кут $\alpha = 45^\circ$, вміщена трубка завдовжки $l = 50$ см із сірковуглецем CS_2 . Паралельно осі трубки спрямоване однорідне магнітне поле. Яким має бути мінімальне значення і напрям магнітної індукції B , щоб система пропускала максимальну частину світла? Стала Верде для CS_2 $V = 700$ град/(Тл $\cdot$ м). Чи проходитиме у зворотному напрямі крізь перший поляризатор світло, якщо його відбити дзеркалом, установленим поза другим поляризатором?

5.268. Комірка Керра складається з прозорої кювети, заповненої рідиною (найчастіше нітробензолом) і плоского конденсатора. Якщо на конденсатор подати напругу, то рідина набуває властивостей одновісного кристала з оптичною віссю, напрямленою вздовж електричного поля. Комірку Керра вміщено між схрещеними поляризатором і аналізатором. Площина поляризації світла, що падає на комірку, утворює кут $\alpha = 45^\circ$ з напрямом поля. За відсутності поля світло не проходить крізь аналізатор. При якій напруженості E поля система пропускати максималну частину світла, що падає на неї? Довжина пластин конденсатора $l = 5$ см, коефіцієнт Керра для нітробензолу $B = 2,22$ нм/В ($\lambda = 546$ нм).

5.269. За умовами задачі 5.268 відстань між пластинами конденсатора $d = 1$ мм, довжина пластин конденсатора $l = 5$ см. Чи проходитиме світло крізь систему, якщо прикладена напруга $U = 1\,500$ В?

5.270. У деяких п'єзоелектриках (наприклад, дигідрофосфаті калію KDP) у разі накладання зовнішнього електричного поля виникає подвійне променезаломлення (ефект Погкельса), причому ефект є пропорційним напруженості E цього поля: $n_o - n_e = \alpha E$, де α – стала. Модулятор

світла (комірка Поккельса) розміщено між схрещеними поляризаторами. При якій мінімальній напрузі U , що подається на комірку, світло, довжина хвилі якого $\lambda = 600$ нм, проходитиме крізь кристал? Стала Поккельса для кристала KDP $\alpha = 3,6 \cdot 10^{-11}$ м/В.

5.6. ВЗАЄМОДІЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ З РЕЧОВИНОЮ. ОПТИКА ПІЛ, ЩО РУХАЮТЬСЯ

Діелектрична проникність речовини (згідно з електронною теорією дисперсії світла)

$$\epsilon(\omega) = n^2(\omega) = 1 + \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}, \quad (5.6.1)$$

де n – показник заломлення речовини; N_i – концентрація атомів речовини i -го сорту (або електронів, власна частота коливань яких ω_{0i}); e , m – заряд і маса електрона; ω – частота світла.

Під час поширення в поглинальному середовищі плоскої хвилі монохроматичного світла її інтенсивність зменшується за експоненціальним законом

$$I = I_0 e^{-\alpha x}, \quad (5.6.2)$$

де I – інтенсивність хвилі після проникнення в середовище на відстань x ; I_0 – інтенсивність падаючої хвилі; α – лінійний показник ослаблення внаслідок поглинання та розсіяння (коефіцієнт поглинання).

Інтенсивність світла, розсіяного оптично неоднорідною речовиною (розмір неоднорідностей $r < 0,1 \lambda$) (закон Релея),

$$I \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}. \quad (5.6.3)$$

Інтенсивність світла, розсіяного дисперсним (каламутним) середовищем під кутом θ до напрямку опромінювання

$$I = I_{\perp} (1 + \cos^2 \theta), \quad (5.6.4)$$

де $I_{\perp}$ – інтенсивність розсіяного світла в напрямі $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Ефект Доплера для електромагнітних хвиль у вакуумі

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \theta}, \quad (5.6.5)$$

де ν, ν_0 – частоти, що відповідно сприймаються приймачем і випускаються джерелом; $\beta = v/c$, тут v – швидкість джерела випромінювання відносно спостерігача; θ – кут між вектором швидкості v і напрямом спостереження в системі, зв'язаній з приймачем.

Кут θ між хвильовим вектором (напрямом поширення) світла і вектором швидкості V зарядженої частинки, яка рухається в речовині з надсвітловою швидкістю $V > v = c/n$ (випромінювання Вавилова – Черенкова)

$$\theta = \arccos \frac{c}{nV}. \quad (5.6.6)$$

Дисперсія світла

5.271. Показник заломлення повітря для жовтої лінії спектра натрію ($\lambda_1 = 0,589$ мкм) видимого світла $n_1 = 1,000\ 29$. Визначити показники заломлення n_2 повітря для ультрафіолетового випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda_2 = 0,3$ мкм, і n_3 для інфрачервоного випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda_3 = 2$ мкм. Вважати, що частота власних коливань зовнішніх атомних електронів $\omega_0 = 7,5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$.

5.272. Показник заломлення повітря за нормальних умов для світла, довжина хвилі якого $\lambda = 589,3$ нм, $n_1 = 1,000\ 292$. Вважаючи, що концентрація електронів прямо пропорційна густині речовини, визначити показник заломлення n_2 повітря за умови, що температура $t_2 = 30$ °C і тиск $p_2 = 3$ МПа.

5.273. Як пояснити, що показники заломлення води для низькочастотних радіохвиль ($n_1 = 9$) і для хвиль оптичного діапазону ($n_2 = 1,33$) дуже відрізняються?

5.274. Для радіохвиль, довжина хвилі яких $\lambda = 3$ м, показник заломлення іоносфери $n = 0,91$. Визначити концентрацію N електронів у плазмі іоносфери, вважаючи їх вільними.

5.275. Електромагнітна хвиля дуже великої частоти ω поширюється в середовищі. Встановити залежність $n(\omega)$ показника заломлення середовища від частоти хвилі. Обчислити показник заломлення n рентгенівського випромінювання ($\lambda = 0,3$ нм) для води. Яке тлумачення можна дати одержаному результату?

5.276. Згідно з електронною теорією дисперсії показник заломлення рентгенівського випромінювання для води (див. відповідь на задачу 5.275) $n < 1$. Отже, фазова швидкість рентгенівських хвиль у воді $v = c/n$ є більшою, ніж швидкість c світла у вакуумі. Чи не суперечить це теорії відносності?

5.277. Вважаючи електрони в іоносферній плазмі вільними, а їх концентрацію $N \sim 10^{11} \text{ м}^{-3}$, оцінити показник n заломлення іоносферної плазми для радіохвиль: а) коротких ($\lambda \sim 30$ м); б) ультракоротких ($\lambda \sim 3$ м). Як, спираючись на одержаний результат, пояснити характер поширення радіохвиль в іоносфері Землі?

5.278. Визначити фазову v і групову u швидкості поширення електромагнітних хвиль з частотою ω у плазмі іоносфери. Кількість вільних електронів у одиниці об'єму N . Взаємодією хвилі з іонами плазми нехтувати.

5.279. Користуючись формулою Релея (4.5.31), визначити групову швидкість u хвилі для таких законів дисперсії: а) $v = a\sqrt{\lambda}$; б) $v = a/\sqrt{\lambda}$; в) $v = bk$; г) $v = d/\omega^2$, де a, b, d – деякі сталі; v – фазова швидкість; λ – довжина хвилі; k – хвильове число; ω – циклічна частота.

Поглинання світла

5.280. Для інфрачервоного випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda_1 = 2,7$ мкм, коефіцієнт поглинання для кварцу $\alpha_1 = 0,2$ см⁻¹, а для інфрачервоного випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda_2 = 4,5$ мкм, відповідно $\alpha_2 = 7,3$ см⁻¹. Встановити частку τ інтенсивності світла, що проходить крізь пластинку кварцу завтовшки $d = 0,5$ см в обох випадках.

5.281. Коефіцієнт поглинання середовища, в якому поширюється плоска монохроматична світлова хвиля, $\alpha = 2$ м⁻¹. На скільки відсотків зменшиться інтенсивність світла у разі проходження шару цього середовища завтовшки: а) 10 мм; б) 2 м?

5.282. Коефіцієнт поглинання α_1 силіцію для випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda = 826$ мм, становить 10^3 см⁻¹ при температурі $T_1 = 300$ К, а при температурі $T_2 = 77$ К він зменшується до $\alpha_2 = 0,6 \cdot 10^3$ см⁻¹. У скільки разів збільшується при цьому пропускання тонкої плівки силіцію завтовшки: а) 1 мкм; б) 3 мкм; в) 300 мкм? Відбивання не враховувати.

5.283. На поверхню срібла нормально падає світло, довжина хвилі якого λ_0 . У скільки разів зменшується амплітуда світлової хвилі в шарі срібла в одну довжину хвилі λ_0 завтовшки, якщо коефіцієнт поглинання $\alpha = 4\pi n\chi/\lambda_0$, де $\chi = 20,22$; $n = 0,18$?

Розсіяння світла

5.284. Пояснити блакитний колір неба і червоний колір зорі. Яким був би колір неба і зорі, якби повітря не розсіювало світло, а його дисперсія була значною?

5.285. У скільки разів інтенсивність молекулярного розсіяння синього світла ($\lambda = 460$ нм) перевищує інтенсивність розсіяння червоного світла ($\lambda = 650$ нм)?

5.286. Як пояснити залежність інтенсивності розсіяного випромінювання від частоти (закон Релея)?

5.287. Як пояснити білий колір хмар?

5.288. Пропускаючи пучок світла вздовж осі скляної трубки з водою, в якій розбавили кілька краплин молока, експериментатор встановив, що відношення інтенсивності світла, розсіяного під кутом $\theta_1 = \pi/2$, до інтенсивності світла, розсіяного під деяким кутом θ_2 , становить 0,7. Під яким кутом θ_2 експериментатор спостерігав розсіяння? Побудувати індикатрису інтенсивності розсіяного світла для даного досліду. Поглинанням і заломленням світла на стінках трубки нехтувати.

Ефект Доплера в оптиці

5.289. Визначити довжину хвилі λ_0 , яку випромінює джерело монохроматичного світла, якщо у разі наближення його до спостерігача зі швидкістю $v = 3 \cdot 10^7$ м/с приймач реєструє випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda = 550$ нм.

5.290. З якою швидкістю v має летіти космічний корабель, віддаляючись від Землі, щоб зелений промінь лазера ($\lambda_1 = 550$ нм), спрямований із Землі на корабель, здавався космонавтові червоним ($\lambda_2 = 650$ нм)?

5.291. Космічне тіло віддаляється від Сонячної системи зі швидкістю $v = 0,2$ с. Встановити зміщення $\Delta\lambda$ спектральної лінії водню ($\lambda_0 = 486$ нм), що випромінюється цим тілом.

5.292. З якою швидкістю віддаляється від Сонячної системи квазар Q-0051-279, якщо відносна зміна довжини хвилі в його спектрі $Z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0 = 4,43$?

5.293. Експериментатор реєструє випромінювання, яке випускається пучком іонів у газорозрядній трубці. Іони в пучку рухаються з однаковими швидкостями $v = 2 \cdot 10^6$ м/с. Якою буде пов'язана з ефектом Доплера відносна зміна $\Delta v/v_0$ частоти випромінювання, якщо спостереження ведеться: а) у зустрічному відносно швидкості іонів напрямі; б) у напрямі, перпендикулярному до напрямку руху іонів?

5.294. Радіолокатор визначає швидкість наближення літака за частотою биття між частотою сигналу передавача і частотою відбитого від літака сигналу. На якій довжині хвилі λ_0 працює радіолокатор, якщо літак, що наближується зі швидкістю $v = 800$ км/год, спричиняє частоту биття $\Delta v = 400$ Гц?

Нелінійна оптика

5.295. Порівняти напруженості E електричного поля в пучках світла від нелазерних джерел з напруженостями полів у інтенсивних лазерних пучках.

5.296. Які фізичні фактори спричиняють виникнення нелінійних оптичних ефектів? У чому полягають такі ефекти?

5.297. Розглянути дію електричного поля напруженістю $E = E_0 \cos(\omega t - kz)$ світлової хвилі на відокремлений атом, оптичний електрон в якому вважається осцилятором з власною частотою ω_0 . Зв'язати поляризованість P речовини, що складається з таких атомів, з напруженістю E електричного поля світлової хвилі. Показати, що при дії сильного світлового поля поляризованість містить нелінійні члени, які змінюються з подвійною частотою 2ω .

5.298. Як можна перетворити інфрачервоне випромінювання у видиме світло або в ультрафіолетове випромінювання?

5.299. Яка умова має виконуватись для ефективної передачі енергії сильного світлового пучка до другої гармоніки, і в яких середовищах це здійснюється?

Ефект Вавилова – Черенкова

5.300. Якою має бути найменша швидкість V електрона, щоб у речовині, показник заломлення якої $n = 1,5$, виникало випромінювання Вавилова – Черенкова?

5.301. Обчислити кут θ між напрямом швидкості електрона і напрямом поширення випромінювання Вавилова – Черенкова у склі, якщо швидкість електрона $V = 0,8 c$. Дисперсією середовища нехтувати.

5.302. Чи спостерігається випромінювання Вавилова – Черенкова під час поширення моноенергетичного пучка електронів зі швидкістю $V = 0,65 c$: а) в алмазі; б) склі; в) сірковуглєці? Дисперсією середовища нехтувати.

5.303. Пучок електронів, який пройшов прискорювальну різницю потенціалів $U = 5$ МВ, потрапив до сірковуглєцю. Чи буде при цьому спостерігатися випромінювання Вавилова – Черенкова? Дисперсією середовища нехтувати. Дати відповідь на запитання в разі руху пучка α -частинок.

Розділ 6. КВАНТОВА ТЕОРІЯ

6.1. КВАНТОВА ТЕОРІЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ. ФОТОНИ

Спектральна випромінювальна здатність тіла

$$r^*(\omega, T) = \frac{dR_e}{d\omega}, \quad (6.1.1)$$

де dR_e – внесок до випромінювальної здатності (енергетичної світності) тіла, який належить інтервалові циклічних частот $\omega, \omega + d\omega$.

Формула Планка

$$r(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}, \quad (6.1.2)$$

де $r(\omega, T)$ – спектральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла;

$h = \frac{h}{2\pi}$, тут h – стала Планка, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Зв'язок між спектральною випромінювальною здатністю та спектральною густиною енергії поля випромінювання абсолютно чорного тіла:

$$r(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T), \quad (6.1.3)$$

де $u(\omega, T)$ – спектральна густина енергії поля випромінювання абсолютно чорного тіла.

Закон Стефана – Больцмана

$$R_e = \sigma T^4, \quad (6.1.4)$$

де σ – стала Стефана – Больцмана, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м² · К⁴).

Закон зміщення Віна

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (6.1.5)$$

де $\lambda_{\max}$ – довжина хвилі, що відповідає максимумові функції $r(\lambda, T)$ (або $u(\lambda, T)$) за зміною λ ; b – стала закону зміщення Віна, $b = 2,89 \cdot 10^{-3}$ м · К.

Енергія фотона

$$\varepsilon = \hbar \omega. \quad (6.1.6)$$

Імпульс фотона

$$p = \hbar k, \quad p = \hbar \frac{\omega}{c}, \quad (6.1.7)$$

де k – хвильовий вектор електромагнітної хвилі.

Маса фотона

$$m = \frac{\hbar\omega}{c^2}. \quad (6.1.8)$$

Тиск світла у разі нормального падіння його на поверхню

$$p = \frac{I}{c}(1 + \rho), \quad (6.1.9)$$

де I – інтенсивність випромінювання, що падає на поверхню, $I = n\hbar\omega$, тут n – кількість фотонів, які щосекунди падають на одиницю площі поверхні; ρ – коефіцієнт відбиття випромінювання поверхнею.

Формула Ейнштейна для фотоефекту

$$\hbar\omega = A + T_{\max}, \quad (6.1.10)$$

де A – робота виходу електрона з металу; $T_{\max}$ – максимальна кінетична енергія фотоелектрона.

Червона межа фотоефекту

$$\omega_0 = A/\hbar, \lambda_0 = 2\pi\hbar c/A. \quad (6.1.11)$$

Зміна довжини хвилі фотона під час комптонівського розсіювання

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2(\theta/2), \quad (6.1.12)$$

де λ, λ' – довжини падаючої та розсіяної хвиль випромінювання; λ_c – комптонівська

довжина хвилі розсіювача, $\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{mc}$, тут m – його маса спокою; θ – кут розсіювання.

Теплове випромінювання

6.1. Чи існують у природі абсолютно чорні тіла? Чому одним з найкращих наближень до абсолютно чорного тіла буде малий отвір у замкненій порожнині? Чим пояснити, що в пляшці з посрібленими стійками вода нагрівається повільно, а в пляшці з чорного скла – значно швидше? В якій з пляшок нагріта вода охолоне скоріше?

6.2. Деяке тіло має червоний колір. Чи поглинає воно світлові хвилі, які відповідають червоному кольору? Яким кольором світитиметься це тіло, якщо його розжарити?

6.3. З віконця печі, площа поверхні якого $S = 8 \text{ см}^2$, випускається випромінювання потужністю $P = 20 \text{ Вт}$. Розглядаючи це віконце як абсолютно чорне тіло, визначити температуру печі T .

6.4. Нагріта куля радіуса $R = 5 \text{ см}$ випускає випромінювання потужністю $P = 1 \text{ кВт}$. Визначити температуру кулі T , розглядаючи її як сіре тіло, поглинальна здатність якого $a = 0,25$.

6.5. Визначити поглинальну здатність α сірого тіла, яке з поверхні площею $S = 10^{-2} \text{ м}^2$ при температурі $T = 2 \cdot 10^3 \text{ К}$ за час $t = 2 \text{ хв}$ випускає випромінювання енергією $E = 1,34 \text{ кДж}$.

6.6. Вважаючи, що Земля та Сонце – абсолютно чорні тіла, а інших джерел теплоти немає, визначити середню температуру T_3 поверхні Землі. Для середньої температури поверхні Сонця прийняти $T_c = 5800 \text{ К}$.

6.7. Куля радіуса $R = 10 \text{ см}$ при температурі $T = 200 \text{ К}$ випускає випромінювання потужністю $P = 10 \text{ Вт}$. Чи є ця куля абсолютно чорним тілом?

6.8. Визначити довжину хвилі λ_{max} , яка відповідає максимумові спектральної випромінювальної здатності волоска лампи розжарювання, площа поверхні якого $S = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$. Потужність, яка споживається лампою, $P = 25 \text{ Вт}$. Вважати, що волосок лампи є сірим тілом, поглинальна здатність якого $\alpha = 0,3$; внаслідок теплопровідності іншим тілам передається частка $\eta = 0,2$ від енергії, яка споживається лампою.

6.9. Вважаючи Сонце абсолютно чорним тілом з максимумом спектральної випромінювальної здатності при $\lambda_{\text{max}} = 0,5 \text{ мкм}$, визначити: масу Δm , яку втрачає Сонце протягом року внаслідок випромінювання; енергетичну світність Сонця R_e ; потік енергії Φ , що випромінюється Сонцем; середню інтенсивність сонячного випромінювання I на поверхні Землі.

6.10. Максимум спектральної випромінювальної здатності залізної кулі діаметра $d = 10 \text{ см}$, яка вважається абсолютно чорним тілом, припадає на довжину хвилі $\lambda_{\text{max}} = 1,6 \text{ мкм}$. Визначити температуру T тіла через $t = 2 \text{ с}$ з початку охолодження, якщо крім випромінювання інших механізмів втрати теплоти немає.

6.11. У замкненій порожнині із дзеркальними стінками містяться поле випромінювання і електрон. Чи буде це випромінювання мати рівноважний характер і, якщо так, то чи буде в порожнині спектральна густина енергії рівноважного випромінювання визначатися формулами (6.1.2) і (6.1.3)?

Фотони. Тиск світла

6.12. Визначити довжину хвилі λ фотона, маса якого дорівнює масі m_e спокою електрона, а також масу m фотона, для якого довжина хвилі $\lambda_1 = 2 \text{ пм}$.

6.13. Зазнаючи зіткнення із дзеркальною поверхнею під кутом з нормаллю до неї $\theta = 60^\circ$, фотон передає їй імпульс $p = 3 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. Чому дорівнює маса кванта m ?

6.14. Чому дорівнює густина потоку n фотонів у рентгенівському випромінюванні, частота якого $\nu = 5 \cdot 10^{16}$ Гц та інтенсивність $I = 33$ мВт/м²?

6.15. Масу спокою m_0 фотона вважають такою, що дорівнює нулеві. Яке фізичне тлумачення має цей факт?

6.16. Лазер, що працює в неперервному режимі, випускає монохроматичне випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda = 692,7$ нм. Потужність лазера $P = 40$ мВт. Скільки фотонів N він випромінює щосекунди?

6.17. Лампа випромінює рівномірно у всіх напрямках монохроматичне світло, довжина хвилі якого $\lambda = 589$ нм. Потужність випромінювання $P = 100$ Вт. Чому дорівнює середня густина потоку n фотонів на відстані $l = 2$ м від лампи?

6.18. Довести, що електрон, який рухається вільно у вакуумі, не випромінює і не поглинає фотонів.

В к а з і в к а. Скористатися законами збереження енергії й імпульсу та показати, що зазначені процеси не відповідають цим законам.

6.19. Яка з поверхонь – чорна чи дзеркальна – зазнає більшого тиску з боку світла? Чому? Чи залежить тиск монохроматичного світла від його частоти?

6.20. На поверхню нормально падає монохроматичне випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda = 638$ нм і густина потоку $n = 10^{20}$ м⁻² · с⁻¹. Коефіцієнт відбиття поверхні $\rho = 0,8$. Визначити тиск світла p на цю поверхню.

6.21. На плоске дзеркало нормально падає випромінювання від CO₂-лазера ($\lambda = 10,6$ нм), яке тисне на поверхню з силою $F = 0,1$ нН. Визначити кількість фотонів N , що падають щосекунди на дзеркало.

Фотоефект

6.22. Визначити найбільшу довжину хвилі випромінювання λ_0 , при якій має місце фотоефект у цезії, натрії, платині та цинку, а також максимальні швидкості $v_{\max}$ фотоелектронів, випущених з поверхонь цих металів під дією випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda = 190$ нм. Які з цих матеріалів можна використати у фотоелементах для видимої частини спектра?

6.23. Визначити максимальну кінетичну енергію електрона $T_{\max}$, випущеного молібденовою пластинкою під дією випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda = 100$ нм. Порівняти цю енергію із середньою енергією теплового руху $\langle E \rangle$ електронів при температурі $T = 300$ К.

6.24. У разі опромінювання металу γ -квантами з нього вилітають фотоелектрони з максимальною швидкістю $v_{\max} = 290$ Мм/с. Визначити енергію квантів ϵ , їх імпульс p та масу m .

6.25. Визначити максимальну швидкість $v_{\max}$ фотоелектронів, які вилетіли з металу під дією: а) γ -випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda = 0,3$ нм; б) випромінювання, енергія квантів якого $\epsilon = 1,53$ МеВ.

6.26. Послідовно з вакуумним фотоелементом включено резистор опором $R = 1$ кОм. На катод фотоелемента падає випромінювання, потужність якого $P = 1$ Вт і частота $\omega = 10^{16}$ с $^{-1}$. Вважаючи, що вихід фотоелекту (відношення кількості електронів, що вилетіли з металу, до кількості фотонів, які падають на метал) $\eta = 0,25$, визначити кількість теплоти Q , що виділяється за $t = 2$ хв у резисторі.

6.27. На вольфрамову пластинку падає моноенергетичний пучок фотонів, довжина хвилі яких $\lambda = 270$ нм. Визначити імпульс Δp , який передається пластинці при поглинанні фотона з пучка, якщо при цьому пластинка випускає електрон під прямим кутом до напрямку руху фотона. Вважати, що швидкість електрона становить 0,5 від максимальної.

6.28. На металеву пластинку, що приєднана до електрометра, падає рентгенівське випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda = 20$ нм. До якого потенціалу ϕ зарядиться пластинка?

6.29. Електрони, які випускаються металом під дією випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda_1 = 136$ нм, затримуються напругою $U_1 = 6,6$ В, а ті, що випускаються під дією випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda_2 = 65,2$ нм, – напругою $U_2 = 16,5$ В. Визначити за цими даними сталу Планка h та роботу виходу A для цього металу. Чим пояснюється зростання затримувальної напруги зі зменшенням довжини хвилі випромінювання, під дією якого метал випускає електрони?

Ефект Комптона

6.30. Ефект Комптона спостерігається під час розсіяння фотонів на електронах, які вважаються вільними. Які електрони в речовині можна вважати вільними? Чому ефект Комптона не спостерігається у разі проходження видимого світла крізь речовину?

6.31. Пояснити такі особливості комптонівського розсіяння в речовині: а) збільшення інтенсивності зміщеної компоненти зі зменшенням атомного номера речовини та зі збільшенням кута розсіяння; б) незалежність зміни $\Delta\lambda$ довжини розсіяної хвилі від природи розсіювальної речовини.

6.32. Порівняти найбільші комптонівські зміни $\Delta\lambda_{\max}$ довжини хвилі при розсіянні фотонів на вільних електронах та протонах.

6.33. Рентгенівське випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda = 5$ пм, падає на речовину. Визначити довжини хвиль λ'_1 , λ'_2 квантів, розсіяних у цій речовині вільними електронами під кутами $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = 180^\circ$, а також кінетичну енергію T_1 , T_2 , повну енергію E_1 , E_2 та імпульс p_1 , p_2 електрона віддачі.

6.34. Обчислити комптонівське зміщення довжини хвилі $\Delta\lambda$ та кут розсіяння θ фотона, початкова довжина хвилі якого $\lambda = 3$ пм, а швидкість електрона віддачі $v = 0,6$ с. До розсіяння електрон перебував у стані спокою.

6.35. Встановити залежність кута розсіяння фотона θ від кута ϕ між напрямом руху електрона віддачі і напрямом руху падаючого фотона.

6.2. КОРПУСКУЛЯРНО-ХВИЛЬОВИЙ ДУАЛІЗМ. КВАНТОВИЙ СТАН

Зв'язок довжини хвилі де Бройля λ частинки з її імпульсом p :

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (6.2.1)$$

Співвідношення невизначеностей для координат та імпульсів

$$|\Delta x| \cdot |\Delta p_x| \geq \hbar. \quad (6.2.2)$$

де Δx – невизначеність координати x ; Δp_x – невизначеність відповідної їй проекції імпульсу; $\hbar = h / (2\pi)$.

Співвідношення невизначеностей для енергії та часу

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar, \quad (6.2.3)$$

де ΔE – невизначеність енергії квантового стану; Δt – час життя системи у цьому стані.

Імовірнісне тлумачення хвильової функції

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (6.2.4)$$

де $\rho(\mathbf{r}, t)$ – густина ймовірності перебування частинки в різних точках простору; Ψ^* – функція, комплексно-спряжена з хвильовою функцією Ψ .

Імовірність перебування частинки в момент часу t в об'ємі dV , який оточує точку з радіусом-вектором $\mathbf{r}$,

$$dw = \rho(\mathbf{r}, t) dV. \quad (6.2.5)$$

Нормування хвильової функції

$$\int |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV = 1. \quad (6.2.6)$$

Хвильова функція, що відповідає станів з визначеним імпульсом,

$$\Psi_p(r, t) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(pr - Et)}, \quad (6.2.7)$$

де p – імпульс, а E – енергія частинки.

Корпускулярно-хвильовий дуалізм. Хвилі де Бройля

6.36. Встановити відношення довжин хвиль де Бройля λ_e/λ_p для електрона та протона, прискорених однаковою різницею потенціалів.

6.37. У чому полягає принцип дії електронного, протонного та іонного мікроскопів? Який з них має більшу роздільну здатність за умови проходження частинками однакової прискорювальної різниці потенціалів?

6.38. Визначити дебройлівську довжину хвилі λ : а) вільного електрона, що рухається зі швидкістю $v_1 = 10^6$ м/с; б) електрона в телевізійному кінескопі, анодна напруга в якому $U = 29$ кВ; в) атома водню, що рухається зі швидкістю, яка дорівнює найімовірнішій швидкості для температури $T = 300$ К; г) кульки, що рухається зі швидкістю $v_2 = 1$ м/с, а її маса $m = 1$ г.

6.39. Нейтрон, дебройлівська довжина хвилі якого $\lambda = 1,8$ пм, дифундує у сповільнювачі, розсіявся на частинці, що перебувала в стані спокою і мала масу спокою в $n = 4$ рази більшу від маси нейтрона. Визначити дебройлівську довжину хвилі нейтрона λ' після розсіяння.

6.40. Паралельний пучок моноенергетичних електронів нормально падає на діафрагму з вузькою прямокутною щілиною завширшки $b = 10$ мкм. Обчислити швидкість v цих електронів, якщо відомо, що кутова ширина центрального дифракційного максимуму $\Delta\varphi = 0,1^\circ$.

6.41. Пучок електронів пройшов прискорювальну різницю потенціалів $U = 2$ кВ. Визначити кількість дифракційних максимумів n , що виникне під час інтерференційного відбивання пучка таких електронів від поверхні кристалу, для якого стала ґраток $d = 0,3$ нм.

6.42. Моноенергетичний пучок електронів падає на перешкоду з двома вузькими паралельними щілинами, відстань між якими $d = 2$ мкм. Кінетична енергія електрона $T = 25$ еВ. Визначити ширину інтерференційних смуг Δx на люмінесцентному екрані, який розміщено на відстані $l = 0,5$ м від перешкоди.

6.43. Встановити вирази для фазової v та групової u швидкостей хвилі де Бройля, яка описує вільну нерелятивістську частинку. Який з цих виразів збігається зі швидкістю частинки в ньютонівській механіці? Записати також вирази для фазової v та групової u швидкостей хвилі де Бройля

релятивістської частинки. Порівняти фазову швидкість v релятивістської частинки зі швидкістю світла у вакуумі. Чи суперечить одержаний результат твердженню про граничний характер швидкості світла?

Співвідношення невизначеностей

6.44. Координату x частинки, яка вільно рухається, можна визначити, якщо поставити на шляху частинки перпендикулярно до її руху вузьку щілину. Довести, що вимірювання координати частинки за допомогою щілини завширшки b вносить у відповідну проекцію імпульсу невизначеність $|\Delta p_x| > \hbar/b$.

6.45. Електрон, кінетична енергія якого $T = 4$ еВ, локалізований в області розміром $l = 1$ мкм. Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей відносну невизначеність його швидкості.

6.46. Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити швидкість протона v_p в атомному ядрі та довести, що в ядрі не може бути електронів. Вважати, що розмір ядра $r_{\text{я}} = 5 \cdot 10^{-15}$ м.

6.47. Частинки, маса яких $m = 10^{-11}$ г, перебувають у повітрі в стані теплової рівноваги. Вважається, що частинки мають сферичну форму, а повітря перебуває за нормальних умов. Густина речовини, з якої складаються частинки, $\rho = 1,5 \cdot 10^3$ кг/м³. Чи можна встановити, спостерігаючи за рухом частинок, відхилення від законів класичної механіки?

6.48. Слід від пучка електронів на екрані електронно-променевої трубки має діаметр $d = 0,5$ мм, відстань від електронної гармати до екрана $l = 20$ см, прискорювальна напруга $U = 10$ кВ. За допомогою співвідношення невизначеностей оцінити невизначеність координати електрона Δx на екрані.

6.49. Чи існують у природі такі стани квантової системи, в яких її кінетична та потенціальна енергії були б визначені водночас?

6.50. Використовуючи співвідношення невизначеностей для енергії та часу, обчислити ширину енергетичного рівня ΔE атома водню, час життя якого $\tau = 10^{-8}$ с, якщо він перебуває в збудженому стані; обчислити також час життя τ_1 системи, для якої ширина енергетичного рівня $\Delta E_1 = 10$ еВ.

6.51. Встановити відносну невизначеність енергії $\Delta E/E$ для збудженого рівня ядра ^{57}Fe , якому відповідає енергія $E = 14$ кеВ, а час життя $\tau = 0,1$ мкс, та порівняти її з відповідним значенням для першого збудженого стану атома водню, вважаючи, що час життя атома в цьому стані $\tau_1 = 10$ нс.

6.52. Чи можуть виконуватися такі нерівності: а) $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 > 1$; б) $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV > 1$? (Тут dV – малий об'єм, який оточує точку з радіусом-вектором $\mathbf{r}$.)

6.53. У класичній фізиці інтенсивність хвилі визначається її амплітудою. Чи є у квантовій фізиці будь-який зв'язок між енергією частинки та інтенсивністю її хвилі де Бройля? Чи можна виміряти хвильову функцію мікрочастинки в досліді?

6.54. Які з наведених нижче співвідношень задовольняє хвильова функція атомного електрона:

$$\text{а) } \int_V |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV < 1; \quad \text{б) } \int_{V_0} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV = 1;$$

$$\text{в) } \int_{V_0} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV < 1; \quad \text{г) } \int_V |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV = 1,$$

де V – об'єм усього простору; V_0 – об'єм атома? Чи задовольняє хвильова функція вільної частинки умову (6.2.6)?

6.3. РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА

Часове рівняння Шредінгера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(\mathbf{r}, t) \Psi, \quad (6.3.1)$$

де Δ – оператор Лапласа; $\Psi(\mathbf{r}, t)$ – повна хвильова функція; $U(\mathbf{r}, t)$ – потенціальна енергія частинки в силовому полі.

Загальний розв'язок часового рівняння Шредінгера:

а) дискретний енергетичний спектр

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} \psi_n(\mathbf{r}), \quad (6.3.2)$$

де E_n – енергія стаціонарних станів, кожен з яких визначається сукупністю квантових чисел n , за якими виконується підсумовування;

б) неперервний енергетичний спектр

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_{E_1}^{E_2} c(E) \psi(E, \mathbf{r}) e^{-i \frac{Et}{\hbar}} dE, \quad (6.3.3)$$

числа c_n та функція $c(E)$ задовольняють умови нормування

$$\sum_n |c_n|^2 = 1, \quad \int_{E_1}^{E_2} |c(E)|^2 dE = 1. \quad (6.3.4)$$

Стационарне рівняння Шредінгера

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U(r))\psi = 0, \quad (6.3.5)$$

де E – енергія стаціонарного стану, якому відповідає функція ψ .

Хвильова функція стаціонарного стану

$$\Psi(r, t) = \psi(r) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}. \quad (6.3.6)$$

Квантові числа, що характеризують стан електрона в центрально-симетричному полі: n – головне, l – орбітальне (або j – внутрішнє), m – магнітне, m_s – спінове магнітне.

Енергія воднеподібного іона

$$E_n = -\frac{\mu(Ze^2)^2}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2}, \quad (6.3.7)$$

де Z – зарядове число ядра атома.

Формула Бальмера

$$1/\lambda = RZ^2(1/n^2 - 1/n'^2), \quad (6.3.8)$$

де R – стала Рідберга для воднеподібної системи, $R = R_\infty \mu/m_e$, тут R_∞ – стала Рідберга у випадку нескінченної маси ядра, $R_\infty = 10\,973\,731,53 \text{ м}^{-1}$; μ – зведена маса іона, $\mu = m_e M_\text{я} / (m_e + M_\text{я})$; $n \in \mathbb{N}$, $n' = 2, 3, \dots$ Стани з однаковими n та l називають еквівалентними.

Середнє значення функції координат $F(r)$

$$\langle F \rangle = \int_V |\psi(r)|^2 F(r) dV, \quad (6.3.9)$$

де ψ – хвильова функція, нормована згідно з умовою (6.2.6).

Коефіцієнт прозорості потенціального бар'єра довільної форми

$$D = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U - E)} dx\right), \quad (6.3.10)$$

де x_1, x_2 – координати меж бар'єра (точки повороту).

Коефіцієнт прозорості прямокутного бар'єра

$$D = \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m(U-E)}l}{\hbar}\right), \quad (6.3.11)$$

де l – ширина бар'єра.

Зв'язок коефіцієнтів прозорості та відбиття:

$$D + R = 1. \quad (6.3.12)$$

Часове рівняння Шредінгера.

Стационарне рівняння

6.55. Яку роль відіграє часове рівняння Шредінгера у квантовій механіці порівняно з другим законом Ньютона в класичній? Яку додаткову інформацію слід мати для того, щоб за допомогою цього рівняння визначити хвильову функцію частинки в будь-який момент часу?

6.56. Довести, що у випадку, коли функція $U(\mathbf{r}, t)$ не залежить від часу, розв'язку рівняння (6.3.1) можна надати вигляду $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})T(t)$, де $T(t)$ – функція, яка є періодичною за часом.

6.57. Підстановкою до рівняння (6.3.1) для вільної частинки ($U=0$) наведених нижче виразів довести, що воно має розв'язки у вигляді:

а) плоскої хвилі $\Psi(\mathbf{r}, t) = A_1 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$; б) сферичної хвилі $\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{A_2}{r} e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$, де A_1, A_2 – сталі. Чи описують ці розв'язки стаціонарні стани?

6.58. Чи існують такі розв'язки класичного хвильового рівняння

$\Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$, які не задовольняють часове рівняння Шредінгера (6.3.1)?

6.59. Чи може стан вільної частинки описуватися плоскою хвилею вигляду $\Psi(\mathbf{r}, t) = A \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha)$, де A – стала?

6.60. Чи описує хвильова функція, що визначається співвідношенням (6.3.2), будь-який стаціонарний стан? Чи залежить від часу густина ймовірності перебування деякої квантово-механічної системи у визначеному стаціонарному стані?

6.61. Як за допомогою рівняння (6.3.5) визначити значення енергії стаціонарних станів квантово-механічної системи?

Вільна частинка

6.62. Визначити розв'язки рівняння (6.3.5) для вільної частинки ($U=0$) з визначеним імпульсом. Що можна сказати про можливість локалізації цієї частинки в деякій області простору? Чи можна відповісти на поставлене запитання, не звертаючись до рівняння Шредингера?

6.63. Довжина хвилі де Бройля, що описує вільний електрон, $\lambda = 2 \cdot 10^{-10}$ м. Визначити частоту ν цієї хвилі і енергію E частинки.

6.64. Який характер має енергетичний спектр вільної частинки – неперервний чи дискретний? Що нового порівняно з класичним дає квантове описання вільної частинки?

Частинка в нескінченно глибокій прямокутній потенціальній ямі

6.65. Частинка масою m перебуває в одновимірній прямокутній нескінченній потенціальній ямі ($0 \leq x \leq a$). Як змінюється віддаль між сусідніми енергетичними рівнями частинки $\Delta E_{n,n+1}$ зі збільшенням: а) ширини a ями; б) маси m частинки? Встановити відношення $\Delta E_{n,n+1}/E_n$ за умови $n=1$, $n=10$, порівняти їх та зробити висновок щодо можливості переходу до класичної границі.

6.66. Розглядаючи приблизно ядро та атом як одновимірну прямокутну нескінченну потенціальну яму ($0 \leq x \leq a$) для електронів і нуклонів, обчислити віддаль між основним і першим збудженим рівнем в атомі $\Delta E_{a1,2}$ та ядрі $\Delta E_{\text{я}1,2}$, вважаючи, що для атома ширина ями $a_a = 5 \cdot 10^{-10}$ м, а для ядра $a_{\text{я}} = 5 \cdot 10^{-15}$ м.

6.67. Частинка перебуває в основному стані, якому відповідає енергія $E_1 = 8,35$ МеВ, в одновимірній прямокутній нескінченній потенціальній ямі ($0 \leq x \leq a$). Ширина ями $a = 5 \cdot 10^{-15}$ м. Визначити масу m частинки.

6.68. Під час переходу електрона з першого збудженого стану до основного в одновимірній прямокутній нескінченній потенціальній ямі ($0 \leq x \leq a$) випускається випромінювання, циклічна частота якого $\omega = 5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Чому дорівнює ширина a ями?

6.69. Частинка в одновимірній прямокутній нескінченній потенціальній ямі ($0 \leq x \leq a$) перебуває в основному стані. Чому дорівнює

ймовірність перебування частинки w_1 в середній третині та частинки w_2 в крайній третині цієї ями?

6.70. Встановити енергетичний спектр та хвильові функції частинки, яка перебуває в одновимірній прямокутній нескінченній потенціальній ямі $\left(-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}\right)$.

6.71. Електрон міститься у двовимірній прямокутній нескінченній потенціальній ямі зі сторонами l_1 і l_2 ($0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$). Визначити можливі значення енергії цього електрона в основному стані та двох перших збуджених станах, якщо $l_1 = 1,5 \cdot 10^{-10}$ м, $l_2 = 2 \cdot 10^{-10}$ м.

**Частинка в центрально-симетричному полі.
Атом водню та воднеподібні іони**

6.72. Частинка міститься у сферичній порожнині радіуса a , оточеній абсолютно непроникними стінками. Встановити можливі значення енергії E_n цієї частинки, яким відповідають розв'язки рівняння Шредінгера, що мають центральну симетрію, та відповідні до них хвильові функції.

6.73. Хвильова функція електрона в атомі водню, який перебуває в основному стані, має вигляд $\psi(r) = A e^{-\frac{r}{a_0}}$, де A , a_0 – сталі. Користуючись стаціонарним рівнянням Шредінгера для атома водню, визначити сталі A , a_0 та енергію E_0 основного стану атома. Визначити також середню $\langle r \rangle$, середньоквадратичну $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ та найбільш імовірну r_1 відстані електрона від центра атома в цьому стані.

6.74. Хвильова функція електрона в основному стані атома водню має вигляд $\psi(r) = A e^{-\frac{r}{a_0}}$, де $a_0 = 52,9$ пм. Обчислити середнє значення потенціальної енергії $\langle U \rangle$ електрона в цьому стані. Чи має місце в даному разі рівність $\langle U \rangle = U(\langle r \rangle)$?

6.75. Атом водню перебуває в основному стані, в якому хвильова функція електрона $\psi(r) = A e^{-\frac{r}{a_0}}$, де $a_0 = 52,9$ пм. Встановити ймовірність w_1 перебування електрона в області $E > U(r)$ (класичний об'єм атома) у цьому стані, а також ймовірність w_2 перебування його поза цим об'ємом.

6.76. Визначити енергію іонізації U_i атома водню, якщо він перебуває в стані: а) основному; б) першому збудженому; в) другому збудженому. Обчислити також циклічні частоти ω електромагнітного випромінювання, які належать до видимої частини спектра атома водню.

6.77. Яку швидкість v матиме внаслідок віддачі атом водню у разі випускання випромінювання, зумовленого переходом атома з першого збудженого стану до основного?

6.78. Світловий квант падає на атом водню, який перебуває в першому збудженому стані, і вибиває з нього електрон, кінетична енергія якого $T = 3,22$ еВ. Чому дорівнює довжина хвилі λ , що відповідає цьому квантові, якщо він поглинається атомом?

6.79. Максимальне значення проекції орбітального моменту імпульсу електрона на вісь Oz для деякого стаціонарного стану $M_L = 2\hbar$. Чому дорівнює мінімальна енергія $E_{\min}$ атома в цьому стані?

6.80. Як змінюється різниця енергій $\Delta E_{n,n+1} = \Delta E_{n+1} - \Delta E_n$ сусідніх станів атома водню та воднеподібного іона зі зростанням головного квантового числа n ? Які висновки можна зробити звідси щодо переходу до класичної границі?

6.81. Визначити довжину хвилі λ випромінювання, яке випускається при переході двічі іонізованого атома літію з четвертого рівня на другий.

6.82. Чому дорівнюють перші борівські радіуси r іонів He^+ та Li^{++} ?

6.83. Сталі Рідберга для водню та гелію дорівнюють відповідно $R_H = 10\,967\,757,6 \text{ м}^{-1}$ і $R_{\text{He}} = 10\,972\,232,5 \text{ м}^{-1}$. Встановити відношення m_H/m_e та m_{He}/m_H , де m_H , m_{He} , m_e – маси відповідно протона, ядра гелію та електрона.

6.84. Деякий космічний об'єкт має воднеподібний спектр, довжини хвиль в якому в $\eta = 9$ разів коротші, ніж в атомарного водню. Якому елементові належить цей спектр?

Гармонічний осцилятор

6.85. Математичний маятник, довжина якого $l = 9,8$ см і маса $m = 1$ г; здійснює гармонічні коливання, амплітуда коливань $A = 1$ мм. Якому збудженому енергетичному рівневі n у квантовому тлумаченні відповідають ці коливання? Чи доцільно розглядати ці коливання з погляду квантової механіки?

6.86. Гармонічний осцилятор перебуває в стані, головне квантове число якого $n=3$. Маса осцилятора $m = 9 \cdot 10^{-31}$ кг, циклічна частота коливань $\omega_0 = 3 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Яка класична амплітуда A коливань відповідає цьому станові?

6.87. Хвильові функції гармонічного осцилятора в основному та першому збудженому станах мають вигляд $\psi_0(x) = A_0 e^{\alpha x^2}$ та $\psi_1(x) = A_1 x e^{\alpha x^2}$, де α, A_0, A_1 – сталі. Встановити значення енергій E_0 і E_1 , що відповідають цим станам, а також сталі α, A_0, A_1 .

6.88. Хвильові функції гармонічного осцилятора в основному та першому збудженому станах мають вигляд $\psi_0(x) = A_0 e^{\alpha x^2}$ та $\psi_1(x) = A_1 x e^{\alpha x^2}$. Обчислити середнє значення координати $\langle x \rangle$ гармонічного осцилятора у цих станах і порівняти його із середнім значенням $\langle x_{\text{кл}} \rangle$ координати цього осцилятора за період у класичному випадку. Обчислити також значення $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ та найбільш імовірне значення x_i для цих станів.

6.89. Хвильові функції гармонічного осцилятора в основному та першому збудженому станах мають вигляд $\psi_0(x) = A_0 e^{\alpha x^2}$ та $\psi_1(x) = A_1 x e^{\alpha x^2}$. Встановити середні значення потенціальної енергії $\langle U_0 \rangle$, $\langle U_1 \rangle$ гармонічного осцилятора в основному та першому збудженому станах. Чи дорівнюють вони середнім значенням кінетичної енергії $\langle T_0 \rangle$ та $\langle T_1 \rangle$ у цих станах? Чи має тут місце рівність $\langle U \rangle = U(\langle x \rangle)$?

6.90. Дослід показує, що інтенсивність розсіяного світла у разі проходження світла крізь кристал зі зниженням температури тіла спочатку зменшується, а потім залишається незмінною. Розглядаючи атоми у вузлах ґраток кристала як гармонічні осцилятори, пояснити це явище.

6.91. Оцінити частоту нульових коливань атомів у кристалічних ґратках, прийнявши для маси атома значення $m = 10^{-26}$ кг, а для амплітуди коливань – характерну міжатомну віддаль $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м.

Проходження мікрочастинок крізь потенціальний бар'єр

6.92. Для електрона з енергією E визначити: коефіцієнт прозорості D потенціального бар'єра завширшки l та заввишки U_0 , якщо бар'єр має вигляд, зображений: а) на рис. 6.1, а; б) на рис. 6.1, б; коефіцієнти прозорості D_1 , D_2 прямокутного бар'єра завширшки $l_1 = 0,1$ нм; $l_2 = 0,5$ нм (див. рис. 6.1, а), якщо різниця енергій $U_0 - E = 1$ еВ. Обчислити коефіцієнти відбиття R для прямокутного бар'єра, зображеного на рис. 6.1, а.

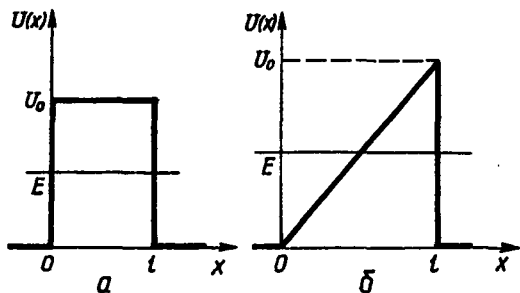


Рис. 6.1

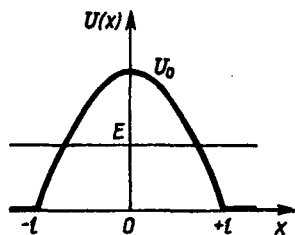


Рис. 6.2

6.93. Ширина прямокутного потенціального бар'єра $l = 0,5$ нм (рис. 6.1, а). Різниця енергій $U_0 - E = 0,8$ еВ. Як зміниться ймовірність проходження електрона крізь цей бар'єр, якщо різницю енергій збільшити в 9 разів?

6.94. Ядро емітує α -частинку, енергія якої $E = 5$ МеВ. Можна вважати, що ця частинка проходить крізь прямокутний потенціальний бар'єр заввишки $U_0 = 10$ МеВ та завширшки $l = 20$ фм. Визначити для цього бар'єра коефіцієнт прозорості D .

6.95. Вважаючи, що для електронів у металі $U_0 - E \approx 10^{-3}$ еВ (рис. 6.1, а), оцінити відстань l_0 , на якій густина ймовірності перебування електрона поза металом зменшується в e разів порівняно зі значенням цієї густини біля поверхні металу з внутрішньої частини (ця відстань називається глибиною проникнення).

6.96. Встановити коефіцієнт прозорості D потенціального бар'єра для частинки, маса якої m та енергія E , якщо потенціальна енергія частинки $U(x) = U_0 \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$, де U_0, l – сталі (рис. 6.2).

6.4. КВАНТУВАННЯ МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ. СПІН ЕЛЕКТРОНА. АТОМ

Квантування орбітального моменту імпульсу електрона

$$M_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad (6.4.1)$$

де l – орбітальне квантове число, $l = 0, 1, 2, \dots$

Квантування спінового моменту імпульсу (спіну) електрона

$$M_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}, \quad (6.4.2)$$

де s – спінове квантове число, $s = \frac{1}{2}$.

Просторове квантування орбітального моменту імпульсу електрона

$$M_{Lz} = m_l \hbar, \quad (6.4.3)$$

де m_l – магнітне квантове число, $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l$ (усього $2l + 1$ значень).

Просторове квантування спіну

$$M_{sz} = m_s \hbar, \quad (6.4.4)$$

де m_s – магнітне спінове квантове число, $m_s = \pm \frac{1}{2}$.

Квантовий закон додавання моментів

$$l = l_1 + l_2, \quad l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2|; \quad m_z = m_{z1} + m_{z2} + \dots, \quad (6.4.5)$$

де l_1, l_2 – числа, які визначають модулі моментів, що додаються, за формулами (6.4.1) та (6.4.2).

Квантування повного моменту імпульсу електрона

$$M_j = \hbar \sqrt{j(j+1)}, \quad (6.4.6)$$

де j – внутрішнє квантове число, $j = l + s, |l - s|$.

Просторове квантування повного моменту імпульсу електрона

$$M_{Jz} = m_j \hbar, \quad (6.4.7)$$

де m_j – магнітне внутрішнє квантове число.

Орбітальний магнітний момент електрона

$$\mu_l = \mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad (6.4.8)$$

де μ_B – магнетон Бора, $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 0,927 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл.

Просторове квантування орбітального магнітного моменту електрона

$$\mu_{Lz} = \mu_B m_l. \quad (6.4.9)$$

Спіновий магнітний момент електрона

$$\mu_s = 2\mu_B \sqrt{s(s+1)}. \quad (6.4.10)$$

Просторове квантування спінового магнітного моменту електрона

$$\mu_{sz} = 2\mu_B m_s. \quad (6.4.11)$$

Зв'язок між моментом імпульсу (механічним моментом) та магнітним моментом електрона (гіромагнітне відношення g):

для орбітальних моментів
$$\frac{\mu_l}{M_l} = -g_l = -\frac{1}{2} \frac{e}{m_e}; \quad (6.4.12)$$

для спінових моментів
$$\frac{\mu_s}{M_s} = -g_s = -\frac{e}{m_e}. \quad (6.4.13)$$

Принцип Паулі: дві тотожні частинки з півцілим спіном (ферміони) в одній системі не можуть водночас перебувати в одному й тому самому квантовому стані.

Позначення станів окремих електронів:

l	0	1	2	3	4
Символ	s	p	d	f	g

Повний орбітальний механічний момент атома

$$M_L = \hbar \sqrt{L(L+1)}, \quad (6.4.14)$$

де L – повне орбітальне квантове число.

Проекція повного орбітального механічного моменту атома на виділену вісь (вісь Oz)

$$M_{Lz} = m_L \hbar, \quad (6.4.15)$$

де m_L – магнітне квантове число атома, $-L \leq m_L \leq L$.

Повний спіновий механічний момент атома

$$M_S = \hbar \sqrt{S(S+1)}, \quad (6.4.16)$$

де S – повне спінове квантове число атома.

Проекція повного спінового механічного моменту атома на виділену вісь

$$M_{Sz} = m_S \hbar, \quad (6.4.17)$$

де m_S – повне спінове магнітне квантове число, $-S \leq m_S \leq S$.

Закон додавання механічних моментів для атома

$$J = L + S, L + S - 1, \dots |L - S|. \quad (6.4.18)$$

Повний механічний момент атома

$$M_J = \hbar \sqrt{J(J+1)}, \quad (6.4.19)$$

де J – повне внутрішнє квантове число атома.

Проекція повного механічного моменту атома на виділену вісь (вісь Oz)

$$M_{Jz} = m_J \hbar, \quad (6.4.20)$$

де m_J – повне внутрішнє магнітне квантове число, $-J \leq m_J \leq J$.

Спектральні позначення атомних термів: $^{\kappa}(L)_J$, де κ – мультиплетність, $\kappa = 2S + 1$; L, S, J – квантові числа атома:

L	0	1	2	3	4	5	6
Символ	S	P	D	F	G	H	I

Магнітний момент атома

$$\mu_J = -g\mu_B \sqrt{J(J+1)}. \quad (6.4.21)$$

Множник (фактор) Ланде для атома

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}. \quad (6.4.22)$$

Зєсманівське розщеплення енергетичних рівнів:

а) у слабкому магнітному полі (складний, або аномальний, ефект Зєсмана)

$$\Delta E = -g\mu_B m_J B, \quad (6.4.23)$$

B – індукція магнітного поля;

б) у сильному магнітному полі (простий, або нормальний, ефект Зєсмана)

$$\Delta E = -\mu_B (m_L + 2m_S) B. \quad (6.4.24)$$

Правила відбору квантових чисел при радіаційних переходах:

$$\Delta J = 0, \pm 1; \Delta L = 0, \pm 1; \Delta m_J = 0, \pm 1; \Delta S = 0; \quad (6.4.25)$$

якщо $\Delta J = 0$, то перехід $m_J = 0 \rightarrow m_J = 0$ не відбувається.

Короткохвильова межа рентгенівського випромінювання

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU}, \quad (6.4.26)$$

де U – різниця потенціалів, що пройдена частинкою.

Закон Мозлі

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (6.4.27)$$

де R – стала Рідберга; Z – заряд ядра; σ – стала екранування (для K -серії $\sigma = 0,97$);

$n \in N$; $m = 2, 3, \dots$

6.97. Чи може модуль орбітального моменту імпульсу M_l частинки дорівнювати нулеві?

6.98. Система складається з двох електронів, орбітальні квантові числа яких $l_1 = 1$ та $l_2 = 2$. Встановити можливі значення орбітального і магнітного m_l квантових чисел системи частинок.

6.99. Електрон у стані з орбітальним квантовим числом $l = 2$ перебуває в однорідному магнітному полі. Які кути α_i з напрямом напруженості поля може утворювати вектор магнітного моменту орбітального руху частинки? Встановити всі можливі значення повного механічного моменту M_j електрона та його проекції M_{jz} на виділену вісь.

6.100. Знайти відношення $\Delta M_{l,l+1}/M_l$, де $\Delta M_{l,l+1}$ – різниця між модулями орбітальних моментів імпульсів частинки, що відповідають сусіднім значенням орбітального квантового числа, та зробити висновок щодо можливості переходу до класичної границі. Чи можливий такий перехід для спінового моменту?

6.101. Чому дорівнює модуль спінового моменту M_s електрона. Яких значень може набувати спінове квантове число s системи з двома електронами?

6.102. Чому для дослідження спінових ефектів у досліді Штерна і Герлаха використовуються атоми елементів першої групи періодичної системи елементів Менделєєва в основному стані?

6.103. Порівняти модуль орбітального моменту імпульсу електрона M_l в центральній-симетричному полі, який відповідає фіксованому значенню квантового числа l , з максимальним значенням проекції цієї величини $M_{lz \max}$ на виділену вісь. Чому ці величини не дорівнюють одна одній?

Стан електронів в атомі. Багатоелектронні атоми

6.104. У збудженому атомі водню електрон перебуває у стані, орбітальне квантове число якого $l = 1$. Вказати можливі стани цього атома в позначеннях спектральних термів та встановити для цього атома можливі значення внутрішнього квантового числа.

6.105. Чому дорівнює мультиплетність χ будь-якого стану атома водню та воднеподібного іона? Чим пояснюється походження мультиплетності станів багатоелектронного атома? Навести електронні конфігурації атомів Li, N, Ne, Na, Ca в основних станах.

6.106. Атом перебуває у стані, для якого мультиплетність $\kappa = 3$, а повний механічний момент $M_J = \hbar\sqrt{20}$. Чому дорівнює відповідне квантове число L ?

6.107. Один із валентних електронів атома магнію перебуває в стані, для якого головне квантове число $n = 4$. Визначити найбільший повний механічний момент атома M_J , навести електронну конфігурацію та позначення спектрального терму атома, які відповідають встановленому моменту.

6.108. Довести, що будь-яка заповнена електронна оболонка атома не робить внеску до його повного моменту імпульсу.

В к а з і в к а. Скористатися принципом Паулі та квантовим законом додавання моментів (6.4.5), (6.4.18).

6.109. Чому дорівнює множник Ланде g : а) для будь-якого синглетного стану атома; б) будь-якого S -стану атома; в) $^2P_{3/2}$, $^2P_{1/2}$ -станів; г) 3P_1 , 3F_3 -станів?

6.110. Визначити магнітний момент μ_J атома у $^2D_{3/2}$ -, $^2P_{3/2}$ -станах.

6.111. Валентний електрон атома натрію перебуває в стані, для якого головне квантове число $n = 3$, маючи при цьому найбільший можливий у цьому стані магнітний момент μ_J . Чому він дорівнює?

6.112. Визначити повний механічний момент M_J атома в стані, в якому квантові числа повного спіну $S = 3/2$ та повного орбітального моменту $L = 2$, якщо магнітний момент атома $\mu_J = 0$.

6.113. Чому багатоелектронні атоми мають електронні оболонки, які забудовані не повністю?

Атом у магнітному полі. Ефект Зеемана

6.114. Для яких атомних станів спостерігається однакова картина розщеплення енергетичних рівнів атомів у сильному й слабкому магнітних полях? Для яких станів зееманівське розщеплення енергетичних рівнів атомів зумовлено наявністю тільки спінового моменту?

6.115. Чи має місце зееманівське розщеплення енергетичних рівнів для деякого D -стану атома?

6.116. Природне розщеплення рівня, що відповідає 2P -стану атома водню з $n = 2$, становить $\Delta E \approx 10^{-5}$ еВ. Порівняти енергію $\mu_B B$, що характеризує зееманівське розщеплення в магнітному полі, індукція якого $B = 10$ мТл, з природним розщепленням рівня. Який ефект Зеемана – простий чи складний – спостерігається при цьому?

6.117. На скільки рівнів розщеплюється рівень, що відповідає $^2P_{3/2}$ -стану атома натрію, в магнітному полі, індукція якого: а) $B = 5 \text{ Тл}$; б) $B = 0,5 \text{ Тл}$. Для 2P -стану слабким вважається поле, індукція якого $B < 4 \text{ Тл}$.

Рентгенівське випромінювання. Рентгенівські спектри

6.118. До рентгенівської трубки прикладено напругу $U = 40 \text{ кВ}$. Визначити короткохвильову межу $\lambda_{\min}$ суцільного спектра.

6.119. Використовуючи рентгенівську трубку напругою $U = 50 \text{ кВ}$, визначити сталу Планка h . Короткохвильова межа спектра $\lambda_{\min} = 24,8 \text{ пм}$.

6.120. Визначити максимальну швидкість електронів $v_{\max}$, що долітають до антикатада рентгенівської трубки, якщо короткохвильова межа рентгенівського спектра $\lambda_{\min} = 2 \text{ нм}$.

6.121. У рентгенівській трубці антикатод зроблений із ніобію. Визначити довжину хвилі λ та енергію кванта ϵ для K_{α} -лінії. За якої найменшої різниці потенціалів $U_{\min}$ збуджується K -серія?

6.122. Досліджуючи лінійчастий рентгенівський спектр деякого елемента, встановили, що довжина хвилі K_{α} -лінії становить $\lambda = 22 \text{ пм}$. Який це елемент?

6.123. Який спектр – оптичний чи рентгенівський – слід використати для визначення порядкового номера хімічного елемента в періодичній системі елементів Менделєєва?

6.6. МОЛЕКУЛА

Валентність хімічних елементів

$$z = 2S, \quad (6.5.1)$$

де S – спінове квантове число атома.

Обертальна енергія двохатомної молекули

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2I} r(r+1), \quad (6.5.2)$$

де I – момент інерції молекули відносно осі, що проходить через її центр інерції; r – ії обертальне квантове число, яке набуває значень 0, 1, 2, ...

Правила відбору при обертальних переходах:

$$\Delta r = 0, \pm 1. \quad (6.5.3)$$

Коливальна енергія двохатомної молекули

$$E_v = \hbar\omega\left(v + \frac{1}{2}\right), \quad (6.5.4)$$

де ω – власна частота малих коливань атомів у молекулі, $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$, тут k – коефіцієнт жорсткості молекули, μ – її зведена маса; ν – коливальне квантове число молекули.

Види хімічного зв'язку. Валентність

6.124. Які експериментальні факти свідчать про те, що утворення молекул відбувається завдяки взаємодії зовнішніх електронів атомів? Зобразити (приблизно) графік залежності потенціальної енергії міжатомної взаємодії від віддалі між атомами. Який фізичний зміст має віддаль, на якій ця енергія є найменшою?

6.125. У чому полягає механізм іонного та ковалентного зв'язків при утворенні молекул? Чи можна пояснити виникнення ковалентного зв'язку в молекулах класичним способом?

6.126. Енергія іонізації атома натрію $U_i = 5,1$ еВ, а електронна спорідненість для хлору (енергія, що виділяється під час утворення від'ємного іона хлору) $U_e = 3,8$ еВ. Потенціальна енергія системи іонів у деякому макроскопічному об'ємі кристала NaCl $U = -\frac{0,874 Ne^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$, де N – кількість

іонів обох знаків у даному об'ємі; r_0 – рівноважна віддаль між іонами натрію та хлору в кристалічних ґратках NaCl , $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-10}$ м. Яка енергія E виділяється під час утворення одного моля NaCl ?

6.127. Як напрямлені спінові моменти електронів у молекулі водню – паралельно чи антипаралельно один одному?

6.128. Визначити основну валентність z елементів другої групи (лужноземельні елементи) та пояснити механізм її виникнення. Чому елементи третьої групи можуть бути як одно-, так і тривалентними?

Обертальні стани двохатомних молекул

6.129. Молекула $^{200}\text{Hg}^{35}\text{Cl}$ емітує фотон, довжина хвилі якого $\lambda = 4,4$ см при обертовальному переході зі стану, в якому обертове квантове число $r = 1$, у стан $r = 0$. Визначити міжатомну віддаль r_0 цієї молекули.

6.130. Вважаючи, що молекула CO є жорсткою та маючи на увазі, що для обертового переходу $r = 0 \rightarrow r = 1$ з'являється лінія поглинання на частоті $\nu = 1,153 \cdot 10^{11}$ Гц, визначити момент інерції I цієї молекули та оцінити її розміри.

6.131. Обчислити енергії E , найнижчих чотирьох збуджених обертовальних енергетичних станів молекул водню H_2 та дейтерію D_2 . Вважати,

що віддаль між атомами водню та дейтерію у відповідній молекулі $r_0 = 7,4 \cdot 10^{-11}$ м.

6.132. Для молекули O_2 оберտальна енергія $E_r = 2,16$ меВ. Визначити момент імпульсу Λ цієї молекули відносно її осі симетрії, якщо міжатомна віддаль для неї $r_0 = 1,207 \cdot 10^{-10}$ м.

6.133. Обчислити температуру T , при якій величина kT дорівнює енергії переходів, що відповідають обертанню молекули H_2 навколо її осі симетрії. Прийняти, що міжатомна віддаль $r_0 = 7,4 \cdot 10^{-11}$ м.

Коливальні стани двохатомних молекул

6.134. Коефіцієнт жорсткості молекули HCl $k_1 = 516$ Н/м. Чи перебуватиме ця молекула в першому збудженому коливальному стані при кімнатній температурі?

6.135. Ядро дейтерію майже вдвічі перевищує за своєю масою ядро звичайного водню. Яка з молекул – H_2 чи HD – має більшу енергію коливань?

6.136. Вважаючи, що молекула H_2 поводить себе як гармонічний осцилятор, коефіцієнт жорсткості якого $k_1 = 516$ Н/м, визначити коливальне квантове число v , яке відповідає його енергії дисоціації $E_d = 4,5$ еВ.

6.137. Обчислити температуру T , при якій величина kT дорівнює енергії коливальних переходів молекули H_2 (коефіцієнт жорсткості молекули $k_1 = 516$ Н/м).

6.138. Коефіцієнт жорсткості k_1 молекули HF дорівнює 966 Н/м. Визначити енергію нульових коливань E_0 цієї молекули.

6.6. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ СТАТИСТИКИ

Середня кількість частинок, що припадає на один квантовий стан,

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{kT}} \pm 1}, \quad (6.6.1)$$

де ϵ_i – енергія i -го стану; μ – хімічний потенціал системи частинок; знак плюс відповідає статистиці Фермі – Дірака, знак мінус – статистиці Бозе – Ейнштейна.

Кількість комірок в елементі об'єму фазового простору однієї частинки у квантовій статистиці

$$d\Gamma = dV dV_p / h^3, \quad (6.6.2)$$

де dV_p – елемент об'єму в просторі імпульсів.

Кількість частинок в елементі об'єму фазового простору

$$dN = g \langle n \rangle d\Gamma, \quad (6.6.3)$$

де g – кратність виродження стану, $g = 2s + 1$, тут s – спин частинки.

Кількість частинок в об'ємі V з енергіями, що належать інтервалові ϵ , $\epsilon + d\epsilon$:

$$dN = \frac{gVm^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{kT}} \pm 1}. \quad (6.6.4)$$

Хімічний потенціал у випадку статистики Фермі – Дірака при $T = 0$ (енергія Фермі)

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}}{2m}, \quad (6.6.5)$$

де n – концентрація фермі-частинок.

Температура виродження ідеального фермі-газу

$$T_b = \frac{\epsilon_F}{k}. \quad (6.6.6)$$

Температура виродження ідеального бозе-газу

$$T_b = \frac{3,31\hbar^2 n^{\frac{2}{3}}}{g^{\frac{2}{3}}mk}. \quad (6.6.7)$$

Якщо температура системи $T > T_b$, газ неvirоджений, якщо $T \leq T_b$ – вироджений; якщо $T = 0$, то газ повністю вироджений.

Функція розподілу фермі-частинок за енергіями при $T = 0$

$$f(\epsilon) = \frac{3}{2}\epsilon_F \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_F} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.6.8)$$

Загальні відомості про квантову статистику

6.139. Якою статистикою описується система, що складається з таких частинок: а) електронів; б) фотонів; в) α -частинок; г) ядер дейтерію; д) атомів дейтерію; е) атомів водню?

6.140. У чому полягає зміст функції, що визначається рівністю (6.6.1)?

6.141. Довести, що для статистики Фермі – Дірака вираз (6.6.1) можна тлумачити як імовірність знаходження фермі-частинки в одній комірці фазового простору однієї частинки. Чи можна дати таке тлумачення для статистики Бозе – Ейнштейна?

6.142. Одержати нормовані квантові функції розподілу фермі- та бозе-частинок за енергіями, використовуючи вираз (6.6.4).

6.143. Користуючись співвідношенням невизначеностей для координат та імпульсів, для вільних частинок в об'ємі V навести вираз для об'єму Δv елементарної комірки у фазовому просторі однієї частинки та визначити кількість комірок $d\Gamma$ з частинками, імпульси яких належать інтервалові $p, p+dp$.

Статистика Фермі – Дірака

6.144. Визначити функцію розподілу вільних електронів за швидкостями $f(v)$ та відношення їх середньої швидкості $\langle v \rangle$ до максимальної $v_{\max}$ за умови, що $T = 0$ К.

6.145. Визначити при $T = 0$ К функцію розподілу вільних електронів у металі за дебройлівськими довжинами хвиль $f(\lambda)$, а також середню $\langle \lambda \rangle$ та середню квадратичну $\sqrt{\langle \lambda^2 \rangle}$ дебройлівські довжини хвилі.

6.146. Концентрація вільних електронів у міді $n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Чи буде електронний газ у міді виродженим при кімнатній температурі? При якій температурі T відбувається перехід від виродженого стану до невиродженого?

6.147. Скільки відсотків η вільних електронів у металі при $T = 0$ К мають кінетичну енергію, що перевищує половину максимальної?

6.148. Встановити кількість вільних електронів z , що припадає на один атом натрію при $T = 0$ К, якщо енергія Фермі для нього $\epsilon_F = 3,07$ еВ, а густина $\rho = 0,97 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

6.149. Класичний, або невироджений, газ за своїми властивостями тим ближче до ідеального, чим менша його густина, тобто чим більша віддаль між частинками в цьому газі. Чи буде це твердження слушним для виродженого електронного газу?

6.150. До якої температури T слід нагріти класичний електронний газ, щоб середня енергія $\langle \epsilon \rangle$ його електронів дорівнювала середній енергії вільних електронів у міді при $T = 0$ К? Вважати, що на кожний атом міді припадає один вільний електрон.

Статистика Бозе – Ейнштейна

6.151. Користуючись розподілом Бозе – Ейнштейна, довести, що хімічний потенціал газу, який складається з бозе-частинок, від'ємний або дорівнює нулеві.

6.152. Обчислити температуру виродження T_v для гелію, концентрація атомів в якому відповідає нормальним умовам, та для електронного газу в сріблі концентрацією $n = 6 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

6.153. Користуючись формулою Планка (6.1.2) для спектральної густини енергії поля рівноважного випромінювання, одержати вираз (6.6.1) для середньої кількості фотонів, що припадає на один квантовий стан. Чому дорівнює хімічний потенціал фотонного газу?

6.7. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ ЕЛЕКТРОНІКИ

Імовірність переходів квантової системи за одиницю часу між рівнем 1 та більш високим рівнем 2:

а) для спонтанного випромінювання

$$w_{21\text{сп}} = A_{21}, \quad (6.7.1)$$

де A_{21} – коефіцієнт Ейнштейна для спонтанного випромінювання;

б) для вимушеного монохроматичного випромінювання та поглинання

$$w_{21\text{вим}} = B_{21}u(\omega, T); \quad (6.7.2)$$

$$w_{12\text{погл}} = B_{12}u(\omega, T),$$

B_{21} , B_{12} – коефіцієнти Ейнштейна для вимушеного монохроматичного випромінювання та поглинання; $\omega_{21} = \omega_{12}$ – частоти переходу між рівнями; $u(\omega, T)$ – спектральна густина енергії поля випромінювання.

Зв'язок між коефіцієнтами Ейнштейна:

$$A_{21} = \frac{\hbar\omega_{21}^3}{\pi^2 c^3} B_{21}, \quad g_2 B_{21} = g_1 B_{12}, \quad (6.7.3)$$

де c – швидкість світла у вакуумі; g_1 , g_2 – кратність виродження відповідних рівнів.

Середній час життя системи у збудженому стані

$$\tau = \frac{1}{w}, \quad (6.7.4)$$

де w – імовірність переходу її з даного стану до основного.

Відношення заселеностей енергетичних рівнів

$$\frac{n_2(E)}{n_1(E)} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}}, \quad (6.7.5)$$

де $n_1(E)$, $n_2(E)$ – заселеності відповідних рівнів.

Закон Бугера

$$I = I_0 e^{-\alpha l}, \quad (6.7.6)$$

де I_0 – інтенсивність монохроматичного випромінювання, що входить у поглинальний шар; I – інтенсивність цього випромінювання після проходження шару речовини завтовшки l .

Спектральний коефіцієнт поглинання

$$\alpha = ch\omega(n_1/g_1 - n_2/g_2)B_{12}, \quad (6.7.7)$$

де c – стала; ω – циклічна частота випромінювання; n_1 , n_2 – заселеності рівнів енергії E_1 та E_2 .

Зв'язок між довжиною хвилі лазерного випромінювання та довжиною оптичного резонатора:

$$L = m \frac{\lambda}{2}, \quad (6.7.8)$$

де m – ціле число.

Частота змінного магнітного поля, при якій відбувається резонансне поглинання енергії частинкою, що міститься в сталому магнітному полі, індукція якого B_0 ,

$$\omega = g \frac{e}{2m} B_0, \quad (6.7.9)$$

де e – заряд частинки; m – її маса; g – множник Ланде частинки.

Спонтанне та вимушене випромінювання.

Коефіцієнти Ейнштейна

6.154. Перехід атомів водню до основного стану супроводжується випромінюванням, довжина хвилі якого $\lambda = 656,2$ нм. За який час t інтенсивність спонтанного випромінювання деякої маси водню зменшиться в $\eta = 2e$ разів? Як при цьому зміниться кількість збуджених атомів? Коефіцієнт Ейнштейна для даного переходу $A_{21} = 6,7 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$.

6.155. Атом ртуті спонтанно випускає випромінювання, довжина хвилі якого $\lambda = 253,7$ нм. Середній час перебування атома ртуті в збудженому стані $\tau = 9,8 \cdot 10^{-8}$ с. Визначити кількість N збуджених атомів ртуті, якщо потужність випромінювання $P = 25$ мВт.

6.156. Газоподібний літій, що містить $N = 3,0 \cdot 10^{16}$ атомів, має температуру $T = 1500$ К. Середній час життя атома літію в збудженому стані, вихід з якого супроводжується переходом $2p \rightarrow 2s$ з випромінюванням лінії $\lambda = 670,8$ нм, $\tau = 0,07$ мкс. Визначити потужність P випромінювання цієї лінії.

6.157. Довжина хвилі резонансної лінії літію λ для переходу $2p \rightarrow 2s$ дорівнює 670,8 нм. Встановити співвідношення кількості збуджених атомів газоподібного літію до кількості незбуджених при $T = 1500$ К.

6.158. Чи можна спостерігати інтерференцію випромінювання, джерелами якого є різні атоми, якщо вони випромінюють спонтанно?

6.159. Вважаючи відомими коефіцієнти Ейнштейна, вивести формулу (6.1.2) для спектральної густини енергії випромінювання абсолютно чорного тіла $\omega(\omega, T)$.

Оптичні квантові генератори та підсилювачі

6.160. Аміачний лазер – це пристрій для генерування електромагнітних хвиль міліметрового діапазону. Його дія ґрунтується на властивостях молекули аміаку NH_3 . Цю молекулу можна розглядати як тетраедр (рис. 6.3), у трьох

вершинах якого містяться атоми водню, а в одній – азоту. Припустимо, що молекула може тільки обертатися навколо осі симетрії і її коливання дуже слабкі. У цьому разі можна говорити про два стаціонарних стани молекули – атом водню може перебувати по різні сторони площини, яка містить атоми водню. Цим станам відповідають різні орієнтації електричного дипольного моменту молекули p_e . Як можна за допомогою зовнішнього електричного поля створити інверсну заселеність енергетичних рівнів аміачного лазера?

6.161. Чому лазерна генерація можлива тільки у квантових системах, які мають більше ніж два енергетичних рівні?

6.162. Яку роль у лазері відіграють дзеркала резонатора? За виконання якої умови у резонаторі відбудеться лазерна генерація?

6.163. Потужність випромінювання лазера сконцентровано в межах дуже вузької спектральної лінії. Чи має це місце у звичайних класичних джерелах випромінювання? Як змінюється монохроматичність лазерного випромінювання зі зростанням потужності накачування?

6.164. Для збільшення потужності лазерного випромінювання корис- ся методом модульованої добротності. У чому він полягає?

6.165. Які квантові переходи використовують у молекулярних CO_2 -лазерах?

6.166. Який лазер – твердотільний чи газовий – треба використати для одержання випромінювання, що має такі властивості: а) гостру напрям- леність, високий ступінь монохроматичності та стабільності частоти ви- промінювання; б) велику імпульсну потужність?

6.167. Світлодалекоміри виміряють відстані за часом проходження цих відстаней світлом. Для цього треба визначити швидкість світла v у середовищі, яка дорівнює c/n , де n – показник заломлення середовища. Пояснити, чому ви- користання лазерних світлодалекомірів значно підвищило точність вимірювання відстані.

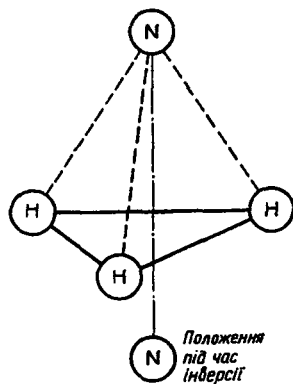


Рис. 6.3

6.168. Визначити різницю $\Delta\nu$ між сусідніми власними частотами резонатора у гелієво-нео- новому лазері з довжиною резонатора $L = 1$ м, та порівняти її з природною шириною спектральної лінії $\Delta\nu_{\text{пр}}$, яка зв'язана зі скінченням часом життя атома та молекули в збудженому стані.

6.169. Оцінити довжину когерентності l гелієво-неонового лазера, який генерує випро- мінювання з довжиною хвилі $\lambda = 632,8$ нм, якщо ця лінія має ширину $\Delta\nu = 10^6$ Гц.

Магнітний резонанс

6.170. У чому полягають явища: електронного спінового резонансу; електронного парамагнітного резонансу; ядерного магнітного резонансу? У чому полягає ідея використання методу магнітного резонансу для дослідження атомних та молекулярних структур?

6.171. У досліді Рабі (рис. 6.4) магніти A та C створюють неоднорідне поле з протилежними напрямками градієнтів полів. Проходячи крізь неоднорідне поле магніту A , частинка відхиляється так, що вона не може потрапити до приймача P . Це відхилення може компенсуватися полем магніту C , яке відхиляє частинку в протилежному напрямі. Завдяки цьому вона потрапляє до приймача, як це було б у разі руху вздовж прямої лінії. У просторі B прикладене додаткове постійне магнітне поле B_0 та слабе змінне поле B' , яке спроможне перекинути магнітний момент частинки. Внаслідок цього відхилення частинки у полі A не компенсуватиметься відхиленням у полі магніту C , тому частинки не потрапляють до приймача P . Частота змінного поля $\nu = 21,2$ МГц, спінове гіромагнітне співвідношення для протона становить $g_s = 2,79$. Обчислити за цими даними індукцію поля B_0 . Як слід змінити частоту поля B' у цьому досліді, щоб вона була резонансною для нейтрона, якщо для нього $g_s = 1,93$?

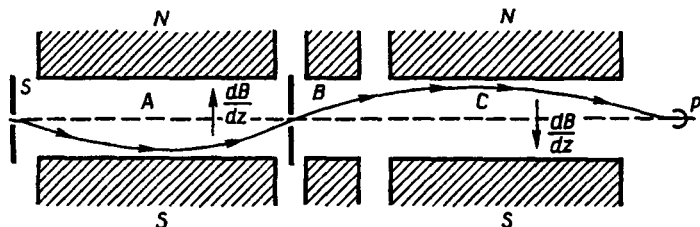


Рис. 6.4

6.172. Електрон міститься в сталому однорідному магнітному полі ($B = 1,5$ Тл). Визначити циклічну частоту ω змінного поля, при якій відбувається резонансне поглинання енергії електроном (для вільного електрона $g_s = 2$).

6.173. Ядерний магнітний резонанс для ядер ^{19}P спостерігається при частоті змінного поля $\omega = 6,1 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$. Чому дорівнює в цьому разі індукція сталого магнітного поля B_0 , якщо магнітний момент ядра $\mu = 2,63 \mu_N$

(μ_N – ядерний магнетон, $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$, тут m_p – маса протона)?

Розділ 7. ФІЗИКА КОНДЕНСОВАНОГО СТАНУ

7.1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КРИСТАЛІЧНИХ ҐРАТОК

Основні вектори кристалічних ґраток – $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, модулі цих векторів – періоди ідентичності ґраток.

Радіус-вектор будь-якого вузла кристалічних ґраток

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c}, \quad (7.1.1)$$

де m , n , p – цілі числа. Сукупність цих чисел називають індексом вузла і записують у вигляді $[[mnp]]$. Індекс напрямку записують у вигляді $[mnp]$; індекс напрямку збігається з індексом вузла, якщо лінія, що характеризує напрям, проходить через початок координат. Індеси площини (індекси Міллера) записують у вигляді (hkl) ; вони зв'язані з мінімальними відрізками, які відтинає площина на осях координат.

Молярний об'єм кристала

$$V_m = \frac{M}{\rho}, \quad (7.1.2)$$

де M – молярна маса речовини, ρ – її густина.

Об'єм елементарної комірки кристала у разі:

а) кубічної системи

$$V = a^3; \quad (7.1.3)$$

б) гексагональної системи

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{3}a^2c, \quad (7.1.3a)$$

де a і c – параметри кристалічних ґраток.

Кількість елементарних комірок в одному молі кристала

$$Z_m = \frac{V_m}{V}. \quad (7.1.4)$$

Загальні відомості про кристали та аморфні тіла

7.1. У чому полягає зміст термінів “далекий” та “близький” порядок у розташуванні атомів? Який з цих порядків має місце у кристалах, рідинах та аморфних тілах? Чи може розташування атомів у молекулах полімерів мати далекий порядок?

7.2. У чому полягає різниця між кристалічними та аморфними тілами? Чи існують середовища, які можуть перебувати в кристалічному стані так само, як в аморфному? Чи зберігатиме свою форму куля, яка виточена з монокристала кухонної солі, якщо її занурити у воду?

7.3. У чому полягає різниця між моно- і полікристалами?

7.4. Які типи зв'язку мають місце в кристалах? Який зв'язок спостерігається в кристалах NaCl, Ge, H₂O, Fe?

7.5. Які особливості структури деяких рідин дають підстави віднести їх до рідинних кристалів? Які типи рідинних кристалів вам відомі?

Елементи кристаліграфії

7.6. Які геометричні типи кристалічних систем існують у природі?

7.7. Що є дефектами кристалічних ґраток? Які типи дефектів вам відомі? Як впливають ці дефекти на механічні властивості кристалів?

7.8. Вказати індекси напрямів прямої лінії, що проходить через вузли кубічних ґраток з індексами $[[100]]$, $[[001]]$.

7.9. Визначити кут між площинами в кубічних ґратках, які задані індексами (010) та (011).

7.10. Які відрізки відтинає на осях координат площина, що задана індексами (236)?

7.11. Стала кристалічних ґраток KCl $d = 3,14 \cdot 10^{-10}$ м. Знайти для цього кристала відстані d_1 , d_2 між сусідніми площинами (100), (110) та порівняти їх.

7.12. Скільки атомів припадає на одну елементарну комірку в кристалах з простими, об'ємоцентричними та ґранецентрованими кубічними ґратками?

7.13. Кристалічні ґратки KBr можна розглядати як такі, що утворені з двох простих кубічних з центрованими гранями ґраток, які зміщені одні відносно інших на половину довжини ребра куба, та складаються відповідно з іонів броміду і калію. Знайти густину ρ бромистого калію, якщо стала простих ґраток $a = 0,66$ нм.

7.14. Визначити сталу кристалічних ґраток міді a , вважаючи відомою її густину ρ . Кристалічні ґратки міді мають ґранецентровану структуру.

7.15. Залізо має дві модифікації кристалічних ґраток – кубічну об'ємоцентричну та кубічну ґранецентровану. Визначити відношення найменших міжатомних віддалей $d_{\text{об}}/d_{\text{гр}}$ у цих модифікаціях, вважаючи, що під час переходу від однієї структури до іншої об'єм, який припадає на один атом, не змінюється.

7.16. Кристалічні ґратки цинку належать до гексагональної системи зі сталими $a = 0,266$ нм, $c = 4,95$ нм. Визначити густину цинку ρ та кількість елементарних комірок Z_m в одному його молі.

7.2. ТЕПЛОВІ ВЛАСТИВОСТІ КРИСТАЛІВ

Сила, яка діє на атом кристалічних ґраток, з урахуванням першої ангармонічної поправки

$$F_x = -k_1 x + k_2 x^2, \quad (7.2.1)$$

де k_1 – коефіцієнт гармонічності ґраток; k_2 – коефіцієнт ангармонічності.

Зв'язок коефіцієнта гармонічності ґраток з модулем Юнга:

$$k_1 = r_0 E. \quad (7.2.2)$$

де r_0 – рівноважна віддаль між атомами у ґратках.

Коефіцієнт лінійного розширення

$$\alpha = \frac{1}{l} \frac{dl}{dT}. \quad (7.2.3)$$

Зв'язок між пружними сталими ґраток:

$$k_2 = \frac{k_1}{2r_0}. \quad (7.2.4)$$

Зв'язок коефіцієнта лінійного розширення з пружними сталими ґраток:

$$\alpha = \frac{k_2}{k_1^2 r_0} k = \frac{k}{2k_1 r_0^2}, \quad (7.2.5)$$

де k – стала Больцмана.

Коефіцієнт об'ємного розширення

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT}. \quad (7.2.6)$$

Коефіцієнти лінійного та об'ємного розширення вважаються сталими.

Інтерполяційна формула Дебая для молярної коливальної енергії кристала (фононного газу)

$$E = 9RT D(x), \quad (7.2.7)$$

де $x = \Theta_D / T$, Θ_D – характеристична температура Дебая для даного кристала. $\Theta_D = \hbar \omega_D / k$, тут ω_D – верхня межа циклічних частот фононів, що роблять внесок у внутрішню енергію кристала,

$$\omega_D = u(6\pi^2 n)^{1/3}, \quad (7.2.8)$$

де u – усереднена за поляризаціями швидкість поширення пружних хвиль у кристалі; n – концентрація іонів у кристалічних ґратках.

$$D(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 \int_0^x \frac{y^3 dy}{e^y - 1}. \quad (7.2.9)$$

Фононний внесок до молярної теплоємності кристала при $T \ll \Theta_D$ (закон Дебая)

$$C = \frac{dU}{dT} = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3. \quad (7.2.10)$$

Молярна теплоємність кристала при $T \gg \Theta_D$ (закон Дюлонга і Пті)

$$C = 3R. \quad (7.2.11)$$

Теплове розширення твердих тіл

7.17. Чи спостерігається теплове розширення такого кристала, в якому сила, що діє на атом у вузлі кристалічних ґраток, не містить ангармонічної поправки?

7.18. Визначити максимальну за модулем силу $F_{\max}$, що діє на атом у кристалічних ґратках заліза (сталі), якщо для нього $r_0 = 0,287$ нм, $\alpha = 11,7 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

7.19. Довести, що між середнім зміщенням $\langle x \rangle$ атома зі стану рівноваги та абсолютною температурою кристала з точністю до k_2^2 має місце співвідношення $\langle x \rangle \sim T$.

7.20. Встановити зв'язок між коефіцієнтами лінійного α та об'ємного β розширення для ізотропного кристала.

7.21. Визначити напруження σ в латунному циліндрі, затиснутому при $T_0 = 273 \text{ K}$ між двома опорами, якщо його нагріти до $T = 323 \text{ K}$.

7.22. Визначити різницю ΔN у кількості обертів колеса електровоза влітку при температурі $T_1 = 293 \text{ K}$ і взимку при $T_2 = 253 \text{ K}$ на шляху пробігу $l = 50 \text{ км}$, якщо при $T_0 = 273 \text{ K}$ радіус колеса $R_0 = 0,8 \text{ м}$, а тепловий коефіцієнт лінійного розширення матеріалу колеса $\alpha = 1,9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

7.23. Якої довжини l_{01} та l_{02} слід узяти при $T = 273 \text{ K}$ відповідно залізний та мідний дроти, щоб різниця їх довжин Δl при довільній температурі залишалася незмінною і становила 6 10 см ?

7.24. Алюмінієва лінійка проградуєвана при температурі $T_1 = 288 \text{ K}$. Скільки відсотків η складатиме похибка, якщо за допомогою цієї лінійки виміряти довжину стрижня при $T_2 = 305 \text{ K}$?

7.25. Диск зі свинцю при температурі $T_1 = 273 \text{ К}$ має радіус $r = 4,5 \text{ мм}$. Чи пройде цей диск крізь отвір, площа якого $S = 64 \text{ мм}^2$, якщо його нагріти до температури $T_2 = 348 \text{ К}$?

Фонони

7.26. Пояснити зміст терміна “фонон”. Вказати, які риси фононів відрізняють їх від звичайних частинок. Скільки поляризаційних станів має фонон?

7.27. Яка з енергій – дебаївська чи енергія Фермі – для заданого металу є більшою? Чому зі зростанням атомного номера елемента дебаївська температура, як правило, зменшується?

7.28. Чому дорівнює максимальна енергія фононів у кристалі свинцю?

7.29. Кристал має характеристичну температуру $\Theta_D = 300 \text{ К}$, усереднена за поляризаціями швидкість поширення звуку в ньому при цій температурі $u = 5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$. Оцінити найбільшу частоту фонона ω_D у цьому кристалі та квазіімпульс p_D , який їй відповідає.

7.30. Оцінити середню довжину вільного пробігу фононів $\langle l \rangle$ у кристалі срібла при температурі $T = 1200 \text{ К}$, якщо його теплопровідність $\lambda = 418 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, а усереднена за поляризаціями швидкість поширення звуку при цій температурі $u = 3,7 \cdot 10^3 \text{ м/с}$.

7.31. Застосувавши теорію Дебая, обчислити коефіцієнт гармонічності ґраток k_1 для вуглецю (алмазу) та міді.

Теплоємність твердих тіл

7.32. За яких припущень буде слушною інтерполяційна формула Дебая (7.2.7)?

7.33. Для яких із вказаних елементів – літію, берилію, бісмуту, калію, магнію, бору, золота чи вуглецю (алмазу) – можна при теплових розрахунках користуватися законом Дюлонга і Пті (7.2.11), якщо температура змінюється в межах $290 \leq T \leq 320 \text{ К}$?

7.34. При $T = 293 \text{ К}$ питома теплоємність алюмінію $c = 840 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$. Чи змінюватиметься вона при флуктуаціях температури в межах $\Delta T = \pm 10 \text{ К}$?

7.35. Зразки з берилію та бісмуту, маса кожного $m = 0,5 \text{ кг}$, мають початкову температуру $T = 300 \text{ К}$. Яку кількість теплоти Q отримає кожний із зразків з підвищенням температури на $\Delta T = 10 \text{ К}$?

7.36. Під час нагрівання мідного зразка, маса якого $m = 25 \text{ г}$, від $T_1 = 10 \text{ К}$ до $T_2 = 20 \text{ К}$ він отримав кількість теплоти $Q = 0,8 \text{ Дж}$. Визначити за цими даними дебаївську температуру Θ_D для міді.

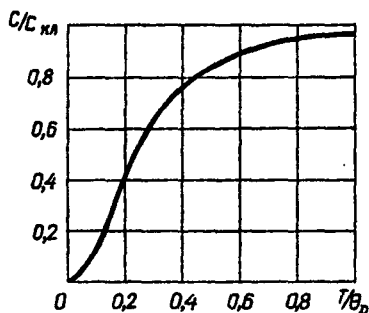


Рис. 7.1

7.37. Визначити найбільшу частоту ω_D власних коливань кристалічних ґраток заліза, якщо при температурі $T = 20$ К його питома теплоємність $c = 20$ Дж/(кг·К).

7.38. Користуючись графіком залежності молярної теплоємності C кристала від температури (рис. 7.1), де $C_{\text{кл}}$ – класична теплоємність, Θ_D – дебаївська температура, обчислити: а) дебаївську температуру Θ_D для срібла, якщо при $T = 65$ К для нього $C = 15$ Дж/(моль·К);

б) молярну теплоємність C алюмінію при $T = 80$ К, якщо при температурі $T = 250$ К $C = 22,4$ Дж/(моль·К); в) найбільшу частоту власних коливань кристалічних ґраток ω_D для міді, якщо її молярна теплоємність C при $T = 125$ К відрізняється від класичного значення на $\eta = 25$ %.

7.39. Чому дебаївська температура виявляється високою для міцних кристалів, які побудовані з легких атомів, і низькою для кристалів з малою міцністю, що побудовані з важких атомів?

7.40. Чи за однаковими законами залежать від температури теплоємності провідників та діелектриків при низьких температурах?

7.41. Дослід показує, що навіть при високих температурах теплоємність кристалів залишається нижчою від значень, що дає закон Дюлонга і Пті (7.2.11). Чим це можна пояснити?

7.42. Користуючись інтерполяційною формулою Дебая (7.2.7), довести, що за низьких температур фононний внесок до теплоємності кристала пропорційний до $(T/\Theta_D)^3$, а при високих – задовольняє закон Дюлонга і Пті (7.2.11).

7.3. ЕЛЕКТРИЧНІ ТА МАГНІТНІ ВЛАСТИВОСТІ МЕТАЛІВ

Питома електропровідність металу в класичній теорії

$$\sigma = \frac{e^2 n \langle l \rangle}{2 m_e \langle u \rangle}, \quad (7.3.1)$$

де n – концентрація електронів провідності; m_e – маса електрона; $\langle l \rangle$ і $\langle u \rangle$ – відповідно його середня довжина вільного пробігу та середня швидкість теплового руху.

$$\sigma = \frac{e^2 n \langle l \rangle_F}{m_e \langle u \rangle_F}, \quad (7.3.2)$$

де $\langle l \rangle_F$ і $\langle u \rangle_F$ – відповідно середня довжина вільного пробігу та середня швидкість теплового руху електронів, які перебувають на рівні Фермі.

Температурний коефіцієнт опору металу

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}, \quad (7.3.3)$$

де ρ – питомий опір провідника, $\rho = \sigma^{-1}$.

Питомий опір провідника при довільній температурі, яка є вищою за температуру Дебая,

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \quad (7.3.4)$$

де ρ_0 – питомий опір при 0 °С; t – температура, °С.

Зв'язок між теплопровідністю та електропровідністю металів (закон Відемана – Франца):

$$\frac{\lambda}{\sigma} = CT, \quad (7.3.5)$$

де C – експериментальне значення коефіцієнта, $C \approx 2,45 \cdot 10^{-8} (\text{Вт} \cdot \text{Ом})/\text{K}^2$.

Намагніченість ізотропного діамagnetика

$$\mathbf{J} = n\mu_a, \quad (7.3.6)$$

де n – концентрація атомів (молекул); μ_a – вектор магнітного моменту атома (молекули), індукованого магнітним полем.

Магнітна сприйнятливість діамagnetика

$$\chi = -\frac{\mu_0}{6m_e} e^2 Z n \langle r^2 \rangle, \quad (7.3.7)$$

де Z – кількість електронів у даному атомі (молекулі); $\langle r^2 \rangle$ – середній квадрат радіуса атома (молекули).

Намагніченість ізотропного парамагнетика

$$\mathbf{J} = n\mu_a L(x), \quad (7.3.8)$$

де $L(x)$ – функція Ланжевена, $x = \frac{\mu_a B}{kT}$; μ_a – вектор магнітного моменту атома (молекули); B – вектор індукції магнітного поля. Класична функція Ланжевена

$$L(x) = \coth x - \frac{1}{x}. \quad (7.3.9)$$

Класична функція Ланжевена при $x \ll 1$

$$L(x) = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \dots \quad (7.3.10)$$

Закон Кюрі (магнітна сприйнятливості парамагнетика за умови $x \ll 1$)

$$\chi = \frac{\mu_0 n \mu_a^2}{3kT}. \quad (7.3.11)$$

Закон Кюрі – Вейса

$$\chi = \frac{\chi_0}{1 - T_C/T}, \quad (7.3.12)$$

де χ – магнітна сприйнятливості магнетика при $T > T_C$; χ_0 – магнітна сприйнятливості, яка визначається законом Кюрі (7.3.11); T_C – температура Кюрі магнетика.

Електропровідність металів

7.43. Площа поперечного перерізу залізного провідника $S = 1 \text{ мм}^2$, а сила струму в ньому $I = 10 \text{ А}$. Визначити середню швидкість $\langle v \rangle$ напрямленого руху електронів, вважаючи, що на кожний атом заліза припадає один електрон провідності.

7.44. Визначити сумарний імпульс напрямленого руху електронів у провіднику, довжина якого $l = 1 \text{ км}$, при силі струму в ньому $I = 400 \text{ А}$.

7.45. У мідному провіднику, довжина якого $l = 1 \text{ км}$ і площа перерізу $S = 1 \text{ мм}^2$, проходить струм. Сила струму $I = 4,5 \text{ А}$. Вважаючи, що на кожний атом міді припадає один вільний електрон, визначити: час t , за який електрон переміститься від одного кінця провідника до другого; суму електричних сил F , що діють на всі вільні електрони провідника.

7.46. У мідному дроті, площа поперечного перерізу якого $S = 10 \text{ мм}^2$, при $T = 300 \text{ К}$ проходить струм. Сила струму $I = 1 \text{ А}$. Вважаючи, що відхилення розподілу електронного газу від максвеллівського за даної температури під час проходження струму є невеликим, обчислити відношення середньої швидкості $\langle v \rangle$ упорядкованого руху електронів до середньої швидкості $\langle u \rangle$ їхнього теплового руху при вказаній температурі.

7.47. Чим відрізняються механізми виникнення електричного опору в металі у класичній і квантовій теоріях?

7.48. Користуючись класичними уявленнями та вважаючи, що концентрація носіїв струму в міді $n = 9 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, обчислити для неї середню довжину вільного пробігу $\langle l \rangle$ електронів при кімнатній температурі та порівняти її з міжатомною віддаллю у кристалічних ґратках міді.

Прийняти для цієї віддалі значення $a = 3,6 \cdot 10^{-10}$ м. Які висновки можна зробити з одержаного результату щодо застосовності класичної теорії до описання електричних властивостей металів?

7.49. Виходячи з того, що електричний опір металу в деякому наближенні можна розглядати як наслідок взаємодії електронів з фононами, та застосовуючи статистику Бозе – Ейнштейна до фононного газу в металі, довести, що при температурах, які задовольняють нерівність $T \gg \Theta_D$, питомий опір металів $\rho \sim T$.

7.50. Нижче наведено питомі опори ρ_1 і ρ_2 (нОм·м) деяких металів при різних температурах T_1 і T_2 :

Температура, К	Cu	Fe	Zn	Al	Bi
273	15,6	89	55	24,5	$1,07 \cdot 10^3$
373	22,4	147	78	35,5	$1,56 \cdot 10^3$

Чому дорівнює температурний коефіцієнт опору α кожного з цих металів у вказаному інтервалі температур, якщо його вважати сталим?

7.51. При якій температурі T міді її питомий опір дорівнюватиме питомому опорю алюмінію при $T_0 = 273$ К? В інтервалі температур, який розглядається, температурний коефіцієнт опору провідників вважати сталим.

7.52. Визначити напруженість E електричного поля в провіднику та енергію ϵ , яку набуває електрон під час вільного пробігу в ньому. Для даного провідника $\epsilon_F = 5$ еВ, $\langle l \rangle_F = 20$ нм, а середня швидкість упорядкованого руху електронів $\langle v \rangle = 4 \cdot 10^{-5}$ м/с.

7.53. При деякій температурі питомий опір міді $\rho = 22,4$ нОм·м. Чому при цій температурі дорівнює середня кінетична енергія $\langle \epsilon \rangle$ теплового руху вільних електронів, які розглядаються як класичний газ, якщо при $T_0 = 273$ К питомий опір міді $\rho_0 = 15,6$ нОм·м? Температурний коефіцієнт опору міді вважати сталим.

7.54. Чим пояснюється той факт, що метали, які мають високу електропровідність, є також добрими провідниками теплоти?

7.55. Одержати закон Відемана – Франца (7.3.5), виходячи з квантових уявлень. Чи мають місце великі розбіжності у результатах при виведенні цього закону з класичних та квантових уявлень?

7.56. Визначити теплопровідність вольфраму λ_W , міді λ_{Cu} та заліза λ_{Fe} при $T = 400$ К, вважаючи, що температурні коефіцієнти опору вказаних металів від температури не залежать. Необхідні дані взяти з таблиць.

7.57. Визначити відношення середньоквадратичних радіусів іонів цезію Cs та літію Li $\sqrt{\langle r_1^2 \rangle / \langle r_2^2 \rangle}$, якщо відношення їх молярних магнітних сприйнятливостей $\chi_1 / \chi_2 = 50$.

7.58. Чи може магнітна взаємодія між спіновими магнітними моментами електронів у феромагнетиках забезпечити їх спонтанну намагніченість? Вважати, що стала кристалічних ґраток феромагнетика $d = 10^{-10}$ м. У чому полягає природа феромагнетизму?

7.59. У чому полягають магнітні властивості: а) антиферомагнетиків; б) феримагнетиків? Чим зумовлено широке застосування феритових осердь у електро- та радіотехніці?

7.60. Критична температура T_N (температура Нееля) для оксиду марганцю MnO, що відповідає переходові з антиферомагнітного стану до парамагнітного, становить 122 К. На скільки відсотків при $T = 128$ К відхиляється для цієї сполуки магнітна сприйнятливість χ , що обчислена за законом Кюрі, від обчисленої за законом Кюрі – Вейса?

7.61. Траєкторією електрона в однорідному магнітному полі є гвинтова лінія, вісь якої спрямована вздовж поля. Вважаючи, що момент імпульсу електрона відносно осі гвинтової лінії квантується за умовою Бора $M = n\hbar$ ($n = 1, 2, \dots$), довести, що кінетична енергія електрона $T_{\perp}$, яка зв'язана з його обертальним рухом, квантується.

7.62. Виходячи з того, що кінетична енергія $T_{\perp}$ електрона, яка зв'язана з його обертальним рухом, квантується (див. задачу 7.61), вказати, з яких міркувань можна дійти висновку про наявність в електронного газу діаманітних властивостей.

7.63. Електрон рухається в однорідному магнітному полі (див. задачу 7.61). Визначити площу колового поясу, обмеженого сусідніми орбітами, вздовж яких він може обертатися, якщо індукція магнітного поля $B = 1$ Тл. Обчислити, якою має бути індукція магнітного поля B' , щоб ця площа була порівнянною з площею перерізу атома ($S \sim 10^{-20}$ м²).

7.64. Дослід показує, що магнітна сприйнятливість деяких парамагнітних металів (наприклад, лужних та лужноземельних елементів) не залежить від температури та не підлягає законам Кюрі (7.3.11). Чим це пояснюється?

7.65. Чому у переважній більшості металів парамагнітний внесок електронного газу у магнітну сприйнятливість виявляється значно меншим, ніж внесок іонів?

7.4. ЕЛЕМЕНТИ ЗОННОЇ ТЕОРІЇ ТВЕРДИХ ТІЛ ТА ФІЗИКИ НАПІВПРОВІДНИКІВ

Ефективна маса електронів та дірок

$$m^* = \frac{1}{\hbar^2 \left(d^2 \epsilon / dk^2 \right)}, \quad (7.4.1)$$

де ϵ – енергія частинки; k – хвильове число її хвилі де Бройля.

Залежність електропровідності власного напівпровідника від температури:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta \epsilon}{2kT}}, \quad (7.4.2)$$

де $\Delta \epsilon$ – ширина забороненої зони (енергія активації) напівпровідника.

Повна електропровідність напівпровідника

$$\sigma = e(n_- u_- + n_+ u_+), \quad (7.4.3)$$

де e – модуль заряду електрона та дірки; u_- , u_+ , n_- , n_+ – їх рухливості та концентрації.

Зв'язок між енергією активації напівпровідника $\Delta \epsilon$ і червоною межею фотопровідності $\omega_{\max}$:

$$\hbar \omega_{\max} = \Delta \epsilon. \quad (7.4.4)$$

Поперечна різниця потенціалів, що виникає між гранями пластинки внаслідок ефекту Холла:

$$U_X = R_X j B l, \quad (7.4.5)$$

де R_X – стала Холла, $R_X = 1/(en)$, тут e – модуль заряду носіїв струму, n – їх концентрація; j – густина струму; B – індукція магнітного поля; l – ширина пластинки.

Електрон у періодичному полі кристалічних ґраток

7.66. З досліду відомо, що для електрона в кристалі середня довжина вільного пробігу може бути значно більшою за період кристалічних ґраток. Пояснити цей факт.

7.67. Чи належить імпульс електрона до характеристик його стану при русі в періодичному полі кристала? Чи збігається ефективна маса електрона, що перебуває в кристалі, з масою вільного електрона? Чи може вона бути від'ємною або дорівнювати нулеві?

7.68. Якими факторами пояснюється розщеплення енергетичних рівнів ізолюваних атомів під час утворення кристала?

7.69. Як на основі зонної теорії твердих тіл пояснити, що берилій належить до провідників?

Власна та домішкова електропровідності напівпровідників

7.70. Чи однаково змінюється питомий опір провідників та напівпровідників зі зростанням температури?

7.71. Визначити енергію активації $\Delta\epsilon$ телуру, якщо його електропровідність зростає в $n = 5$ разів зі збільшенням температури від $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К.

7.72. У чому полягає зміст поняття “дірка” як носія струму в напівпровіднику? Чи існують дірки поза напівпровідником? Чи збігаються зони провідності для електронів та дірок у напівпровідників? Чому дорівнює найменша енергія $\epsilon_{\min}$ утворення пари електрон – дірка у власному напівпровіднику, провідність якого зростає в $n = 2,01$ раза з підвищенням температури від $T_1 = 300$ К до $T_2 = 310$ К?

7.73. Порівняти електропровідність германію при $T_1 = 250$ К і $T_2 = 350$ К.

7.74. Чому напівпровідники можуть використовуватись як елементи чутливих електричних термометрів?

7.75. Користуючись функцією розподілу Фермі – Дірака для електронів, встановити відповідну функцію розподілу для дірок у власному напівпровіднику.

7.76. До кристала германію введено домішку. Електропровідність якого типу (p - чи n -) матиме одержаний кристал, якщо введено домішку: а) індію; б) сурми?

7.77. Позитивний іон донорної домішки фосфору в германії та надлишковий електрон утворюють воднеподібну систему. В кристалі електрон рухається також у періодичному електричному полі кристалічних ґраток. Користуючись співвідношенням невизначеностей для координат та імпульсів, оцінити енергію активації $\Delta\epsilon_d$ донорного рівня фосфору в германії. Діелектрична проникність германію $\epsilon = 16$. Прийняти ефективну масу електрона в германії $m^* \approx 0,12 m_e$, де m_e – маса вільного електрона.

7.78. Як змінюється внесок власної та домішкової електропровідностей до повної електропровідності напівпровідника з підвищенням температури?

7.79. Вважаючи, що енергія активації напівпровідника від температури не залежить, визначити для германію температурний коефіцієнт опору α при $T = 300$ К.

Фотопровідність. Внутрішній фотоефект

7.80. За допомогою напівпровідникового приймача випромінювання виявляють нагріті тіла, які розміщуються на значній відстані від спостерігача. У чому полягає принцип дії такого приймача?

7.81. У передавальній телевізійній камері (відиконі) об'єктив формує оптичне зображення об'єкта на поверхні (мішені), що вкрита фотопровідним шаром. Електронний промінь "проглядає" поверхню, переміщуючись по ній (сканує). Внаслідок неперервного сканування електронним променем поверхня завжди є зарядженою. За проміжок часу, який спливає між двома послідовними попаданнями променя на деяку ділянку мішені, вона втрачає заряд – розряджається. Швидкість розрядження залежить від освітленості ділянки. Це фіксується електронним променем, який таким чином зчитує потенціальний рельєф поверхні і створює відеосигнал. На якому явищі заснована дія відикона?

7.82. Яке фізичне явище або властивості напівпровідників можуть бути використані у фоторезисторі та фототранзисторі?

7.83. Вказати інтервали довжин хвиль електромагнітного випромінювання, для яких має місце внутрішній фотоефект у германії, селені та сірому олові. Які з цих інтервалів належать до видимого світла, інфрачервоного та рентгенівського випромінювання?

7.84. На фоторезистор на основі селену падає електромагнітне випромінювання, частота якого: а) $\omega_1 = 3,0 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_2 = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Чи змінюється при цьому його опір?

7.85. На фоторезистор на основі германію падає електромагнітне випромінювання, частота якого $\omega = 1,0 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Чи змінюється при цьому його опір? Як зміниться відповідь, якщо германій містить домішку арсену?

Ефект Холла у напівпровідниках

7.86. Як можна дослідним шляхом дізнатися про знак носія струму в напівпровіднику?

7.87. Температура германієвого зразка підвищується з $T_1 = 300 \text{ К}$ до $T_2 = 325 \text{ К}$. Як при цьому змінюється стала Холла R_H германію?

7.88. Визначити рухливість u електронів у напівпровіднику n -типу, для якого за даних умов питомий опір $\rho = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, а стала Холла $R_H = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot \text{Кл}^{-1}$.

7.89. Пластину з напівпровідника p -типу завширшки $l = 10 \text{ мм}$ та задовжки $L = 50 \text{ мм}$ вміщено в однорідне магнітне поле, індукція якого $B = 0,5 \text{ Тл}$. Напрямок поля є перпендикулярним до пластини. До кінців пластини (у напрямі L) прикладено напругу $U = 10 \text{ В}$, при цьому холлівська різниця потенціалів $U_H = 50 \text{ мВ}$. Питомий опір напівпровідника $\rho = 2,5 \text{ Ом} \cdot \text{см}$. Визначити концентрацію дірок n_+ та їх рухливість u_+ .

7.90. Під час дослідження ефекту Холла в магнітному полі, індукція якого $B = 0,5 \text{ Тл}$, напруженість поперечного електричного поля в бездо-

мішковому напівпровіднику виявилася у $n = 10$ разів меншою, ніж поздовжнього. Обчислити різницю рухливостей електронів та дірок $|u_- - u_+|$ у даному напівпровіднику. Чому дорівнюватиме відношення n_-/n_+ концентрацій дірок та електронів у напівпровіднику, рухливість електронів якого у $\eta = 2$ рази більша за рухливість дірок, а ефект Холла не спостерігається?

7.5. КОНТАКТНІ ЯВИЩА

Зовнішня контактна різниця потенціалів

$$\Delta\varphi_e = \frac{A_1 - A_2}{e}, \quad (7.5.1)$$

де A_1, A_2 – роботи виходу з речовин, що перебувають у контакті.

Внутрішня контактна різниця потенціалів

$$\Delta\varphi_{in} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{e}, \quad (7.5.2)$$

де μ_1, μ_2 – хімічні потенціали речовин, що перебувають у контакті.

Явище Зеєбека. Термоелектрорушійна сила

$$\mathcal{E} = \int_{T_1}^{T_2} \alpha_A dT - \int_{T_1}^{T_2} \alpha_B dT, \quad (7.5.3)$$

де α – коефіцієнт термо-ЕРС для речовини A чи B , які перебувають у контакті,

$\alpha = \beta - \frac{d\mu}{edT}$; $\beta = \frac{d\varphi}{dT}$. При відносно невеликих температурах ($kT \ll \varepsilon_F$) для металів залежність $\mu(T)$ має такий вигляд:

$$\mu(T) = \varepsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 \right). \quad (7.5.4)$$

Якщо α_A, α_B в інтервалі температур $T_1 \leq T \leq T_2$ вважати сталими, тоді

$$\mathcal{E} = \alpha_{AB} (T_1 - T_2), \quad (7.5.5)$$

де α_{AB} – питома термо-ЕРС для даної пари речовин, $\alpha_{AB} = \alpha_A - \alpha_B$.

Явище Пельтьє

$$Q = P_{AB} q = P_{AB} I t, \quad (7.5.6)$$

де Q – кількість теплоти, що виділяється під час проходження електричного струму крізь контакт провідних середовищ A і B ; P_{AB} – коефіцієнт Пельтьє (струм проходить від ланки A до ланки B); q – заряд, що пройшов крізь контакт.

Зв'язок між коефіцієнтом Пельтьє та питомою термо-ЕРС:

$$\Pi_{AB} = \alpha_{AB} T, \quad (7.5.7)$$

де T – температура оточуючого середовища.

Сила струму кризь $p - n$ -перехід:

а) у прямому (пропускну) напрямі

$$I_{np} = I_0 \left(e^{\frac{eU}{kT}} - 1 \right); \quad (7.5.8)$$

б) у зворотному (запірному) напрямі

$$I_{зв} = I_0 \left(1 - e^{-\frac{eU}{kT}} \right), \quad (7.5.9)$$

де I_0 – максимальна сила струму (сила струму насичення) у зворотному напрямі; U – напруга на $p - n$ -переході.

Активний опір $p - n$ -переходу

$$R = \frac{dU}{dI}. \quad (7.5.10)$$

Контактна різниця потенціалів.

Термоелектричні явища

7.91. Чим пояснюється виникнення в просторі, що оточує провідні середовища, які перебувають у контакті, зовнішньої контактної різниці потенціалів? У чому полягає механізм виникнення внутрішньої контактної різниці потенціалів?

7.92. Мідний провідник знаходиться у контакті з нікелевим. Визначити зовнішню контактну різницю потенціалів $\Delta\phi_{\text{в}}$, яку створюють ці провідники в навколишньому просторі, а також внутрішню контактну різницю потенціалів між ними $\Delta\phi_{\text{ін}}$ при $T = 0$ К та $T = 1050$ К, припускаючи, що на кожний атом міді припадає один електрон, який можна вважати вільним, а на атом нікелю – два.

7.93. В яких випадках коефіцієнти термо-ЕРС α_A , α_B можна вважати сталими?

7.94. Електричне коло містить $n = 3$ послідовно з'єднані термопари платина – сурма, причому парні спаї з'єднання підтримуються при температурі $T_1 = 273$ К, а непарні – при $T_2 = 373$ К. Яка ЕРС діє в колі? Скільки вказаних термопар n_1 слід послідовно з'єднати, щоб одержати термо-ЕРС $\mathcal{E} = 6$ В?

7.95. Залізо-платинова термопара живить зовнішнє коло, опір якого у $n = 100$ разів більший за опір термопари. Як зміниться ККД кола η , якщо

замість окремої термопари до кола приєднати $n_1 = 5$ термопар, з'єднаних:
а) послідовно; б) паралельно?

7.96. Чому термопари, що складаються з пар напівпровідників, мають значно більші термо-ЕРС, ніж ті, що складаються з пар провідників?

7.97. Для визначення температури печі всередину її вводять один із спаїв термопари мідь – константан, з'єднаної з гальванометром. Для даної термопари $\alpha_{AB} = 4,3$ мкВ/К. Внутрішній опір гальванометра $R = 2,5 \cdot 10^3$ Ом, чутливість $C = 10^{-8}$ А/под. При температурі холодного спаю $T_1 = 288$ К стрілка гальванометра відхиляється на $n = 80$ поділок. Чому дорівнює температура печі T_2 ? Опором термопари нехтувати.

7.98. У колі, яке складається з термопари та гальванометра, сила струму $I = 26$ мкА при різниці температур спаїв $\Delta T = 50$ К. Опір термопари $R_1 = 4$ Ом, опір гальванометра $R_2 = 80$ Ом. Визначити сталу термопари α_{AB} .

7.99. Під час проходження електричного струму крізь контакт двох провідників у навколишньому середовищі виділяється теплота. Як на досліді переконатися, який з ефектів дає основний внесок до цієї теплоти: Пельтьє чи Джоуля – Ленца?

7.100. Крізь контакт заліза з платиною проходить електричний струм, сила якого $I = 0,2$ мА. Опір кола, яке містить контакт, $R = 5$ Ом, температура навколишнього середовища $T = 300$ К. Яка кількість теплоти, що виділяється в цьому колі, буде більшою, – та що виділяється внаслідок ефекту Пельтьє Q_P чи ефекту Джоуля – Ленца $Q_{Дж}$? Для заліза $\alpha_A = +15,0$ мкВ/К, для платини $\alpha_B = -4,4$ мкВ/К.

7.101. Під час проходження крізь контакт платина – константан виділяється теплота в кількості $Q = 5$ мДж при температурі навколишнього середовища $T = 300$ К. Скільки електронів N при цьому перейшло з одного металу до іншого, якщо теплою Джоуля – Ленца нехтувати? Якій напрузі U на контакті відповідала б ця кількість теплоти, якби вона виділялася внаслідок ефекту Джоуля – Ленца? Для платини $\alpha_A = -4,4$ мкВ/К, для константану $\alpha_B = -38,0$ мкВ/К.

Вентильні властивості контактів.

$p - n$ -перехід

7.102. Є пари контактів таких середовищ: провідник – провідник, провідник – напівпровідник n -типу, провідник – напівпровідник p -типу, напівпровідник n -типу – напівпровідник p -типу. Пояснити, чому в зазначених випадках контакти набувають вентильних властивостей та вказати, в якому з них коефіцієнт випрямлення буде найбільшим.

7.103. Які фізичні явища або властивості $p - n$ -переходу використовуються в таких приладах: а) напівпровідниковому діоді; б) транзисторі; в) сонячній батареї; г) фотодіоді?

7.104. В обчислювальній та побутовій техніці широко застосовують випромінювальні напівпровідникові діоди (світлодіоди). У чому полягає їх принцип дії? Які їх переваги порівняно з іншими джерелами світла? Які напівпровідникові матеріали використовують для виготовлення світлодіодів?

7.105. Яка напруга U прикладена до $p - n$ -переходу, якщо при температурі $T = 300$ К коефіцієнт випрямлення $n = I_{\text{пр}}/I_{\text{зв}} = 1\,200$?

7.106. При деякій напрузі сила прямого струму крізь $p - n$ -перехід $I_{\text{пр}} = 2,02$ мА, а зворотного $I_{\text{зв}} = 20$ мкА. Знайти за цими даними силу струму насичення I_0 для $p - n$ -переходу.

7.107. При деякій температурі коефіцієнт випрямлення для $p - n$ -переходу $n_1 = 1\,600$. Чому дорівнюватиме коефіцієнт випрямлення n_2 , якщо температура напівпровідника підвищуватиметься на $\eta = 0,1$ від початкової при постійній напрузі?

7.108. Побудувати графіки залежності активного опору $R(I)$ $p - n$ -переходу від сили прямого $I_{\text{пр}}$ і зворотного $I_{\text{зв}}$ струмів при температурі $T = 300$ К та силі струму насичення $I_0 = 1$ мкА. Для прямого струму взяти інтервал $0 \dots 10$ мкА, а для зворотного $0 \dots 0,5$ мкА.

7.109. Чому частина електронів, що інжектуються в $n - p - n$ -транзисторі з емітера у базу потрапляють до $p - n$ -переходу база – колектор, не встигнувши рекомбінувати з дірками? Яке фізичне явище зумовлює рух електронів у базі?

7.6. МАКРОСКОПІЧНІ КВАНТОВІ ЯВИЩА

Магнітний потік, що пронизує кільце з надпровідним струмом,

$$\Phi_B = n\Phi_0, \quad (7.6.1)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$; Φ_0 – квант магнітного потоку,

$$\Phi_0 = \frac{h}{e} = 2,067\,85 \cdot 10^{-15} \text{ Вб}, \quad (7.6.2)$$

тут e^* – заряд куперівської пари, $e^* = 2e$.

Зв'язок між сталою електричною різницею потенціалів на контакті надпровідників і частотою надпровідного змінного струму:

$$\omega = \frac{e^*}{\hbar} \Delta\varphi. \quad (7.6.3)$$

Ізотопічний ефект

$$T_K M^{1/2} = \text{const}, \quad (7.6.4)$$

де T_K – температура переходу речовини в надпровідний стан; M – її молярна маса.

Холлівський опір у разі квантового ефекту Холла

$$R_H = \frac{2\pi\hbar}{ve^2}, \quad (7.6.5)$$

де v – подвійне відношення кількості вільних електронів на поверхні зразка, нормальної до вектора магнітної індукції, до кількості квантів магнітного потоку, що пронизує поверхню, $v = \frac{2\pi\hbar}{eB} n_s$, тут n_s – поверхнева концентрація носіїв струму. У разі нормального (цілочислового) ефекту $v = 1, 2, 3, \dots$; для аномального (дробового) ефекту $v = \frac{r}{p}$, де p – довільне непарне число, а r – довільне ціле число, яке не дорівнює p .

Явище надплинності

7.110. Чому гелій залишається рідким за всіх температур нижче критичної навіть з наближенням його температури до абсолютного нуля, перебуваючи під тиском своєї насиченої пари?

7.111. Для пояснення явища надплинності Л. Д. Ландау запропонував розглядати надплинну рідину як своєрідну суміш “нормальної” та “надплинної” компонент рідини. У чому полягає фізичний зміст таких компонент? Чи існують вони як матеріальні об’єкти, які можна розділити в просторі?

7.112. Чим пояснюються такі експериментальні факти: а) швидке проходження рідкого гелію при $T < 5,20$ К крізь капілярні трубки без енергетичних втрат; б) збільшення швидкості обертання внутрішнього циліндра при сталій швидкості зовнішнього, між якими міститься рідкий гелій при $T < 5,20$ К, якщо його температуру підвищувати?

Явище надпровідності

7.113. Розглядаючи рух електронів у кристалічних ґратках, якісно пояснити механізм утворення куперівських пар. Чи є можливим утворення таких пар у вакуумі? Чому інтервал температур, в якому метал виявляється надпровідником, зменшується зі збільшенням атомної маси металу?

7.114. Нуклід ^{64}Zn переходить у надпровідний стан при температурі $T_1 = 0,88$ К. При якій температурі T_2 відбувається перехід у надпровідний стан нукліда ^{63}Zn ?

7.115. У металах при температурах, нижчих за критичну температуру переходу в надпровідний стан, струм можуть переносити як нормальні, так і надпровідні електрони. Чому у разі постійного струму нормальна складова струму в надпровіднику відсутня? Чому при цьому дорівнює напруженість E електричного поля всередині надпровідника?

7.116. Вважаючи, що температура переходу металу з нормального стану в надпровідний $T_k \approx 5 \text{ K}$, оцінити енергію зв'язку $E_{зв}$ куперівської пари.

7.117. Деякі матеріали мають температури переходу в надпровідний стан $T_{k1} = 70 \text{ K}$ і $T_{k2} = 100 \text{ K}$. Чи є вони високотемпературними надпровідниками?

7.118. Чому в металах спостерігається тільки низькотемпературна надпровідність? Чи можуть високотемпературні надпровідники бути добрими провідниками електричного струму в нормальному стані?

Надпровідники в магнітному полі

7.119. Довести, що повний магнітний потік, який пронизує поверхню, обмежену надпровідним контуром, не змінюється з часом.

7.120. Довгий соленоїд, обмотка якого є ділянкою надпровідного кола, містить $N = 200$ витків, площа його поперечного перерізу $S = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, об'єм $V = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$. Соленоїд вміщують у зовнішнє магнітне поле індукцією $B = 1,256 \text{ мТл}$, напрям якого всередині соленоїда збігається з напрямом його власного поля. Як зміниться сила струму в соленоїді, якщо зовнішнє поле зникне? Для матеріалу обмотки напруженість критичного магнітного поля $H_k = 6,6 \cdot 10^3 \text{ А/м}$.

7.121. Порожністі надпровідники (зокрема, у формі циліндра) використовують як екрани для захисту від зовнішніх магнітних полів. У чому полягає принцип дії таких екранів?

7.122. Довести, що сили струмів, які проходять у надпровідних гілках розгалуженого електричного кола, обернено пропорційні індуктивностям гілок, якщо можна знехтувати їх взаємною індуктивністю.

7.123. Явище надпровідності використовується для одержання сильних магнітних полів, оскільки під час проходження вздовж надпровідника великих струмів, що створюють магнітні поля, теплових втрат немає. Які надпровідники – першого чи другого роду – слід використовувати для цього?

7.124. Поле магніту із залізним осердям можна сконцентрувати, установивши надпровідні екрани навколо магнітних полюсів. Пояснити принцип дії такого пристрою.

7.125. На рис. 7.2 зображено схему магнітного підшипника з використанням надпровідних елементів. Пояснити принцип дії наведеної схеми.

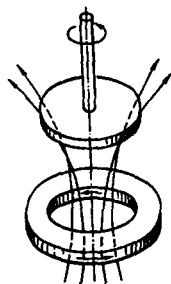


Рис. 7.2

**Квантування магнітного потоку.
Ефекти Джозефсона. Квантовий ефект Холла**

7.126. У джозефсонівському елементі на діелектрику стала різниця потенціалів $\Delta\varphi = 2 \cdot 10^{-2}$ В. Чому дорівнює частота випромінювання ω , що виникає при тунельному проходженні надпровідних пар?

7.127. Встановити найменшу силу надпровідного струму I крізь кільце, індуктивність якого $L = 1$ нГн.

7.128. Коливальний контур має індуктивність $L = 0,2$ мкГн та ємність $C = 0,5$ мкФ. Якою має бути різниця потенціалів $\Delta\varphi$ на діелектрику в джозефсонівському елементі, щоб контур резонував на його випромінювання?

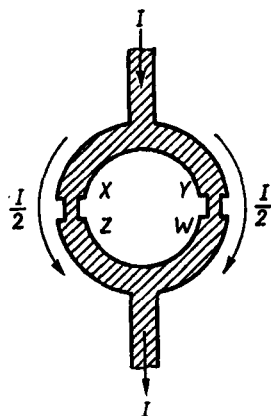


Рис. 7.3

7.129. На рис. 7.3 зображено схему надпровідного квантового інтерференційного детектора, що використовує ефект Джозефсона на контактах XZ та YW , які є так званими слабкими ланками зображеної петлі. Такий детектор можна використати як магнітометр для точних вимірювань характеристик магнітного поля. Оцінити, з якою точністю може бути виміряна індукція магнітного поля B за допомогою детектора, площа петлі якого $S = 0,1$ см².

7.130. Довести, що вираз, який стоїть у правій частині рівності (7.6.5), має розмірність опору.

7.131. У чому полягає принцип дії еталонів одиниць напруги та опору, виготовлених на основі ефекту Джозефсона і квантового ефекту Холла?

Розділ 8. ФІЗИКА АТОМНОГО ЯДРА

8.1. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ МЕТОДИ ЯДЕРНОЇ ФІЗИКИ

Диференціальний ефективний переріз розсіяння

$$d\sigma = \frac{dN}{N_0}, \quad (8.1.1)$$

де dN – кількість частинок, що внаслідок зіткнення розсіялись у тілесний кут $d\Omega$, $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$, тут θ – кут розсіяння; N_0 – кількість частинок у падаючому пучку, що припадає на одиничну площадку, яка є нормальною до напрямку швидкості тих частинок, що розсіюються.

Диференціальний ефективний переріз розсіяння заряджених частинок з кулонівським центром (формула Резерфорда)

$$d\sigma = \left(q \frac{Ze}{8\pi\epsilon_0 m v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (8.1.1a)$$

де q – заряд частинки, яка зазнає розсіяння; Z – зарядове число ядра розсіювача; m , v – маса та швидкість частинки відносно розсіювача.

Кут розсіяння під час зіткнення зарядженої частинки з кулонівським центром визначається співвідношенням

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{T}{U}, \quad (8.1.2)$$

де T – кінетична енергія частинки відносно розсіювача; U – її потенціальна енергія в полі розсіювача із зарядом Ze для заданої прицільної відстані ρ , тобто $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qZe}{\rho}$.

Повний переріз розсіяння

$$\sigma = \frac{dN}{Nndl}, \quad (8.1.3)$$

де dN – кількість частинок пучка, що зазнали зіткнення під час проходження пучком відстані dl ; N – кількість частинок у пучку; n – концентрація ядер мішені.

Довжина пробігу важких заряджених частинок (протонів) у повітрі, см, якщо енергії становлять близько 1 MeB,

$$R_p = 1,93 T_p^{1.5}, \quad (8.1.4)$$

де T_p – кінетична енергія протонів, MeB.

Довжина пробігу будь-якої частинки, маса якої m , заряд Ze та кінетична енергія $T = \frac{m}{m_p} T_p$ у повітрі,

$$R\left(\frac{m}{m_p} T_p\right) = \frac{m}{Z^2 m_p} R_p(T_p). \quad (8.1.4a)$$

Пробіг частинки в речовині, густина якої ρ та молярна маса M ,

$$R = R_n \frac{\rho_n}{\rho} \sqrt{\frac{M}{M_n}}, \quad (8.1.4b)$$

де індекс "n" позначає відповідні величини для повітря.

8.1. На ядро атома золота налітає α -частинка, кінетична енергія якої $T = 5$ MeV. Параметр зіткнення $\rho = 2,5 \cdot 10^{-13}$ см. На який кут θ розсіюється частинка? Яка частка η пучка α -частинок з енергією $T = 7,7$ MeV, що падають на золоту фольгу завтовшки $d = 3 \cdot 10^{-7}$ м, зазнає розсіювання на кут $\theta < 1^\circ$?

8.2. Уздовж нормалі до мідної фольги, поверхнева густина речовини якої $\sigma_{\text{пов}} = 1,5 \cdot 10^{-2}$ кг/м², падає вузький пучок α -частинок, які мають кінетичну енергію $T = 5,29$ MeV. Кути розсіювання $\theta > 6^\circ$ мають близько $\eta = 1\%$ усіх α -частинок. Визначити за цими даними кількість Z_2 протонів у ядрі міді.

8.3. Протон, кінетична енергія якого $T = 6$ MeV, налітає на ядро алюмінію. Встановити мінімальну відстань $r_{\text{мін}}$, на яку він може наблизитися до ядра алюмінію, та оцінити розміри r_α цього ядра. Віддачею ядра нехтувати.

8.4. Побудувати графік залежності кінетичної енергії T протона та α -частинки в повітрі за нормальних умов в інтервалі енергій $1 \dots 10$ MeV від довжини їх пробігу R .

8.5. У повітрі за нормальних умов рухається α -частинка, енергія якої $T = 7$ MeV. Чому дорівнює довжина її пробігу R_n за цих умов та пробігу $R_{\text{ал}}$ в алюмінії? Скільки іонів N кожного знаку утворюється під час руху частинки в повітрі, якщо на створення пари іонів потрібна енергія $E_i = 34$ eV? Вважати, що енергія частинки витрачається тільки на іонізацію повітря.

8.6. Протон, α -частинка та іон дейтерію мають енергії $T = 2$ MeV. Визначити довжини їх пробігів в алюмінії та фотоемульсії, густина якої $\rho = 3,84$ г/см³ і молярна маса $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

8.7. Чи придатний циклотрон для прискорення: а) електронів, енергія яких $T_1 = 0,5$ MeV; б) протонів з такою самою енергією; в) протонів, енергія яких $T_2 = 1$ GeV?

8.8. З якою швидкістю змінюється магнітний потік Φ_B у прискорювальній камері бетатрона, якщо за один оберт електрон набуває в ній енергії $T = 75$ еВ?

8.9. В електронному прискорювачі на зустрічних пучках кінетична енергія електронів у кожному з пучків $T_0 = 1,2$ ГеВ. Якій кінетичній енергії T_1 у системі відліку, зв'язаній з одним із пучків, відповідає ця енергія?

8.2. ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ВЗАЄМОДІЇ ТА ЕЛЕМЕНТАРНІ ЧАСТИНКИ

Таблиця 8.1. Рівні структури матерії

Складна система	Складові	Зв'язуюча взаємодія (сили)
Космологічні та астрономічні об'єкти	Макроскопічні об'єкти	Гравітаційна сила (сила тяжіння)
Макроскопічні об'єкти	Молекули	Електромагнітна (сили Ван-дер-Ваальса)
Молекула	Атоми	Електромагнітна (хімічні сили)
Атом	Ядро та електрони	Електромагнітна (кулонівські сили)
Ядро	Важкі адрони (нуклони)	Сильна (ядерні сили)
Адрон	Кварки	Сильна (кольорові сили)
Кварк та лептон	?	?
		Слабка (не є зв'язуючою)

Таблиця 8.2. Основні характеристики елементарних частинок

Характеристика	Позначення	Характеристика	Позначення
Маса	m	Дивність	S
Електричний заряд (в одиницях заряду електрона e)	Q	Чарівність (шарм)	C'
Перший лептонний заряд	L_e	Краса (привабливість)	B'
Другий лептонний заряд	L_μ	Істина	T'
Третій лептонний заряд	L_τ	Внутрішня парність	P
Баріонний заряд	B	Зарядова парність	C
Ізотопічний спіні	T	G-парність	G
Спін (в одиницях $\hbar$)	s	Час життя	τ
Проекція ізотопічного спіну на вісь квантування	T_z		

Кількість членів ізотопічного мультиплету

$$N = 2T + 1. \quad (8.2.1)$$

Зв'язок електричного заряду адронів з іншими характеристиками:

$$Q = T_z + \frac{1}{2}(B + S + C' - B'). \quad (8.2.2)$$

Таблиця 8.3. Калібрувальні бозони

Частинка (античастинка)				Основні					
				m, MeV	Q	L_e	L_μ	L_τ	B
Калібрувальні бозони	γ $W^+(W^-)$ Z_0 $g_i (i = 1, \dots, 8)$			0	0	0	0	0	0
				$81 \cdot 10^3$	$+1(-1)$	0	0	0	0
				$92 \cdot 10^3$	0	0	0	0	0
				0	0	0	0	0	0
Лептони	Покоління	I електронне	$e^-(e^-)$	0,510	$-1(+1)$	$+1(-1)$	0	0	0
			$\nu_e(\bar{\nu}_e)$	0	0	$+1(-1)$	0	0	0
		II міюнове	$\mu^-(\mu^+)$	106	$-1(+1)$	0	$+1(-1)$	0	0
			$\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$	0	0	0	$+1(-1)$	0	0
		III таунове	$\tau^-(\tau^+)$	1784	$-1(+1)$	0	0	$+1(-1)$	0
			$\nu_\tau(\bar{\nu}_\tau)$	0	0	0	0	$+1(-1)$	0
Кварки	Покоління	I	$u(\bar{u})$	$-7(330)$	$+\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)$	0	0	0	$+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)$
			$d(\bar{d})$	$\sim 15(330)$	$-\frac{1}{3}\left(+\frac{1}{3}\right)$	0	0	0	$-\frac{1}{3}\left(+\frac{1}{3}\right)$
		II	$c(\bar{c})$	$\sim 1,3 \cdot 10^3$ $(1,5 \cdot 10^3)$	$+\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)$	0	0	0	$+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)$
			$s(\bar{s})$	~ 200 (500)	$-\frac{1}{3}\left(+\frac{1}{3}\right)$	0	0	0	$-\frac{1}{3}\left(+\frac{1}{3}\right)$
		III	$t(\bar{t})$	$\sim 4,8 \cdot 10^3$	$+\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)$	0	0	0	$+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)$
			$b(\bar{b})$	$(5 \cdot 10^3)$	$-\frac{1}{3}\left(+\frac{1}{3}\right)$	0	0	0	$-\frac{1}{3}\left(+\frac{1}{3}\right)$

Примітки. 1. У дужках вказані значення квантових чисел для античастинок. 2. Позначення 3. Меси кварків, вказані в дужках, стосуються зв'язаних станів.

та кварк-лептонні покоління

характеристики

T	s	T_z	S	C'	B'	T'	Колір
0	1	0	0	0	0	0	–
0	1	0	0	0	0	0	–
0	1	0	0	0	0	0	$r\bar{y}, r\bar{b}, y\bar{b}, \bar{r}y$
0	1	0	0	0	0	0	$\bar{r}b, \bar{y}b, r\bar{r} - y\bar{y},$ $r\bar{r} + y\bar{y} - 2b\bar{b}$
0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	–
0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	–
0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	–
0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	–
0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	–
0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	–
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)$	0	0	0	0	$r\bar{y}b(\bar{r} \bar{y}\bar{b})$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\left(+\frac{1}{2}\right)$	0	0	0	0	$r\bar{y}b(\bar{r} \bar{y}\bar{b})$
0	$\frac{1}{2}$	0	0	$+1(-1)$	0	0	$r\bar{y}b(\bar{r} \bar{y}\bar{b})$
0	$\frac{1}{2}$	0	$-1(+1)$	0	0	0	$r\bar{y}b(\bar{r} \bar{y}\bar{b})$
0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$+1(-1)$	$r\bar{y}b(\bar{r} \bar{y}\bar{b})$
0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$+1(-1)$	0	$r\bar{y}b(\bar{r} \bar{y}\bar{b})$

кольору: r (red) – червоний, y (yellow) – жовтий, b (blue) – блакитний, $\bar{r}, \bar{y}, \bar{b}$ – їхні антикольори.

Таблиця 8.4. Адрони

Частинка (античастинка)		Основні характеристики								
		m , eB	Q	B	T	s	T_z	S	C'	B'
Мезони	$\pi^+(\pi^-)$	140	+1(-1)	0	1	0	+1(-1)	0	0	0
	π^0	135	0	0	1	0	0	0	0	0
	η	549	0	0	0	0	0	0	0	0
	$K^+(\bar{K}^0)$	494	+1(-1)	0	$\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)$	+1(-1)	0	0
	$K^0(\bar{K}^0)$	498	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}\left(+\frac{1}{2}\right)$	+1(-1)	0	0
	$D^+(\bar{D}^0)$	1869	+1(-1)	0	$\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)$	0	+1(-1)	0
	$D^0(\bar{D}^0)$	1865	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}\left(+\frac{1}{2}\right)$	0	+1(-1)	0
	$F^+(\bar{F}^0)$	1969	+1(-1)	0	0	0	0	+1(-1)	+1(-1)	0
	J/ψ	3097	0	0	0	1	0	0	0	0
	$B^+(\bar{B}^0)$	5271	+1(-1)	0	$\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)$	0	0	+1(-1)
	$B^0(\bar{B}^0)$	5274	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}\left(+\frac{1}{2}\right)$	0	0	+1(-1)
Мезонні резонанси										

Частинка (античастинка)			Основні характеристики								
			m , eB	Q	B	T	s	T_z	S	C''	B'
Бариони	Нуклони	$p(\bar{p})$	938	+1(-1)	+1(-1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)$	0	0	0
		$n(\bar{n})$	940	0	+1(-1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\left(+\frac{1}{2}\right)$	0	0	0
	Гіперони	$\Lambda(\bar{\Lambda})$	1116	0	+1(-1)	0	$\frac{1}{2}$	0	-1(+1)	0	0
		$\Sigma^+(\bar{\Sigma}^+)$	1189	+1(-1)	+1(-1)	1	$\frac{1}{2}$	+1(-1)	-1(+1)	0	0
		$\Sigma^0(\bar{\Sigma}^0)$	1193	0	+1(-1)	1	$\frac{1}{2}$	0	-1(+1)	0	0
		$\Sigma^-(\bar{\Sigma}^-)$	1197	-1(+1)	+1(-1)	1	$\frac{1}{2}$	-1(+1)	-1(+1)	0	0
		$\Xi^0(\bar{\Xi}^0)$	1315	0	+1(-1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)$	-2(+2)	0	0
		$\Xi^-(\bar{\Xi}^-)$	1321	-1(+1)	+1(-1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\left(+\frac{1}{2}\right)$	-2(+2)	0	0
		$\Omega^-(\bar{\Omega}^-)$	1673	-1(+1)	+1(-1)	0	$\frac{3}{2}$	0	-3(+3)	0	0
		$\Lambda_c^+(\bar{\Lambda}_c^+)$	2281	+1(-1)	+1(-1)	0	$\frac{1}{2}$	0	0	+1(-1)	0
Баріонні резонанси											

Фундаментальні взаємодії та їх властивості.

Закони збереження у фундаментальних взаємодіях

8.10. Які фундаментальні взаємодії відповідають: а) за внутрішньоатомні процеси; б) внутрішньоядерні процеси; в) процеси, що відбуваються в астрономічних масштабах? Яка з цих взаємодій є найуніверсальнішою?

8.11. Який вигляд мало б навколишнє середовище, якби слабка взаємодія зникла?

8.12. Яку роль відіграють калібрувальні бозони у формуванні окремих видів фундаментальних взаємодій? Чи існує зв'язок між масою калібрувального бозона, що відповідає за перенесення певної взаємодії, та радіусом цієї взаємодії? Якщо існує, то який? У чому полягає схожість і в чому – принципова різниця між фотонами та глюонами?

8.13. Вказати, які з реакцій відбуваються: а) $\nu_e + p \rightarrow n + e^-$;

б) $\nu_e + n \rightarrow p + e^-$; в) $\nu_\mu + n \rightarrow p + \mu^-$.

8.14. Чи відбувається розпад $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$?

8.15. Які з частинок є дійсно нейтральними: n , π^0 , K^0 , Λ , γ , Σ^0 , η ?

8.16. Вказати, які з процесів є можливими: а) ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow \pi^0 + {}^2\text{H} + {}^2\text{H}$;

б) ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow \pi^0 + {}^4\text{He}$; в) $p + p \rightarrow \pi^+ + n + p$; г) $n + n \rightarrow \pi^- + p + n$;

д) $n + p \rightarrow \pi^0 + p + n$.

8.17. Чому наведені розпади не мають місця: а) $\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \gamma$;

б) $\tau^\pm \rightarrow \mu^\pm + \gamma$; в) $\tau^\pm \rightarrow e^\pm + \gamma$; г) ${}^2\text{H} \rightarrow \pi^+ + \gamma$?

8.18. Розпад позитивного каона може відбуватись за такими реакціями:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^+;$$

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0;$$

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0.$$

Чи зберігається просторова парність під час розпаду каона?

8.19. Чи є бозе-частинки серед лептонів та баріонів? Чи є фермі-частинки та бозе-частинки серед адронів?

8.20. Який висновок можна зробити щодо тотожності електронного нейтрино та його античастинки, якщо реакція $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ спостерігається на досліді, а реакція $\bar{\nu}_e + n \rightarrow p + e^-$ – ні?

Лептони та кварки. Складна структура адронів

8.21. Які з наведених у табл. 8.4 частинок можна утворити з кваркових ароматів першого покоління?

8.22. Чим принципово відрізняються нуклони та мезони з погляду кваркової структури? Навести кваркові структури частинок, що належать

до нуклонного ізодублета та піонного ізотриплету. Чи можна побудувати каони тільки з кварків першого покоління? Навести кваркову структуру частинок, що належать до каонного ізомультиплету.

8.23. Порівнюючи склад лептонних поколінь з кварковими, вказати кількість кваркових ароматів. Як змінюються маси кварків у межах покоління, а також під час переходу від одного покоління до іншого? Те саме запитання щодо лептонів.

8.24. Вільні кварки в природі не знайдені. Щоб пояснити цей факт, було запропоновано гіпотезу, згідно з якою сили, що діють між кварками, зростають зі збільшенням віддалі між ними і тому перешкоджають утворенню вільних кварків та вильоту їх з адронів. Навести механічну модель таких сил.

8.25. Чому для дослідження внутрішньої структури частинок спостерігають зіткнення їх при високих енергіях?

8.3. СКЛАД ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ АТОМНОГО ЯДРА

Зв'язок між масовим A та зарядовим Z числами ядра:

$$A = Z + N, \quad (8.3.1)$$

де N – кількість нейтронів у ядрі.

Зв'язок між розміром ядра та його масовим числом:

$$R = R_0 A^{1/3}, \quad (8.3.2)$$

де R – радіус ядра; R_0 – стала, $R_0 \approx 1,2 \dots 1,5$ фм.

Магнітний момент ядра

$$\mu = g_{\text{я}} \sqrt{J(J+1)} \mu_{\text{я}}, \quad (8.3.3)$$

де $g_{\text{я}}$ – гіромагнітний множник для ядра; J – квантове число, яке визначає повний момент імпульсу ядра; $\mu_{\text{я}}$ – ядерний магнетон, $\mu_{\text{я}} = \frac{e\hbar}{2m_p} \approx 5,05 \cdot 10^{-27}$ Дж/Тл; m_p – маса протона.

Склад атомного ядра

8.26. Які експериментальні факти свідчать про неможливість існування в ядрах легких частинок, зокрема електронів?

8.27. Вказати склад таких ядер: ^3He , ^7Li , ^9Be , ^{13}N , ^{17}O , ^{23}Na , ^{54}Fe , ^{104}Ag , ^{235}U , ^{238}U .

8.28. Два ядра з однаковими масовими числами називають дзеркальними одне до одного, якщо кількість протонів в одному з них дорівнює кількості нейтронів у іншому. Вказати ядра, дзеркальні до ядер ${}^4\text{He}$, ${}^7\text{Be}$, ${}^8\text{Li}$, ${}^{10}\text{Ne}$, ${}^{15}\text{O}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{27}\text{Al}$, ${}^{52}\text{Fe}$, ${}^{53}\text{Fe}$, ${}^{54}\text{Co}$.

Маса та розміри атомних ядер

8.29. Чи однакові за розміром ядра ізотопів та ізобарів деякого хімічного елемента?

8.30. Нікель у природі спостерігається як суміш стабільних нуклідів ${}^{58}\text{Ni}$ (68,0 %; 57,9303), ${}^{60}\text{Ni}$ (26,3 %; 59,91574), ${}^{61}\text{Ni}$ (1,13 %; 60,91593), ${}^{62}\text{Ni}$ (3,66 %; 61,91322), ${}^{63}\text{Ni}$ (1,01 %; 63,90608)*. Обчислити середню атомну масу A нікелю.

8.31. Розмір ядра якого елемента вдвічі менший, ніж в ядра молибдену?

8.32. Оцінити густину ядерної речовини D , концентрацію нуклонів n , середню віддаль між ними $\langle r \rangle$ та об'ємну густину електричного заряду ρ в ядрі.

8.33. Встановити відношення радіусів ядер для таких пар нуклідів: ${}^{27}\text{Al}$ та ${}^1\text{H}$; ${}^{40}\text{Ar}$ та ${}^5\text{Li}$; ${}^{108}\text{Cd}$ та ${}^4\text{He}$; ${}^{200}\text{Hg}$ та ${}^{25}\text{Mg}$.

Магнітні моменти ядер

8.34. Чи можуть ті самі атомні ядра в одних станах описуватись статистикою Бозе – Ейнштейна, а в інших – статистикою Фермі – Дірака, і навпаки?

8.35. Довести, що величина, яка визначається співвідношенням (8.3.3), має розмірність магнітного моменту. Порівняти магнітні моменти атомів та атомних ядер. Чому при обчисленні магнітних моментів атомів ядерним внеском, як правило, нехтують?

8.36. Чим пояснюється той факт, що гіромагнітне відношення для протона не дорівнює такому самому відношенню для електрона? Чим пояснити, що гіромагнітне відношення для нейтрона не дорівнює нулеві?

8.37. Чи дорівнює магнітний момент ядра сумі магнітних моментів нуклонів, з яких воно складається?

8.4. ЯДЕРНІ СИЛИ. ЕНЕРГІЯ ЗВ'ЯЗКУ ЯДРА

Квантові числа, що характеризують стан нуклона в ядрі в моделі ядерних оболонок.
 l – орбітальне квантове число, яке визначає орбітальний момент імпульсу нуклона, $l = 0, 1, 2, \dots$;

* У дужках вказана розповсюдженість нукліда та маса ядра в атомних одиницях маси.

n – головне квантове число, яке визначає розміщення рівнів при фіксованому $l, n = 1, 2, \dots$;

j – квантове число, яке визначає повний момент імпульсу нуклона, $j = l + \frac{1}{2}$.

$$j = l - \frac{1}{2};$$

m_j – квантове число, яке визначає проекцію повного моменту імпульсу нуклона на виділену вісь, $-j \leq m_j \leq j$.

Спектральні позначення оболонкових рівнів окремих нуклонів $n(l)$:

l	0	1	2	3	4	5
(l)	s	p	d	f	g	h

Енергія зв'язку атомного ядра

$$E_{зв} = c^2(Zm_H + Nm_n - m_a), \quad (8.4.1)$$

де m_H – маса ватома водню; m_n – маса нейтрона; m_a – маса атома; Z – зарядове число; $N = A - Z$ – кількість нейтронів у ядрі; A – масове число ядра.

Півемпірична формула Вейцзеккера для енергії зв'язку ядра

$$E_{зв} = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 Z^2 A^{-1/3} - a_4 (A - 2Z)^2 A^{-1} - a_5 \delta A^{-3/4}, \quad (8.4.2)$$

де $a_1 = 15,75$ МеВ, $a_2 = 17,8$ МеВ, $a_3 = 0,710$ МеВ, $a_4 = 23,7$ МеВ, $a_5 = 34$ МеВ;

$$\delta = \begin{cases} +1 & \text{для непарно-непарних ядер (непарні } Z \text{ та } N); \\ 0 & \text{для ядер з непарним } A; \\ -1 & \text{для парно-непарних ядер.} \end{cases} \quad (8.4.3)$$

Поверхнева енергія ядра в краплинній моделі

$$E_{пов} = 4\pi R^2 \sigma, \quad (8.4.4)$$

де σ – поверхневий натяг ядра.

Енергія кулонівського відштовхування протонів у ядрі

$$E_{кул} = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (8.4.5)$$

Дефект маси ядра

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_a = Zm_H + Nm_n - m_a, \quad (8.4.6)$$

де m_a – маса ядра; m_a – маса нейтрального атома водню, а. о. м.

Залежність питомої енергії зв'язку ядер від масового числа зображено на рис. 8.1.

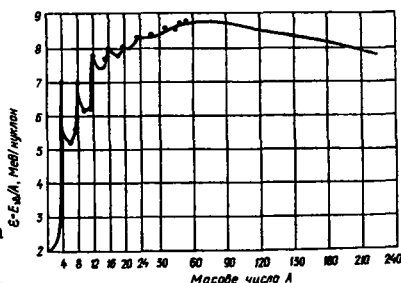


Рис. 8.1

Природа і властивості ядерних сил

8.38. Оцінити для протонів у ядрі сили електростатичного відштовхування, гравітаційного притягання та магнітної взаємодії. Який висновок з одержаних результатів можна зробити щодо можливості вказаних взаємодій відігравати роль ядерних?

8.39. Дослід показує, що розсіяння нейтронів на молекулах параводню (молекули водню, спіни протонів в яких є антипаралельними), і молекулах ортоводню (молекули водню, спіни протонів в яких паралельні), мають різні перерізи зіткнення. Про яку властивість сильної взаємодії це свідчить? Чому саме з розсіяння нейтронів на ядрах одержують найповнішу інформацію про властивості ядерних сил?

8.40. Про яку властивість ядерних сил свідчить відносна сталість питомої енергії зв'язку атомних ядер середньої маси (рис. 8.1)?

8.41. З дослідів відомо, що ядерні сили мають обмінний характер, тобто нуклони взаємодіють між собою внаслідок обміну піонами. Виходячи з того, що ці сили мають скінченний радіус дії $r_\pi \sim 10^{-15} \dots 10^{-14}$ м, оцінити власну масу m_π піона та встановити її зв'язок з комптонівською довжиною хвилі частинки.

Поняття про ядерні моделі

8.42. Ядра ^4He (α -частинка) та ^{16}O мають дуже високу стабільність. Чим це можна пояснити?

8.43. Чи існує повна аналогія між заповненням ядерних оболонок у магічних ядрах та електронних оболонок в інертних газах? Чим це пояснюється?

8.44. Ядро ^{132}Sn має повністю заповнені оболонки та виявляється двічі магічним. Чи буде воно стабільним? Чи будуть ядра ^{14}N , ^{20}Ne , ^{48}Ca : а) магічними; б) двічі магічними?

8.45. Користуючись формулою (8.4.2), порівняти поверхневу енергію $E_{\text{пов}}$ та енергію кулонівського відштовхування $E_{\text{кул}}$ ядер ^{16}O , ^{56}Fe , ^{128}Te , ^{235}U у краплинній моделі.

Енергія зв'язку, дефект маси та стабільність атомних ядер

8.46. Які висновки щодо стабільності атомних ядер можна зробити, аналізуючи вигляд графіка залежності питомої енергії зв'язку $E_{\text{зв}}/A$ ядер від масового числа A (рис. 8.1)?

8.47. Користуючись графіком (рис. 8.1), оцінити енергію E , яка виділяється у разі поділу ядра ^{235}U на два уламки, масові числа яких $A_1 = 94$ та $A_2 = 140$.

8.48. Чому дорівнюють маса та дефект маси ядра ^{235}U та ^{238}U ?

8.49. Питомі енергії зв'язку ядер ^6Li та ^7Li дорівнюють відповідно 5,33 МеВ/нуклон і 5,60 МеВ/нуклон. Визначити маси вказаних нуклідів та відповідні атомні маси. Яке з вказаних ядер є більш стабільним?

8.50. Для ядра ^{18}O енергія зв'язку $E_{\text{звO}} = 139,8$ МеВ, а для ядра ^{19}F – $E_{\text{звF}} = 147,8$ МеВ. Яку мінімальну енергію треба витратити, щоб відірвати один протон від ядра фтору?

8.51. Обчислити енергію зв'язку $E_{\text{зв}}$ та дефект маси Δm ядра ^4He .

8.52. Визначити енергії зв'язку ядер ^3He і ^3H та пояснити, з чим пов'язана різниця цих енергій.

8.53. Яку мінімальну енергію слід витратити для того, щоб відокремити один від одного нуклони в ядрах ^7Li та ^7Be ? Чому ця енергія для ядра берилію менша за енергію для ядра літію?

8.54. Обчислити різницю енергій зв'язку ядер ^{33}S та ^{34}Cl та порівняти одержане значення зі значенням енергії кулонівського відштовхування протонів у цих ядрах та з їх поверхневою енергією.

8.55. Встановити загальний вираз для енергії зв'язку нейтрона і протона в ядрі та обчислити за допомогою цього виразу різницю цих енергій для ядра ^{142}Cs .

В к а з і в к а. Використати формулу (8.4.2).

8.5. ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ. РАДІОАКТИВНІСТЬ

Енергія ядерної реакції

$$Q = c^2 \left(\sum_{i=1}^n m_i - \sum_{k=1}^{n'} m'_k \right), \quad (8.5.1)$$

де m_i – маси спокою частинок, які вступили в реакцію; m'_k – маси спокою частинок, які утворилися внаслідок реакції. Якщо $Q > 0$, то реакція є екзотермічною, якщо $Q < 0$ – ендотермічною.

Поріг реакції

$$T_{\text{пор}} = |Q| \left(1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{|Q|}{2m_2 c^2} \right), \quad (8.5.2)$$

де m_1 – маса налітаючої частинки, m_2 – маса мішені. Для нерелятивістських частинок ($Q \ll m_1 c^2$, $Q \ll m_2 c^2$)

$$T_{\text{пор}} = |Q| \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right). \quad (8.5.3)$$

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (8.5.4)$$

де $N(t)$ – кількість ядер нукліда, що не розпалися до моменту часу t ; N_0 – початкова кількість ядер; λ – стала розпаду, яка зв'язана з періодом піврозпаду співвідношенням

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (8.5.5)$$

Якщо розпад проходить у декілька стадій, то кількість ядер материнської та дочірньої речовин з часом змінюється за законом

$$N_1(t) = N_{10} e^{-\lambda_1 t}; \quad N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(t) \left(1 - e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}\right), \quad (8.5.6)$$

де індекси “1”, “2” позначають відповідно материнську та дочірню речовини.

Рівняння “вікової” рівноваги між материнською та дочірньою речовинами за умови $\lambda_1 \ll \lambda_2$:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2, \quad (8.5.7)$$

де N_1, N_2 – рівноважні значення кількості ядер.

Енергія кванта, що випромінюється збудженням ядром (ефект Мессбауера),

$$\varepsilon_\gamma = E \left(1 - \frac{E}{2mc^2}\right), \quad (8.5.8)$$

де E – енергія збудження; m – маса ядра; $E \ll mc^2$.

Закони збереження в ядерних реакціях.

Поріг та енергія реакції

8.56. Розкрити скорочений запис та вказати позначення x , яких немає в рівняннях реакцій: а) $^{10}\text{B}(x, \alpha)^8\text{Be}$; б) $^{22}\text{Na}(p, x)^{20}\text{Ne}$; в) $^{17}\text{O}(\alpha, n)x$; г) $x(p, n)^{37}\text{Ag}$; д) $^{12}\text{C}(x, d)^{14}\text{N}$.

8.57. Ядерні реакції відбуваються згідно з рівняннями: а) $^A_Z X(p, \alpha)Y$; б) $^A_Z X(d, n)Y$; в) $^A_Z X \rightarrow Y + \alpha$; г) $^A_Z X \rightarrow Y + {}_{-1}e + \bar{\nu}_e$; д) $^A_Z X \rightarrow Y + {}_{+1}e + \nu_e$. Вважаючи масові та зарядові числа вихідних ядер відомими, визначити, чому дорівнюють ці числа для утворених ядер.

8.58. Обчислити поріг та енергію реакції $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$, якщо вона відбувається внаслідок зіткнення γ -кванта: а) з електроном; б) протоном; в) ядром ^{12}C .

8.59. Вказати, які з реакцій, рівняння яких наведено нижче, відбуваються в природних умовах: а) ${}^9\text{Be}(\alpha, n){}^{12}\text{C}$; б) ${}^{31}\text{P}(n, p){}^{31}\text{Si}$; в) ${}^{55}\text{Mn}(n, \alpha){}^{52}\text{V}$; г) ${}^{50}\text{Ti}(n, \gamma){}^{51}\text{Ti}$; д) ${}^{238}\text{U}(n, \gamma){}^{239}\text{U}$.

8.60. Визначити порогову енергію $T_{\text{пор}}$, яка потрібна для народження пари нуклон – антинуклон у разі зіткнення двох протонів, та порівняти її з енергією реакції.

8.61. У реакції ${}^{226}\text{Ra} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^{222}\text{Rn}$ кінетична енергія α -частинки, що вилетіла з ядра, $T = 4,7$ МеВ. Визначити повну енергію E , що виділяється при її вильоті, та кінетичну енергію ядра віддачі $T_{\text{від}}$.

Закон радіоактивного розпаду. Радіоактивна рівновага

8.62. Які атомні ядра називають радіоактивними? Яким видом процесу – внутрішньоядерним або внутрішньонуклонним – є α -розпад, β -розпад та електронне захоплення? Якими видами внутрішньоатомних процесів супроводжуються різні β -перетворення?

8.63. Визначити сталу радіоактивного розпаду λ ядра ${}^{55}\text{Co}$, якщо за годину розпадається 4 % початкової кількості ядер. Продукт розпаду стабільний.

8.64. Яка частка η початкової кількості ядер ${}^{90}\text{Sr}$ розпадеться за одну добу і за 15 років? Яка частка ζ залишиться через 10 років і через 100 років?

8.65. В урановій руді відношення кількості ядер ${}^{238}\text{U}$ до кількості ядер ${}^{206}\text{Pb}$ становить $k = 2,8$. Оцінити вік t руди, вважаючи, що весь свинець є кінцевим продуктом розпаду уранового ряду.

8.66. З якої найменшої маси руди m_r , що містить $\eta = 18$ % нукліда ${}^{238}\text{U}$, можна одержати $m_{\text{Рв}} = 1$ г радію? Прийняти, що час піврозпаду ядер, які є продуктами перетворень нукліда ${}^{238}\text{U}$, значно менший за час піврозпаду вихідних ядер.

8.67. Внаслідок радіоактивного розпаду ядер нукліда A_1 утворюється нуклід A_2 . Сталі розпади ядер цих нуклідів дорівнюють відповідно λ_1 та λ_2 . У початковий момент часу в препараті перебуває лише нуклід A_1 з кількістю ядер N_{10} . Визначити кількість ядер N_2 нукліда A_2 через проміжок часу t , а також проміжок часу t_1 , через який кількість ядер нукліда A_2 досягне максимального значення.

8.68. Ланцюг радіоактивних перетворень містить три нукліди і закінчується стабільним нуклідом. Вважаючи, що в початковий момент часу жодного нукліда немає і перший нуклід утворюється зі швидкістю p (ядер/с), встановити для кожного з них закон накопичення $N(t)$, якщо їх сталі розпади λ_1 та λ_2 відомі.

Альфа-розпад

8.69. Чим пояснюється той факт, що α -радіоактивними виявляються саме важкі ядра? Як можна пояснити випускання α -частинки ядром, якщо висота потенціального бар'єра для неї в ядрі становить приблизно 25 MeV, а енергії частинок, що беруть участь у розпаді, дорівнюють 4...9 MeV?

8.70. Користуючись формулою (8.4.2), обчислити енергію зв'язку протона E_p та α -частинки E_α в ядрі ^{238}U та зробити висновок щодо енергетичної доцільності розпаду цього ядра.

8.71. Вважаючи відомими радіус ядра r_0 та висоту потенціального бар'єра U_0 , який оточує α -частинку в ядрі, та припускаючи, що ядро для частинки є прямокутною потенціальною ямою, пояснити, чому невеликій різниці пробігів α -частинок у речовині відповідає досить велика різниця сталих розпаду.

8.72. Ядро ^{229}Th , яке перебуває в спокої, зазнає α -розпаду. Записати рівняння вказаної реакції та визначити кінетичну енергію T продуктів розпаду. Енергія зв'язку вихідного ядра $E_{\text{звTh}} = 1\,748,4$ MeV, а ядер, що утворилися внаслідок розпаду, $E_{\text{зв1}} = 28,3$ MeV та $E_{\text{зв2}} = 1\,725,3$ MeV.

Бета-розпад

8.73. Вказати, який вид β -перетворень зазнають такі ядра: ^3H , ^6He , ^7Be , ^9Li , ^{18}Ne , ^{25}Al , ^{37}Ar , ^{55}Fe .

8.74. Визначити енергії реакцій $n \rightarrow p + {}_{-1}e + \bar{\nu}_e$ і $p \rightarrow n + {}_{+1}e + \nu_e$ та зробити висновок щодо можливості спонтанного проходження кожної з них.

8.75. За останніми даними час життя вільного нейтрона $\tau_n = 12,8$ хв, а час життя вільного протона є настільки великим (за останніми оцінками $\tau_p > 10^{30}$ років), що його можна вважати стабільним. Яке обмеження накладає нестабільність нейтрона на точність вимірювання його маси? Порівняти невизначеність маси Δm нейтрона, зв'язану з цим обмеженням, з різницею мас нейтрона і протона Δm_1 , наведених у табл. 2 дод. Б. Чому, незважаючи на нестабільність вільного нейтрона, у природі існують ядра, стабільні відносно β^- -розпаду? Чому, незважаючи на стабільність вільного протона, існують ядра, які зазнають β^+ -розпаду і електронного захоплення?

8.76. Записати рівняння реакцій β -розпаду нейтрона і протона з урахуванням кваркової структури частинок. Що можна сказати при цьому щодо різниці мас кварків першого покоління?

8.77. Ядро ^{210}Bi , енергія зв'язку якого $E_{\text{зв}1} = 1\,644,8\text{ Мев}$, що перебуває в спокої, зазнає β -розпаду. Для утвореного внаслідок розпаду ядра енергія зв'язку $E_{\text{зв}2} = 1\,645,2\text{ Мев}$. Визначити енергію розпаду Q та енергію ϵ електронного антинейтрино, якщо кінетична енергія електрона $T_e = 0,33\text{ Мев}$. Чому дорівнює максимальне значення цієї величини ϵ_{max} для вказаного розпаду? Віддачею ядра, утвореного внаслідок розпаду, нехтувати.

8.78. Яким процесом супроводжується перетворення ядра ^{41}Ca в ядро ^{41}K ?

8.79. Чому при електронному захопленні здебільшого захоплюються s -електрони і значно меншою мірою – електрони з інших оболонок?

Гама-випромінювання. Ефект Мессбауера

8.80. Чи може вільний нуклон випускати γ -кванти так само, як зазнавати β -розпаду? Яку природу – внутрішньоядерну чи внутрішньонуклонну – має γ -випромінювання атомних ядер та в чому вона полягає? Які характеристики атомного ядра змінюються при його γ -випромінюванні?

8.81. Чи відрізняється спектр електромагнітного випромінювання, яке випускається атомними ядрами, від спектра, що випускає атом, і якщо відрізняється, то чим?

8.82. Після розпаду β -радіоактивного ядра виявилось в збудженому стані. Його перехід у нормальний стан іноді супроводжується передачею зайвої енергії електронній оболонці, внаслідок чого відбувається випускання атомних електронів. Яку роль відіграє в цьому процесі γ -випромінювання ядра? Як відрізнити на досліді β -електрони від атомних?

8.83. Енергія першого збудженого рівня ядра атома заліза ^{57}Fe $E = 14\text{ кеВ}$, час його життя $\tau = 10^{-7}\text{ с}$. Чи можливе резонансне поглинання цим ядром γ -квантів з такою енергією?

8.84. Резонансне поглинання γ -квантів ядрами спостерігається в кристалах. Чому воно не спостерігається на вільних ядрах?

8.6. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ ЯДЕРНОЇ ЕНЕРГЕТИКИ

Енергія збудження складеного ядра

$$E_{\text{зб}} = T + E_{\text{зв}}, \quad (8.6.1)$$

де T – кінетична енергія частинки, яка налітає на ядро; $E_{\text{зв}}$ – енергія зв'язку цієї частинки в складеному ядрі.

Коефіцієнт розмноження нейтронів у середовищі

$$k = \frac{N_n}{N_{n-1}}, \quad (8.6.2)$$

де N_n, N_{n-1} – кількість нейтронів у n -му та попередньому поколіннях. Якщо $k < 1$, то ланцюгова реакція відбувається в підкритичному режимі (згасас), якщо $k = 1$ – режим реакції критичний, а якщо $k > 1$ – надкритичний.

Енергія, яку втрачає нейтрон при пружному розсіянні на ядрі:

а) максимальна втрачена енергія

$$\Delta E_{\max} = \frac{4A}{(1+A)^2} E_0, \quad (8.6.3)$$

де E_0 – початкова енергія нейтрона;

б) енергія, втрачена при розсіянні на довільний кут,

$$\Delta E = \Delta E_{\max} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (8.6.4)$$

Поглинання вузького моноенергетичного пучка γ -квантів:

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad (8.6.5)$$

де I – інтенсивність пучка під час проникнення його в середовище на глибину x ; I_0 – початкова інтенсивність пучка; μ – лінійний коефіцієнт поглинання.

Зв'язок лінійного коефіцієнта поглинання із шаром половинного ослаблення:

$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}. \quad (8.6.6)$$

Активність

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N(t). \quad (8.6.7)$$

Поглинута доза

$$D_n = \frac{dE}{dm}, \quad (8.6.8)$$

де E – енергія іонізуючого випромінювання; m – маса тіла, що опромінюється.

Експозиційна доза опромінення

$$D = \frac{dE}{dV}, \quad (8.6.9)$$

де V – об'єм тіла, що опромінюється.

Потужність експозиційної дози

$$P = \frac{dD}{dt}. \quad (8.6.10)$$

Поділ ядер

8.85. Які властивості питомої енергії зв'язку атомних ядер як функції масового числа (див. рис. 8.1) роблять можливим використання ядерної енергії та якими способами це можна зробити?

8.86. У чому полягають переваги і в чому – недоліки використання ядерного пального порівняно з органічним? Які з існуючих у природі ізотопів можна використати як ядерне паливо?

8.87. Які ядерні реакції використовуються для одержання ядерної енергії в промислових масштабах? Чи використовується тут енергія, яка виділяється під час радіоактивних перетворень атомних ядер?

8.88. Чому в реакції поділу важких ядер виникають вільні нейтрони? Чому деякі з уламків, що утворюються під час указаної реакції, виявляються β^- -радіоактивними?

8.89. Пояснити фізичний зміст поняття “Енергія активації атомного ядра”. Чи має вона відношення до порога реакції?

8.90. З дослідів відомо, що існує істотна відмінність у поділі ядер урану ^{235}U та ^{238}U : перші з них можуть поділятися як швидкими, так і повільними (тепловими) нейтронами, а другі – тільки швидкими (~ 1 MeV). Пояснити це явище, якщо енергія активації ядер ^{236}U та ^{239}U відповідно $E_{\text{акт1}} = 5,3$ MeV та $E_{\text{акт2}} = 6,1$ MeV.

8.91. Користуючись формулою (8.4.2), визначити енергію реакції поділу $n + ^{235}\text{U} \rightarrow ^{140}\text{Cs} + ^{94}\text{Rb} + 2n$. Який із внесків до енергії реакції, що визначаються формулою (8.4.2), виявляється тут найбільшим?

Коефіцієнт розмноження нейтронів. Ядерний реактор

8.92. У чому полягає призначення ядерного реактора? Який із режимів ланцюгової реакції, вказаних у поясненні до формули (8.6.2), використовується в ядерному реакторі та в ядерній бомбі? Які фактори зменшують коефіцієнт розмноження нейтронів в ядерному реакторі?

8.93. Визначити частку енергії η , яку втрачає нейтрон під час пружного розсіяння на кут $\theta = 180^\circ$ на ядрах дейтерію, гелію та вуглецю.

8.94. Середній час життя одного покоління повільних нейтронів у ядерному реакторі $T = 5 \cdot 10^{-4}$ с. За який час t кількість нейтронів у реакторі збільшиться в $\eta = 100$ разів, якщо коефіцієнт розмноження нейтронів $k = 1,01$? Який висновок можна зробити в цьому разі щодо робочого стану реактора?

8.95. Час τ , за який потужність реактора на повільних нейтронах зростає в $e = 2,718$ разів, називають періодом ланцюгової реакції. Чому дорівнює коефіцієнт розмноження нейтронів k у цьому реакторі, якщо для нього $\tau = 10$ с, а час життя покоління повільних нейтронів $T = 5 \cdot 10^{-4}$ с?

8.96. В ядерних реакторах на повільних нейтронах використовуються спеціальні сповільнювачі нейтронів. У чому полягає роль такого сповільнювача? Яка з речовин – ^4He , H_2O , D_2O – буде найкращим сповільнювачем нейтронів у ядерному реакторі? Чому?

8.97. Підводний човен має потужність атомних двигунів $P = 14,7$ МВт, паливом для яких є уран, збагачений нуклідом ^{235}U . Визначити мінімальні витрати m пального під час плавання човна протягом одного місяця. Прийняти, що під час поділу ядра ^{235}U виділяється енергія $Q = 200$ МеВ.

8.98. Яка електрична потужність P атомної електростанції з ККД $\eta = 25\%$, що споживає щодобово $m = 220$ г урану ^{235}U ? Прийняти, що під час поділу ядра ^{235}U виділяється енергія $Q = 200$ МеВ.

8.99. Яке добове споживання ядерного пального в реакторі типу ВВЕР-1000 атомної електростанції (електрична потужність $P = 1$ ГВт) при ККД електростанції $\eta = 40\%$, якщо під час поділу одного ядра ^{235}U виділяється енергія $Q = 200$ МеВ?

8.100. Ядро ^{235}U у разі поділу виділяє енергію $Q = 200$ МеВ. Під час вибуху ядерної бомби встигає прореагувати приблизно $m = 1,5$ кг урану. Чому дорівнює еквівалентна маса тротилу m_1 , якщо його теплотворна здатність $q = 4,1$ МДж/кг?

8.101. Реактор на швидких нейтронах потужністю $P = 100$ МВт відтворює плутоній. При поділі одного ядра ^{235}U у середньому утворюється $\nu = 2,5$ нейтронів і виділяється енергія $Q = 200$ МеВ. Навести низку ядерних реакцій, які відбуваються в активній зоні реактора під час утворення плутонію. Визначити масу m_{Pu} плутонію, утвореного в реакторі за $t = 10$ діб, та порівняти її з масою m_{U} витраченого пального.

Реакція синтезу

8.102. У деяких зірках відбувається процес $3^4\text{He} \rightarrow ^{12}\text{C}$. Яка кількість теплоти Q виділяється під час утворення одного моля вуглецю? Маса ядра гелію $m = 4,001\,52$ а. о. м.

8.103. Яку масу m бору треба взяти для того, щоб за допомогою реакції $^{11}\text{B} + ^1\text{H} \rightarrow ^3\text{He}$ одержати $\nu = 1$ моль гелію? Яка при цьому енергія E виділиться? Маса ядра бору $m_{\text{B}} = 11,006\,62$ а. о. м., гелію – $m_{\text{He}} = 4,001\,52$ а. о. м.

8.104. Обчислити енергію E , що виділяється при вигорянні $m = 1$ г дейтерієвої плазми під час реакції $^2\text{H} + ^2\text{H} \rightarrow ^3\text{H} + p$, $^2\text{H} + ^2\text{H} \rightarrow ^3\text{He} + n$, а також $m = 1$ г плазми, що складається з дейтерію та тритію, якщо в цій плазмі відбувається реакція $^2\text{H} + ^3\text{H} \rightarrow ^4\text{He} + n$. Яка з цих реакцій є найвигіднішою для використання в ядерній енергетиці?

8.105. Оцінити температуру T , необхідну для виникнення реакції синтезу ядер у водневій плазмі. Чи може відбуватися реакція синтезу ядер, якщо температура плазми нижча за одержану?

8.106. Визначити початкову питому активність a_0 нукліда ^{239}Pu , якщо його активність $A = 1$ Кі. Чому дорівнює маса m нукліда ^{226}Ra за такої самої активності?

8.107. В 1 т природного граніту міститься $m_1 = 3$ г суміші нуклідів урану в складі 99,3 % ^{238}U і 0,7 % ^{235}U та $m_2 = 12$ г нукліда ^{232}Th . Визначити початкову активність A_i кожного з нуклідів, що містяться в 1 т граніту, а також повну початкову активність A 1 т природного граніту.

8.108. Визначити вік τ стародавніх дерев'яних предметів, якщо питома активність a нукліда ^{14}C в них становить $\eta = 60$ % питомої активності цього самого нукліда у свіжозрубаних деревах.

8.109. У метаморфізованому черепашнику маса радіоактивного нукліда ^{45}Ca становить $\eta = 0,002$ % від маси нерадіоактивного ^{40}Ca . Як зміниться питома активність черепашнику з підвищенням концентрації радіоактивного нукліда в $n = 10$ разів?

8.110. Позасистемними одиницями експозиційної дози опромінення є рентген та Дж/м³. Обчислити співвідношення між ними для повітря, вважаючи, що середня енергія дисоціації його молекул $E_d = 33$ еВ. Встановити також відповідність між одиницями дози поглинання гресм та експозиційної дози – рентгеном.

8.111. Робітник працює з γ -радіоактивним препаратом, причому гранична припустима доза опромінення становить 0,017 Р/добу. Протягом робочого дня, який триває $t = 6$ год, дозиметр фіксує середню потужність дози $P = 0,5$ мкР/с. Чи одержить робітник під час роботи з препаратом дозу опромінення, більшу за граничну, якщо опроміненням з боку інших джерел нехтувати?

8.112. Визначити лінійні коефіцієнти поглинання вузького пучка γ -квантів, енергія яких $\epsilon_\gamma = 3$ МеВ, у воді μ_1 та свинці μ_2 , якщо відстані, на яких потік цих квантів зменшується в $k = 10$ разів, дорівнюють відповідно $l_1 = 0,58$ м та $l_2 = 4,9 \cdot 10^{-2}$ м.

8.113. Вузький пучок γ -випромінювання, енергія якого $\epsilon_\gamma = 6$ МеВ, пронизує бетонну стіну завтовшки $l_1 = 1$ м. Якою має бути товщина залізної стіни l_2 , щоб спричинити таке саме ослаблення цього пучка?

8.114. Пластика з деякої речовини ослабляє γ -випромінювання в $k = 1000$ разів. Скільки шарів половинного поглинання містить така пластинка?

ВІДПОВІДІ, ВКАЗІВКИ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ

ДО РОЗДІЛУ 1

1.1. Малість фізичних величин пов'язана з атомістичністю речовини, квантуванням заряду і т. ін. Диференціал фізичної величини не обов'язково є малою величиною. Потрібно тільки, щоб у межах диференціала зміною фізичних величин можна було б нехтувати.

1.2. Розрахунки фізичних процесів виконуються із заданим ступенем точності. Якщо врахування якоїсь величини не змінює результату, то нею нехтують.

1.3. а) Додатна, перша похідна більша або дорівнює нулеві. У кожній точці має скінченні першу та другу похідні; б), в) у кожній точці має скінченну похідну.

1.4. Див. відповідь на задачу 1.3.

1.5. При $a_x \geq 0$ завжди, при $a_x < 0$ лише до зупинки.

1.6. а) $v_x = \int a_x dt + v_0$, де v_0 – швидкість при $t = 0$ визначається з початкових умов; б) при $a_x > 0$ $s = \int_0^{t_1} v_x dt$, якщо $a_x < 0$ або періодична функція, тоді s є сумою

інтегралів. Всі інтеграли зі знаком мінус беруться за модулем; в) $|\langle v \rangle| = \frac{x_0}{t_1} + v_0 + \frac{a_x t_1}{2}$; г) $|\langle a \rangle| = |(v(t_1) - v_0)| / t_1$.

1.7. $s = 3t_2$; $s_1 = 15$ м.

1.8. $v = 3(1 + 0,01t^2)$, $v(t_0) = 3$ м/с, $v(t_1) = 6$ м/с; $a(t) = 0,06t$, $a(0) = 0$, $a(t_1) = 0,6$ м/с²; $\langle v \rangle = s(t_1) / t_1 = 42$ м/с, $\langle a(t_1) \rangle = v(t_1) / t_1 = 0,6$ м/с².

1.9. $v = 0,5 + 2t$, м/с; $a = 2$ м/с²; $\langle v \rangle = 3,5$ м/с; $s = 9,5$ м.

1.10. $v = 20t$ м/с; $a = 20$ м/с².

1.11. $\Delta s = 2s v / (v + c) = 44,57$ м.

1.12. $\langle v \rangle = (2t_3(B + At_3^2)/2) - (B + At_3^2) = 2,45$ м/с, де t_3 – час руху до зупинки, $t_3 = \sqrt{-B/(3A)}$; $|\langle v \rangle| = |B + At_3^2| = 1,24$ м/с. Частинка рухалася до зупинки час $t_3 = 1,36$ с і пройшла відстань $x(t_3) = 1,81$ м, далі рухалася у зворотному напрямі, а в кінці третьої секунди її координата була $x(3) = -3,72$ м. Модуль переміщення частинки за 3 с $|x(3)| = 3,72$ м.

1.13. $a = 2At + BCe^{Bt}$, $a_1 = 8,72$ м/с²; $s = (At^3/3) + C(e^{Bt} - 1)/B$, $s_1 = 2,72$ м; $\langle v \rangle = s_1/t = 2,72$ м/с.

1.14. $\langle v \rangle = 2t_3 (A + 2Bt_3)/t = 0,4 \text{ м}$; де $t_3 = -A/(4B) = 2 \text{ с}$ (див. пояснення до відповіді на задачу 1.12).

1.15. а) $s = 41 \text{ м}$; б) $\langle v \rangle = 4 \text{ м/с}$; в) $\langle v \rangle = 9,76 \text{ см/с}$. При $t = 0$, $x = 0$ і за час t_1 частинка виконає десять з чвертю повних коливань. За час T частинка проходить шлях $4A$.

1.16. $s = At^2/2 + Bt$, $s = 400 \text{ м}$.

1.17. $s(t) = |r(t)|$, $s_1 = 80 \text{ м}$. Частинка рухається рівноприскорено вздовж прямої. Напрямок руху не змінюється, тому шлях дорівнює модулеві переміщення.

1.18. $v_1 = (C + t_1^2/2)\sqrt{A^2 + B^2}$, $v_1 = 31,3 \text{ м/с}$.

1.19. $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g(h_1 - h_2)} = 29,84 \text{ м/с}$.

1.20. $\Delta t = (\sqrt{2v})/g = 3,03 \text{ с}$.

1.21. $g_C = 4h(\sqrt{1 + (v_0^2 \Delta t^2 / 4h^2)} - 1)/\Delta t^2 = 4,5 \text{ Мм/с}^2$.

1.22. а) Прямолінійний рівномірно-змінний рух; б) довільний рух із сталим модулем прискорення; в) прямолінійний прискорений рух; г) криволінійний рух із сталим модулем швидкості; д) рух по спіралі.

1.23. б), в), д), е) Збігаються в точках, що розміщуються на однаковій висоті; г) в усіх точках має однакове значення.

1.24. а) Вектори не порівнюються. Модуль швидкості найбільший у початковій і кінцевій точках руху (це випливає з формули $v = \sqrt{v_x^2 + (v_0 \sin \beta - gt)^2}$, де v_0 – модуль початкової швидкості; β – кут нахилу вектора швидкості v до горизонталі в момент часу t . З урахуванням відповіді на задачу 1.23, г, д. Найменший модуль швидкості у найвищій точці ($\beta = 0$); б) найбільше значення прискорення a_n у найвищій точці ($a_n = g \cos \beta$, де β – кут між векторами a_n і g). Найменше значення в початковій і кінцевій точках руху; в) найбільше значення прискорення a_t у початковій і кінцевій точках ($a_t = g \sin \beta$), а найменше ($a_t = 0$) у найвищій точці; г) v_x однакова в усіх точках; д) найбільша в початковій і кінцевій точках, у найвищій точці дорівнює нулеві; е) найбільший у початковій і кінцевій точках, найменший у верхній ($R = v^2/a_n$).

1.25. Не збігається з вектором швидкості й лежить з центром кривизни по один бік від дотичної до траєкторії.

1.26. Коли нормальне прискорення дорівнює нулеві.

1.27. $t_1 = t_2 = (v_0 \sin \alpha)/g = 0,51 \text{ с}$.

1.28. $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

1.29. $l = \sqrt{2}v_0 t$ ($l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$; $x_1 = v_0 t$; $x_2 = 0$; $y_1 = gt^2/2$; $y_2 = v_0 t + gt^2/2$).

1.30. а) $v_x = v_0 \cos \alpha$, $v_y = v_0 \cos \alpha - gt$, $v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 g t \sin \alpha}$; б) $t_1 = 2v_0 \sin \alpha/g$; в) ($\beta = \arctg((g t^2 - v_0^2 \cos \alpha)/v_0 \cos \alpha)$); г) $x = v_0 t \cos \alpha$, $y = v_0 t \sin \alpha - (gt^2/2)$.

1.31. $t_{1,2} = v_0 \cos \alpha (\tg \alpha \pm \tg \beta)/g$, $t_1 = 0,3 \text{ с}$, $t_2 = 1,14 \text{ с}$.

$$1.32. a_n = \frac{v_0 g \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t_1^2 - 2v_0 g t_1 \sin \alpha}} = 9,59 \text{ м/с}^2.$$

$$\alpha_1 = (g t_1 - v_0 \sin \alpha) \frac{g}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t_1^2 - 2v_0 g t_1 \sin \alpha}} = 2,07 \text{ м/с}^2, \quad a_{n \max} = g = 9,81 \text{ м/с}^2; \quad a_{t \max} = g \sin \alpha = 4,91 \text{ м/с}^2.$$

$$1.33. R = (v^2 + g^2 t_1^2 - 2v g t_1 \sin \alpha)^{\frac{3}{2}} / (v g \cos \alpha) = 31,06 \text{ м (див. відповідь на задачу 1.32)}.$$

$$1.34. v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t_1^2 - 2v_0 g t_1 \sin \alpha} = 9,12 \text{ м/с}; \quad y = x \tan \alpha - g x^2 / (2v_0^2 \cos^2 \alpha);$$

$$t_1 = t_2 = v_0 \sin \alpha / g = 0,51 \text{ с}; \quad s = v_0^2 \sin 2\alpha / g = 8,83 \text{ м}; \quad R = (v_0^2 + g^2 t_1^2 - 2v_0 g t_1 \sin \alpha)^{3/2} \times \\ \times (v_0 g \cos \alpha) = 8,92 \text{ м}.$$

$$1.35. s_{\max} = v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh} / g, \quad \alpha_{\max} = \arctg(v_0 / \sqrt{v_0^2 + 2gh}).$$

1.36. $s_{\max} = (2v_1(v_0 + v_1 \cos \alpha_{\max}) \sin \alpha_{\max}) / g = 8,71 \text{ м}$, $\alpha_{\max} = 71,41^\circ$. Нехай α — кут нахилу вектора v_1 до горизонту, тоді вертикальна складова швидкості плигуна $v_x = v_0 + v_1 \cos \alpha$ і горизонтальна $v_y = v_1 \sin \alpha$. Якщо кут нахилу вектора v до горизонту β , то $\sin \beta = (v_1 \sin \alpha) / v$, $\cos \beta = (v_0 + v_1 \cos \alpha) / v$. Дальність стрибка $s = (v_0^2 2 \sin \beta \cos \beta) / g = 2v_1 \sin \alpha (v_0 + v_1 \cos \alpha) / g$ (див. відповідь на задачу 1.34). Кут $\alpha_{\max}$ визначається з умови $ds/d\alpha = 0$, $2v_1 \cos^2 \alpha_{\max} + v_0 \cos \alpha_{\max} - v_1 = 0$, звідки $\alpha_{\max} = 71,41^\circ$. Підстановка $\alpha_{\max}$ у формулу визначення дальності стрибка s дає $s_{\max}$.

$$1.37. s = \int_0^{t_0} v(t) dt, \text{ де } t_0 = (v_0 \sin \alpha) / g;$$

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - g t)^2} = g \sqrt{(t - t_0)^2 + t_0^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha};$$

$$s = 2g \int_0^{t_0} \sqrt{(t - t_0)^2 + t_0^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha} = g t_0^2 ((\operatorname{ctg}^2 \alpha) \ln((\cos \alpha) / (1 - \sin \alpha)) + 1 / \sin \alpha) = 14,6 \text{ м}.$$

1.38. $t = ((v \sin \alpha) / g) (1 + \sqrt{1 + 2gh / (v^2 \sin^2 \alpha)}) = 1,08 \text{ с}$. Взяти до уваги, що по вертикалі кулька рухається з прискоренням g . Час зіткнень значно менший, ніж час падіння.

$$1.39. v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2 + g^2 t^2 - 2v_0 g t \sin \alpha}, \quad s = 2v_0 (\sin \alpha) \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + v_1^2} / g = 53,94 \text{ м}$$

$$(v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad v_x = v_1, \quad v_y = v_0 \cos \alpha, \quad v_z = v_0 \sin \alpha - g t; \quad s = t_n \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \\ t_n = (2v_0 \sin \alpha) / g).$$

$$1.40. \mathbf{v}_1 = v \mathbf{i} + 2t(a \mathbf{j} + c \mathbf{k}), \quad \mathbf{a}_1 = 2(a \mathbf{j} + c \mathbf{k}), \quad r = t \sqrt{v^2 + (a^2 + c^2) t^2}.$$

$$1.41. y(x) = \pm B \sqrt{\frac{x}{A}}; \quad \mathbf{v} = 2A t \mathbf{i} + B \mathbf{j}, \quad \mathbf{a} = 2A \mathbf{i}, \quad v = \sqrt{4A^2 t^2 + B^2}, \quad a = 2A.$$

$$1.42. \mathbf{v}(t) = (3t^2 + 4)\mathbf{i} + (4,5t^2 + 6)\mathbf{j}; \mathbf{a}(t) = 2A\mathbf{i}; s(t) = 1,8t^2 + 7,21 \text{ м}; v(t) = 5,41t^2 + 7,21 \text{ м/с}.$$

$$1.43. y = A \sin\left(\frac{\omega x}{v_x}\right) = 10^{-3} \sin x \text{ (м)}; v = \sqrt{v_x^2 + A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t} = 5 \text{ 500 м/с},$$

$$a = A\omega^2 \sin \omega t \approx 9,1 \text{ м/с}^2.$$

1.44. Уздовж осі обертання. Згідно з правилом правого гвинта.

1.45. Напрямок псевдовектора змінюється на протилежний у разі переходу системи координат від правої до лівої, або навпаки.

1.46. а) Приріст кутової швидкості за час t ; б) приріст модуля кутової швидкості, якщо за час t вектор кутового прискорення не змінює напрям. У протилежному випадку фізичного змісту не має; в) приріст кута повороту; г) відповідь аналогічна відповіді б.

$$1.47. \omega = v/R = 4,12 \cdot 10^{16} \text{ рад/с}, a_n = 8,98 \cdot 10^{22} \text{ м/с}^2, \omega_1 = 4,12 \cdot 10^{16} \text{ рад/с}.$$

1.48. $\langle v \rangle = v = 0,1 \text{ м/с}$, $\langle |v| \rangle \approx 2R/t = 6,37 \text{ см/с}$ ($\langle v \rangle = \Delta r/t$, де Δr – переміщення частинки за час t , $|\Delta r| = 2R$ – це випливає з відношення $\frac{vt}{2\pi R} \approx 0,5$, частинка пройшла половину кола).

1.49. $\langle v \rangle = \pi R/(3t) = 15,71 \text{ см/с}$; $\langle |v| \rangle = R/t = 15 \text{ см/с}$; $\langle |a_t| \rangle = 2\pi R/(3t^2) = 3,14 \text{ см/с}^2$ ($\langle |a_t| \rangle = |\Delta v|/t$, де Δv – приріст швидкості за час t ; $\langle |v| \rangle = a_t t$, a_t можна визначити з формули $s = \pi R/3 = a_t t^2/2$).

1.50. $s = \sqrt{(2\pi R)^2 + (v_{ct})^2} = 7,94 \text{ Тм}$, $|r| = v_{ct} = 7,88 \text{ Тм}$, де R – радіус орбіти Землі; $\mathbf{r} \uparrow \uparrow \mathbf{v}_c$. Кожний елемент гвинтової лінії має однаковий кут нахилу до площини, перпендикулярної до осі лінії. Якщо гвинтову лінію виправити (розгорнути), то одержимо відрізок прямої, довжина якого – це шлях s . Шлях визначається з прямокутного трикутника, один катет якого дорівнює $2\pi R$, а другий – v_{ct} .

1.51. $s = 322,01 \text{ м}$, $r = 7,07 \text{ м}$. Тіло рухається по колу $x^2 + y^2 = 5^2$. Період обертання $T = 1 \text{ с}$. За час t тіло виконує десять з чвертю обертів.

$$1.52. a = a_0 \sqrt{2\pi + 1} = 2,7 \text{ м/с}^2 \quad (a_t = a_0, \quad a_n = (a_0 t)^2/R, \quad t^2 = (2\pi R)/a_0, \quad \text{звідки } a_n = 2\pi a_0).$$

1.53. $\langle |v| \rangle = \frac{2R}{t} \sin\left(\frac{a_0 t^2}{4R}\right) = 0,96 \text{ м/с}$, де $t = 1 \text{ с}$. Вектор $\langle \mathbf{v} \rangle$ утворює з радіусом-вектором початкового положення тіла кут $(\pi + 1)/2$; $\langle v \rangle = a_0 t/2 = 1 \text{ м/с}$ ($\langle |v| \rangle = |\Delta r|/t$, де Δr – хорда, яка стягує дугу $s = a_0 t^2/2$). Центральний кут між радіусами-векторами початкового та кінцевого положень тіла $\alpha = \left(\frac{2\pi}{2\pi R}\right)s = \frac{a_0 t^2}{2R}$; $\Delta r = 2R \sin(a_0 t^2/(4R))$.

$$1.54. s = \varphi(t) \cdot R = 1,1 \text{ м}; \omega_{\max} = 2At_1 + B = 6 \text{ рад/с}, \varepsilon_{\max} = 2A = 2 \text{ рад/с}^2;$$

$$\alpha = \arctg \left(\frac{(2At_1 + B)^2}{2A} \right) = 1,51 \text{ рад} = 86,82^\circ \quad (v = \omega R \Leftrightarrow v dt = \omega R dt \Leftrightarrow s = \varphi R).$$

$$1.55. v_{\max} = \frac{1}{T} \sqrt{6\pi^2 m / \rho} = 2,06 \cdot 10^7 \text{ м/с}, \quad a_n = \frac{1}{T^2} \sqrt{48\pi^2 m / \rho} \approx 4,31 \cdot 10^{10} \text{ м/с}^2.$$

$$1.56. \varepsilon = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{4\pi N} = 3,34 \text{ рад/с}^2.$$

$$1.57. \langle \omega \rangle = -\frac{\omega_0^2 / \varepsilon_z + \varepsilon_z (t_1 - t_3)^2}{2t_1} = 4,17 \text{ рад/с}, \text{ де } t_3 = -\frac{\omega_0}{\varepsilon_z} - \text{час обертання валу}$$

до зупинки ($\langle \omega \rangle = (\varphi_1 + \varphi_2) / t_1$, тут φ_1 – кут повороту вала до зупинки, φ_2 – після зупинки).

$$1.58. N = \frac{\pi(n_2^2 - n_1^2)}{\varepsilon_z} = 1696,46 \text{ оберт}, \quad t_1 = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{\varepsilon_z} = 113,1 \text{ с}.$$

$$1.59. a_t = AB^2 e^{Bt_1} R = 2,72 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2, \quad a_n = 0,74 \text{ м/с}^2, \quad a = 0,74 \text{ м/с}^2.$$

$$1.60. a = R \sqrt{4A^2 + (2At_1 + B)^4} = 0,067 \text{ м/с}^2, \quad \alpha = \arctg \left(\frac{(2At_1 + B)^2}{2A} \right) = 72,65^\circ.$$

$$1.61. \omega(t_1) = AB \cos(Bt_1) + 2Ct_1 = 11,38 \text{ рад/с}; \quad v(t_1) = (AB \cos(Bt_1) + 2Ct_1) R = 1,41 \text{ м/с},$$

$$\varepsilon(t_1) = 4 \text{ рад/с}^2; \quad a_t = (AB \sin(Bt_1) + 2C) R = 0,4 \text{ м/с}^2; \quad a_n = 12,94 \text{ м/с}^2.$$

$$1.62. v_{\max} = \sqrt{v^2 + \frac{\omega^2 d^2}{4}} = 701,9 \text{ м/с}.$$

$$1.63. \langle \varepsilon \rangle = \frac{v^2}{2rs} = 1,1 \text{ рад/с}^2 \left(\frac{s}{R} = \frac{\langle \varepsilon \rangle t^2}{2}, \quad \frac{v}{R} = \langle \varepsilon \rangle t \right).$$

$$1.64. \langle \omega \rangle = 8\pi \sqrt{g / (2h)} \approx 25,15 \text{ рад/с}.$$

$$1.65. \langle \omega \rangle = \pi \sqrt{40g / h} = 28,11 \text{ рад/с}, \quad \alpha = \pm 26,56^\circ.$$

1.66. Усі точки простору фізично рівноцінні, тобто перенос і поворот об'єкта в просторі не впливає на процеси, що у ньому відбуваються.

1.67. Не існує. З великим ступенем точності система відліку, зв'язана із Сонцем, задовольняє умову інерціальності.

1.68. $\Delta p_1 = m v_1 \mathbf{i} + m g t \mathbf{j} - m v_1 \mathbf{i} = m g t \mathbf{j}$, де $\mathbf{i}$ – орт осі Ox , яка розміщена по горизонталі; $\mathbf{j}$ – орт осі Oy , яка напрямлена вниз; $\Delta p_1 = m g t_0 = 8829 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. У другому випадку модуль імпульсу не змінюється. $\Delta p_2 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$, де $\mathbf{p}_2$ – імпульс через час t руху; $\mathbf{p}_1$ – початковий імпульс. Кут між ними $\alpha = v_2 t_0 / R$. За теоремою косинусів $\Delta p_2 = 2 m v_2 \sin(v_2 t_0 / (2R)) = 5,06 \cdot 10^5 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$, де R – радіус Землі.

$$1.69. p = (m - m_1)v_1 = 2 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

$$1.70. F_T = d(m + \mu t)v_1 / dt = \mu v_1 = 160 \text{ Н}.$$

$$1.71. u_1 = v_1 - m(v_1 + v_2)/m_1 = 8,33 \text{ м/с}; \quad u_2 = v_2 - m(v_1 + v_2)/m_2 = 12,73 \text{ м/с}.$$

Імпульс човна після переміщення вантажів $m_1 u_1 = m_1 v_1 - \mu v_1 - \mu v_2$.

$$1.72. v_1 = (m_1 v + m u)/(m_1 + m), \quad v_2 = v, \quad v_3 = (m_3 v - m u)/(m_2 + m).$$

$$1.73. p = n m v^2 = 10 \text{ Н}.$$

1.74. $v = u(1 - \exp(-\mu t_0 / m))$. Рівняння руху має вигляд $m dv/dt = -(u - v)\mu$; $\ln(u - v) = -\mu t/m + \ln C$. Якщо $t = 0$, то $v = 0$, отже, $C = u$.

1.75. $s = (v_0^2 \sin^2 \alpha) / g = 63,71 \text{ м}$. Внутрішні сили, що діють на уламки під час вибуху, не можуть змінити імпульс гранати, тому центр мас уламків рухатиметься так, ніби граната не розірвалась.

$$1.76. v = \sum_{i=1}^N m_i v_i / \sum m_i. \text{ Скористатися виразом для швидкості центра мас. Див.}$$

пояснення до відповіді на задачу 1.75.

1.77. $p = m v = 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. Сумарний імпульс тіла, що рухається довільно, дорівнює $m v_c$, де m – маса тіла, v_c – швидкість центра мас тіла.

1.78. Згідно із сучасними уявленнями в законах Ньютона під тілом слід розуміти матеріальну точку. Але взаємодію тіл скінченних розмірів можна також описувати законами Ньютона, якщо час установлення рівноважного стану в тілах значно менший за час їх взаємодії.

$$1.79. t_1 = \sqrt{2ml/F} = 200 \text{ с}.$$

1.80. Між вагонами пружини стиснуті із силою $F_1 = m_1(a + \mu g) = 8,94 \text{ кН}$. Між електровозом і вагоном $F_2 = (m_1 + m_2)(a + \mu g) = 17,89 \text{ кН}$.

1.81. Сила тяжіння прикладена до центра мас бруска. Сила реакції похилої площини прикладається до бруска в точці перетинання вектора mg з похилою площиною (рис. В.1.1). Сила тертя прикладається в ту саму точку, що й сила реакції. Якщо сила реакції прикладається в іншу точку бруска, то виникає момент сили, який намагається повернути брусок. Сила тертя діє вздовж поверхні контакту. Визначивши рівнодіяну всіх сил тертя, що діють на кожний елемент поверхні контакту бруска, одержимо відповідь.

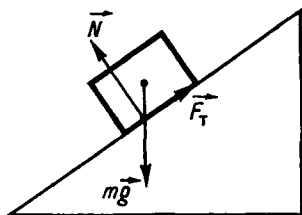


Рис. В.1.1

$$1.82. a = fg = 6,86 \text{ м/с}^2.$$

1.83. $F_1 / F_2 = (\tan \alpha + f) / (\tan \alpha - f)$, якщо $\tan \alpha > f$. Якщо $\tan \alpha \leq f$, то сила F_2 дорівнює нулеві. У другому випадку сила тертя спокою дорівнює $mg \sin \alpha$.

1.84. $\beta = \arctg f$. Умова рівноваги тіла: $mg \sin \alpha + f(mg \cos \alpha - F \sin \beta) = F \cos \beta$. $F = mg(\sin \alpha + f \cos \alpha) / (f \sin \beta + \cos \beta)$. Сила F буде мінімальною, якщо знаменник

максимальний. Перша похідна від знаменника дорівнює нулеві при $\beta = \arctg f$. Друга похідна від знаменника при $0 \leq f < 1$ менша за нуль.

1.85. $f = (\sin \alpha + a/g)(1 - \sin^2 \alpha)^{1/2} = 4,1 \cdot 10^{-2}$. Уздовж похилої площини діють сила тертя (уперед) і складова сили тяжіння (назад); $ma = F_t mg \sin \alpha = f mg \cos \alpha - mg \sin \alpha$.

1.86. а) $a_1 = F/m - f_1 g = 4,11 \text{ м/с}^2$; б) $a_2 = ((F/m - f_2 g)^2 + g^2(\sin \alpha - f_2 \cos \alpha)^2)^{1/2} = 8,65 \text{ м/с}^2$.

За умови а тіло не зісковзує донизу ($\tg \alpha < f$). За умови б тіло зісковзує донизу з прискоренням $g(\sin \alpha - f_2 \cos \alpha)$ і рухається по горизонталі з прискоренням $(F/m - f_2 g)$.

1.87. $a = 0$. Сила, що діє вздовж похилої площини вниз, $mg \sin \alpha$, а вгору $F \sin (\beta - \alpha)$. Друга сила більша, тому брусок не може рухатись вниз. Сила тертя ковзання $f(mg \sin \alpha + F \cos (\beta - \alpha))$. Вона більша, ніж $mg \sin \alpha$, тому брусок не може рухатись вгору. Отже, брусок не рухається.

1.88. $a = (m_2 - m_1)g/(m_1 + m_2) = 5,1 \text{ м/с}^2$; $F = 2^{1/2} m_1 m_2 (1 + f)g/(m_1 + m_2) = 19,98 \text{ Н}$. Коли маса нитки за порядком величини дорівнюватиме масі вантажів, то їх прискорення під час опускання збільшуватиметься. На вісь блока з боку вантажів діють сили натягу F_H і F'_H , кут між якими 90° . $F_H = F'_H = m_1 m_2 (1 + f)g/(m_1 + m_2)$. Результуюча сила $F = F_H 2^{1/2}$.

1.89. $a = (m - (\sin \alpha + f \cos \alpha)(m_1 + m_2))g/(m + m_1 + m_2)$; $F_{H2} = m_1(a + g(\sin \alpha + f \cos \alpha))$; $F_{\text{вн}} = 2F_{H2} \cos (45^\circ - \alpha/2)$. Рівняння руху тіл: $ma = mg - F_{H2}$; $m_1 a = F_{H1} - m_1 g(\sin \alpha + f \cos \alpha)$; $m_2 a = F_{H2} - m_2 g(\sin \alpha + f \cos \alpha) - F_{H1}$.

1.90. $a = (m_1 \sin \beta - m_2 \sin \alpha)g/(m_1 + m_2) = 1,02 \text{ м/с}^2$;

$F_H = m_1 m_2 (\sin \alpha + \sin \beta)g/(m_1 + m_2) = 0,6 \text{ Н}$.

Прискорення тягарців можна визначити з другого закону Ньютона $(m_1 + m_2)a = (m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta)g$. У правій частині рівняння записані зовнішні сили, що діють на тягарці. Силу визначають з рівняння $m_1 a = m_1 g \sin \alpha - F_H$. Блок невагомий, тертя у блоці немає, тому сила натягу нитки з обох його сторін є однаковою. Відповіді не зміняться.

1.91. $F_1 = f_1(m_1 + m_2)g = 19,6 \text{ Н}$; $F_2 = (f_2 - f_1)(m_2/m_1)(m_1 + m_2)g = 39,2 \text{ Н}$.

1.92. $v = v_0 \exp(-kt/m)$; $s = (mv_0/k)(1 - \exp(-kt/m))$. Рівняння руху човна під дією сили опору має вигляд $m \cdot dv/dt = -kv \Leftrightarrow dv/v = -k \cdot dt/m \Leftrightarrow \ln v = -kt/m + \ln C$.

Якщо $t = 0$, то $v = v_0$; $\ln v/v_0 = -kt/m \Leftrightarrow v = v_0 \exp(-kt/m)$, $v = ds/dt$;

$ds = v_0 \exp(-kt/m)dt \Leftrightarrow s = (-mv_0/k) \exp(-kt/m) + C$.

Якщо $t = 0$, то $s = 0$ і $C = mv_0/k$; $v = 0$ при $t \rightarrow \infty$. Практично човен досить швидко зупиниться.

1.93. Підставивши похідну за часом $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$, одержимо рівняння руху

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dx, \text{ звідки } v = v_0 \exp\left(-\frac{k}{m} x\right).$$

1.94. $t_n = m \ln(1 + kv_0/mg)/k$. Рівняння руху тіла $m \cdot dv/dt = -mg - kv$. Інтегрування дає $t = -(m/k) \ln(mg + kv) + C$. Якщо $t = 0$, то $v = v_0$, тому $C = (m/k) \ln(mg + kv_0)$.

1.95. $k = m(v_0 - v_1)/(v_0 v_1 t_1) = 2,38 \cdot 10^{-5}$ кг/м; $mdv/dt = -kv^2$. Після інтегрування $-1/v = -kt/m + C$. Якщо $t = 0$, то $v = v_0$, отже, $C = -1/v_0$; $-1/v_0 + 1/v_1 = kt_1/m$.

1.96. $v = 2\sqrt{m(g+a)/\pi\rho}$; $dp/dt = m(g+a)$. де p – імпульс повітря, що відкидає гвинт за час t ; $p = \rho\pi d^2 v^2 t/4$.

1.97. $F = \rho v^2 S = 40$ Н. $F = dp/dt$, $p = \rho S v^2 t$ – імпульс води, що витікає за час t .

1.98. $\varphi = \arccos(g/4\pi^2 n^2 l) = 46,35^\circ$.

1.99. $P_{1,2} = m\sqrt{v^4/R^2 + g^2 \pm 2v^2 g(\cos\alpha)/R}$; $P_1 = 3,32$ кН; $P_2 = 2,36$ кН.

1.100. $F = m\omega^2 \sqrt{A^2 \cos^2 \omega t + B^2 \sin^2 \omega t}$.

1.101. $\alpha = \arctg(v^2/gR) = 38,19^\circ$; $f = \tg(v^2/gR) = 0,79$.

1.102. Умови рівноваги тіла мають вигляд

$$mg \cos(\alpha/2) = m\omega^2 l \sin^2(\alpha/2) \pm fm/g \sin(\alpha/2) + \omega^2 l \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) = 0.$$

З рівнянь можна одержати, що тіло перебуватиме в рівновазі за умови

$$\sqrt{\frac{g(\cos(\alpha/2) + f \sin(\alpha/2))}{l \sin(\alpha/2)(\sin(\alpha/2) - f \cos(\alpha/2))}} \leq \omega \leq \sqrt{\frac{g(\cos(\alpha/2) + f \sin(\alpha/2))}{l \sin(\alpha/2)(\sin(\alpha/2) - f \cos(\alpha/2))}}. \text{ Мінімальне}$$

значення кутової швидкості $\omega_1 = 5,45$ рад/с, а максимальне $\omega_2 = 12,72$ рад/с.

1.103. а), б) $F = 4\pi n^2 mR = 18,85$ Н.

1.104. $\Delta F = 6mg = 58,86$ Н. Сила натягу в нижній точці $F_{н.н} = mv_1^2/l + mg$, де l – довжина нитки; v_1 – швидкість тіла в нижній точці. У верхній точці $F_{н.в} = mg + mv_2^2/l$, де v_2 – швидкість тіла у верхній точці; $v_1^2 - v_2^2 = 4gl$.

1.105. $n = (2fg/R)^{1/2}/2\pi = 1$ с⁻¹.

1.106. Якщо тіла можна розглядати як матеріальні точки і якщо тіла мають сферично симетричний розподіл густини.

1.107. Сила, з якою система матеріальних частинок діє на деяку частинку, дорівнює векторній сумі окремих сил взаємодії.

1.108. $F = Gm_1 m/(a(a+l))$; $dF = Gm_1 dm/r^2$, де dm – маса елемента довжини стрижня dr ; r – відстань між частинкою і елементом довжини;

$$dm = mdr/l; \quad dF = Gm_1 mdr/(l r^2); \quad F = \int_a^{a+l} Gm_1 m dr/(l r^2).$$

1.109. $F = Gm_1 m_2 / r^2 = 2,75 \cdot 10^{16}$ Н.

1.110. $F = 0$. Розіб'ємо сферичний шар на тонкі сферичні шари. Розглянемо силу взаємодії тонкого сферичного шару з частинкою масою m , що міститься всередині (рис. В.1.2). Нехай маса частини шару, площа поверхні якої 1 м², дорівнює σ . Частинка взаємодіє з частиною

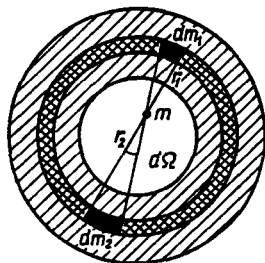


Рис. В.1.2

шару, площа поверхні якої dS_1 , із силою $dF_1 = Gmdm_1/r_1^2$, де $dm_1 = \sigma \cdot dS_1$, $dS_1 = d\Omega r_1^2$, $d\Omega$ – тілесний кут, що спирається на частину шару, площа поверхні якої dS_1 . Аналогічно $dF_2 = Gm\sigma \cdot d\Omega$. Порівнюючи dF_1 і dF_2 , бачимо, що рівнодійна цих сил дорівнює нулеві. Використавши принцип суперпозиції, одержимо відповідь.

1.111. $F = 0$. Див. розв'язок до задачі 1.108.

1.112. Галактика розміщується у центрі сферично-симетричного Всесвіту.

1.113. $g(h) = g(R/(R+h))^2$, де R – радіус Землі; $g(H) = g(1 - (H/R))$. Коли пробне тіло, маса якого m , розміщується на глибині H , шар породи, що лежить зовні сфери радіуса $R-H$, не притягує тіло (див. розв'язок до задачі 1.108). Отже, $mg(H) = G4\pi m(R-H)^3/(3(R-H)^2)$, $g(H) = 4G\rho(R-H) = Gm_3(R-H)/R^3 = g(1 - (H/R))$, де ρ , m_3 – відповідно середня густина і маса Землі.

1.114. $v = R\sqrt{g/(R+h)}$, де R – радіус Землі; $P = 0$, $F_r = mg(R/(R+h))^2$.

1.115. $h = R/((2Rg/v_0^2) - 1) = 494,31$ км, де R – радіус Землі. Рівняння руху снаряда має вигляд $v dv/dx = -g(R/(R+x))^2$, де x – висота, на яку може піднятися снаряд при швидкості його v ; $v dv/dx$ одержали так: $dv/dt = (dv/dx)(dx/dt) = v dv/dx$. Після інтегрування маємо $v^2/2 = gR^2/(R+x) + C$. Якщо $v = v_0$, то $x = 0$ і $C = v_0^2/2 - Rg$. Отже, $v_0^2/2 - v^2/2 = Rgx/(R+x)$. Якщо $v = 0$, то $x = h$.

1.116. $\langle P \rangle = m\sqrt{g^2 + a^2} = 820,68$ Н. Кут між векторами ваги і швидкості $\alpha = 90^\circ + \arctg(a/g) = 107^\circ$. Врахувати, що спортсмен під час руху з прискоренням відштовхується від землі. Сила напрямлена по горизонталі.

1.117. $P = m\sqrt{g^2 + (\omega^2 R)^2} = 4282,2$ Н. Кут, який утворює вага з вертикаллю, $\alpha = \arctg(\omega^2 R/g) = 80,11^\circ$.

1.118. У разі послідовного з'єднання пружин сили, що їх розтягують, є однаковими і дорівнюють силі F , з якою розтягують систему пружин. При цьому видовження системи дорівнює сумі видовжень пружин $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$. Якщо $F = \Delta x k_{\text{екв}}$, то $\Delta x = F/k_{\text{екв}}$. Аналогічно $\Delta x_1 = F/k_1$, $\Delta x_2 = F/k_2$, тобто $F/k_{\text{екв}} = F/k_1 + F/k_2$. Отже, $1/k_{\text{екв}} = 1/k_1 + 1/k_2$ і $k_{\text{екв}} = k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$. У разі паралельного з'єднання $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$, $F = F_1 + F_2$; $\Delta x k_{2\text{екв}} = \Delta x k_1 + \Delta x k_2$, тобто $k_{2\text{екв}} = k_1 + k_2$.

1.119. Зросте в n разів.

1.120. $x = F(k_1 + k_2)/(k_1 k_2)$.

1.121. Так, бо діють сили зчеплення нерівностей поверхонь і сили міжмолекулярного притягання.

1.122. На руйнування поверхневого шару, збільшення внутрішньої енергії тіл та їх пластичні деформації. Зменшується до певної межі, потім зростає внаслідок міжмолекулярного притягання.

1.123. Тяжіння. Сили тертя та пружності є проявом фундаментальної електромагнітної взаємодії.

1.124. Діють лише в неінерціальних системах відліку. Не зв'язані із взаємодією тіл і визначаються лише кінематичними величинами, а маса є параметром.

1.125. а) $ma_1 = F + ma$, де F – сила, що діє на людину; $F_p = m\sqrt{g^2 + (a + a_1)^2}$;
б) $ma_1 = F - ma$, $F_p' = m\sqrt{g^2 + (a - a_1)^2}$.

1.126. $a_1 = \sqrt{a^2 + (g - fa)^2} = 10,7 \text{ м/с}^2$; $a_2 > g/f = 16,35 \text{ м/с}^2$. Проекція прискорення бруска a_{1y} донизу визначається з рівняння $ma_{1y} = mg - fma$; $a_1 = \sqrt{a_{1y}^2 + a^2}$. Брусок не рухається вниз, коли $mg < F_t$, де F_t – сила тертя.

1.127. $a_1 = (m_2 - fm_1)(g + a)/(m_1 + m_2) = 7,7 \text{ м/с}^2$; $F = m_1 m_2 (1 + f)(g + a) \sqrt{2} / (m_1 + m_2) = 30,16 \text{ Н}$. Урахувати, що сила тертя $F_t = m_1(g + a)$; сила, яка діє на тіло масою m_2 , дорівнює $m_2(g + a)$. На вісь діють дві взаємно перпендикулярні сили, які за модулем дорівнюють силі натягу нитки. Згідно з принципом еквівалентності систему відліку, що рухається поступово з прискоренням a , можна замінити системою, в якій діє сила тяжіння з прискоренням вільного падіння – a . З урахуванням цього відповідь у даній задачі збігається з відповіддю на задачу 1.88, якщо замінити g на $g + a$.

1.128. $\alpha = \arctg(g/a) = 84,18^\circ$. Бульбашка піднімається по нормалі до поверхні рідини (див. відповідь на задачу 1.127).

1.129. $\Delta l = m\sqrt{a^2 + g^2} - 2ag/k$ (див. відповідь на задачу 1.127). На тіло діють сили mg і $-ma$. Рівнодійна сила $F = m\sqrt{a^2 + g^2} - 2ag$.

1.130. $a = g(1 - f)/(1 - fm_1/m_2) = g(1 + f)/(f + m_1/m_2)$. Записати умову рівноваги для кожного тіла і сумісно розв'язати рівняння.

1.131. На елемент об'єму, маса якого Δm , що міститься на відстані x від осі обертання, діють відцентрова сила інерції $F_{\text{ин}} = -\Delta m a_0$ та сила тяжіння Δmg (рис. В.1.3). Визначивши результуючу цих сил, можна обчислити кут нахилу дотичної MN до лінії горизонту (осі Ox). Згідно з побудовою маємо $\text{tg} \alpha = \Delta m a_0 / \Delta mg = \omega^2 x / g$. Проте $\text{tg} \alpha = dy/dx$. Підставивши цей вираз у попереднє рівняння, одержимо $dy/dx = \omega^2 x / g$, або $dy = \omega^2 x dx / g$. Зінтегрувавши це рівняння, маємо $y = \omega^2 x^2 / 2g + C$. При даному виборі точки O й осі Ox стала інтегрування $C = 0$. Відношення констант $\omega^2 / 2g$ позначимо k . Тоді рівняння поверхні перетвориться в $y = kx^2$, тобто в рівняння параболи. Отже, поверхня рідини є параболоїдом обертання.

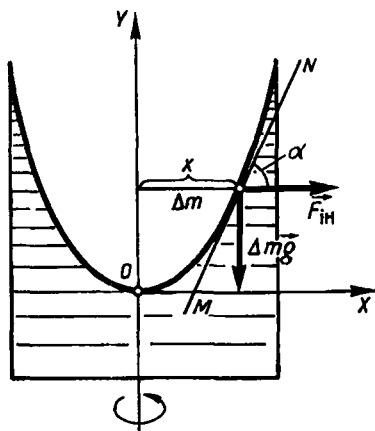


Рис. В.1.3

1.132. $a = g - 2h/t_1^2 = 5.81 \text{ м/с}^2$ (див. відповідь на задачу 1.127).

1.133. $F = 4\pi^2 m R / T^2 = 1.18 \cdot 10^{14} \text{ Н}$.

1.134. $F_{\max} = 4\pi m_C v_3 / T_3 = 8.62 \cdot 10^{30} \text{ Н}$. де m_C – маса Сонця; $v_3 = 29.8 \text{ км/с}$ – швидкість Сонця в системі відліку, зв'язаній із Землею; T_3 – період добового обертання Сонця відносно Землі. Кут нахилу осі Землі до площини екліптики дорівнює 66.5° . Кут між векторами v_c і ω змінюється у межах від 66.5° до 113.5° . Максимальна сила $F_{\max}$ спостерігається в точках сонцестоянь (при куті 90°).

1.135. $a = 4\pi v(\sin \varphi) / T = 1.45 \text{ мм/с}^2$; $\Delta s = 2\pi v t^2(\sin \varphi) / T = 9.42 \text{ км}$. де T – період обертання Землі навколо своєї осі. На схід.

1.136. $x = 2\pi h^2(\cos \varphi) / (T v) = 15.74 \text{ м}$, де T – період обертання Землі навколо своєї осі. На захід.

1.137. $h = 4\pi v l(\sin \varphi) / (g T) = 3.77 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, де T – період обертання Землі навколо своєї осі. Під дією сили Коріоліса вода в напрямі, перпендикулярному до напрямку течії, набуває прискорення $a = 4\pi v(\sin \varphi) / T$. Кут нахилу поверхні води до горизонту (див. відповіді на задачі 1.127, 1.128) $\alpha = \arctg(a/g)$. Кут α малий, тому $\tg \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$, а $h = l \sin \alpha \approx l \alpha / g$.

1.138. $v = 4\pi m_0 / (T m) = 1.09 \cdot 10^{-7} \text{ м/с}$. Вектор швидкості напрямлений на захід. Відносно Землі рівняння руху платформи під час вильоту снаряда має вигляд $mdv/dt = 4\pi m_0 a t / T$ де a – прискорення снаряда у стволі; t – час; T – період обертання Землі навколо своєї осі. Інтегрування дає $v = 4\pi m_0 a t^2 / (2mT) + C$. Якщо $t = 0$, то $v = 0$ і $C = 0$.

1.139. а) $I = ml^2 / 12$; б) $I = ma^2$.

1.140. $I = ma^2 / 3$; $dm = m dz / (l \cos \alpha)$ (див. рис. В.1.4); $x = z \tg \alpha$; $dl_z = m \tg^2 \alpha z^2 dz / (l \cos \alpha)$; $I_z = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} m \tg^2 \alpha z^2 dz / (l \cos \alpha)$, де $z_1 = (l \cos \alpha) / 2$; $I_z = (ml^2 \sin^2 \alpha) / 12$.

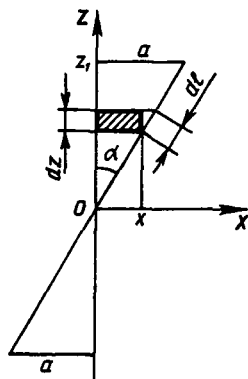


Рис. В.1.4

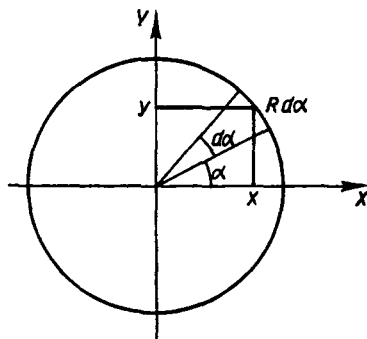


Рис. В.1.5

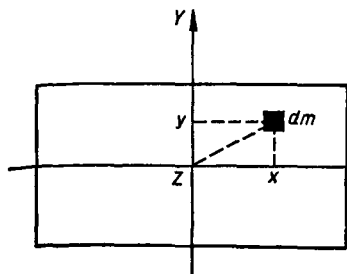


Рис. В.1.6

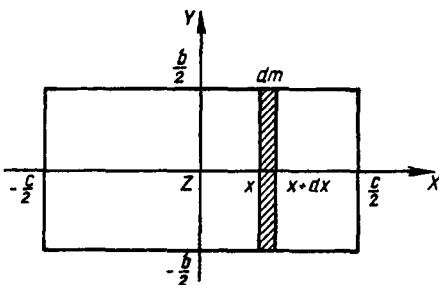


Рис. В.1.7

1.141. а) $I_z = mR^2/2 = 9 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; б) $I_z = 3mR^2/2 = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $dm = m d\alpha / (2\pi)$ (див. рис. В.1.5); $dl_z = x^2 dm = mR^2 \cos^2 \alpha d\alpha / (2\pi)$; $I_z = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos \alpha) mR^2 d\alpha / (4\pi) = mR^2/2$.

Скористатися теоремою Гюйгенса – Штейнера.

1.142. $I_z = m(R_1^2 + R_2^2)/2 = 0,82 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $I_z = m_1 R_1^2 / 2 - m_2 R_2^2 / 2$, де m_1 , m_2 – маси циліндрів радіусами R_1 і R_2 ; $I_z = \pi \rho l (R_1^4 - R_2^4) / 2$, де ρ – густина речовини труби; l – довжина труби; $m = m_1 - m_2 = \pi \rho l (R_1^2 - R_2^2)$. Підстановка $\pi \rho l$ у I_z дає відповідь.

1.143. $dl_x = y^2 dm$; $dl_y = x^2 dm$; $dl_z = dm(x^2 + y^2)$ (рис. В.1.6). Звідси $dl_x + dl_y = dl_z$. Інтегрування дає $I_x + I_y = I_z$.

1.144. $I_z = \rho abc(b^2 + c^2)/12 = 4,19 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $dm = \rho ab dx$ (рис. В.1.7); $dl_y = \rho ab x^2 dx$; $I_y = 2 \int_0^{c/2} \rho ab x^2 dx = \rho abc^3 / 12$. Аналогічно визначається момент інерції

відносно осі Ox : $I_x = \rho abc^3 / 12$; $I_z = I_x + I_y$ (див. відповідь на задачу 1.143).

1.145. а) $I = mR^2(1 - (d/2R)^4 - 2(ld/2R^2)^2)/2 = 0,157 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $I = mR^2/2 - m_1 d^2/8 - m_1 l^2$, де m_1 – маса вирізаної частини, $m_1 = ma^2/(4R^2)$. Тут використано адитивність моменту інерції та теорему Гюйгенса – Штейнера. Момент інерції диска відносно осі, що проходить через його діаметр, $I = mR^2/4$ (див. відповідь на задачу 1.143); б) $I = mR^2(1 - (d/2R)^4)/4 = 7,97 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $I = mR^2/4 - m_1 d^2/16$.

1.146. $\varepsilon = (m_2 - m_1)g / R(m_1 + m_2 + m/2) = 18,69 \text{ рад/с}^2$; $F = (8m_1 m_2 + 3(m_1 + m_2)m + m^2)g / (2(m_1 + m_2) + m) = 52,09 \text{ Н}$. Рівняння руху тіл (рис. В.1.8): $ma = (T_2 - T_1)g$, $m_2 a = m_2 g - T_2$,

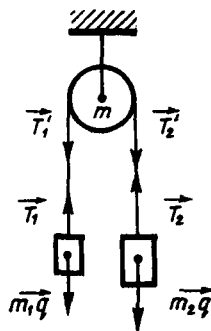


Рис. В.1.8

$m_1 a = T_1 - m_1 g$. Додаючи праві та ліві частини рівнянь, визначимо прискорення a . Сила, що діє на вісь, $F = mg + T_1 + T_2$. Сили T_1 і T_1 та T_2 і T_2 є однаковими за модулем.

1.147. $a = 2m_2 g / (m_1 + 2m_2)$, $F = m_1 g (m_1 + 3m_2) / (m_1 + 2m_2)$; $la / R = TR$, де $I = mR^2 / 2$; T – сила натягу нитки; $m_2 a = m_2 g - T$; $F = m_2 g + T$.

1.148. $v = 2gt / 3 = 6,54$ м/с; $v_A = 2\sqrt{2}gt / 3 = 9,25$ м/с. Рівняння руху тіла $ma = mg - T$, $I\epsilon = TR$, де $I = mR^2 / 2$ – момент інерції циліндра; T – сила натягу нитки. Швидкість $v_A = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, де $v_y = at$ – вертикальна проекція швидкості; $v_x = \omega R = \epsilon t R = at$ – горизонтальна проекція швидкості.

1.149. $a = (g - a_0) / 2$; $T = m(g - a_0) / 4$; $ma = m(g - a_0) - 2T$; $I\epsilon = 2TR$, де $I = mR^2$; $\epsilon = a / R$ (див. пояснення до відповіді на задачу 1.127).

1.150. $a_1 = 2(m_1 g - At_1 - Bt_1^3) / (2m_1 + m) = 1,92$ м/с² – вантаж рухається вниз; $a_2 = 2(At_2 + Bt_2^3 - m_1 g) / (2m_1 + m) = 4,88$ м/с² – вантаж рухається вгору. Якщо $t = t_1$, то рівняння руху мають вигляд $m_1 a = T - m_1 g$; $I\epsilon = (F - T)R$, де $I = mR^2 / 2$, $\epsilon = a / R$, T – сила натягу нитки з вантажем.

1.151. $a_1 = (m_1 R_1 - m_2 R_2) R_1 g / (I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) = 1,23$ м/с²; $a_2 = (m_1 R_1 - m_2 R_2) \times R_2 g / (I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) = 0,61$ м/с²; $T_1 = m_1 g (I + m_2 R_2 (R_1 + R_2)) / (I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) = 17,17$ Н; $T_2 = m_2 g (I + m_1 R_1 (R_1 + R_2)) / (I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) = 31,27$ Н. Перший вантаж рухається вниз. Напрямок руху вантажів визначається порівнянням моментів сил тяжіння, що діють на східчастий блок: $m_1 g R_1 > m_2 g R_2$. Рівняння руху тіл: $m_1 \epsilon R_1 = m_1 g - T_1$; $m_2 \epsilon R_2 = T_2 - m_2 g$; $I\epsilon = T_1 R_1 - T_2 R_2$, де ϵ – кутове прискорення. Тут ураховано, що кутове прискорення блока не залежить від радіуса.

1.152. $v = m_3 g t / 2\pi((m_1 R^2 / r) + r(m_3 + m_2 / 2)) = 86,28$ с⁻¹.

1.154. $L = m\omega l^2 \sin(\theta/2) = 0,02$ кг·м²/с. Під час обертання маятника вектор L описує конус, вершина якого лежить на вертикальній прямій, з кутом при вершині $\theta' = \pi - \theta = 120^\circ$.

1.155. $M_O = [r mg] = -mgv_0 t k \cos \alpha$, де $r = v_0 t i \cos \alpha + (v_0 t \sin \alpha - gt^2 / 2) j$ – радіус-вектор центра мас тіла в момент часу t ; i, j, k – орти осей координат (осі розташовані так, що тіло рухається в площині xOy); $M_O = mgtv_0 \cos \alpha = 98,1t$ Н·м; $L_O = [rmv] = -mv_0 t^2 g k (\cos \alpha) / 2$. $L_O = 49,05t^2$ кг·м²/с.

1.156. З умови задачі випливає, що $r_{Oi} = r_{O'i} + r_{OO'}$, де $r_{Oi}, r_{O'i}$ – відповідно радіуси-вектори i -ї частинки системи відносно точок O і O' . Векторне множення правої частини рівняння на імпульс p , i -ї частинки дає: $L_{Oi} = L_{O'i} + [r_{OO'} p_i]$, де $L_{Oi}, L_{O'i}$ – моменти імпульсу i -ї частинки відносно точок O і O' відповідно. $\sum [r_{OO'} p_i] = [r_{OO'} p]$.

1.157. $L_C = m_3 v_3 r_0 = 2,67 \cdot 10^{40}$ кг·м²/с, де m_3 – маса Землі; v_3 – середня швидкість руху Землі навколо Сонця; r_0 – середня відстань від Землі до Сонця; $L_0 = 0,8\pi m_3 R_3^2 / T = 7,06 \cdot 10^{33}$ кг·м²/с, де T – період обертання Землі навколо своєї осі.

1.158. $L_z = 4\pi m R^2 / 3 = 419$ кг·м²/с. Момент інерції кульового шару визначаємо як різницю моментів інерції куль радіусами R і $R - \Delta R$: $I = 8\pi\rho(R^5 - (R - \Delta R)^5)/15$, де ρ – густина речовини, з якої виготовлено тіло; ΔR – товщина шару. Маємо $\Delta R \ll R$, тому $1 - (1 - \Delta R/R)^5 \approx 5\Delta R/R$. Маса тіла $m = 4\pi\rho R^2 \Delta R$. Момент інерції тонкого кульового шару визначаємо інтегруванням. Момент інерції кільця (рис. В.1.9) $dl_x = r^2 dm$, де $dm = m \sin(\alpha d\alpha/2)$ (поверхнева густина шару $m/(4\pi R^2)$, площа кільця $2\pi R^2 \sin \alpha d\alpha$).

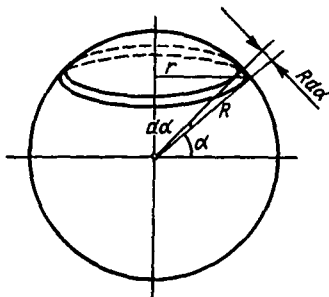


Рис. В.1.9

Момент інерції тіла $I_z = \int_0^{\pi/2} m R^2 \sin^3 \alpha d\alpha/2 = m R^2 \int_1^0 (\cos^2 \alpha - 1) d(\cos \alpha) = 2m R^2 / 3$.

1.159. $L_z \approx m d^2 \omega / 8 = 9 \cdot 10^{-4}$ кг·м²/с.

1.160. $L = 2m v R = 2$ кг·м²/с. Скористатися теоремою Гюйгенса – Штейнера.

1.161. $L_z = \frac{m v}{r} \sqrt{0,16 R^4 + r^4 + 0,96 R^2 r^2 - 0,8 R r (0,4 R^2 + r^2) \cos \theta}$. $L = L_1 + L_2$, де

L_1 – псевдовектор моменту імпульсу, що зв'язаний з рухом по колу; L_2 – момент імпульсу, що зв'язаний з обертанням кульки навколо своєї осі. Кут між L_1 і L_2 дорівнює $\pi - \theta$; $L_1 = m v (0,4 R^2 + r^2) / r$; $L_2 = 0,4 m v R$; $L_z = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 - 2 L_1 L_2 \cos \theta}$.

1.162. Зв'язок між векторами моменту M сил, що діють на гіроскоп, моменту імпульсу L гіроскопа і кутовою швидкістю Ω прецесії дається формулою $M = [\Omega L]$. Звідси $\Omega = M / (L \sin \alpha) = g l / (\pi n R^2) = 0,67$ с⁻¹; Ω від α не залежить.

1.163. $\langle \epsilon \rangle = 2\pi(n_1 - n_2)/t = 7,96$ рад/с²; $\langle M \rangle = 2\pi I(n_1 - n_2)/t = 3,98$ Н·м.

1.164. $M(t) = 0,8 m R^2 (3 A t + B)$; $M(t_1) = 0$; $M(t_2) = 0,24$ Н·м.

1.165. $m = 2(FR - M_\tau)/\epsilon R^2 = 50$ кг.

1.166. $a = 0,71 g \sin \alpha$; $\alpha_1 = \arctg(3,5f)$. Коли куля скочується без ковзання, рівняння її руху мають вигляд $ma = mg \sin \alpha - F_\tau$; $I\epsilon = F_\tau R$, де $\epsilon = a/R$, $I = 0,4 m R^2$, F_τ – сила тертя спокою. Звідси випливає, що сила тертя у стані спокою $F_\tau = 2Mg(\sin \alpha)/7$. Ковзання відбувається при $F_\tau > fmg \cos \alpha$.

1.167. $\epsilon = fg/R$; $N = R\omega_0^2/(4\pi fg)$.

1.168. $M = Am R^2 \omega^2 \cos(\omega t + \pi/2)/2$. $L = Am R^2 \omega (\cos \omega t)/2$.

1.169. $L = mg R t_1 = 2,94$ кг·м²/с.

$$1.170. F_{BC} = mg/\cos(\alpha - 90^\circ) = 11,33 \text{ Н}; F_{AH} = mg \tan 30^\circ = 5,66 \text{ Н}.$$

1.171. $m = 2((F_3 - F_2)l_1 + F_1(l - l_1)\sin\alpha)/g(l - 2l_1) = 0,56 \text{ кг}$. Умова рівноваги стрижня відносно точки O має вигляд $F_3l_1 + F_1(l - l_1)\sin\alpha + mg l_1^2/(2l) = F_2l_1 + mg(l - l_1)^2/(2l)$.

$$1.172. F = mg/2\cos(\alpha/2) = 98,1 \text{ Н}.$$

1.173. $f \geq 0,5 \tan \varphi$. Умови рівноваги лінійок мають такий вигляд: $mg(l \sin \varphi)/2 + Fl \cos \varphi = mg l \sin \varphi$; $F \leq fmg$, де F – сила тертя між лінійкою і столом, l – довжина лінійки.

$$1.174. F \geq mg \sqrt{h(2R - h)}/(R - h).$$

1.175. Рівняння руху котушки $F \cos \alpha - F_T = ma$, $F_T R - Fr = I\epsilon$, $a = \epsilon R$; звідси $a = F(\cos \alpha - (r/R))/(I/R^2 + m)$; тоді: а) $\cos \alpha > 0$, котушка намотується, якщо $\cos \alpha > r/R$; б) $a = 0$, котушка ковзає, якщо $\cos \alpha = r/R$; в) $a < 0$, котушка змотується, якщо $\cos \alpha < r/R$.

$$1.176. \alpha = \arctg(3m_2/(8m_1)).$$

$$1.177. T = mg(l + R)(l^2 + 2lR)^{1/2} = 76,9 \text{ Н}; F = mgR/(l^2 + 2lR)^{1/2} = 8,48 \text{ Н}.$$

$$1.178. x = r^2 R / (2(R^2 - r^2)).$$

1.179. Відстань від середини сторони із залізного дроту до центра мас рамки $x = 8,86 \text{ см}$.

$$1.180. \beta = 19,1^\circ.$$

1.181. Умови рівноваги терезів: $P_1 l_1 = P l_2$; $P l_1 = P_2 l_2$; звідси $P = \sqrt{P_1 P_2} = 82,46 \text{ Н}$.

$$1.182. h = 2R \tan \alpha.$$

1.183. Покажемо сили, що діють на драбину (рис. В.1.10). Запишемо умови рівноваги в скалярній формі:

$$1. \text{ Ох: } N_A - F_T = 0; \quad (1)$$

$$\text{Оу: } F_T + N_B - mg = 0; \quad (2)$$

$$2. N_A l \sin \alpha = mg \frac{l}{2} \cos \alpha + F_T \cos \alpha. \quad (3)$$

Переписавши (1) і (2), одержимо $N_A - N_B f_2 = 0$; $N_A f_1 N_B - mg = 0$.

Переписавши (3), матимемо

$$N_A + N_A f_1 \tan \alpha - \frac{mg}{2} \tan \alpha = 0.$$

Розв'язуючи рівняння відносно $\tan \alpha$, одержуємо

$$N_A - N_B f_2 = 0, \quad N_A f_1 + N_B - mg = 0, \quad N_A + N_A f_1 \tan \alpha - \frac{mg}{2} \tan \alpha = 0.$$

$$\text{Звідси} \quad \tan \alpha = \frac{2f_2}{1 - f_1 f_2}, \quad \alpha = \arctg\left(\frac{2f_2}{1 - f_1 f_2}\right), \quad (4)$$

де f_1 – коефіцієнт тертя драбини об стіну, а f_2 – об підлогу. У даному випадку $f_1 = f_2 = f$. Тоді з (4) випливає

$$\alpha = \arctg\left(\frac{2f}{1 - f^2}\right) = 41,54^\circ.$$

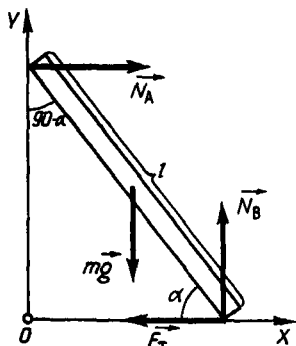


Рис. В.1.10

1.184. До обола, при цьому обертаючий момент удвічі більший.

1.185. $l_1 = l m_2 / (m_1 + m_2) = 7,5 \text{ м.}$

1.186. $r = 4667 \text{ км.}$

1.187. $l = 2 \text{ мдс} / (F_2 l^2) = 2,88 \cdot 10^{11} \text{ м, де } m - \text{маса Землі; } dF_1 = l F_2, \text{ де } F_1 - \text{сила, з якою важіль діє на Землю; } a = F_1 / m, \text{ де } a - \text{прискорення Землі; } s = at^2 / 2.$

1.188. У загальному випадку – ні. Центр мас кожної частини і центр мас фігури лежать на одній прямій. Якщо маси частин m_1 і m_2 , а відстані від центра фігури до центрів мас частин d_1 і d_2 , то умови рівноваги фігури відносно лінії розрізу $d_1 m_1 = d_2 m_2$. Звідси випливає, що $m_1 = m_2$ лише при $d_1 = d_2$. Це частковий випадок.

1.189. $M = (mga \sin \alpha) / 2.$

1.190. $f = \text{ctg } \theta$. Частинки гравію перебуватимуть у рівновазі за умови $mg \cos \theta \leq fmg \sin \theta$.

1.191. $M = fmgR = 44,14 \text{ мН} \cdot \text{м.}$

1.192. $p = t_1^2 (At_1 / 3 + B / 2) = 12 \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$

1.193. $p(t) = m A \omega \cos (\omega t + \varphi + \pi / 2).$

1.194. $p(x) = m \sqrt{v_0^2 - kx^2} / m.$

1.195. $\alpha_1 = \arccos (p_1 / p) = 53,13^\circ$; $\alpha_2 = \arccos (p_2 / p) = 36,87^\circ$.

1.196. а) $u_1 = ((m_2 - m_1)v_1 + 2m_2v_2) / (m_1 + m_2) = 3 \text{ м/с}$; $u_2 = ((m_2 - m_1)v_2 - 2m_1v_1) / (m_1 + m_2) = 0$; б) $u_1 = ((m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2) / (m_1 + m_2) = 2,33 \text{ м/с}$; $u_2 = ((m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1) / (m_1 + m_2) = 1,33 \text{ м/с.}$

1.197. $u_1 = u_2 = \sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2} / (m_1 + m_2) = 1 \text{ м/с.}$

1.198. Закони збереження імпульсу й енергії в даному разі мають вигляд $mv = mu_1 + mu_2$; $mv^2 / 2 = mu_1^2 / 2 + mu_2^2 / 2$. Після очевидних скорочень одержимо висновки, що v , u_1 , u_2 задовольняють теорему Піфагора.

1.199. Шайби рухаються назустріч одна одній. Удар центральний. Тоді $u_1 = ((m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2) / (m_1 + m_2) = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $u_1 = 5 \text{ м/с}$; $u_2 = ((m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1) / (m_1 + m_2) = 2(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$; $u_2 = 10 \text{ м/с.}$

1.200. Шайби рухаються перпендикулярно одна до одної. Тоді $u_1 = u_2 = (m_1v_1 - m_2v_2) / (m_1 + m_2) = 1,67\mathbf{j}$; $u_1 = u_2 = 1,67 \text{ м/с.}$ Кулі рухаються вздовж осі Oy .

1.201. $u_1 = ((m_1 - m_2)v_1 - 2m_2v_2) / (m_1 + m_2) = 2 \text{ м/с}$; $u_2 = ((m_1 - m_2)v_2 + 2m_1v_1) / (m_1 + m_2) = 16 \text{ м/с.}$ Напрями швидкостей шайб змінилися на протилежні.

1.202. $p = \sqrt{2gm}(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) = 3,36 \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$ Вектор p напрямлений усередину плити перпендикулярно до її поверхні.

1.203. $\beta = \arctg (\text{ctg } \alpha - 2f) = 33,13^\circ$. Якщо $\text{ctg } \alpha \leq 2f$, то $\beta = \pi / 2$.

1.204. $n = (m + m_1) / (m - m_1) = 2,33 \text{ раза.}$

1.205. $v_2 = \sqrt{m^2(v^2 + g^2 t_0^2 - 2vgt_0 \sin \alpha) - m_1^2 v_1^2} / (m - m_1) = 758,5 \text{ м/с.}$

У момент t_0 імпульс уламків $p(t_0) = mv_c$, де $v_c = \sqrt{v^2 + g^2 t_0^2 - 2vgt_0 \sin \alpha}$ – швидкість, яку мав би снаряд у момент t_0 , якби він не розірвався. Імпульс другого уламка дорівнює $(m - m_1)v_2 = \sqrt{m^2 v^2 - m_1^2 v_1^2}$.

1.206. Ні. Зберігається проекція імпульсу на вісь Ox .

1.207. $u = mv_0 \cos \alpha / (m + m_1) = 5,73 \text{ м/с}$.

1.208. $v = (4m_2 + m_1)g \ln((4m_2 + m_1)/(4m_2 + m_1 - 2\mu t)) / (2\mu - g) = 0,51 \text{ м/с}$, де $t_1 = (m_2 - 2m_1) / 4\mu = 1 \text{ с}$. Рівняння руху тіл: $m_2 a = m_2 g - T_1$; $(m_2 - \mu) a = T_2 (m_2 - \mu) g$; $m_1 a / 2 = T_1 - T_2$, де T_1, T_2 – відповідно сила натягу троса з боку вантажу та контейнера. Додаючи праві та ліві частини рівнянь, одержуємо $a = 2\mu g t / (4m_2 - 2\mu + m_1)$;

$$v = \int_0^{t_1} a(t) dt.$$

1.209. $(m_0 - \mu t) dv/dt = -\mu u + mg$; $v = u \ln(m_0 / (m_0 - \mu t)) - gt$.

1.210. $v = g(m + \mu t) / k$.

1.211. $(m - \mu t) dv/dt = F - \mu u$; $v = (F - \mu u) \ln(m_0 / (m_0 - \mu t)) / \mu$.

1.212. $m = m_0 \exp(-at/u)$. Рівняння руху ракети має вигляд $ma = -udm/dt$.

1.213. $L_{z1} = L_z$.

1.214. $\omega = \omega_0 / 6$.

1.215. $\omega = (\omega_1 R_1^5 + \omega_2 R_2^5) / (R_1^3 + R_2^3)^{5/3} = 3,4 \text{ рад/с}$.

1.216. $n = \omega_2 / \omega_1 = (R_1 / R_2)^2 = 2,5 \cdot 10^5 \text{ разів}$.

1.217. $\omega'_{1,2} = R_2(I_2\omega_2 \pm I_1\omega_1) / (I_1 + I_2)$; а) $\omega'_1 = 13 \text{ рад/с}$; б) $\omega'_2 = 5 \text{ рад/с}$.

1.218. а) Момент імпульсу системи відносно осі обертання другого диска до стикання дорівнює $I_2\omega_2 - I_1\omega_1$, а після – $I_2v/R_2 - I_1v/R_1$, де v – лінійна швидкість крайніх точок дисків. Під час стикання дисків момент зовнішніх сил дорівнює нулеві, тому використовуємо закон збереження моменту імпульсу: $\omega'_1 = R_2(I_2\omega_2 - I_1\omega_1) / (I_2R_1 - I_1R_2) = 7 \text{ рад/с}$; $\omega'_2 = R_1(I_2\omega_2 - I_1\omega_1) / (I_2R_1 - I_1R_2) = 5 \text{ рад/с}$; б) $\omega'_1 = R_2(I_2\omega_2 + I_1\omega_1) / (I_2R_1 - I_1R_2) = 39,67 \text{ рад/с}$; $\omega'_2 = R_1(I_2\omega_2 + I_1\omega_1) / (I_2R_1 - I_1R_2) = 28,33 \text{ рад/с}$.

1.219. $v_1 = kv = 18,84 \text{ м/с}$.

1.220. $v_2 = v_1 l / (l + m l^2 / 12) = 0,36 \text{ с}^{-1}$.

1.221. $I = mR^2 v_2 / (v_1 - v_2) = 1,45 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

1.222. $\omega = mvr / (mr^2 + (MR^2/2)) = 0,114 \text{ рад/с}$.

1.223. $\omega = 3m_2v / ((m_1 + m_2)l) = 0,27 \text{ рад/с}$.

1.224. $\omega = 12m_1v_0 / ((4m_1 + m)l)$. У даному разі закони збереження імпульсу, моменту імпульсу та енергії мають вигляд: $m_1v_0 = m v_0 - m_1v$; $m_1v_0 l/2 = I\omega - m_1v l$; $m_1v_0^2/2 = I\omega^2/2 + m_1v^2/2 + m v_1^2/2$, де $I = m l^2/12$ – момент інерції стрижня відносно осі, що проходить через його центр мас; v – швидкість кульки після зіткнення; v_1 – швидкість стрижня.

1.225. $v = v_0 m_1 / m$; $\omega = 6m_1 v_0 / (m l)$.

1.226. $v = (D I_m)^{1/2} \phi_0 / (m R) = 192 \text{ м/с}$.

1.227. $T = 164,32 \text{ року}$.

$$1.228. n = 1,88; v_1 = 24,14 \text{ км/с.}$$

$$1.229. n = (1 + \epsilon)/(1 - \epsilon) = 19.$$

1.230. Велика вісь еліптичної орбіти супутника $2a = r + R$, де R – радіус Землі. Період обертання супутника по коловій орбіті радіуса a : $T = 2\pi a/v$, де v – швидкість супутника на цій орбіті. Тоді $m v^2/a = G M m/a^2$, або $v = \sqrt{GM/a} = R\sqrt{G/a}$, де M – маса Землі. Отже, $T = 2\pi\sqrt{a^3/g}/R$. Час падіння $t = T/2 = \pi\sqrt{(r+R)^3/g}/(2R) = 61,29 \text{ хв.}$

$$1.231. L = mR\sqrt{g(r_1 + r_2)/2} = 3,6 \cdot 10^5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с, де } R \text{ – радіус Землі.}$$

1.232. $A = m(fgs + v^2/2) = 8648 \text{ Дж.}$ Робота сили дорівнює приростові кінетичної енергії тіла та роботі проти сили тертя.

$$1.233. A = (F_2 + F_1)s_1/2 = 250 \text{ Дж; } A = \int_0^{s_1} F ds. \text{ За умовою } F = F_0 + ks, \text{ де } F_0, k \text{ – сталі.}$$

Якщо $s = 0$, то $F = F_1$, тоді $F_0 = F_1$. Якщо $s = s_1$, то $F = F_2$, тоді $k = (F_2 - F_1)/s_1$. Отже,

$$A = \int_0^{s_1} (F_1 + (F_2 - F_1)/s) ds. \text{ Можна було скористатися тим, що сила рівномірно зростає.}$$

Тоді $A = \langle F \rangle s_1$, де $\langle F \rangle = (F_1 + F_2)/2$ – середнє значення сили.

$$1.234. A = (a_1 + fg) \cdot 2\pi R m = 2,48 \text{ МДж.}$$

$$1.235. \text{ а) } A = (s_2 - s_1)(B(s_2 + s_1)(2+C)); \text{ б) } A = B(s_2^2 - s_1^2)/3 + C(s_2^2 - s_1^2)/2 + D(s_2 - s_1).$$

1.236. $A \geq mg(h + fl) = 13,73 \text{ Дж.}$ Робота підйому тіла на малу висоту Δh гірки (таку, що кут нахилу гірки при цьому можна вважати сталим), $\Delta A = mg \times x(\sin \alpha + f \cos \alpha) \Delta h / \sin \alpha = mg \Delta h + mgf \Delta h \cotg \alpha = mg \Delta h + mgf \Delta l$, де Δl – довжина основи частини гірки заввишки Δh . Якщо скласти елементарні роботи, то одержимо відповідь. При рівномірному підйомі робота є мінімальною.

$$1.237. s = v^2/(2fg) = 0,36 \text{ м; } A = m v^2/2 = 12,5 \text{ Дж.}$$

$$1.238. f = (h - A/(mg))/l = 0,05.$$

$$1.239. P = \mu v^2 = 14 \text{ кВт.}$$

$$1.240. P = mgv/2.$$

$$1.241. T = (m v_0^2 + g^2 t^2 - 2 v_0 g t \sin \alpha)/2 = 50 + 96,24 t^2 - 98,1 t \quad (T \text{ – енергія, Дж; } t \text{ – час, с); } U = mg(v_0 t \sin \alpha - g t^2/2) = 49,05 t - 4811,8 t^2, \text{ Дж.}$$

$$1.242. A = mgl/50 = 0,2 \text{ Дж.}$$

$$1.243. A = mgl\eta(1 - \eta)/2 = 1,84 \text{ Дж.}$$

$$1.244. \eta = \left(1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\right) \left(1 - \frac{m_1}{m}\right) = 95,81 \cdot 10^{-2}.$$

$$1.245. \langle F \rangle = m v^2/(2l) = 125 \text{ кН.}$$

$$1.246. u_1 = v_1(1 - m_2(1 + \sqrt{1 - 2Q(m_1 + m_2)/(m_1 m_2 v_1^2)})/(m_1 + m_2)) = 8,065 \text{ м/с;}$$

$$u_2 = m_1 v_1(1 + \sqrt{1 - 2Q(m_1 + m_2)/(m_1 m_2 v_1^2)})/(m_1 + m_2) = 23,87 \text{ м/с. } m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2;$$

$$m_1 v_1^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + 2Q. \quad u_1 = v_1 - (m_2 u_2)/m_1; \quad m_2 u_2 (v_1 + u_1) = m_2 u_2^2 + 2Q. \quad u_2 v_1 = u_2 v_1.$$

Система рівнянь має два розв'язки, але лише один розв'язок задовольняє умови $u_1 = 0$

і $u_2 = v_1$ при $Q = 0$ і $m_1 = m_2$.

$$1.247. p = m\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos(\alpha + \beta)} = 10,24 \text{ кг·м/с}; \quad Q = m(v_1^2 - v_2^2)/2 = 32 \text{ Дж.}$$

$$1.248. l_1 = 2l = 10 \text{ см.}$$

1.249. а) $a = g/(1 + R^2/(2r^2))$; $F = mg/(2(1 + 2r^2/R^2))$; прискорення і сила натягу не залежать від того, куди рухається диск – вгору чи вниз; б) $T = mgh/(1 + 2r^2/R^2) = 5,79 \text{ Дж.}$

$$1.250. t = 4\pi^2 n^2 l/P = 5 \text{ с.}$$

1.251. Частота обертання збільшиться в I_1/I_2 разів, де I_1, I_2 – моменти інерції спортсмена до і після підняття рук. Кінетична енергія збільшиться в I_1/I_2 разів за рахунок роботи, яку спортсмен виконує під час підняття рук.

1.252. Лінійне прискорення не зміниться, а механічна енергія збільшиться (див. відповідь на задачу 1.250). Енергія збільшилась за рахунок роботи спортсмена.

$$1.253. F_n = mg(1 + h/0,7R) = 2,59 \text{ Н}; \quad F_s = 0,91 \text{ Н.}$$

$$1.254. \text{а) } h = 2,5 \text{ R; б) } h = 2,7 \text{ R.}$$

1.255. До удару проковзування не було. Під час відбивання швидкість центра мас змінюється на протилежну, а значення і напрям кутової швидкості не змінюються. Тому з'являється проковзування і сила тертя ковзання починає виконувати роботу. Внаслідок цього зменшуються кутова швидкість обертання і швидкість центра мас. Кутова швидкість зменшується до нуля, а потім змінює напрям і, отже, куля покотиться. Кутова швидкість зростає доти, доки не зникне проковзування, тоді швидкість центра мас у кожний момент часу $v_c = \omega R$. Закон збереження енергії при цьому має вигляд $mv_0^2/2 + I\omega_0^2/2 = mv_1^2/2 + A_\tau$, де m, I – маса і момент інерції кульки; v_0 – швидкість центра мас кульки; ω_0 – кутова швидкість її до удару; v_1 – швидкість центра мас кульки, коли вона знову починає котитися без проковзування; A_τ – робота сили тертя ковзання. Тоді $A_\tau = I\omega_0^2/2 + I\omega_1^2/2$, де ω_1 – кутова швидкість. Отже, $v = \sqrt{5/7} v_0$.

$$1.256. A = Fl \sin \varphi.$$

1.257. Для обруча $A = m(g h - v^2)$; для циліндра $A = m(g h - 0,75v^2)$; для кульки $A = m(g h - 0,7v^2)$.

1.258. $a = 0,71g \sin \alpha = 3,5 \text{ м/с}^2$; $F_\tau = 0,29mg \sin \alpha = 0,14 \text{ Н}$; $A = 0$. Рівняння руху кульки мають вигляд $ma = mg \sin \alpha - F_\tau$; $F_\tau = 0,4mR\epsilon$; $a = \epsilon R$, де ϵ, R – відповідно кутове прискорення кульки та її радіус.

1.259. $h = R/1,7$. Закон збереження енергії записується у вигляді $mg(R - h) = mv^2/2 + I\omega^2/2$, де I – момент інерції кульки.

1.260. $h = 0,7 v_0^2/g = 7,14 \text{ м}$. Висота визначається із закону збереження енергії $mv^2/2 + I\omega^2/2 = mgh$, де m, I – відповідно маса кулі та її момент інерції.

$$1.261. M = \eta P/2\pi n \cdot 100 \% = 2,95 \text{ Н·м.}$$

$$1.262. A = \pi f g m l_0 = 27,74 \text{ Дж.}$$

1.263. $A = \pi m g f R/3 = 2,62 \text{ Дж}$; $dA = \pi r dF/4$, де dF – сила тертя, що діє на тонке кільце радіуса r ; $dF = 2f g m r d r/R^2$.

$$1.264. N = 3\pi R n^2 / (4fg) = 6.$$

$$1.265. T_2 = L_1 \epsilon t_2^2 / (2t_1) = 281,25 \text{ кДж}.$$

$$1.266. n = v\sqrt{m/I} / (2\pi) = 11\,429 \text{ хв}^{-1}.$$

1.267. $\omega = 2m_2\sqrt{2gh} / (m_1 + 2m_2)R = 3,69 \text{ рад/с}$. При ударі механічна енергія не зберігається, тому треба використати закон збереження моменту імпульсу. Ні, неможливо.

$$1.268. \alpha = \arccos\left(1 - \frac{v^2}{3lg}\right) = 62,85^\circ.$$

1.269. $\varphi \approx \arccos(1 - 3m_2^2 v_0^2 (l - l_1)^2 / (gm_1^2 l^3)) = 18^\circ$. Закони збереження моменту імпульсу і енергії записуються у вигляді $m_2 v_0 (l - l_1) = m_1 l^2 \omega^2 / 3$; $m_1 g l (1 - \cos \varphi) / 2 = l \omega^2 / 2$, де ω – початкова кутова швидкість стрижня. Моментом імпульсу та енергією кулі після удару нехтуємо.

$$1.270. T_n / T_o = 2(m_1 + m_2) / m = 1,5.$$

$$1.271. \mathbf{F} = (a - 2bx_0 / (x_0^2 + y_0^2))\mathbf{i} - (2by_0 / (x_0^2 + y_0^2))\mathbf{j}.$$

1.272. $x_0 = 2^{1/6} a$. Сійкою. Якщо $x = x_0$, то $F_x = -dU/dx = 0$. $F_x(x_0 - \Delta x) < 0$, $F_x(x + \Delta x) > 0$, де Δx – приріст координати x . З нерівностей випливає, що рівновага є сійкою.

$$1.273. r_0 = 2a; F = 0.$$

$$1.274. A = -((y_B - y_A)\partial U/\partial y + (z_C - z_B)\partial U/\partial z + (x_D - x_C)\partial U/\partial x) = 12 \text{ Дж};$$

$$U_A - U_D = 12 \text{ Дж}.$$

1.275. Простір має бути однорідним та ізотропним.

1.276. Ні, не існує. Припустимо, що така швидкість є. Розглянемо n інерціальних систем відліку, які рухаються одна відносно одної зі швидкістю V уздовж додатного напрямку осі Ox . Нехай $v_x^{(n)}$ – швидкість поширення сигналу в системі $K^{(n)}$, відносно якої джерело сигналу перебуває в стані спокою. Тоді швидкість сигналу v_x відносно системи K : $v_x = v_x^{(n)} + nV$. Оскільки n – необмежене число, то можна дійти висновку, що швидкість v_x є необмеженою.

1.277. Будуть. Це впливає з припущення про існування в механіці Галілея – Ньютона сигналів, які поширюються з нескінченною швидкістю.

$$1.278. v_1 = H|r - R|.$$

$$1.279. v = s / (2t_1) = 0,3 \text{ км/год}.$$

$$1.280. v_1 = v_0 + gt; v_1 = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 + 2tv_0 g}; v_2 = v_0.$$

$$1.281. \Delta r = |r_1 - r_2 + (v_1 - v_2)t|.$$

$$1.282. v_1 = \sqrt{v^2 + g^2 t^2} = 10,44 \text{ м/с}; a_1 = a.$$

1.283. Якщо $v_1 \sin \alpha > v_2$, то $\beta = \arctg(\tg \alpha - v_2 / v_1 \cos \alpha)$; якщо $v_1 \sin \alpha = v_2$, то $\beta = 0$; якщо $v_1 \sin \alpha < v_2$, то $\beta = \arctg((v_2 / v_1 \cos \alpha) - \tg \alpha)$.

1.284. Рух світної точки на екрані не є рухом матеріального об'єкта. Це рух спляхів на екрані від електронів, кожний з яких попадає на екран пізніше попереднього,

тобто кожний наступний спалах не зв'язаний з попереднім причинним зв'язком. Швидкість v може перевищувати c і бути як завгодно великою.

$$1.285. l_0 = l\sqrt{1-v^2/c^2} = 565,61 \text{ м.}$$

$$1.286. v = 1,41 \cdot 10^{-2} c.$$

$$1.287. l = l_0\sqrt{1-V^2(\cos^2 \alpha)/c^2} = 0,968 \text{ м; } \alpha' = \arctg \frac{\lg \alpha}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = 63^\circ 25'.$$

$$1.288. v = 0,942 c.$$

$$1.289. \tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 15,6 \text{ мкс.}$$

$$1.290. \tau_0 = \frac{s}{v}\sqrt{1-v^2/c^2} = 26 \text{ нс.}$$

$$1.291. s = \frac{v\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \ln(N_0/N) = 7455 \text{ м.}$$

$$1.292. v = c\sqrt{1-(s/s_0)^2} = 0,75 c; \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1,5.$$

$$1.293. v_{\text{відн}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} = 0,99 c.$$

$$1.294. v = \frac{c^2}{v_{\text{відн}}} \left(1 - \sqrt{1 - v_{\text{відн}}^2 / c^2} \right) = 0,83 c.$$

$$1.295. v_{\text{відн}} = c \frac{\sqrt{1-(\tau_0/\tau_2)^2} - \sqrt{1-(\tau_0/\tau_1)^2}}{1 - \sqrt{(1-(\tau_0/\tau_2)^2)(1-(\tau_0/\tau_1)^2)}} = 0,2 c.$$

$$1.296. v_1 = \frac{v - v_{\text{відн}}}{1 - vv_{\text{відн}}/c^2} = 0,73 c.$$

1.297. 1. $\Delta s^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta r'^2 < 0$, де $\Delta r' = R$ – середня відстань від Сонця до Землі просторовоподібний. 2. Ні, не можна, бо ці події зв'язані між собою просторовоподібним інтервалом (тобто не існує сигналу, який би за час Δt подолав відстань $\Delta r = R$). 3. Такі системи існують; проміжок часу $\Delta t'$ між подіями, які розділені відстанню Δx (передбачається, що події відбуваються в точках, що лежать на осі Ox системи K), у

системі K' дорівнює $\Delta t' = \frac{\Delta t - (V/c^2)\Delta x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$, і, якщо $\Delta t' < 0$, то у системі K' події відбу-

ваються у порядку, оберненому порядкові в системі K . Такі системи рухаються відносно системи Сонце – Земля зі швидкостями, які задовольняють нерівність

$$V > c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0,6 c.$$

1.299. а) Якщо інтервал просторовоподібний, то $\Delta s^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta r'^2 < 0$. У системі K' події одночасні, якщо $\Delta t' = 0$, при цьому нерівність $\Delta s^2 < 0$ не порушується;

б) якщо б існувала система, в якій вказані події відбувалися в одній і тій самій точці простору, то задовольнялася б нерівність $\Delta s'^2 > 0$, що не має місця у разі просторовоподібного інтервалу.

1.300. а) Для часоподібного інтервалу $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta r'^2 > 0$, і тому рівність $\Delta r'^2 = 0$ (події відбуваються в одній і тій самій точці простору) сумісна з часоподібністю інтервалу. Отже, така система відліку існує; б) для одночасності подій необхідне виконання рівності $\Delta t' = 0$, що дає $\Delta s^2 = -\Delta r'^2 < 0$, а це неможливо для подій, розділених часоподібним інтервалом.

1.301. 1. З умови задачі $d \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = at dt$. Зінтегрувавши, маємо $\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = v_0 + at$. Оскільки $v_0 = 0$, то, розв'язуючи рівняння відносно v , маємо $v(t) = \frac{at}{\sqrt{1+(at/c)^2}}$. Шлях визначаємо із співвідношення $ds = v(t)dt$, тоді $s = \frac{c^2}{a} \times x(\sqrt{1+(at/c)^2} - 1)$. 2. Із виразу для v маємо $at = \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Керуючись правилами

наближених обчислень, одержуємо за умови $v/c \ll 1$: $v = at$; $s = \frac{c^2}{a} \left(1 + \frac{1}{2} \times x \left(\frac{(at)^2}{c^2} - 1 \right) \right) = \frac{1}{2} at^2$, тобто формули ньютонівської механіки. 3. При $t \rightarrow \infty$ член з $(at/c)^2$

у розкладанні at за v^2/c^2 стає домінуючим, і тому $v(t) \rightarrow \frac{at}{\sqrt{(at/c)^2}} \rightarrow c$.

$$\mathbf{1.302.} \quad v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V / c^2}; \quad a'_x = \frac{dv'_x}{dt'} = \frac{(1 - V^2 / c^2)^{3/2}}{(1 - v_x V / c^2)^3} a_x.$$

$$\mathbf{1.303.} \quad v = 0,86 c.$$

$$\mathbf{1.304.} \quad \Delta m = m - m_0 = m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - 1 \right) = 6,67 \cdot 10^{40} \text{ кг.}$$

$$\mathbf{1.306.} \quad \rho = \frac{\rho_0}{1 - v^2 / c^2} = 1,56 \rho_0.$$

$$\mathbf{1.307.} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{v_2}{v_1} \sqrt{\frac{1 - v_1^2 / c^2}{1 - v_2^2 / c^2}} = 6,57.$$

1.309. Розглянемо рівняння руху частинки в релятивістському випадку:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{p} = m_0 \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \frac{d}{dt} \mathbf{v} + \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \frac{d}{dt} \frac{1}{v}.$$

Бачимо, що вектор сили лежить у площині векторів швидкості $\mathbf{v}$ і прискорення $d\mathbf{v}/dt$ і не є паралельним жодному з них. Паралельність вектора $\mathbf{F}$ векторові прискорення $d\mathbf{v}/dt$ має місце лише тоді, коли вектор швидкості (або $d\mathbf{v}/dt$) дорівнює нулеві.

$$1.310. \mathbf{p}(t) = \mathbf{F}t; \mathbf{v}(t) = \frac{\mathbf{F}ct}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}}; s(t) = \sqrt{(m_0 c^2 / F)^2 + c^2 t^2} - m_0 c^2 / F.$$

$$1.311. v = 0,866 c.$$

$$1.312. p = \left(1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}\right) T/v = 1,8 \text{ Гев/с}.$$

$$1.313. A_p = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \right) = 0,42 m_0 c^2 = 4,02 \text{ МеВ}; A_{np} = \frac{m_0 v_2^2}{2} - \frac{m_0 v_1^2}{2} = 0,14 m_0 c^2 = 1,34 \text{ МеВ}; A_p / A_{np} = 3.$$

$$1.314. \frac{T}{T_0} = \frac{E}{m_0 c^2} \approx 11.$$

$$1.315. \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{1 - (m_0 c^2 / E_1)^2}{1 - (m_0 c^2 / E_2)^2}} = 0,159.$$

1.316. Визначаємо відносну швидкість одного з протонів: $v_{\text{відн}} = 2v/(1 + v^2/c^2)$
Кінетична енергія одного з протонів у системі відліку іншого

$$T' = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_{\text{відн}}^2/c^2}} - 1 \right).$$

Підставляючи значення $v_{\text{відн}}$ до наведеного виразу кінетичної енергії і використовуючи вираз для кінетичної енергії T протонів у лабораторній системі відліку, одержуємо: $T' = 4T + 2T^2/(m_0 c^2) = 880 \text{ Гев}$.

1.318. З виразу для кінетичної енергії релятивістської частинки маємо

$$\frac{T}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1.$$

З формули наближених обчислень (або розкладання функції $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ до степеневому ряду за v^2/c^2) маємо: $T/E_0 \approx \frac{1}{2} (v^2/c^2)$ (члени, які опущені, мають степінь v^2/c^2 більший, ніж наведені). Отже, за умови $v \ll c$ розкладання імпульсу можна вести за степенями T/E_0 . Тоді $p = (1/c) \sqrt{2E_0 T (1 + T/(2E_0))} = (1/c) \sqrt{2E_0 T} \cdot \sqrt{1 + T/(2E_0)}$. У другому корені правої частини наведеної рівності нехтуємо членом $T/(2E_0)$, який має порядок v^2/c^2 , і тому $p = (1/c) \sqrt{2E_0 T} = (1/c) \sqrt{2m_0 c^2 T} = \sqrt{2m_0 T}$.

$$1.319. \text{ У системі } K' \text{ маємо } p'_x = \frac{m_0 v'_x}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \quad p'_y = \frac{m_0 v'_y}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \quad p'_z = \frac{m_0 v'_z}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}$$

Користуючись перетвореннями Лоренца для координат і часу та релятивістським

законом додавання швидкостей, одержимо $p'_x = \frac{p_x - EV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$; $p'_y = p_y$; $p'_z = p_z$;

$$E' = \frac{E - Vp_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

1.321. $\Delta m = \frac{E\varepsilon^2 V}{2c^2} = 1,1 \cdot 10^{-12}$ кг, де E – модуль Юнга для сталі.

1.322. $\Delta m = \frac{q_{\text{пл}} v M}{c^2} = 7,7 \cdot 10^{-14}$ кг, де v – кількість молей речовини; M – її молярна маса; $q_{\text{пл}}$ – питома теплота плавлення льоду.

1.323. $m = Pt/c^2 = 9,6 \cdot 10^{-10}$ кг.

1.324. $M = m_0 \frac{v}{v'} \sqrt{\frac{1 - v'^2/c^2}{1 - v^2/c^2}} = 7,99 m_0$; $v' = \frac{v}{\sqrt{2(1 + \sqrt{1 - v^2/c^2})}} = 0,66$ с.

В к а з і в к а. Застосувати закони збереження енергії $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0 c^2 =$
 $= \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ та імпульсу $\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{Mv'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}$ для системи частинок.

1.325. $T_1 = \frac{(m_0 - m_{01})^2 - m_{02}^2}{2m_0} c^2$; $T_2 = \frac{(m_0 - m_{02})^2 - m_{01}^2}{2m_0} c^2$.

к а з і в к а. Застосувати закони збереження енергії та імпульсу у вигляді $m_0 c^2 =$
 $= T_1 + T_2 + m_{01} c^2 + m_{02} c^2$; $p_1 + p_2 = 0$.

1.326. Якщо фізичні величини, які описують властивості речовини (густина, тиск, швидкість та ін.), можна задавати неперервними функціями. Дискретний характер речовини не враховується.

1.327. Якщо рідина однорідна, то до геометричного центра витисненого об'єму рідини, а якщо вона неоднорідна, то до центра мас рідини, яка заповнювала б витиснений об'єм.

1.328. $P = 4\pi\rho g R^3/3 = 164,37$ мН. Роль опори виконує рідина.

1.329. $F = 4\pi(\rho - \rho_b)gR^3/3 = 558,85$ мН, де ρ_b – густина води.

1.330. Не зміниться.

1.331. $h_1 = h(1 - \rho_n/\rho_b) = 12,62$ м, де ρ_n – густина льоду.

1.332. Свинцева куля переважає. Кулі зі скла і скловати витискають кількість подібного об'єму. Терези перебуватимуть у рівновазі.

1.333. Не змінюватиметься до появи стану невагомості. У стані невагомості внаслідок дії сил молекулярного поверхневого натягу тіло виштовхуватиметься з рідини (рідина не змочує тіло) або, навпаки, занурюватиметься (рідина змочує тіло). Умова рівноваги тіла: $\rho_t(g(h) + a)V_t = \rho_p(g(h) + a)V_p$, де ρ_t , ρ_p – відповідно густини тіла та рідини; a – прискорення ракети; V_t , V_p – відповідно об'єм тіла і витиснений об'єм рідини. З наведеної умови рівноваги випливає, що глибина занурення не залежить від прискорення.

1.334. $p = \rho h \sqrt{g^2 + a^2}$, де h – товщина шару води, яку відмірюють від її поверхні.

1.335. $F = \rho l^3 (2g + a)/2 = 10,81 \text{ кН}$.

1.336. $\rho = 1\,656,16 \text{ кг/м}^3$.

1.337. $Dts\rho_0 = (D - v)\rho S$, де D – швидкість фронту ущільнення. Звідси

$$D = v\rho/(\rho - \rho_0) = 3,29 \text{ м/с}.$$

1.338. $F_{\min} = 2\rho ghS = 1\,962 \text{ Н}$; $F_{\text{угр}} = \rho ghS = 981 \text{ Н}$.

1.339. $h = 10,19 \text{ м}$.

1.340. $F_{\max} = \rho v^2 S = 984 \text{ кН}$.

1.341. $t = (V/S_2)\sqrt{S_1\rho/(2F)} = 1,67 \text{ с}$.

1.342. $R_2 = (R_1/t)\sqrt{2h_0/g}$.

1.343. $S_2 = 50 \text{ см}^2$.

1.344. $h_2 = 4 \text{ м}$.

1.345. $v = \omega\sqrt{r^2 - R^2} = 848,53 \text{ м/с}$.

1.346. $v = 1,4 \text{ м/с}$.

1.347. $d \approx 1,1 \text{ мм}$.

1.348. $v = d^2\rho g/(18\eta) = 3,2 \text{ мм/с}$.

1.349. $v = v_0 \ln(r/R_2)/\ln(R_1/R_2)$.

1.350. $Re = 2\rho vR/\eta = 2500 < 3000$ – течія ламінарна; $dp/dl = 8\eta v/R^2 = 1,28 \text{ Па/м}$

1.351. Так, для кульки в маслі; $v \approx 5,65 \text{ м/с}$. Ні, для кульки в гліцерині.

1.352. $v_{\max} = 0,15 \text{ м/с}$.

1.353. $d \approx 4V\rho/(\pi Re_{\text{кр}}\eta) = 0,21 \text{ м}$.

1.354. $v_1/v_2 = (R_1/R_2)^{\frac{3-2k}{k}}$.

1.355. $S = \eta P/(\rho C_x v^3) = 4,24 \text{ м}^2$.

1.356. $\sigma_{\max} = 4mg/(\pi d^2) + \rho g(h-x) = 27,76 + 0,076(10^3 - x)$, МПа.

1.357. $d_1 = 3d_0 = 24 \text{ мм}$.

1.358. $\Delta l = \rho g l^2/(2E)$; $\Delta V = (1 - 2\mu)\rho g l^2 S/(2E)$, де E – модуль Юнга, μ – коефіцієнт Пуассона.

1.359. $\sigma = E\varepsilon$; $\varepsilon = \Delta l/l$; $l = l_0(1 + \alpha\Delta t_0)$; $\sigma = E\alpha\Delta t$; $\Delta l/l = \alpha\Delta t$; $\sigma = 1,3 \text{ МПа}$.

1.360. $\sigma_{\max} = m\omega^2 l/(4S) = 78 \text{ МПа}$.

1.361. $\omega_{\text{руйн}} \geq 2\sqrt{\sigma_{\max}/\rho}/(d_1 + d_2) = 556,75 \text{ рад/с}$.

1.362. Виріжимо уявно з поверхні балона малий сферичний сегмент (рис. В.1.11), радіус основи якого $a = R \sin \alpha$. По периферії цього сегмента на елемент площі $\Delta S = d\Delta l$ діє сила пружності $\Delta F = \sigma \Delta S = \sigma d\Delta l$. Нормальна складова сили пружності $\Delta F_n = \Delta F \sin \alpha = \sigma d\Delta l \sin \alpha$. Повну нормальну складову сили тиску визначимо як

суму сил ΔF_n по сегменту: $F_n = \sigma d 2\pi a \sin \alpha = 2\pi \sigma R d \sin^2 \alpha$. Ця сила зрівноважує силу тиску $F = pS$, що діє на сегмент. Якщо кут α малий, то $S = \pi a^2 = \pi R^2 \sin^2 \alpha$. Отже, $F = \pi p R^2 \sin^2 \alpha$. Оскільки $F = F_n$, то, зрівнявши праві частини рівнянь і розв'язавши здобутий вираз відносно p , одержимо $p = 2\sigma_{\max} d / R = 12 \text{ МПа}$.

1.363. $h = 3\rho g l^4 / (2Ea) = 45,91 \text{ мкм}$.

1.364. Якщо сила, що діє на стрижень, прикладена до його основи, то $U = mla^2 / (6ES)$. Якщо сила прикладена до всіх елементів стрижня (як, наприклад, при вільному падінні), то напруження не виникають: $U = 0$.

1.365. Зміна потенціальної енергії вантажу $\Delta U_1 = mg\Delta x$. Збільшення потенціальної енергії пружини $\Delta U_2 = k(\Delta x)^2 / 2$. Але $k\Delta x = mg$. Тоді $\Delta U_2 = mg\Delta x / 2$, тобто $\Delta U_2 = \Delta U_1 / 2$. Енергія $mg\Delta x / 2$ витрачається на нагрівання пружини.

1.366. $U = \pi \varphi^2 G (d_2^4 - d_1^4) / (64l)$.

1.367. Кут зсуву $\gamma = \frac{R}{l} \varphi$. Дотичне напруження $\tau = G\gamma$. Тоді момент

$$M = \tau SR = \tau \pi R^3 = G \frac{R^4 \varphi}{2l} \pi.$$

Зробивши відповідні розрахунки, одержимо $M = 9,37 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Робота по закручуванню стрижня на кут $d\varphi$ буде $dA = M d\varphi$. Підставивши, матимемо

$$A = U = \frac{\pi G R^4 \varphi^2}{4l} = 163,5 \text{ Дж}.$$

1.368. Уявно розіб'ємо стрижень на тонкостінні циліндри. Товщину стінки циліндра позначимо через dr , а його радіус – через r (рис. В.1.12). Покладемо, що нижня основа циліндра жорстко закріплена, а до верхньої прикладена пара сил. Як видно з рисунка, при повороті верхньої основи стрижня відносно нижньої на кут φ різні шари зміщуються неоднаково. Внаслідок цього твірна циліндричного стрижня AB зайняла положення AB' , тобто верхній шар стрижня зсунувся відносно нижнього на кут γ . Зсув верхнього шару стрижня $\Delta s = R\varphi$, а шару радіуса r $\Delta s_r = r\alpha$. Тому кут зсуву

кожного циліндричного шару $\gamma_r = \frac{r\varphi}{l}$ залежить від r .

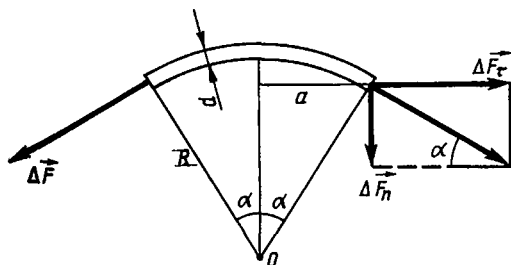


Рис. В.1.11

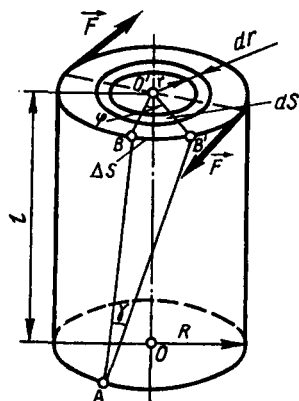


Рис. В.1.12

За законом Гука для деформації крутіння $\tau_r = G\gamma_r = G\frac{\varphi}{l}r$. Тоді момент пари сил,

що діють на виділений циліндричний шар, $dM_r = \tau_r ds_r r = \frac{G\varphi}{l} 2\pi r^3 dr$.

Обчислимо момент пари сил, прикладений до верхньої основи циліндра:

$$M = \int_0^R \frac{2\pi G\varphi}{l} r^3 dr = \frac{2\pi G\varphi}{l} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R. \quad \text{Отже, } M = G \frac{\pi R^4}{2l} \varphi.$$

1.369. $U = \beta(\rho gh)^2 / 2 = 2,85 \text{ МДж.}$

ДО РОЗДІЛУ 2

2.1. $N = 3 \cdot 10^{23}$ атомів.

2.2. $N = 7,5 \cdot 10^{22}$ молекул.

2.3. $M = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль; } v = 55,6 \text{ м/с; } N = 3,34 \cdot 10^{28} \text{ молекул; } m_0 = 3,0 \cdot 10^{-26} \text{ кг; } V_0 = 3,0 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3.$

2.4. $M_r = N_1 A_{r1} + N_2 A_{r2} + N_3 A_{r3} = 98; \quad M = 98 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$

2.5. $v_a = 4,3 \text{ моля; } v_e = 391,5 \text{ моля; } v_n = 608,5 \text{ моля.}$

2.6. $M = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль; } V = 18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; V_0 = 3,0 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3; d = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$

2.7. $N = 6,02 \cdot 10^{23}$ молекул.

2.8. На $1,9 \cdot 10^{19}$ молекул.

2.9. В 1 м^3 ртуті молекул більше майже в 1,2 раза.

2.10. Понад 10^6 років.

2.11. $N = \frac{m_a}{M} N_A = \frac{4\pi R^2 p_0}{Mg} N_A \approx 10^{44}$, де R – радіус Землі; m_a – маса атмосфери

Землі; p_0 – нормальний атмосферний тиск.

2.12. Кількість молекул, які видихнув Юлій Цезар, $N = \frac{m}{M} N_A$, де $m = \rho V$ – маса повітря, яке в середньому видихає людина. Ці молекули розподілились рівномірно в атмосфері Землі. Тому під час вдихання в легені кожної людини потрапляє маса m повітря, в якому є $N_0 = \frac{m}{m_a} N$ молекул, що видихнув Юлій Цезар ($m_a = \frac{4\pi R^2 p_0}{g}$ – маса атмосфери Землі). Вважаючи, що середній об'єм легенів людини $V = 5 \text{ л}$, а густина повітря $\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$, одержимо $N_0 = \frac{m^2 g}{4\pi R^2 p_0 M} N_A \approx 170$ молекул.

$$2.13. \langle \epsilon_{\text{оберт}} \rangle = kT = 4,8 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}; \quad \langle E \rangle = \frac{m}{M} N_A \langle \epsilon_{\text{оберт}} \rangle = 360 \text{ Дж}.$$

$$2.14. p_2/p_1 = T_2/T_1 = 1,273; \quad \langle E_{02} \rangle / \langle E_{01} \rangle = p_2/p_1 = 1,273.$$

$$2.15. N = \frac{pV}{kT} = 7,5 \cdot 10^{13}; \quad m = \frac{NM}{N_A} = 3,5 \cdot 10^{-12} \text{ кг}; \quad \langle E \rangle = \frac{5}{2} kTN = 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

$$2.16. T = \frac{i_1 v_1 T_1 + i_2 v_2 T_2}{i_1 v_1 + i_2 v_2} = 331,9 \text{ К}.$$

$$2.17. \langle E \rangle = \frac{i}{2} RTv = 4,8 \text{ кДж, де } i - \text{кількість обертових ступенів вільності}$$

молекули кисню.

2.18. Пружна об'ємна молекула чотириатомного газу має три поступальних, три обертових та $3n - 3 - 3 = 6$ коливальних ступенів вільності (n – кількість атомів у молекулі). Отже, $\langle E \rangle = v N_A \left(3 \frac{1}{2} kT + 3 \frac{1}{2} kT + 6kT \right) = 9vRT = 269,2 \text{ кДж}; \quad \langle E_{\text{пост}} \rangle = \frac{1}{6} \langle E \rangle = 44,9 \text{ кДж}; \quad \langle E_{\text{оберт}} \rangle = \frac{1}{6} \langle E \rangle = 44,9 \text{ кДж}; \quad \langle E_{\text{кол}} \rangle = \frac{2}{3} \langle E \rangle = 179,5 \text{ кДж}.$

$$2.21. N = \frac{2\langle E \rangle}{ikT} = 10^{21}; \quad m = \frac{2M\langle E \rangle}{iRT} = 54 \text{ мг}; \quad V = \frac{2\langle E \rangle}{ip} = 4,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3, \text{ де } i - \text{кількість}$$

ступенів вільності молекули кисню.

$$2.22. p = \frac{2}{V} \frac{N_A (m_1/M_1 + m_2/M_2) \langle \epsilon \rangle}{i_1 + i_2} = 12 \text{ МПа, де } i_1, i_2 - \text{кількість ступенів}$$

вільності молекули відповідно азоту й аргону.

$$2.23. \langle E \rangle = mRT \left(0,4 \frac{1}{M_1} \frac{i_1}{2} + 2 \cdot 0,6 \frac{1}{M_2} \frac{i_2}{2} \right) = 22 \text{ кДж } (M_1, i_1 \text{ та } M_2, i_2 - \text{молярні}$$

маси та кількість ступенів вільності відповідно для N_2 та N).

$$2.24. p = \frac{mRT}{MV} = 3,0 \text{ кПа}; \quad p' = \frac{2N_A m \langle \epsilon \rangle}{iM'V} = 0,57 \text{ МПа, де } i - \text{кількість ступенів}$$

вільності іонізованих молекул; M' – молярна маса іонізованого газу.

$$2.25. \langle E \rangle = \frac{i}{2} p_0 V = 2 \text{ кДж}.$$

2.26. Через повну хаотичність руху молекул у напрямі отвору переміщуватиметься $\frac{1}{6}$ всіх молекул. Вважатимемо, що швидкість усіх молекул одного газу є однаковою

і дорівнює $\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$. За час τ з отвору вилетять ті молекули азоту, які перебували на відстані $l_1 = \langle v_{\text{кв}} \rangle \tau$, і ті молекули гелію, які перебували на відстані $l_2 = \langle v_{\text{кв}} \rangle \tau$. Крізь отвір, площа якого $S = \frac{\pi d^2}{4}$, вилетять ті молекули азоту, які

містилися в об'ємі $V_1 = l_1 S$, і молекули гелію, які перебували в об'ємі $V_2 = l_2 S$. Кількість молекул азоту й гелію в одиниці об'єму відповідно $n_1 = \frac{m_1}{M_1 V} N_A$; $n_2 = \frac{m_2}{M_2 V} N_A$.

Кількість молекул різних газів, які вилетять крізь отвір за час τ : $N_1 = \frac{1}{6} \langle v_{1\text{кв}} \rangle S \tau n_1$;

$$N_2 = \frac{1}{6} \langle v_{2\text{кв}} \rangle S \tau n_2. \text{ Відношення } \frac{N_2}{N_1} = \frac{\langle v_{2\text{кв}} \rangle n_2}{\langle v_{1\text{кв}} \rangle n_1} = \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{3}{2}} = 19.$$

Отже, з отвору виходить газ у співвідношенні: на 19 молекул гелію припадає одна молекула азоту. За час τ_2 частина молекул гелію вилітає із супутника і їхня кількість

в одиниці об'єму зменшиться на $\Delta n_2 = \frac{N_2}{V} = \frac{\frac{1}{6} \langle v_{2\text{кв}} \rangle S \tau_2 n_2}{V}$. Відносне зменшення

становитиме $\frac{\Delta n_2}{n_2} = \frac{1}{6V} \langle v_{2\text{кв}} \rangle S \tau_2 = 10^{-3}$. Звідси $\tau_2 = \frac{6V}{\langle v_{2\text{кв}} \rangle S} \cdot 10^{-3} = 300$ с. Аналогічно

для азоту $\tau_1 = \frac{6V}{\langle v_{1\text{кв}} \rangle S} \cdot 10^{-3} = 760$ с.

$$2.27. n_2 = \frac{\rho - \frac{M_1 p}{RT}}{M_2 - M_1} = 4,3 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}, \text{ де } M_1, M_2 - \text{молярні маси відповідно водню й азоту.}$$

$$2.28. n_1 = p_0 / (5,05 k T_0) = 5,30 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}; \quad n_2 = 2,13 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}; \quad n_3 = 2,65 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}.$$

$$\rho = m_{01} n_1 = \frac{M_1}{N_A} n_1 = 0,28 \text{ кг/м}^3; \quad \rho_2 = 0,99 \text{ кг/м}^3; \quad \rho_3 = 0,0176 \text{ кг/м}^3.$$

$$2.29. p = \frac{3mRT}{MV} = 70 \text{ кПа, де } M - \text{молярна маса гідриду урану.}$$

$$2.30. n = \frac{p_0}{\beta k T} = 3,66 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}.$$

$$2.31. T = 2T_0 = 546 \text{ К.}$$

$$2.32. m = \rho V \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) = 55 \text{ г.}$$

$$2.33. \Delta m = m(T_2 - T_1) / T_2 = 32,2 \text{ г.}$$

$$2.34. n = \frac{p}{kT} = 2,6 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}; \quad \rho = \frac{p}{RT} \frac{m_1 + m_2}{m_1 / M_1 + m_2 / M_2} = 0,584 \text{ кг/м}^3.$$

$$2.35. \tau = \frac{V}{Q} \ln \frac{p_0}{p} \approx 370 \text{ с. За малий проміжок часу } dt \text{ тиск у посудині зменшується}$$

на $dp = \frac{\rho QRT}{VM} dt$, де ρ – густина газу в момент часу t ; T – температура газу; M – його молярна маса.

$$2.36. p = \frac{p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1}{V_1 T_2 + V_2 T_1} = 1,14 \text{ кПа.}$$

$$2.37. p = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) \frac{RT}{V} = 3,44 \cdot 10^5 \text{ Па; } M = \frac{m_1 + m_2}{m_1 / M_1 + m_2 / M_2} = 5,25 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль;}$$

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V} = 0,75 \text{ кг/м}^3.$$

$$2.38. p = \left(\frac{p_0}{T_0} + \frac{mR}{MV} \right) T_1, \text{ де } M - \text{молярна маса азоту.}$$

$$2.39. \frac{p_1}{p_2} = \frac{p_1 T_2 M_1}{p_2 T_1 M_2} = 65 \text{ разів, де } M_1, M_2 - \text{молярні маси відповідно вуглекисло-}$$

го газу й повітря.

$$2.40. V = \frac{(p_0 + \rho g h) T_2}{p_0 T_1} V_1 = 6,2 \text{ мм}^3.$$

$$2.41. \frac{V'_2}{V'_1} = \frac{V_2 T_1}{V_1 T_2} = 1,5.$$

$$2.42. T = \frac{p_0 H T_1}{(p_0 + \rho g h)(H - h)} = 313 \text{ К.}$$

$$2.43. \Delta m = \frac{2(p_1 - p_2)\rho V}{p_0} = 9,6 \text{ кг, де } p_0 - \text{нормальний атмосферний тиск.}$$

$$2.44. T = \frac{GMmh}{(r + h/2)^2 R} = 259 \text{ К, де } G - \text{гравітаційна стала.}$$

$$2.45. p = \frac{\Delta p V_2}{V_1 - V_2} = 6 \text{ кПа.}$$

$$2.46. p = \frac{\rho g h(l - h)}{H - h}.$$

$$2.47. T = \frac{h(l_0 + 0,5\Delta h)}{h_0 l_0} T_0 = 374 \text{ К.}$$

$$2.48. m = \frac{m_1 T_1 M_2}{k T_2 M_1} = 26 \text{ г, де } M_1, M_2 - \text{молярні маси відповідно азоту й водню; } k -$$

запас міцності.

$$2.49. p = \frac{p_0 V_0 N}{V} = 150 \text{ кПа.}$$

$$2.50. n = \ln \frac{p_0 V}{p(V + V_0)} = 46.$$

$$2.51. \text{CH}_4 \text{ (метан).}$$

$$2.52. V = \frac{\Delta m}{\rho} \frac{T_2}{T_2 - T_1} = 1054 \text{ м}^3.$$

$$2.53. p = \frac{(p_0 T_2 / T_1 - \Delta p) V_1}{V_1 + V_2} = 14,7 \text{ кПа.}$$

$$2.54. \alpha = \frac{M_2}{M_1 - M_2} \left(\frac{M_1 p V}{m R T} - 1 \right) = 0,58, \text{ або } \alpha = 58 \%, \text{ де } M_1, M_2 - \text{молярні маси}$$

відповідно N_2O_4 та NO_2 .

$$2.55. V = \frac{m T R}{p (M_2 - M_1)} = 23,5 \text{ м}^3. \text{ де } M_1, M_2 - \text{молярні маси відповідно гелію та}$$

вуглекислого газу.

$$2.56. T = \frac{(m_1 + m_2) M_1 T_0}{m_2 M_2} = 395,4 \text{ К, де } M_1, M_2 - \text{молярні маси відповідно азоту}$$

та повітря; T_0 – нормальна температура.

$$2.57. T = \left(\frac{\mu m g}{p_0 S} + 1 \right) T_0 = 337,7 \text{ К.}$$

$$2.58. \Delta l = \left(\frac{T_2}{n T_1} + \frac{1 - 2n}{n} \right) l_0.$$

$$2.59. \omega = \sqrt{\frac{p_0 (1 - (b/(L-l)))}{\rho l (L-l/2)}} = 500 \text{ с}^{-1}, \text{ де } \rho - \text{густина ртуті.}$$

2.60. Внутрішня енергія газу в першій половині посудини $U_1 = \frac{i_1}{2} \nu_1 R T_1$, у другій -

$U_2 = \frac{i_2}{2} \nu_2 R T_2$, де i_1, ν_1 і i_2, ν_2 – кількість ступенів вільності та кількість молів відповідно багатоатомного і двоатомного газів. Повна внутрішня енергія газів до змішування $U = \frac{1}{2} R (i_1 \nu_1 T_1 + i_2 \nu_2 T_2)$, а після змішування $U' = \frac{1}{2} R (i_1 \nu_1 + i_2 \nu_2) T$. Посудина теплоізолювана, тому $U = U'$. Звідси

$$T = \frac{i_1 \frac{\nu_1}{\nu_2} T_1 + i_2 T_2}{i_1 \frac{\nu_1}{\nu_2} + i_2}.$$

З рівнянь стану газів до їх змішування $p_1 \frac{V}{2} = \nu_1 R T_1$ і $p_2 \frac{V}{2} = \nu_2 R T_2$ визначимо

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}. \text{ Отже, } T = \frac{(i_1 p_1 + i_2 p_2) T_1 T_2}{i_1 p_1 T_2 + i_2 p_2 T_1} = 324,4 \text{ К.}$$

2.61. Внаслідок дифузії молекули водню розподіляться порівну в обох половинках посудини і, отже, їхні тиски на перегородку взаємно зрівноважаться. Тому на перегородку тиснутимуть лише молекули азоту: $F = p_1 S$. Із рівняння $p_1 \frac{V}{2} = \nu_1 R T$ маємо

$$p_1 = \frac{2 \nu_1 R T}{V}. \text{ Отже, } F = 2 \nu_1 R T S / V = 39,6 \text{ кН.}$$

2.62. Провести на діаграмі сім'ю ізотерм.

2.63. Див. рис. В.2.1.

2.64. Ізобарно нагріваючи газ від V_1 до V_2 , а потім ізохорно від p_1 до p_2 , або навпаки.

2.65. Через точки A і B проводимо ізохори $V_1 = \text{const}$ і $V_2 = \text{const}$; $\alpha_2 < \alpha_1$, отже, $V_2 > V_1$ (рис. В.2.2).

2.66. При $T = T_2$ $V_2 > V_1'$, отже, $p_2 < p_1$ (рис. В.2.3).

2.67. Див. рис. В.2.4, $l-A$ – об'єм зменшується, $A-B$ – збільшується, $B-2$ – зменшується.

2.68. Проводимо сім'ю ізотерм (рис. В.2.5). У точці 1 температура буде найнижчою, у точці 3 – найвищою.

$$2.74. \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3p_0}{\rho}} = 503 \text{ м/с}; \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8p_0}{\pi\rho}} = 464 \text{ м/с}; v_i = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} = 411 \text{ м/с}.$$

$$2.75. n_0 = \frac{3pN_A}{M\langle v^2 \rangle} = 3,7 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}.$$

$$2.76. \langle v'_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1,1 \text{ мкм/с}; \langle v''_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 504 \text{ м/с}; \frac{\langle v''_{\text{кв}} \rangle}{\langle v'_{\text{кв}} \rangle} \approx 4,5 \cdot 10^8 \text{ разів}.$$

$$2.77. T_2 = \frac{M_2}{M_1} T_1 = 27,86 \text{ К}.$$

2.79. Гелій.

2.80. Якщо система нерухома, то після проходження щілини B атоми потрапляють приймальну пластину і, конденсуючись на ній, дають різке зображення щілини B

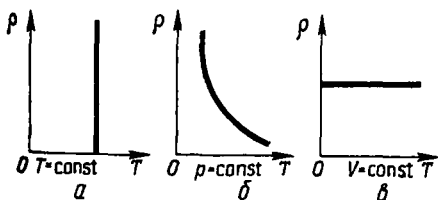


Рис. В.2.1

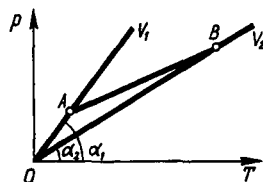


Рис. В.2.2

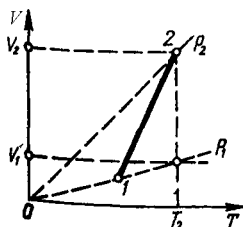


Рис. В.2.3

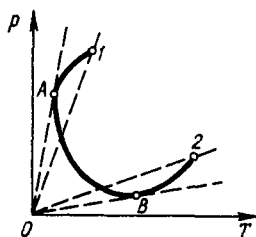


Рис. В.2.4

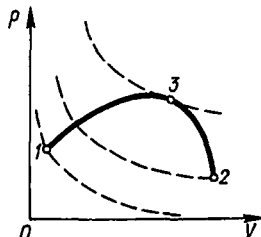


Рис. В.2.5

у вигляді смуги D . Потім система починає обертатись, внаслідок чого зображення щілини зміщується на ділянку D' . Позначимо через x зміщення вздовж приймальної пластинки. Тоді маємо $x = \varphi R$, де φ – кут, на який обернувся циліндр C ; R – його радіус; $\varphi = \omega t$, тут ω – кутова швидкість обертання циліндра; t – час проходження атомами відстані BD , яка дорівнює l . Отже, $\tau = l/v$, де v – швидкість атомів; $x = c/v$, де c – стала установки, $c = \omega R l$.

Кількість атомів, які випромінює джерело щосекунди і швидкості яких належать інтервалові $v, v + dv$, пропорційна $v f(v) dv$, або $v^3 f(v) dx$. Отже, лінійна густина розподілу атомів, що сконденсувались на поверхні циліндра, пропорційна $v^3 f(v)$. Визначаючи максимум цієї функції, встановимо, що він має місце при $v = \sqrt{5/2} v_i$.

$$2.81. T = \frac{M}{2R} \frac{v_2^2 - v_1^2}{\ln(v_2^2/v_1^2)} = 193 \text{ К.}$$

$$2.82. K = \sqrt{3m_0 kT} = 1,9 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$$

$$2.83. T = 10 \, 063 \text{ К.}$$

$$2.84. \frac{\Delta N}{N} = 0,85 \, \%.$$

$$2.85. \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 \exp \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{v_i^2} \right) \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = 1,1.$$

$$2.86. N = 8,4 \cdot 10^{22}.$$

$$2.88. \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \left(\frac{v_{i2}}{v_{i1}} \right)^2 \exp \left(v^2 \left(\frac{1}{v_{i2}^2} - \frac{1}{v_{i1}^2} \right) \right). \text{ Оскільки } v_{i1} = \sqrt{\frac{2RT_1}{M}}, v_{i2} = \sqrt{2} v_{i1}, \text{ то } \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}$$

дорівнює: а) 2,50; б) 1,72; в) 0,052.

2.89. Спочатку визначимо кількості молекул N_1 і N_2 , швидкості яких більші відповідно від v_1 і v_2 . Тоді кількість молекул, швидкості яких лежать у межах від v_1 до v_2 , дорівнює $N_x = N_1 - N_2$. Для обчислення N_1 і N_2 користуються таблицею залежності N_x/N від u , де N – загальна кількість молекул; u – відносна швидкість (табл. В.2.1). Відносні швидкості $u_1 = v_1/v_i = 0,5$ і $u_2 = v_2/v_i = 1,5$. Для цих значень u за таблицею маємо: $N_1/N = 0,918$ і $N_2/N = 0,213$. Ці результати свідчать, що 91,8 % молекул мають швидкості більші від 250 м/с і 21,3 % молекул рухаються зі швидкостями, більшими від 700 м/с. Звідси відносна кількість молекул, швидкості яких лежать в інтервалі між $v_1 = 250$ м/с і $v_2 = 700$ м/с, $N_x/N = 91,8 - 21,3 = 70,5 \, \%$.

Таблиця В.2.1

u	N_x/N	u	N_x/N	u	N_x/N
0	1,000	0,6	0,868	1,25	0,374
0,2	0,994	0,7	0,806	1,5	0,213
0,4	0,957	0,8	0,734	2,0	0,046
0,5	0,918	1,0	0,572	2,5	0,005 7

2.90. $u = \frac{v}{v_i} = 1,63$; за табл. В.2.1 $\frac{N_x}{N} = 0,13$; $N_x = 0,13 \frac{m}{M} N_A = 3,9 \cdot 10^{22}$.

2.91. $N = \frac{4p_0V}{\sqrt{\pi}kT_0} \left(\frac{M}{2RT_0} \right)^{3/2} \int_{v_0}^{\infty} e^{-\frac{Mv^2}{2RT_0}} v^2 dv$. Інтеграл у цій рівності не може бути виражений через елементарні функції, тому обчислимо його приблизно, для чого скористась великим значенням параметра $x_0 = \frac{Mv_0^2}{2RT_0} = 15,9$. Введемо безрозмірну змінну інтегрування $x = \frac{Mv^2}{2RT_0}$. Тоді

$$N = \frac{2p_0V}{\sqrt{\pi}kT_0} \int_{x_0}^{\infty} e^{-x} \sqrt{x} dx.$$

Можна вважати, що $x_0 \gg 1$. Розкладемо величини N за оберненими степенями цього параметра, інтегруючи частинами та обмежуючись другим членом розкладу:

$$N = \frac{2p_0V}{\sqrt{\pi}kT_0} \sqrt{x_0} \left(1 - \frac{1}{2x_0} \right) e^{-x_0} = 6,44 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}.$$

Або за табл. В.2.1: $v_i = \sqrt{\frac{2RT_0}{M}} = 385 \text{ м/с}$; $u = \frac{v_0}{v_i} = 3,9$; $\frac{N_x}{N} = 0,0024$;

$$N_x = 0,0024 \frac{p_0V}{RT_0} N_A = 6,40 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}.$$

2.92.3 урахуванням архімедової сили сила, що діє на частинку, дорівнює $(\rho - \rho_{\text{рід}})Vg$, де ρ , $\rho_{\text{рід}}$ – густини відповідно матеріалу частинки та рідини. Тоді потенціальна енергія частинки на відстані h від дна посудини

$$U = (\rho - \rho_{\text{рід}})Vgh,$$

а їх розподіл за висотою

$$n(h) = n_0 \exp \left(-\frac{(\rho - \rho_{\text{рід}})Vgh}{kT} \right).$$

За умовою задачі $n_0/n = 2$, тоді

$$\Delta h = \frac{3kT \ln 2}{4\pi r^3 g (\rho - \rho_{\text{рід}})} = 12,3 \text{ мкм}.$$

2.93. $m = \frac{kT \ln 2}{gh} - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = 5,43 \cdot 10^{-21} \text{ кг}.$

2.94. $p = p_0 e^{\frac{m_0 \omega^2 r^2}{kT}}$, де m_0 – маса молекули повітря; r – відстань від осі обертання до точки спостереження; T – температура газу.

2.95. $h = 3,84$ км.

2.96. $p = 2,56$ кПа.

2.98. $h = \frac{RT}{Mg} = 8,77$ км.

2.99. $h = 123$ км.

2.100. $h = \frac{RT \ln p_0 / p}{Mg} = 21$ км; $n_0 = \frac{p_0}{kT} e^{\frac{Mgh}{RT}} = 2 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$.

2.101. $\langle U \rangle = kT$.

2.102. $\frac{p_1}{p_2} = e^{-\frac{M}{RT} g(h_1 + h_2)} = 0,63$.

2.103. У системі координат, зв'язаній з центрифугою, на молекули хлору діє сила інерції $m\omega^2 r$, яка напрямлена від осі обертання. Ця сила є потенціальною і тому до неї можна застосувати розподіл Больцмана. Зв'язок між силою та потенціальною енергією дає значення потенціальної енергії $U = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$. Розподіл концентрації ізоотопів уздовж радіуса центрифуги

$$n_1 = n_{01} e^{\frac{m_1 \omega^2 r^2}{2kT}} = n_{01} e^{\frac{M_1 \omega^2 r^2}{2RT}}, \quad n_2 = n_{02} e^{\frac{M_2 \omega^2 r^2}{2RT}},$$

де n_{01} , n_{02} – концентрації ізоотопів біля осі.

За умовою

$$n_{01} = (1 - \eta) n_0, \quad n_{02} = \eta n_0, \quad n_{01} + n_{02} = n_0;$$

$$n_1 = \eta_1 n, \quad n_2 = \eta_2 n, \quad n_1 + n_2 = n.$$

Тоді

$$\eta_1 n = (1 - \eta) n_0 e^{\frac{M_1 \omega^2 r^2}{2RT}}, \quad \eta_2 n = \eta n_0 e^{\frac{M_2 \omega^2 r^2}{2RT}}.$$

Звідси

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{1 - \eta}{\eta} e^{\frac{(M_1 - M_2) \omega^2 r^2}{2RT}}$$

й остаточно

$$\omega = \left(\frac{2RT}{r^2 (M_1 - M_2)} \ln \frac{\eta_1 \eta}{\eta_2 (1 - \eta)} \right)^{\frac{1}{2}} = 4,4 \cdot 10^3 \text{ рад/с}.$$

2.104. Функція розподілу $f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$; $f(v) = \max$; $\frac{df}{dv} = 0$;

$$\frac{df}{dv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \left(2ve^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} + v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \left(-\frac{m_0}{kT} 2v \right) \right) = 0;$$

$$\frac{df}{dv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot 2ve^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \left(1 - \frac{m_0}{2kT} v^2 \right) = 0; 1 - \frac{m_0}{2kT} v^2 = 0; v_i = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}.$$

2.105. $h = \frac{RT \ln \eta}{g(M_1 - M_2)} = 12$ км, де M_1, M_2 – молярні маси відповідно кисню й водню.

2.106. Розв'яжемо диференціальне рівняння

$$dp = -\rho g dh,$$

використовуючи співвідношення $\frac{dT}{dh} = -a$:

$$dp = -\frac{pM}{RT} g dh = \frac{pM}{RT} g \frac{dT}{a}; \frac{dp}{p} = \frac{Mg}{Ra} \frac{dT}{T}.$$

Зінтегрувавши, маємо

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{Mg}{Ra} \ln \frac{T}{T_0} = \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{Ra}},$$

де p_0, T_0 – відповідно тиск і температура повітря біля поверхні Землі.

Після потенціювання одержимо

$$p(T) = p_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{Ra}}.$$

Розв'язуючи рівняння $dT = -adh$, маємо

$$T - T_0 = -ah, \text{ або } T = T_0 - ah.$$

Тоді

$$p(h) = p_0 \left(1 - \frac{ah}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{Ra}}.$$

Позначимо $\frac{ah}{T_0} = \frac{1}{x}$. Якщо $x \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$, то

$$p(h) = p_0 \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{Mgh}{RT_0}} = p_0 e^{\frac{Mgh}{RT_0}},$$

тобто одержуємо барометричну формулу для ізотермічної атмосфери. Тут враховано,

що $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$.

$$2.107. \langle v_{\text{кв}}^2 \rangle = \frac{1}{n} \int_0^\infty v^2 dn = \int_0^\infty v^2 f(v) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^4 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv. \text{ Скористаємось}$$

табличним інтегралом: $\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\pi} a^{-\frac{5}{2}}, \quad x = v; \quad a = \frac{m_0}{2kT}, \quad \langle v_{\text{кв}}^2 \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \times$
 $\times \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3kT}{m_0}; \quad \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\langle v_{\text{кв}}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$

$$2.108. f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}; \quad \langle \varepsilon \rangle = \int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} \int_0^\infty \varepsilon^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon. \text{ Скорис-}$$

таємось табличним інтегралом: $\int_0^\infty x^{\frac{3}{2}} e^{-ax} dx = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} a^{-\frac{5}{2}}, \quad x = \varepsilon, \quad a = \frac{1}{kT};$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{kT} \right)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{2} kT.$$

$$2.109. f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}; \quad \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0; \quad \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \right) = 0,$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} - \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{kT} \right) = 0; \quad \frac{1}{2\varepsilon^{\frac{1}{2}}} - \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{kT} = 0; \quad \varepsilon_i = \frac{1}{2} kT.$$

$$2.110. \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT_0} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v dv; \text{ користуючись підстановкою } \frac{mv^2}{2kT} = x, \text{ пе-}$$

ретворимо інтеграл: $\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-x} dx = \left(\frac{2m}{\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2M}{\pi RT} \right)^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ с/м.}$

$$2.111. \langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2\pi} a^2 p} = 86 \text{ мкм.}$$

$$2.112. \langle l \rangle = 716 \text{ Мм.}$$

$$2.113. \langle l \rangle = 41,6 \text{ нм.}$$

$$2.114. \rho = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ кг/м}^3.$$

$$2.115. p_1 \approx 0,1 \text{ Па; } p_2 \approx 10 \text{ кПа.}$$

$$2.116. \text{ а) } n = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}; \quad \langle l \rangle = 87,7 \text{ нм; } \langle \tau \rangle = 0,19 \text{ пс; б) } n = 2,5 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3};$$

$$\langle l \rangle = 9,5 \text{ Мм; } \langle \tau \rangle = 5,6 \text{ год.}$$

$$2.117. \text{ У } 26 \text{ разів.}$$

$$2.118. \langle z \rangle = 4,2 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}; \quad z = 5,7 \cdot 10^{34} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}.$$

$$2.119. n \leq \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 D} = 6,3 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}.$$

$$2.120. \langle z \rangle = 4pd^2 \sqrt{\frac{\pi N_A}{kTM}} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}, \text{ де } d - \text{ефективний діаметр молекули неону.}$$

$$2.121. p \approx \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 V^{\frac{1}{3}}} = 0,176 \text{ Па.}$$

$$2.122. z = 2 \sqrt{\frac{\pi}{m_0}} \frac{(pd)^2}{(kT)^{\frac{3}{2}}} = 5,7 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}, \text{ де } m_0 - \text{маса молекули води.}$$

$$2.123. \rho \leq \frac{m_0}{\sqrt{2}\pi d^2 \sqrt[3]{6V/\pi}} = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ кг/м}^3, \text{ де } m_0 - \text{маса молекули води:}$$

$$2.124. \langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \approx 0,1 \text{ мкм}; \quad \langle z \rangle = 4pd^2 \sqrt{\frac{\pi N_A}{kTM}} = 44,7 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}; \quad z = \frac{1}{2} \langle z \rangle \times \\ \times \frac{p}{kT} V = 1,5 \cdot 10^{36} \text{ с}^{-1}; \quad \langle \tau \rangle = \frac{\langle l \rangle}{\sqrt{8RT/(\pi M)}} = 0,2 \text{ нс}; \quad z_0 = \frac{1}{4} pS \sqrt{\frac{8N_A}{\pi kTM}} = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ с}^{-1}.$$

$$2.125. \langle l_0 \rangle = 100 \text{ нм}; \langle l \rangle = 11 \text{ м}; \langle \tau \rangle = 0,03 \text{ с.}$$

$$2.126. z = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^2 \langle v \rangle}{\sqrt{2}\pi d^2 \langle l \rangle^2} \approx 1,6 \cdot 10^{36} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}.$$

$$2.127. \langle \tau \rangle = \frac{\langle l \rangle V_2/V_1}{\sqrt{8RT/(\pi M)}} = 21,3 \text{ пс.}$$

$$2.128. z_0 = \frac{1}{4} \frac{pS}{kT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 7,8 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}.$$

$$2.129. \text{ а) } \langle l \rangle = \text{const}, \langle z \rangle = \text{const}; \text{ б) } \langle l \rangle \sim T, \langle z \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{T}}.$$

$$2.130. \text{ а) } \langle l \rangle \text{ зменшиться в } n \text{ разів, } \langle z \rangle \text{ збільшиться в } n \text{ разів; б) } \langle l \rangle \text{ не зміниться, } \langle z \rangle \text{ збільшиться в } \sqrt{n} \text{ разів.}$$

$$2.131. \text{ Закон розподілу за довжинами вільного пробігу } N = N_0 e^{-\frac{x}{\langle l \rangle}}. \text{ За умовою} \\ \eta = \frac{N_0 - N}{2 N_0} = 1 - e^{-\frac{x}{\langle l \rangle}}. \text{ Звідси } x = -\langle l \rangle \ln(1 - \eta) = -\frac{kT}{\sqrt{2} p \sigma} \ln(1 - \eta). \text{ Тоді}$$

$$\text{для гелію } x = 1,73 \cdot 10^{-7}; 3,46 \cdot 10^{-7}; 5,19 \cdot 10^{-7}, \text{ м;}$$

$$\text{для кисню } x = 7,41 \cdot 10^{-8}; 1,48 \cdot 10^{-7}; 2,22 \cdot 10^{-7}, \text{ м;}$$

$$\text{для вуглекислого газу } x = 5,72 \cdot 10^{-8}; 1,15 \cdot 10^{-8}; 2,22 \cdot 10^{-7}, \text{ м.}$$

$$2.132. d = \left(-\frac{kT}{\sqrt{2\pi p l}} \ln \eta \right)^{\frac{1}{2}} = 1.56 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

2.133. Ні. Якщо стан газу змінюється ізохорно, то $\frac{P}{T} = \text{const}$ і коефіцієнт

$$\frac{1}{\langle l \rangle} = \frac{\sqrt{2} p \sigma}{kT} \text{ не змінюється.}$$

$$2.134. D = 14,3 \text{ мм}^2/\text{с.}$$

2.135. Збільшиться в 1,5 рази.

2.136. Вуглець.

$$2.137. D = 15,3 \text{ мм}^2/\text{с}; \eta = 19,7 \text{ мкПа}\cdot\text{с.}$$

$$2.138. v = \frac{D^2 d^2 p_0}{12} g \sqrt{\frac{\pi^3 m_0}{k^3 T^3}} \left(\frac{\rho}{\rho_n} - 1 \right) = 0,16 \text{ м/с, де } m_0 \text{ і } D - \text{відповідно маса та діаметр молекули повітря; } \rho, \rho_n - \text{густини відповідно води й повітря.}$$

$$2.139. \eta = \frac{F(r_2 - r_1)}{4\pi^2 v h r_1 r_2} = 18 \text{ мкПа}\cdot\text{с.}$$

$$2.140. \langle l \rangle = \frac{3\eta}{p} \sqrt{\frac{\pi R T}{8M}} = 10^{-7} \text{ м.}$$

$$2.141. \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}} = 380 \text{ м/с}; \langle l \rangle = \frac{3\eta}{p_0} \sqrt{\frac{\pi RT_0}{8M}} = 9,28 \cdot 10^{-8} \text{ м}; \quad z = \frac{p_0 \langle v \rangle}{2kT_0 \langle l \rangle} = 5,6 \cdot 10^{34} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1};$$

$$\sigma = \frac{kT_0}{\sqrt{2} \langle l \rangle p_0} = 2,8 \cdot 10^{-19} \text{ м}^2; \quad d = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

$$2.142. \langle l \rangle = 3D \sqrt{\frac{\pi M}{8RT_0}} = 1,34 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

$$2.143. D = \eta/\rho = 20 \text{ м}^2/\text{с.}$$

2.144. Не залежить; зміниться.

$$2.145. p = \frac{kT}{\sqrt{2\pi} d^2 l} = 1,013 \text{ Па.}$$

$$2.146. \lambda = \frac{i}{3d^2} \sqrt{\frac{k^3 T}{\pi^3 m_0}} = 12,6 \text{ мВт}/(\text{м}\cdot\text{К}), \text{ де } i, m_0 - \text{відповідно кількість ступенів}$$

вільності та маса молекули азоту.

$$2.147. n = 1,8 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}; \lambda = 0,013 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К}).$$

$$2.148. \rho = 1,21 \text{ кг/м}^3; \quad v = 1,25 \cdot 10^3 \text{ молів}; \quad m = 36,25 \text{ кг}; \quad N = 7,53 \cdot 10^{26}; \quad m_0 = 4,81 \cdot 10^{-26} \text{ кг}; \quad n = 2,51 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}; \quad \langle v_{\text{кв}} \rangle = 498 \text{ м/с}; \quad v_1 = 407 \text{ м/с}; \quad \frac{\Delta N}{N} = 0,9\%;$$

$$\Delta N = 6,78 \cdot 10^{24}; N_1 = 2,82 \cdot 10^{26}; N_2 = 1,46 \cdot 10^{26}; \langle l \rangle = 0,1 \text{ мкм}; \langle z \rangle = 4,6 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}; z = 15,0 \cdot 10^{35} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}; D = 1,33 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}; \eta = 1,67 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}; \lambda = 0,012 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}).$$

2.149. Проаналізувавши вираз $\lambda = \frac{1}{3} \rho \langle l \rangle \langle v \rangle c_V$, бачимо, що для фіксованої густини газу ρ головна зміна теплопровідності відбувається внаслідок відмінності в середній швидкості $\langle v \rangle$, оскільки значення c_V мало відрізняється для різних газів. Тому легкі гази мають значно більшу теплопровідність, ніж важкі. Отже, найкращим провідником теплоти є водень.

$$\mathbf{2.150.} \quad m = 35 \text{ мкг.}$$

$$\mathbf{2.151.} \quad Q = \frac{i}{3d^2} \sqrt{\frac{k^3 \langle T \rangle}{\pi^3 m_0}} \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta \tau = 87,4 \text{ кДж.}$$

$$\mathbf{2.152.} \quad m = 25,3 \text{ г.}$$

$$\mathbf{2.153.} \quad Q = \frac{i S \Delta l \Delta T}{3 N_A d^2 l} \sqrt{\frac{R^3 T}{\pi^3 M}} = 82 \text{ Дж, де } d, i - \text{відповідно діаметр і кількість ступенів}$$

вільності молекули повітря.

$$\mathbf{2.154.} \quad \Delta Q = \lambda \frac{T_2 - T_1}{l} S \Delta t = 4,9 \text{ МДж.}$$

$$\mathbf{2.155.} \quad l_2 = R / \left(1 + \frac{\lambda_2 R - l_1}{\lambda_1 l} \right) = 1,33 \text{ см, де } \lambda_1, \lambda_2 - \text{коефіцієнти теплопровідності}$$

відповідно алюмінію та свинцю.

$$\mathbf{2.156.} \quad \text{Густина теплового потоку } q = \frac{Q}{S \tau}. \text{ За законом Фур'є } q = \kappa \Delta T, \text{ де } \kappa - \text{коефіцієнт теплопередачі, } \kappa = \frac{\lambda}{l}.$$

Оскільки теплопровідний шар містить два послідовно з'єднаних шари з різною теплопровідністю, то для визначення теплового потоку зручно ввести поняття теплового опору $\frac{l}{\lambda S} = \frac{1}{\kappa S}$. Результуючий тепловий опір дорівнює сумі теплових опорів шарів, тобто

$$\frac{1}{\kappa S} = \frac{l_1}{\lambda_1 S} + \frac{l_2}{\lambda_2 S},$$

$$\text{звідси } \kappa = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{l_1 \lambda_2 + l_2 \lambda_1}, \quad q = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{l_1 \lambda_2 + l_2 \lambda_1} \Delta T = 55,4 \text{ Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

$$\mathbf{2.157.} \quad Q = 8,36 \text{ Дж; } m = 60 \text{ г.}$$

2.158. Теплота передається від води до повітря через третє тіло – стінку труби. Втрата теплоти трубопроводом визначається за формулою

$$Q = \kappa S \tau \Delta T,$$

де κ – коефіцієнт теплопередачі, значення якого залежить від коефіцієнта теплопровідності від води до сталеві стінки трубопроводу, від теплопровідності стінок труби та

коефіцієнта тепловіддачі від труби до повітря. Оскільки кожен з цих переходів пов'язаний з тепловим опором, то можна записати

$$\frac{1}{\kappa S} = \frac{1}{\alpha_1 S} + \frac{l}{\lambda S} + \frac{1}{\alpha_2 S},$$

звідки

$$\kappa = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda}{\lambda \alpha_2 + l \alpha_1 \alpha_2 + \lambda \alpha_1}.$$

Площа поверхні трубопроводу $S = \pi dL$. Тоді $Q = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda}{\lambda \alpha_2 + l \alpha_1 \alpha_2 + \lambda \alpha_1} \pi dL \Delta T = 15,9 \text{ кДж}$.

$$2.159. \frac{F}{S} = \frac{2\Delta v \sqrt{m_0 kT}}{3\sqrt{\pi^3} \Delta x d^2} = 0,44 \text{ Н/м}^2.$$

2.160. На круговий елемент поверхні диска діє дотична сила внутрішнього тертя $dF = 2\pi\eta(\omega/h)r^2 dr$ (вісь обертання напрямлена перпендикулярно до поверхні дисків). Момент цієї сили відносно осі $dM = r dF = 2\pi\eta(\omega/h)r^3 dr$. Повний момент $M = \pi\eta\omega R^4/(2h)$ компенсується моментом сил крутіння, що прикладені до нитки $f\varphi$. звідки маємо

$$\varphi = \pi\eta\omega R^4/(2fh) = 1,4 \text{ рад.}$$

$$2.161. F = \frac{2uS}{3d^2 h N_A} \left(\frac{MRT}{\pi^3} \right)^{\frac{1}{2}} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Н.}$$

$$2.162. T(x) = \frac{T_2 - T_1}{l} x + T_1.$$

$$2.163. T = \frac{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}{\lambda_2 + \lambda_1} = 359,8 \text{ К.}$$

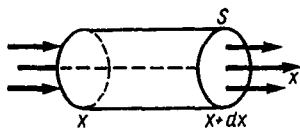


Рис. В.2.6

2.164. Розглянемо об'єм у вигляді циліндра, площа основи якого S , а висота, спрямована вздовж осі Ox , дорівнює, dx (рис. В.2.6). За означенням потоку зміна маси в об'ємі за проміжок часу dt

$$dm = (j_m(x+dx) - j_m(x))Sdt = -\frac{dj_m}{dx} dx Sdt.$$

Враховуючи, що $j_m = -D \frac{dp}{dx}$, маємо

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dx} \left(D \frac{dp}{dx} \right).$$

Для однорідного середовища $\frac{dp}{dt} = 0$, тобто

$$\frac{d}{dx} \left(D(x) \frac{dp}{dx} \right) = 0.$$

Для ідеального газу

$$D = \frac{2}{3d^2 N_A} \left(\frac{MRT}{\pi^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\rho}, \text{ тобто } \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \right) = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння з урахуванням умов $\rho_1 = \rho(x_1)$, $\rho_2 = \rho(x_2)$, остаточно маємо

$$\rho(x) = \rho_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\frac{x}{l}}, \text{ де } l = x_2 - x_1.$$

2.165. Внаслідок стаціонарного розподілу температури в кожний елемент об'єму входить така кількість теплоти, яка з нього виходить, тобто тепловий потік є постійним. У випадку одновимірного переносу теплоти це означає, що

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} S = \text{const.} \text{ або } \lambda \frac{dT}{dx} = c_1,$$

де c_1 – деяка постійна.

Підставимо значення теплопровідності λ для ідеального газу:

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho \langle l \rangle \langle v \rangle c_V = \frac{5k\sqrt{MR}}{3\pi\sqrt{\pi}d^2} T^{\frac{1}{2}} = A T^{\frac{1}{2}}.$$

Тут через A позначено комбінацію відомих констант.

Тоді диференціальне рівняння для температури набуває вигляду

$$T^{\frac{1}{2}} dT = \frac{c_1}{A} dx,$$

Звідки

$$T^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \frac{c_1}{A} x + c_2, \text{ або } T = \left(\frac{3c_1}{2A} x + c_2 \right)^{\frac{2}{3}},$$

де c_2 – константа інтегрування.

Підставимо граничні умови $T(0) = T_1$, $T(l) = T_2$ у вираз для температури. Одержимо

$$c_1 = \frac{2A}{3l} \left(T_2^{\frac{3}{2}} - T_1^{\frac{3}{2}} \right); \quad c_2 = T_1^{\frac{3}{2}},$$

а розподіл температури

$$T(x) = T_1 \left(1 + \frac{x}{l} \left(\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \right)^{\frac{2}{3}}.$$

2.166. а) $C_V = \frac{3}{2}R$, $C_p = \frac{5}{2}R$, $\gamma = 1,67$; б) $C_V = \frac{5}{2}R$, $C_p = \frac{7}{2}R$, $\gamma = 1,40$; $C_V = \frac{7}{2}R$, $C_p = \frac{9}{2}R$, $\gamma = 1,29$; в) $C_V = 3R$, $C_p = 4R$, $\gamma = 1,33$; $C_V = 6R$, $C_p = 7R$, $\gamma = 1,17$; г) $C_V = 3R$, $C_p = 4R$, $\gamma = 1,33$; $C_V = 9R$, $C_p = 10R$, $\gamma = 1,11$.

2.167. а) 519 Дж/(кг·К); б) 103,6 Дж/(кг·К); в) 1 847 Дж/(кг·К); г) 909 Дж/(кг·К); д) 723 Дж/(кг·К).

2.168. Так, оскільки $i = 7$, а мало б бути $i = 6$.

2.169. Вуглекислий газ.

2.170. $c_p = 909$ Дж/(кг·К); $c_v = 649$ Дж/(кг·К); кисень.

$$2.171. \gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{2(v_1 + v_2)}{i_1 v_1 + i_2 v_2} = 1,48.$$

$$2.172. m_1 = \frac{M_1 m_2 (\gamma i_2 - (i_2 + 2))}{M_2 (i_1 + 2) - \gamma i_1} = 39,2 \text{ г, де } i_1, i_2 - \text{кількість ступенів вільності}$$

відповідно молекул азоту й метану.

$$2.173. c_v = 715 \text{ Дж/(кг·К)}; c_p = 1003 \text{ Дж/(кг·К)}; \gamma = 1,4.$$

2.174. Ні, оскільки для невідомого газу

$$i_2 = \frac{i_1 v_1 (T_1 - T)}{v_2 (T - T_2)} = 5,4.$$

$$2.175. C = \frac{n - \gamma}{n - 1} C_v = \frac{n - \gamma}{(\gamma - 1)(n - 1)} R = \frac{(3n - 4)R}{n - 1} =$$

$= 12,2$ Дж/(моль·К); $C < 0$, якщо $1 < n < \gamma$, тобто для політропних процесів, графіки яких у координатах p, V проходять через вихідну точку I і лежать між ізотермою та адіабатою (рис. В.2.7).

$$2.176. \alpha = \frac{2 - i_2(\gamma - 1)}{(2i_1 - i_2)(\gamma - 1) - 2} = 37\%, \text{ де } i_1 = 5 \text{ для } O_2; i_2 = 3 \text{ для } O.$$

$$2.177. C = C_v \frac{n - \gamma}{n - 1} = 48 \text{ Дж/(моль·К)}; n = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = 0,7.$$

$$2.178. C_1 = C_v = \frac{3}{2} R; C_2 = C_v + \frac{1}{2} R = 2R.$$

$$2.179. c_p = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{i_1 \eta_1}{M_1} + \frac{i_2 \eta_2}{M_2} + \frac{i_3 \eta_3}{M_3} \right) + \frac{\eta_1}{M_1} + \frac{\eta_2}{M_2} + \frac{\eta_3}{M_3}}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3} R = 6,44 \text{ кДж/(кг·К)}, \text{ де } \eta_i - \text{від-}$$

повідна частка газу в суміші.

$$2.180. U = \frac{i}{2} \frac{mp}{\rho} = 50 \text{ кДж.}$$

$$2.181. \Delta U = 1163,4 \text{ Дж.}$$

$$2.182. A = \frac{1}{2} R \Delta T.$$

$$2.183. C = C_v + R/2.$$

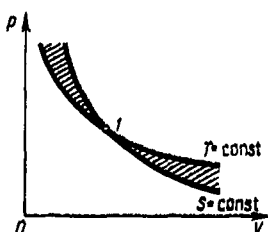


Рис. В.2.7

2.184. За першої умови газ охолоджується, його температура $T \sim 1/V$, $C = C_V - R$; за другої умови газ нагрівається, його температура $T \sim \sqrt{V}$, $C = C_p + R$.

2.185. За першим законом термодинаміки

$$Q = \Delta U + A. \quad (1)$$

Зміна внутрішньої енергії $\Delta U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R \Delta T$, де ΔT – різниця температур у станках 2 і 1. Елементарна робота $A = p dV = \alpha p dp$, оскільки $V = \alpha p$. Звідси

$$A = \alpha \int_{p_1}^{p_2} p dp = \frac{1}{2} (p_2^2 - p_1^2).$$

Різницю температур ΔT визначимо з рівнянь стану газу в точках 1 і 2:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1, \text{ де } V_1 = \alpha p_1, \text{ тоді } \alpha p_1^2 = \frac{m}{M} R T_1; \quad p_2 V_2 = \frac{m}{M} R T_2, \text{ де } V_2 = \alpha p_2, \text{ а отже,}$$

$$\alpha p_2^2 = \frac{m}{M} R T_2. \text{ Звідси } \Delta T = T_2 - T_1 = \alpha (p_2^2 - p_1^2) \frac{M}{m}.$$

Після підстановки ΔU і A в рівняння (1) маємо:

$$\alpha = \frac{2Q}{(i+1)(p_2^2 - p_1^2)} = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3/\text{Па}; \quad T_1 = \frac{\alpha p_1^2}{(m/M)R} = 241 \text{ К};$$

$$T_2 = \frac{\alpha p_2^2}{(m/M)R} = 963 \text{ К}.$$

$$\mathbf{2.186.} \quad Q = \frac{2p_1}{V_1} (V_2^2 - V_1^2).$$

2.187. За першим законом термодинаміки

$$Q = \Delta U + A.$$

Крім того,

$$Q = c_x m \Delta T,$$

де c_x – шукана питома теплоємність повітря; m – його маса. Зміна внутрішньої енергії

$$\Delta U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R \Delta T.$$

а) Елементарна робота $\delta A = p dV$. З рівняння Клапейрона–Менделєєва з урахуванням того, що $T = \alpha V^n$, одержимо

$$p = \frac{m}{M} R \alpha V^{n-1}.$$

Тоді

$$\delta A = \frac{m}{M} R \alpha V^{n-1} dV,$$

$$A = \frac{m}{M} R \alpha \int_{V_1}^{V_2} V^{n-1} dV = \frac{m}{M} \frac{R \alpha}{n} (V_2^n - V_1^n) = \frac{m}{M} \frac{R}{n} \Delta T.$$

Підставивши Q , ΔU і A в рівняння першого закону термодинаміки, маємо

$$c_x = \frac{R}{M} \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{n} \right) = 744 \text{ Дж/(кг·К)}, i = 5.$$

б) Аналогічно

$$A = \frac{m}{M} R \beta \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^{n+1}} dV = -\frac{m}{M} \frac{R \beta}{n} \left(\frac{1}{V_2^n} - \frac{1}{V_1^n} \right) = -\frac{m}{M} \frac{R}{n} \Delta T;$$

$$c_x = \frac{R}{M} \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{n} \right) = 687 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

2.188. Внутрішня енергія газу, середня енергія молекул газу та їх середня швидкість не змінюються; тиск газу на стінки посудини зменшується.

$$\mathbf{2.189.} \quad c_p = \frac{Q}{m \Delta T} = 909,4 \text{ Дж/(кг·К)}; \quad A = \frac{m}{M} R \Delta T = 831 \text{ Дж}; \quad \Delta U = 2,08 \text{ кДж}.$$

$$\mathbf{2.190.} \quad A = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1) = 5,93 \text{ кДж}; \quad Q = \frac{m}{M} \frac{(i+2)}{2} R (T_2 - T_1) = 20,76 \text{ кДж};$$

$$\Delta U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R (T_2 - T_1) = 14,83 \text{ кДж}.$$

$$\mathbf{2.191.} \quad Q = \frac{i+2}{2} p_0 V \frac{\Delta T}{T_0} = 1,92 \text{ МДж}.$$

$$\mathbf{2.192.} \quad m = \frac{p_0 V (n-1)(i+2)}{2 \eta g} = 3,8 \text{ г}; \quad i = 5.$$

$$\mathbf{2.193.} \quad A = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1) = 2,08 \text{ кДж}; \quad \Delta U = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1) = 5,2 \text{ кДж}; \quad Q = \frac{m}{M} C_p \times \\ \times (T_2 - T_1) = 7,3 \text{ кДж}.$$

$$\mathbf{2.194.} \quad A = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1) = 2,86 \text{ кДж}; \quad \Delta U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R \Delta T = 7,14 \text{ кДж};$$

$$T_2 = T_1 + \frac{Q}{\frac{m}{M} \frac{i+2}{2} R} = 643,8 \text{ К}; \quad \frac{V_2}{V_1} = 2,15.$$

$$\mathbf{2.195.} \quad \text{а) } \frac{3}{5}Q, \frac{2}{5}Q; \quad \text{б) } \frac{5}{7}Q, \frac{2}{7}Q; \quad \text{в) } \frac{3}{4}Q, \frac{1}{4}Q.$$

$$\mathbf{2.196.} \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{2Q}{i p V} = 0,2.$$

$$\mathbf{2.197.} \quad A = Q = \frac{m}{M} R T \ln \frac{V_2}{V_1} = 11,63 \text{ кДж}; \quad \Delta U = 0.$$

$$2.198. n = e^{Q/(VRT)} = 2,23.$$

2.199. $Q = \frac{m}{M} RT \ln n = 2,49 \text{ кДж}; A = -2,49 \text{ кДж}$. Ця робота виконується зовнішніми силами.

$$2.200. \Delta U = \frac{i}{2}(p_1(V_2 - V_1) + (p_2 - p_1)V_2) = 325 \text{ кДж}; A = p_1(V_2 - V_1) = 40 \text{ кДж}; Q = 365 \text{ кДж}.$$

$$2.201. M = \frac{mR\Delta T}{c_p - c_v} = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}; \text{ кисень}.$$

$$2.202. \Delta T = \frac{M}{mR} \left(\frac{AV_3}{V_1 - V_3} - p_1 V_1 \right) = 476,6 \text{ К}.$$

$$2.203. A_1 = 0; \Delta U_1 = \frac{i}{2}(p_2 - p_1)V_1 = 37,5 \text{ кДж}; \pm Q_1 = \Delta U_1 = 37,5 \text{ кДж};$$

$$A_2 = 2p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1} = 20,7 \text{ кДж}; \Delta U_2 = 0; \pm Q_2 = A_2 = 20,7 \text{ кДж}; A_3 = -p_1 V_1 = -15 \text{ кДж};$$

$$\Delta U_3 = -\frac{i}{2} p_1 V_1 = -37,5 \text{ кДж}; Q_3 = A_3 + \Delta U_3 = -52,5 \text{ кДж}.$$

$$2.204. \frac{p_1}{p_0} = 2^{\gamma_1} = 3,2; \frac{p_2}{p_0} = 2^{\gamma_2} = 2,6; \frac{A_1}{A_2} = \frac{(\gamma_2 - 1)}{(\gamma_1 - 1)} \frac{(2^{\gamma_1 - 1} - 1)}{(2^{\gamma_2 - 1} - 1)} = 1,13; \gamma_1 = \frac{5}{3}; \gamma_2 = \frac{7}{5}.$$

$$2.205. \Delta U = -\frac{i}{2} p_0 V_0 \left(1 - \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\gamma - 1} \right) = -1,36 \text{ кДж}.$$

$$2.206. \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{\langle E_2 \rangle}{\langle E_1 \rangle} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = 15,6.$$

$$2.207. p = 3,9 \text{ МПа}; T = 750 \text{ К}; A = -\Delta U = -4,67 \text{ кДж}.$$

$$2.208. i = 5.$$

2.209. Одноатомний газ нагріється в 1,5 рази більше.

$$2.211. T_3 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 358 \text{ К}; \text{ див.рис. В.2.8}.$$

$$2.212. \frac{A_{\tau}}{A_{ад}} = \frac{(\gamma - 1) \ln(p_1 / p_2)}{1 - (p_2 / p_1)^{\gamma - 1}} = 0,56.$$

2.213. а) $\langle v_{кв1} \rangle = \langle v_{кв2} \rangle$; у 3 рази; б) у 1,15 рази, у 2,15 рази.

$$2.214. p_2 = p' \left(\frac{p'}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 0,25 \text{ МПа}.$$

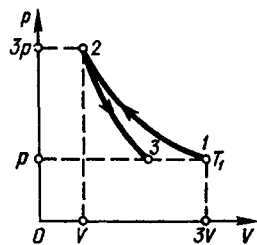


Рис. В.2.8

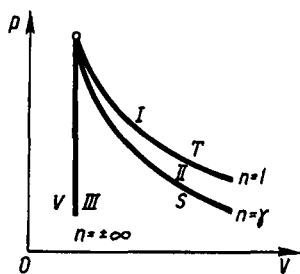


Рис. В.2.9

2.215. $n=1,3$; $A=-2$ МДж.

2.216. $C=4,16$ Дж/(моль·К); $Q=25$ Дж; $A=124,65$ Дж.

2.217. $n=1$; $C=25$ Дж/(моль·К); $\Delta U=300$ Дж;
 $A=60$ Дж; $Q=360$ Дж.

2.218. а) Якщо $n < 1$ (криві, що описують перебіг таких процесів, лежать в області I, рис. В.2.9); б) якщо $1 < n < \gamma$ (область II); в) якщо $n > \gamma$ (область III); робота виконується завдяки внутрішній енергії газу.

2.219. Адіабатний, ізотерічний, ізохорний, ізобарний. Відповідно $n=\gamma$, $n=1$, $n \rightarrow \infty$, $n=0$.

2.220. $A = \frac{p_1 V_1}{n-1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right)$. Вираз для роботи в політропному процесі розкла-

демо до степеневому ряду за значенням $n-1$ та обмежимося першим членом розкладу, який не зникає. Звідси одержуємо:

для ізотерічного процесу

$$A = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad n=1;$$

для ізобарного

$$A = p_1(V_2 - V_1), \quad n=0;$$

для адіабатного

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right), \quad n=\gamma.$$

2.221. Див. рис. В.2.10, а, б, в.

2.222. $A_p > A_T > A_S$.

2.223. Під час процесів 1 і 2 – зростає, 3 – не змінюється, 4 і 5 – спадає.

2.224. Див. рис. В.2.11, а, б, в.

2.225. Треба провести сім'ю ізоTERM.

2.226. Див. рис. В.2.12; $p_2 < p_1$.

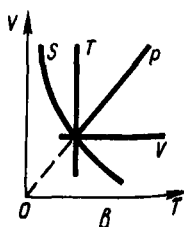
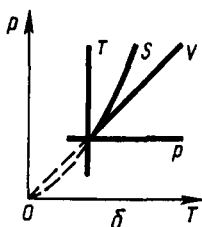
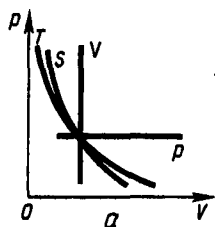


Рис. В.2.10

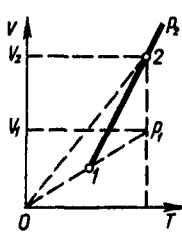
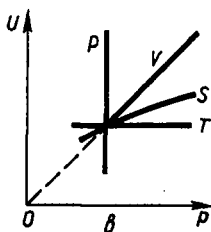
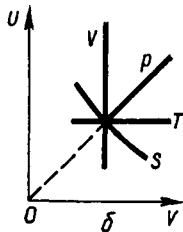
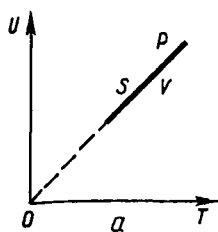


Рис. В.2.11

Рис. В.2.12

2.227. $A = \nu R(T_2 - T_1) \ln \frac{p_2}{p_1} > 0$, набуває.

2.228. Набуває.

2.229. Набуває.

2.230. Віддає.

2.231. $Q = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) < 0$, віддає.

2.232. $A = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)(V_2 - V_1) > 0$, набуває.

2.233. Робота замкнутого циклу дорівнює сумі робіт на окремих ділянках: $A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-1}$. На ділянці 1-2 $A_{1-2} = 0$ (ізохорний процес). З графіка (див. рис. 2.24)

$$A_{2-3} = \frac{p_2 + p_3}{2}(V_3 - V_1), \quad A_{3-1} = \frac{p_1 + p_3}{2}(V_1 - V_3) < 0.$$

Звідси

$$A = \frac{1}{2}p_1V_1\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)\left(\frac{V_3}{V_1} - 1\right).$$

Для ділянки 1-2 $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$, а для ділянки 2-3 $\frac{p_2V_1}{T_2} = \frac{p_3V_3}{T_3}$; оскільки $T_2 = T_3$, то

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{p_2}{p_3}. \quad (1)$$

Для ділянки 3-1

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{p_3}{p_1}. \quad (2)$$

Перемноживши (1) і (2), одержимо $\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^2 = \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$. Звідси $\frac{V_3}{V_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$. Отже,

$$A = \frac{mR}{2M}(T_2 - T_1)\left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - 1\right) = 212 \text{ Дж}.$$

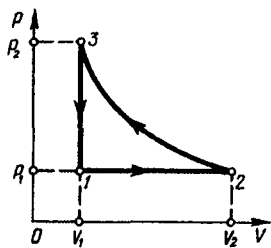


Рис. В.2.13

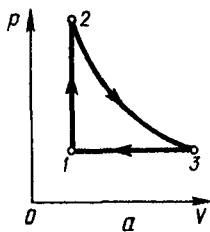
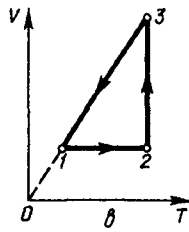
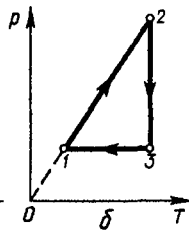


Рис. В.2.14



2.234. $A = \frac{m}{M} R (T_1 - 2\sqrt{T_1 T_3} + T_3) = 46,5 \text{ Дж.}$

2.235. $m = 18,4 \text{ г; } p_3 = 700 \text{ кПа; } A = -0,7 \text{ кДж; } Q_{1-2} = 6,12 \text{ кДж; } Q_{2-3} = -2,45 \text{ кДж; } Q_{3-1} = -4,37 \text{ кДж; } \Delta U_{1-2} = 4,37 \text{ кДж; } \Delta U_{2-3} = 0; \Delta U_{3-1} = 4,37 \text{ кДж (див. рис. В.2.13).}$

2.236. $Q_1 = Q_2 + (p_2 - p_1)(V_2 - V_1).$

2.237. Див. рис. В.2.14, а, б, в.

2.239. $A = -90 \text{ Дж.}$

2.241. Для цикла Карно $\eta_K = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, для заданого цикла $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + \frac{C_p(T_1 - T_2)}{R \ln(p_1/p_2)}}$

Як видно, $\eta < \eta_K$.

2.242. $\eta = 13 \text{ \%}$.

2.243. $\eta = 33 \text{ \%}; Q_1 = 85,0 \text{ кДж; } |Q_2| = 57,0 \text{ кДж.}$

2.244. $\varepsilon = \frac{1 - \eta}{\eta} = 3.$

2.245. $\varepsilon = \frac{T'_2}{T'_1 - T'_2} = 9,46; Q'_1 = \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} Q'_2 = 22,11 \text{ кДж; } P = \frac{Q'_1 - Q'_2}{\tau} = 1,8 \text{ кВт.}$

2.246. $A = 122 \text{ кДж; } m = 0,2 \text{ кг.}$

2.247. $Q'_1 = (\varepsilon + 1) P \tau = 116,64 \text{ МДж.}$

2.248. Зобразимо цикл на діаграмі p, V (рис. В.2.15). На ділянці 2-3 процес ізохорний, на ділянці 3-1 - ізобарний. З умови $p = \alpha T^{2/3}$ визначимо, що $T = \sqrt{\frac{p^3}{\alpha^3}}$.

З рівняння стану газу $pV = \frac{m}{M} R \sqrt{\frac{p^3}{\alpha^3}}$ одержимо $p = \frac{M^2 \alpha^3}{m^2 R^2} V^2$. Отже, у процесі на ділянці 1-2 тиск змінюється пропорційно квадратові об'єму і цикл на діаграмі p, V матиме такий вигляд, як показано на рис. В.2.15.

Повна робота циклу $A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-1}$. Робота ізохорного процесу $A_{2-3} = 0$;

$$\delta A_{1-2} = p dV = \frac{M^2 \alpha^3}{m^2 R^2} V^2 dV;$$

$$A_{1-2} = \frac{M^2 \alpha^3}{3m^2 R^2} (V_2^3 - V_1^3) = \frac{mR}{3M} \left(\sqrt{\frac{p_2^3}{\alpha^3}} - \sqrt{\frac{p_1^3}{\alpha^3}} \right) = \frac{mR}{3M} (T_2 - T_1);$$

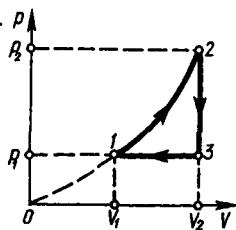


Рис. В.2.15

$$A_{3-1} = p_1 (V_1 - V_2) = -p_1 (V_2 - V_1) = -p_1 \frac{mR}{M\alpha} \left(\sqrt{\frac{p_2}{\alpha}} - \sqrt{\frac{p_1}{\alpha}} \right) = -\frac{mR}{M} \left(\frac{p_1}{p_2} T_2 - T_1 \right);$$

$$A = \frac{mR}{M} \left(\left(\frac{1}{3} - \frac{p_1}{p_2} \right) T_2 + \frac{2}{3} T_1 \right) = 4,79 \text{ кДж.}$$

Коефіцієнт корисної дії η циклу визначимо як відношення роботи A до кількості теплоти Q_{1-2} , підведеної в процесі 1-2:

$$\eta = \frac{A}{Q_{1-2}}; Q_{1-2} = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1) + \frac{mR}{3M} (T_2 - T_1) = \frac{m}{M} \left(C_V + \frac{R}{3} \right) (T_2 - T_1) = 55,4 \text{ кДж.}$$

Отже, $\eta = 8,6 \%$.

2.249. Коефіцієнт корисної дії η теплової машини Карно $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$. Холодиль-

ний коефіцієнт холодильної машини $\epsilon = \frac{T'_2}{T'_1 - T'_2}$. Під час спалювання торфу виділяється кількість теплоти $Q_1 = mq$. Робота теплової машини $A = \eta Q_1 = \eta mq$.

Кількість теплоти, яку передає тепла машина воді опалювальної системи,

$$Q_2 = Q_1 - A = mq(1 - \eta).$$

Холодильна машина набуває від ґрунтової води кількість теплоти

$$Q'_2 = \epsilon A = \epsilon \eta mq.$$

Вода опалювальної системи набуває від холодильної машини кількість теплоти

$$Q'_1 = Q'_2 + A = \eta mq(1 + \epsilon).$$

Загальна кількість теплоти, якої набуде опалювальна система,

$$Q = Q_2 + Q'_1 = mq(1 + \epsilon \eta),$$

або

$$Q = mq \left(1 + \frac{T'_2}{T'_1 - T'_2} \frac{T_1 - T_2}{T_1} \right) = 391,6 \text{ МДж};$$

тоді

$$n = \frac{Q}{mq} = 2,7 \text{ раза.}$$

$$\mathbf{2.250.} \quad A = \frac{p_3 - p_1}{2} (V_3 - V_1) = 0,3 \text{ кДж.}$$

$$2.251. \eta_1/\eta_2 = 0,81.$$

$$2.252. A = 2 \frac{m}{M} R (T_2 - T_1) = 15,8 \text{ кДж}; \quad Q = \frac{m}{M} \left(C_V (T_2 - T_1) + C_p T_2 \left(\frac{V_3}{V_2} - 1 \right) \right) = 237,4 \text{ кДж};$$

$$\eta = \frac{A}{Q} \cdot 100\% = 6,7\%.$$

$$2.253. \eta = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4} = 0,25.$$

$$2.254. A = \frac{\nu R (T_3 - T_4) (T_1 T_3 - 2 T_3 T_4 + T_2 T_4)}{2 T_3 T_4} = 736 \text{ Дж}.$$

$$2.255. \eta = 6,67\%.$$

2.256. Для процесів циклу 1-2 та 3-4 можна записати $p_1 = \alpha_1 V_1$, $p_2 = \alpha_1 V_2$, тоді $p_1/p_2 = V_1/V_2$; $p_3 = \alpha_2 V_3$, $p_4 = \alpha_2 V_4$, тому $p_3/p_4 = V_3/V_4$. Для ізотерми 2-3: $p_2 V_2 = p_3 V_3$, звідки

$$p_3/p_2 = V_2/V_3. \quad (1)$$

Для ізотерми 4-1 $p_1 V_1 = p_4 V_4$, звідки

$$p_1/p_4 = V_4/V_1. \quad (2)$$

Перемноживши праві і ліві частини рівнянь (1) і (2), матимемо $\frac{p_1 p_3}{p_2 p_4} = \frac{V_2^2}{V_1 V_3}$. Підставляючи відношення тисків, одержуємо $\frac{V_1 V_3}{V_2^2} = \frac{V_2^2}{V_1 V_3}$. Звідси $V_3 = \frac{V_2^2}{V_1} = 12,8 \text{ м}^3$.

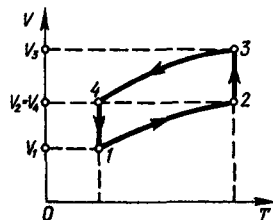


Рис. В.2.16

Визначимо характер залежності об'ємів у точках 1 і 2 від температури: $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$, звідки $V_2 = V_1 \sqrt{T_2/T_1}$. На рис. В.2.16 зображено цей характер залежності на ділянках 1-2 та 3-4. Температура $T_2 = \frac{V_2^2}{V_1^2} T_1 = 742,4 \text{ К}$.

Робота циклу 1-2-3-4-1 $A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-4} + A_{4-1}$,

$$A_{1-2} = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{p_1}{2V_1} (V_2^2 - V_1^2);$$

$$A_{2-3} = \frac{m}{M} R T_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right) = \frac{m}{M} R T_2 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right); \quad A_{3-4} = -\frac{p_3 + p_4}{2} (V_3 - V_2) = -\frac{p_1}{2V_1} (V_2^2 - V_1^2);$$

$$A_{4-1} = -\frac{m}{M} R T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right); \quad A_{1-2} + A_{3-4} = 0; \quad A = \frac{m}{M} (T_2 - T_1) \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = 3,6 \text{ кДж}.$$

Коефіцієнт корисної дії циклу $\eta = \frac{A}{Q_1}$; $Q_1 = Q_{1-2} + Q_{2-3}$; $Q_{1-2} = \Delta U + A_{1-2} =$

$$= \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1) + A_{1-2}.$$

$$A_{1-2} = \frac{p_1}{2V_1} (V_2^2 - V_1^2) = \frac{p_1 V_1}{2} \left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1 \right) = \frac{m}{2M} R (T_2 - T_1).$$

Отже,

$$Q_{1-2} = \frac{m}{M} (T_2 - T_1) \left(C_V + \frac{1}{2} R \right).$$

$$Q_{2-3} = A_{2-3}; C_V = \frac{5}{2} R.$$

$$Q_1 = \frac{m}{M} R \left(3(T_2 - T_1) + T_2 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right) = 28,5 \text{ кДж};$$

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 0,126, \text{ або } \eta = 12,6 \%.$$

2.257. Сумарна кількість теплоти за цикл $Q = Q_{1-2} + Q_{2-3} + Q_{3-1}$; $Q_{1-2} = 0$ (адіабатний процес); $Q_{2-3} = -RT_2 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) < 0$ (ізотермічне стиснення, газ віддає теплоту); $Q_{3-1} = C_p (T_1 - T_2)$ – ізобарне розширення, газ набуває теплоти. Отже,

$$Q = C_p (T_1 - T_2) - RT_2 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right). \quad (1)$$

Сумарна робота за цикл $A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-1}$; $A_{1-2} = C_V (T_1 - T_2)$;

$$A_{2-3} = -RT_2 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right); A_{3-1} = R(T_1 - T_2). \text{ Отже,}$$

$$A = C_V (T_1 - T_2) - RT_2 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) + R(T_1 - T_2) = C_p (T_1 - T_2) - RT_2 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right). \quad (2)$$

Порівнюючи вирази (1) і (2), бачимо, що $A = Q$, тобто вся теплота повністю перетворюється в роботу і ККД машини, яка працювала б за таким циклом, мав би бути рівним одиниці. Це суперечить другому закону термодинаміки, і, отже, такий цикл не може бути здійснений на практиці.

2.258. $\eta = 1 - \frac{n-1}{n \ln n}.$

2.259. $\eta = 1 - \frac{1}{\beta^{\gamma-1}}$ (див. рис. В.2.17).

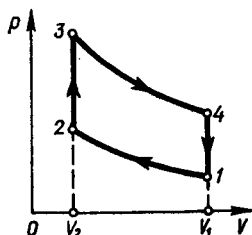


Рис. В.2.17

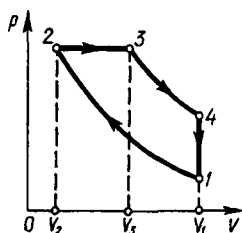


Рис. В.2.18

$$2.260. \eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\rho^\gamma - 1}{\beta^{\gamma-1}(\rho - 1)} \quad (\text{див. рис. В.2.18}).$$

2.261. Адіабатний процес ($\delta Q = 0$). Для оборотного процесу

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Звідси $S = \text{const}$. Оборотні адіабатні процеси є ізентропійними.

Ізотермічний процес ($T = \text{const}$). Для оборотного ізотермічного процесу між станами 1 і 2 зміна ентропії

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{1}{T} \int_1^2 \delta Q = \frac{Q}{T}.$$

Ізохорний процес ($V = \text{const}$). При сталому об'ємі $\delta Q = C_V dT$, тоді

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int \frac{\delta Q}{dT} = C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = C_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right).$$

Ізобарний процес ($p = \text{const}$). При цьому $\delta Q = C_p dT$ і приріст молярної ентропії

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p dT}{T} = C_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right).$$

$$2.262. \Delta S = \frac{m}{M} R \left(\frac{i+2}{2} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \right) = -5,65 \text{ кДж/К}.$$

$$2.263. \Delta S = \frac{m}{M} \left(C_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right).$$

$$2.264. \Delta S = R \left(v_1 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + v_2 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} \right), \text{ де } v_1, v_2 - \text{кількість молів газів, що}$$

змішуються; V_1, V_2 - їх початкові об'єми; процес не є оборотним.

2.265. Вважатимемо, що під час змішування газів їхні температури не змінились, а об'єм дорівнює сумі об'ємів компонентів суміші. На основі розв'язку задачі 2.263 можна записати:

для кисню

$$\Delta S_1 = \frac{m_1}{M_1} R \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right);$$

$$\Delta S_2 = \frac{m_2}{M_2} R \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_2} \right).$$

Відношення об'ємів встановимо з рівняння стану газів:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{m_1 M_2}{m_2 M_1}.$$

Отже, $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{m_1}{M_1} R \ln \left(1 + \frac{m_2 M_1}{m_1 M_2} \right) + \frac{m_2}{M_2} R \ln \left(\frac{m_1 M_2}{m_2 M_1} + 1 \right) = 0,83 \text{ кДж/К}.$

2.266. $\frac{\Delta S}{m} = \frac{R}{M} \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) = 11 \text{ кДж/(кг·К)}.$

2.267. $T_3 = \frac{T_2^2}{T_1} = 500 \text{ К}; \Delta S = \frac{m}{M} (C_V + C_P) \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = 37,4 \text{ Дж/К}.$

2.268. $\Delta S_{1-2-3} = \Delta S_{1-4-3} = \frac{i}{2} R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma} \right) = 30,7 \text{ Дж/К}.$

2.269. $V_2 = V_3 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 8,8 \text{ л}; V_4 = V_1 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 12,3 \text{ л}; Q_{1-2} = \frac{m}{M} R T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = 1,26 \text{ кДж};$

$Q_{3-4} = \frac{m}{M} R T_2 \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right) = -1,0 \text{ кДж}; \eta = 21 \%; \Delta S_{1-2} = \frac{Q_{1-2}}{T_1} = 3,2 \text{ Дж/К}; \Delta S_{3-4} = \frac{Q_{3-4}}{T_2} = -3,3 \text{ Дж/К}.$

2.270. $n = 1 + \frac{m R \ln (T_2/T_1)}{m C_V \ln (T_2/T_1) - M \Delta S} = 2,1.$

2.271. В ізотермічному процесі $\Delta S = \nu R \ln n = 835 \text{ Дж/К}$. Зміна ентропії в адіабат-ному процесі дорівнює нулеві.

2.272. $\Delta S = c m \ln (T_2/T_1).$

2.273. $\Delta U = -\frac{i}{2} p_1 V_1 \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 \right) = -2 666,7 \text{ Дж}; \Delta S = -2 \nu R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = -18,26 \text{ Дж/К};$

$Q = -p_1 V_1 \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 \right) = -1 778 \text{ Дж}.$

2.274. $Q = \left(\frac{i}{2} - 1 \right) p_1 V_1 \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) = -300 \text{ Дж}; \Delta S = \left(1 - \frac{i}{2} \right) \frac{p_1 V_1}{T_1} \ln \frac{V_2}{V_1} = -0,832 \text{ Дж/К};$

$\Delta U = \frac{i}{2} p_1 V_1 \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) = -500 \text{ Дж}.$

$$2.275. \Delta U = \frac{pV^n}{n-1} \left(\frac{1}{V_2^{n-1}} - \frac{1}{V_1^{n-1}} \right); \quad \Delta S = (nC_V - C_p) \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

$$2.276. \frac{w_2}{w_1} = e^{10^{20}}.$$

$$2.277. \Delta Q = kT \Delta \eta = 4 \cdot 10^{-23} \text{ Дж.}$$

$$2.284. \Delta S_{1-2} = \Delta S_{1-3-2} = \frac{m}{M} R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

$$2.285. Q_3 > Q_2 > Q_1, \Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S_3.$$

$$2.286. p = 202,5 \text{ кПа}; p_i = 951,4 \text{ Па}; V_0 = \frac{m}{M} b = 0,6 \text{ дм}^3.$$

$$2.287. \text{ а) } T = 299,5 \text{ К}; p_i = 0; \text{ б) } T = 299,5 \text{ К}; p_i = 878 \text{ Па.}$$

$$2.288. p_i/p = 0,1 \%; V_i/V = 7,8 \%.$$

$$2.289. \rho = 356 \text{ кг/м}^3.$$

$$2.290. p_i = 68,4 \text{ МПа.}$$

$$2.291. V_{M\kappa} = \frac{3RT_{\kappa}}{8p_{\kappa}} = 115,5 \text{ см}^3.$$

$$2.292. \delta Q = dU + \delta A; \quad \delta Q = 0; \quad \delta A = 0; \quad \Delta U = \int dU = U_2 - U_1 = 0; \quad U_2 = U_1; \quad U_1 = \\ = v \left(C_V T_1 - \frac{av}{V_1} \right); \quad U_2 = v \left(C_V T_2 - \frac{av}{V_2} \right); \quad C_V T_1 - \frac{av}{V_1} = C_V T_2 - \frac{av}{V_2}; \quad T_2 - T_1 = -\frac{av}{C_V} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right); \\ \Delta T = -\frac{2av}{iR} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) = -9,9 \text{ К.}$$

$$2.293. T = 46 \text{ К.}$$

$$2.294. \Delta U = v^2 a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) = 367,2 \text{ кДж}; \quad A = vRT \ln \left(\frac{V_2 - vb}{V_1 - vb} \right) = 7,1 \text{ МДж};$$

$$Q = 6,73 \text{ МДж}; \quad \Delta S = vR \ln \left(\frac{V_2 - vb}{V_1 - vb} \right) \approx 24 \text{ кДж/К.}$$

$$2.295. \text{ З рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля речовини } p = \frac{RT}{V_M - b} - \frac{a}{V_M^2}, \text{ де}$$

$$V_M = \frac{M}{\rho} - \text{молярний об'єм. Якщо } V_{\text{амп}} > V_{\kappa}, \text{ то вся рідина випаровується. Критичний}$$

$$\text{перехід відбудеться за умови } V_{\text{амп}} = V_{\kappa}. \text{ Оскільки } V_{\kappa} = \frac{m}{M} V_{M\kappa}, \text{ тоді } \frac{V_{\text{рід}}}{V_{\text{амп}}} = \frac{V_{\text{рід}}}{V_{\kappa}} = \frac{V_{\text{рід}} M}{m V_{M\kappa}} =$$

$$= \frac{M}{\rho V_{M\kappa}}; \quad V_{M\kappa} = 3b = \frac{3T_{\kappa} R}{8p_{\kappa}}. \text{ Отже, } \frac{V_{\text{рід}}}{V_{\text{амп}}} = \frac{8Mp_{\kappa}}{3R\rho T_{\kappa}} = 0,25.$$

$$2.296. \rho_k = \frac{8Mp_k}{3RT_k} = 196,4 \text{ кг/м}^3.$$

$$2.297. p = 7,7 \text{ кПа.}$$

$$2.298. \text{Рівняння стану газу в початковий момент} \left(p + \frac{m^2}{M^2} \frac{a}{V^2} \right) \left(V - \frac{m}{M} b \right) = \frac{m}{M} RT.$$

$$\text{Рівняння стану після витоку } \Delta m \text{ газу} \left(p - \Delta p + \left(\frac{m - \Delta m}{M} \right)^2 \frac{a}{V^2} \right) \left(V - \frac{m - \Delta m}{M} b \right) = \\ = \frac{m - \Delta m}{M} RT.$$

$$\text{З цих рівнянь } \Delta p = \frac{\Delta v RT}{V - \Delta v b} - \frac{v^2 a}{V^2} + \frac{(v - \Delta v)^2 a}{V^2} - \frac{(v - \Delta v) RT}{V - (v - \Delta v) b}, \text{ де } v = \frac{m}{M}, \Delta v = \frac{\Delta m}{M}.$$

$$\text{Для ідеального газу } (a = b = 0) \Delta p = \frac{\Delta v RT}{V}.$$

$$2.299. \text{Якщо } V = \text{const}, \text{ то } \delta Q = dU, \delta Q = C'_V dT. \text{ Зміна внутрішньої енергії} \\ dU = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV. \text{ Оскільки } dV = 0, \text{ то } C'_V = C_V. \text{ Якщо } p = \text{const}, \text{ то } \delta Q = C'_p dT \\ \text{і } \delta Q = dU + p dV = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV + p dV = C_V dT + \left(p + \frac{a}{V^2} \right) dV = C_V dT + \frac{RT}{V - b} dV.$$

З рівняння Ван-дер-Ваальса (для одного моля газу)

$$dV = \frac{R}{p - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}} dT.$$

Тому

$$\delta Q = C_V dT + \frac{R^2 T}{(V - b) \left(p - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3} \right)} dT. \quad (1)$$

Порівнюючи рівність (1) з $\delta Q = C'_p dT$, запишемо

$$C'_p = C_V + \frac{R^2 T}{(V - b) \left(p - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3} \right)}.$$

$$2.300. \Delta S = \int \frac{\delta Q}{T}; \delta Q = C_V dT + \frac{RT}{V - b} dV. \text{ Звідси } \Delta S = C_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R \ln \left(\frac{V_2 - b}{V_1 - b} \right) = \\ = 12,5 \text{ Дж/К.}$$

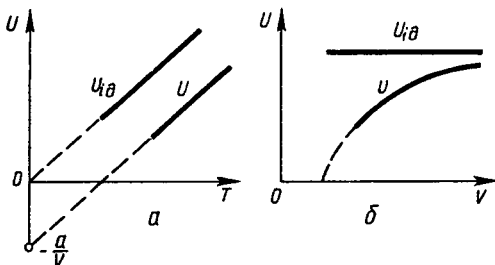


Рис. В.2.19

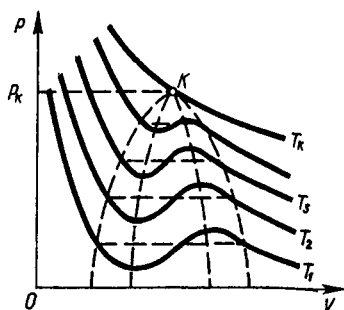


Рис. В.2.20

2.303. Див. рис. В.2.19.

2.304. $a \rightarrow 0, b \rightarrow 0$; відповідає переходові до невзаємодіючих точкових молекул.

2.305. Див. рис. В.2.20.

$$2.306. \Delta T = \frac{av}{C_V(V_1 + V_2)V_1} = -0,25 \text{ К.}$$

$$2.307. U = v \left(C_V T - \frac{av}{V} \right) = 4,86 \text{ кДж.}$$

$$2.308. \text{Робота проти зовнішніх сил } A = vRT \ln \left(\frac{V_2 - vb}{V_1 - vb} \right) = 1,027 \text{ кДж.}$$

$$\text{Повна робота } A = vRT \ln \left(\frac{V_2 - vb}{V_1 - vb} \right) + v^2 a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = 1,004 \text{ кДж.}$$

$$2.309. \Delta T = \frac{9}{8} v \frac{R}{C_V} V_{Mk} T_k \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = -1,02 \text{ К.}$$

$$2.310. U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2; U_1 = vC_V T_1 - \frac{av^2}{V_1}; U_2 = vC_V T_2 - \frac{av^2}{V_2}; a = 0; U_1 = vC_V T_1;$$

$$U_2 = vC_V T_2; \left(p_1 + \frac{v^2 a}{V_1^2} \right) (V_1 - vb) = vRT_1; \left(p_2 + \frac{v^2 a}{V_2^2} \right) (V_2 - vb) = vRT_2; a = 0, \text{ тому}$$

$$p_1 V_1 = vRT_1 + p_1 vb; p_2 V_2 = vRT_2 + p_2 vb; vC_V T_1 + vRT_1 + p_1 vb = vC_V T_2 + vRT_2 + p_2 vb;$$

$$vT_1(C_V + R) + p_1 vb = vT_2(C_V + R) + p_2 vb; (T_2 - T_1)v(C_V + R) = vb(p_1 - p_2); T_2 - T_1 = \frac{b(p_1 - p_2)}{C_V + R};$$

$p_1 > p_2; C_V + R > 0$, тому $T_2 > T_1$ – ефект Джоуля – Томсона негативний.

$$2.311. \Delta T = \frac{2a}{RT C_p} \Delta p < 0, \text{ оскільки } \Delta p < 0.$$

$$2.312. T = \frac{2a}{Rb} = \frac{27}{4} T_k = 34,4 \text{ К} - \text{температура інверсії.}$$

$$2.313. \rho_1 = 4,7 \text{ г/м}^3; \rho_2 = 15,5 \text{ г/м}^3; \text{літнього місяця є більшою в } k = 3,2 \text{ раза.}$$

$$2.314. \tau = \frac{p_0(\varphi_2 - \varphi_1)MV}{100\alpha RT} = 17,4 \text{ хв.}$$

$$2.315. \varphi = \frac{pVM_n - mRT}{p_0V(M_n - M_s)} \cdot 100 \% = 87,6 \%; p_0 = 2,34 \text{ кПа при } T = 293 \text{ К.}$$

$$2.316. \varphi = \frac{p_0 - \rho g \Delta h}{p_0} \cdot 100 \% = 98 \%; p_0 = 1 \text{ 936,8 Па.}$$

$$2.317. \rho = 19,4 \text{ г/м}^3; m = 97 \text{ г.}$$

$$2.318. m = \frac{Sh}{100} (\varphi_2 \rho_{02} - \varphi_1 \rho_{01}) = 1,44 \text{ кг.}$$

$$2.319. m = 2 \text{ 430 кг.}$$

2.320. Визначимо маси водяної пари у кожному з об'ємів повітря

$$\varphi_1 = \frac{\rho_1}{\rho_{01}} \cdot 100 \%; m_{1\text{в.п}} = \rho_1 V_1 = \frac{\varphi_1 \rho_{01}}{100} V_1.$$

Аналогічно

$$m_{2\text{в.п}} = \rho_2 V_2 = \frac{\varphi_2 \rho_{02}}{100} V_2.$$

Щоб за таблицями визначити густину насиченої пари після змішування газів, потрібно обчислити температуру, яка встановилась.

В об'ємі V_1 температура вологого повітря вища, тому під час змішування це повітря віддаватиме кількість теплоти

$$Q_1 = \frac{m_{1\text{п}}}{M_{\text{п}}} C_{p\text{п}} (T_1 - T_2) + \frac{m_{1\text{в.п}}}{M_{\text{в.п}}} C_{p\text{в.п}} (T_1 - T), \quad (1)$$

де $m_{1\text{п}}$ – маса повітря в об'ємі V_1 ; $M_{\text{п}}$ – молярна маса повітря; $C_{p\text{в.п}}$ – молярна

теплоємність водяної пари при сталому тиску, $C_{p\text{в.п}} = \frac{i+2}{2} R$, тут $i = 6$.

Визначимо $m_{1\text{п}}$. Для цього запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} p'_1 V_1 = \frac{m_{1\text{п}}}{M_{\text{п}}} RT_1; \\ p''_1 V_1 = \frac{m_{1\text{в.п}}}{M_{\text{в.п}}} RT_1. \end{cases}$$

Додаючи праві та ліві частини цих рівнянь, одержимо

$$(p'_1 + p''_1) V_1 = \left(\frac{m_{1\text{п}}}{M_{\text{п}}} + \frac{m_{1\text{в.п}}}{M_{\text{в.п}}} \right) RT_1. \quad (2)$$

За законом Клапейрона – Менделєєва

$$p_0 V_1 = \frac{m_{\text{ісм}}}{M_{\text{ісм}}} RT_1, \quad (3)$$

де $p_0 = p'_1 + p''_1$; $m_{\text{ісм}}$, $M_{\text{ісм}}$ – маса і молярна маса суміші в об'ємі V_1 . Порівнюючи (2) і (3), запишемо

$$\frac{m_{\text{ісм}}}{M_{\text{ісм}}} = \frac{m_{\text{іп}}}{M_{\text{п}}} + \frac{m_{\text{ів.п}}}{M_{\text{в.п}}}, \text{ або } \frac{p_0 V_1}{RT_1} = \frac{m_{\text{іп}}}{M_{\text{п}}} + \frac{m_{\text{ів.п}}}{M_{\text{в.п}}}.$$

Тоді

$$m_{\text{іп}} = \left(\frac{p_0 V_1}{RT_1} - \frac{m_{\text{ів.п}}}{M_{\text{в.п}}} \right) M_{\text{п}}.$$

Підставляючи в (1) відповідні величини, одержуємо:

$$Q_1 = \left(\frac{p_0 V_1}{RT_1} - \frac{\varphi_1 \rho_{\text{іп}}}{100 M_{\text{в.п}}} V_1 \right) C_{\text{пн}} (T - T_1) + \frac{\varphi_1 \rho_{\text{іп}}}{100 M_{\text{в.п}}} V_1 C_{\text{рв.п}} (T_1 - T).$$

Вологе повітря об'єму V_2 набуде кількість теплоти

$$Q_2 = \left(\frac{p_0 V_2}{RT_2} - \frac{\varphi_2 \rho_{\text{2п}}}{100 M_{\text{в.п}}} V_2 \right) C_{\text{пн}} (T - T_2) + \frac{\varphi_2 \rho_{\text{2п}}}{100 M_{\text{в.п}}} V_2 C_{\text{рв.п}} (T - T_2).$$

На основі закону збереження енергії $Q_1 = Q_2$. Звідси

$$T = \frac{3,5 p_0 (V_1 + V_2) + \frac{0,5 R}{100 M_{\text{в.п}}} (\varphi_1 \rho_{\text{01}} V_1 T_1 + \varphi_2 \rho_{\text{02}} V_2 T_2)}{3,5 p_0 \left(\frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2} \right) + \frac{0,5 R}{100 M_{\text{в.п}}} (\varphi_1 \rho_{\text{01}} V_1 + \varphi_2 \rho_{\text{02}} V_2)} = 293,5 \text{ К}.$$

За табл. 13, дод. Б при $t = 20,5^\circ \text{C}$ $\rho_{\text{н}} = 17,8 \text{ г/м}^3$. Отже, $\varphi = \frac{\rho}{\rho_{\text{н}}} \cdot 100 \% = 29 \%$.

2.321. Якщо увесь аміак під поршнем циліндра перебуває в газоподібному стані, то його тиск визначається так:

$$\frac{p_x V}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0},$$

де $p_0 = 101,3 \text{ кПа}$; $T_0 = 273 \text{ К}$; $V_0 = \frac{m}{M} V'_0$; $V'_0 = 22,4 \text{ л}$ – об'єм одного моля газоподібного аміаку. Звідси $p_x = 44 \text{ кПа}$, тобто $p_x > p_{\text{н}}$ ($p_{\text{н}}$ – тиск насиченої пари аміаку). Якщо б увесь аміак був газоподібним, то його тиск під поршнем циліндра виявився б вищим від тиску насиченої пари. Це означає, що частина аміаку ще до стиснення була в рідкому стані. Робимо висновок, що повітря насичене парами аміаку і, отже, під час зменшення об'єму тиск не змінюватиметься.

Визначимо масу аміаку, яка містилась під поршнем циліндра в газоподібному стані: $p_n = p_0 \frac{m_1 V_0'' T}{M V T_0}$, звідси $m_1 = p_n \frac{M V T_0}{p_0 V_0'' T}$. Під час зменшення об'єму в 4 рази в газоподібному стані залишиться лише $\frac{1}{4} m_1$ аміаку, а $\frac{3}{4} m_1$ переходить у рідкий стан.

Отже,

$$\Delta m = \frac{3}{4} m_1 = \frac{3}{4} p_n \frac{M V T_0}{p_0 V_0'' T} = 2,24 \text{ г.}$$

$$2.322. t_2 = \frac{\rho_1 (1 + \langle \beta \rangle t_1) - \rho_2}{\langle \beta \rangle \rho_2} = 313,4 \text{ } ^\circ\text{C.}$$

$$2.323. \Delta p = \frac{\beta \Delta T}{\gamma} = 6,9 \text{ МПа.}$$

$$2.324. \langle \beta \rangle = \frac{\Delta h}{h_4 t_2 - h_2 t_1} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}.$$

2.325. Не вилітється.

$$2.326. \langle \beta \rangle = 6,3 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}.$$

$$2.327. A = \sigma \left(\frac{3m}{\rho r} - \sqrt[3]{36\pi \frac{m^2}{\rho^2}} \right) = 4,38 \text{ Дж.}$$

$$2.328. \Delta T = \frac{3\sigma(2 - \sqrt[3]{4})}{2c\rho r} n = 0,1 \text{ К.}$$

$$2.329. p = \frac{2\sigma(R^2 - r_1^2 - r_2^2)}{r_1^3 + r_2^3 - R^3}.$$

2.330. Над опуклою поверхнею краплини тиск збільшується і визначається за формулою

$$p = p_0 + \frac{2\sigma \rho_n}{r \rho_p},$$

де p_0 – атмосферний тиск; σ – коефіцієнт поверхневого натягу; r – радіус краплини; ρ_n, ρ_p – густина відповідно пари і рідини.

Чим менший радіус краплини, тим надлишковий тиск більший. А значить, тоді, коли навколо краплини більшого радіуса повітря вже стане насиченим і встановиться динамічна рівновага між кількістю молекул, що вилітають за одиницю часу з поверхні рідини, і кількістю молекул, які повертаються назад, біля поверхні краплин меншого радіуса ця рівновага ще не настане, а тому за одиницю часу з поверхні малих краплин вилітатиме більше молекул, ніж повертатиметься назад. Це призведе до того, що в просторі над поверхнями великих краплин повітря стане дещо перенасиченим і на їхню поверхню за одиницю часу повертатиметься більше молекул, ніж з них

вилітатиме. Отже, з часом малі краплини випаровуватимуться з усе більшою швидкістю відповідно до зменшення їх радіуса, а великі краплини збільшуватимуться.

До цього висновку можна дійти й на основі загального принципу мінімуму енергії системи. Чим менші краплини, тим більша їхня сумарна поверхня і, відповідно, більша вільна поверхнева енергія. Система буде стійкою, якщо ця енергія за даних умов стане мінімальною. Це можливо тоді, коли сумарна площа поверхонь усіх краплин стане найменшою, тобто тоді, коли малі краплини зіллються в одну велику краплину.

2.331. Зміна вільної енергії визначається так: $\Delta E = \sigma(2S_0 - S)$, $S_0 = 4\pi r^2$,

$S = 4\pi R^2$. Оскільки $m = 2m_0$ та $m = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$ і $m_0 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$, то $R = r\sqrt[3]{2}$. Отже,

$\Delta E = 4\pi\sigma\left(2 - \sqrt[3]{2^2}\right)r^2 = 690$ мДж. Цей надлишок енергії згідно з ідеєю Френкеля має витратитися на роботу проти сил в'язкого тертя, які виникають у процесі переміщення маси води під час злиття краплин.

Оцінюючи сили в'язкого тертя, скористаємося формулою Стокса $F = 6\pi\eta v$. Переміщення маси води під час злиття краплин наближено $\Delta x = 2r$. Тому $A = F\Delta x = 12\pi\eta r^2 v$. Швидкість злиття оцінимо як $v = \frac{r}{\tau}$. Робота A виконується за

рахунок ΔE . Тому $12\pi\eta \frac{r^3}{\tau} = 4\pi\sigma\left(2 - \sqrt[3]{2^2}\right)r^2$. Звідси $\tau \approx 4\frac{\eta r}{\sigma} = 5,5 \cdot 10^{-4}$ с, де $\eta = 10^{-3}$ Па·с, $\sigma = 73$ мН/м.

2.332. $m = \frac{\pi\sigma D^2}{2gr} = 1$ кг.

2.333. $\Delta h = \frac{4\sigma(d_2 - d_1)}{\rho g d_1 d_2} = 3,5$ мм.

2.334. $A = \frac{2\pi\sigma^2}{\rho g}$; $U = A$.

2.335. $\sigma = 66$ мН/м.

2.336. $h = 2,8$ мм; $m = \frac{2\sigma l}{g} = 0,22$ г.

2.337. У закритій посудині над поверхнею рідини через деякий час повітря стане насиченим і, отже, загальний тиск у частині посудини, зайнятій газоподібним середовищем, складатиметься з парціальних тисків повітря і пари води. Тиск повітря на відстані h вище або нижче від рівня води в посудині мало відрізнятиметься, і цією різницею нехтуватимемо. Тиск же насиченої водяної пари буде різним.

Якщо біля поверхні рідини (точка A) результуючий тиск позначити p_0 , то над поверхнями менісків у капілярах 1 і 2 тиски відповідно будуть $p_1 = p_0 - \rho_p g h_1$, $p_2 = p_0 + \rho_p g h_2$. Оскільки $r_1 = r_2 = r$, то й $h_1 = h_2 = h$.

Висоту h визначимо з умови рівності сил поверхневого натягу й ваги стовпчика рідини в капілярі (або поза ним для капіляра 2): $\sigma 2\pi r = \rho_p g \pi r^2 h$, $h = \frac{2\sigma}{\rho_p g r}$. Тоді

$$p_1 = p_0 - \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_n}{\rho_p}, \quad p_2 = p_0 + \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_n}{\rho_p}.$$

Отже, над угнутою поверхнею меніска рідини тиск менший від p_0 на $\frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_n}{\rho_p}$, а над опуклою – більший на те саме значення. Також слід зауважити, що надлишковий тиск залежить від r обернено пропорційно.

$$2.338. \quad F = \frac{\sigma m}{\rho d} \left(\sqrt{\frac{\pi \rho d}{m}} + \frac{2}{d} \right) = 10 \text{ Н.}$$

2.339. Кількість теплоти, підведеної до краплини, площа поверхні якої $S = 4\pi r^2$, за час dt буде

$$dQ = \frac{\alpha(T_n - T_p)}{r} 4\pi r^2 dt,$$

де α - коефіцієнт тепловіддачі. Кількість теплоти dQ витратиться на випаровування певної маси dm рідини.

Рівняння теплового балансу запишеться так:

$$q dm = -\alpha(T_n - T_p) \cdot 4\pi r dt,$$

де q - питома теплота пароутворення. Знак мінус означає, що маса рідини з часом зменшується. Оскільки $dm = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$, то

$$r dr = -\frac{\alpha(T_n - T_p)}{\rho q} dt.$$

Якщо $T_n - T_p = \text{const}$, то $\int_{r_0}^r r dr = -\frac{\alpha(T_n - T_p)}{\rho q} \int_0^\tau dt$, $\frac{1}{2}(r^2 - r_0^2) = -\frac{\alpha(T_n - T_p)}{\rho q} \tau$, або

$$r^2 = r_0^2 - \beta \tau, \text{ де } \beta = \frac{2\alpha(T_n - T_p)}{\rho q}.$$

Отже, закон зміни радіуса краплини r з часом

$$r = \sqrt{r_0^2 - \beta \tau},$$

де r_0 - початковий радіус краплини.

З умови, що через час τ $r = \frac{r_0}{n}$, одержимо $\frac{r_0^2}{n^2} = r_0^2 - \beta \tau$. Звідси $\beta = \frac{(n^2 - 1)r_0^2}{n^2 \tau}$.

Через час $\tau = \tau_{\text{вип}}$ радіус краплини $r = 0$. Отже, $\tau_{\text{вип}} = \frac{r_0^2}{\beta} = \frac{n^2}{n^2 - 1} \tau = 20 \text{ хв.}$

2.340. За законом Вант-Гоффа $pV = nRT$, $p = \rho gh$, де ρ – густина розчину (в стані рівноваги можна прийняти, що вона дорівнює густині води).

Отже, $\rho ghV = nRT$. Звідси $h = \frac{nRT}{\rho gV} = 24,3 \text{ м}$.

2.341. $n = 5 \cdot 10^{22} \text{ дм}^{-3}$.

2.342. Ні.

2.353. $k = \frac{c(T - T_k)}{q} \cdot 100\% = 3\%$.

2.354. $h = \frac{cm_2(T - T_0)T}{MSqp_0} = 6,7 \text{ см}$.

2.355. $\Delta T = \frac{P\tau + mc_v(T_1 - T_0) + m_{r_n} + mc_n(T_0 - T_2)}{\rho_n V C_V} = 56 \text{ К}; T_0 = 273 \text{ К}$.

2.356. $q = \frac{\Delta p}{\Delta T} TV_{\text{в.п}} = 2,5 \text{ МДж/кг} \quad (V_p \ll V_n)$.

2.357. З графіка видно, що за перші 40 хв температура суміші в посудині не змінювалась і дорівнювала 0°C . Це означає, що протягом цього часу відбувався процес кристалізації й перетворення води в лід. Теплота, яка виділялася під час кристалізації, поглиналась навколишнім середовищем. Через 40 хв уся вода перетворилася в лід і температура льоду в посудині почала знижуватися. Ще через 20 хв температура льоду знизилася на $\Delta t = 4^\circ\text{C}$. Кількість теплоти, що виділилася льодом під час його охолодження на $\Delta t^\circ\text{C}$,

$$Q_1 = cm\Delta t.$$

Відповідно за одиницю часу виділилось

$$\frac{Q_1}{\Delta \tau} = \frac{cm\Delta t}{\Delta \tau}.$$

Якщо вважати, що швидкість відведення теплоти від системи була однакою, то за 40 хв від системи відведено

$$Q_2 = \frac{cm\Delta t}{\tau_2 - \tau_1} (\tau_1 - 0),$$

де Q_2 – кількість теплоти, яка виділилася під час кристалізації води. Отже, $Q_2 = m_x r$. Звідси

$$m_x = \frac{Q_2}{r} = \frac{cm\Delta t}{r(\tau_2 - \tau_1)} \tau_1 = 0,8 \text{ кг}.$$

2.358. Розглянемо цикл, що охоплює такі процеси: 1 – плавлення льоду, 2 – випаровування води, 3 – сублімацію. У разі адіабатно ізольованої системи повна зміна внутрішньої енергії системи дорівнює роботі зовнішніх сил:

$$mr + mq - m\delta = A_{1-2-3-1}.$$

Стягуючи цикл у потрібну точку, одержимо, що $A \rightarrow 0$. Отже,

$$\delta = r + q = 2,812 \text{ МДж/кг.}$$

2.359. $Q = Mv(c\Delta T + q) - vRT_1 = 75,0 \text{ кДж}$, де v – кількість молів води; q – її питома теплота пароутворення.

2.360. $A = vMq(T_1 - T_2)/T_1 = 16,6 \text{ кДж}$.

2.361. $dp_{1-2}/dT = 44 \text{ мПа/К}$; $dp_{2-3}/dT = -12 \text{ кПа/К}$, де dp_{1-2}/dT – нахил кривої фазової рівноваги вода–пара; dp_{2-3}/dT – нахил кривої фазової рівноваги лід–вода. Над водою тиск більший, ніж над льодом.

2.362. $\Delta T = T\Delta p\Delta v/q = 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ К}$.

2.363. $p = p_0 \left(1 + \frac{qM\Delta T}{RT_0^2} \right) = 1,05 \cdot 10^5 \text{ Па}$, де $\Delta T = T - T_0$; p_0 , T_0 – нормальні значення тиску та температури. Використано умову $(T - T_0)/T_0 \ll 1$.

2.364. $\Delta m = \frac{MpV}{RT^2} \left(\frac{Mq}{RT} - 1 \right) \Delta T = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ кг}$, де p – тиск насиченої пари при $T = 373 \text{ К}$; V – її об'єм. Взяти до уваги, що мають місце співвідношення $\frac{\Delta T}{T} \ll 1$, $\frac{Mq\Delta T}{RT^2} \ll 1$.

2.365. $p_2 = p_1 \left(1 - \frac{qM\Delta T}{RT_1^2} \right) = 560 \text{ Па}$, $\Delta T = T_1 - T_2$. Використати співвідношення $\frac{\Delta T}{T_1} \ll 1$, $\frac{Mq\Delta T}{RT_1^2} \ll 1$; $q = r + q'$, де r – питома теплота плавлення льоду; q' – питома теплота пароутворення води.

2.366. $r = \Delta p\Delta v/T_1 / \Delta T = 189,5 \text{ кДж/кг}$.

2.367. $\Delta T = \frac{p_1 T}{r} \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_n} \right) = -0,9 \text{ К}$; $\eta = -c_n \frac{\Delta T}{r} = 5,3 \cdot 10^{-2}$. Взяти до уваги, що $p_1 \gg p$.

2.368. $\Delta S = m \left(c \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{q}{T_2} \right) = 44,4 \text{ кДж/К}$.

2.369. $\Delta S = S_2 - S_1 = c_2 m_2 \ln \left(\frac{T_0}{T_2} \right) + \frac{1}{T_0} (c_1 m_1 (T_1 - T_0) - c_2 m_2 (T_0 - T_2)) = 83 \text{ Дж/К}$, де T_0 – температура плавлення при нормальному тиску, тобто $T_0 = 273,16 \text{ К}$.

2.370. $m_1 = \frac{cm(T_{nn} - T)}{r} = 0,125 \text{ кг}$, де c – питома теплоємність води.

$$2.371. \Delta S = m \left(c_n \ln \frac{T_{пл}}{T_1} + c_v \ln \frac{T_2}{T_{пл}} + \frac{r}{T_{пл}} + \frac{q}{T_2} \right) = 323 \text{ Дж/К, де } r - \text{питома теплота}$$

плавлення льоду; q – питома теплота пароутворення води.

$$2.372. \Delta S = c_1 m_1 \ln \left(\frac{T_{см}}{T_1} \right) + c_2 m_2 \ln \left(\frac{T_{см}}{T_2} \right) = 2,8 \text{ кДж/К, де } T_{см} - \text{рівноважна}$$

$$\text{температура суміші, } T_{см} = \frac{c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2}.$$

2.374. Однаковими є характеристики a та b .

2.375. Згідно з рівнянням Клапейрона – Клаузіуса

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T(v_n - v_p)}{q}.$$

Оскільки $v_n \gg v_p$, то $v_n - v_p \approx v_n$. Тиск повітря з висотою змінюється за законом

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g, \text{ де } \rho - \text{густина повітря:}$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{dT}{dp} \frac{dp}{dz} = -\frac{T v_n}{q} \rho g.$$

Тиск пари і тиск повітря є однаковими. Отже,

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{T v_n}{q} \rho g = -2,6 \text{ К/км} \left(v_n = \frac{1}{\rho_n} \right).$$

Знак мінус означає, що температура кипіння з висотою зменшується.

2.376. За нормальних атмосферних умов вода замерзає при 0°C . Проте слід врахувати два механізми втрати теплоти: теплообмін з навколишнім середовищем і випаровування. Якщо стінки склянок теплоізовані, то охолодження води відбувається, в основному, завдяки випаровуванню з відкритої поверхні. При цьому над поверхнею рідини утворюється пара, тиск якої весь час змінюється через зміну температури. Рідина випаровується до встановлення рівноваги з паром, тобто поки тиск пари над поверхнею рідини не дорівнюватиме тискові насичення p_n . У свою чергу, p_n залежить від температури прямо пропорційно, тобто над гарячою рідиною тиск пари значно менший, ніж над холодною, і гаряча рідина, інтенсивно випаровуючись, швидко охолоджується. Внаслідок інтенсивного випаровування зменшується маса рідини. Тому в момент, коли температура дорівнюватиме 0°C , у склянці, де була

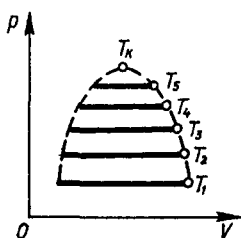


Рис. В.2.21

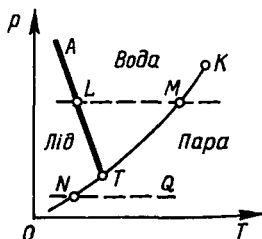


Рис. В.2.22

гаряча вода, її маса стане меншою, ніж маса холодної води. Процес кристалізації відбувається за однакових умов. Отже, якщо теплообмін з навколишнім середовищем утруднений, а вільна поверхня рідини є досить великою, то кип'яток може замерзнути швидше, ніж вода з-під крана.

2.377. Див. рис. В.2.21.

2.384. Див. рис. В.2.22.

ДО РОЗДІЛУ 3

$$3.1. q = \frac{4\pi e N_A R^3 \rho}{3M} = 5,6 \cdot 10^7 \text{ Кл.}$$

$$3.2. q = \frac{Z e \rho N_A}{M} = 3,9 \cdot 10^5 \text{ Кл.}$$

$$3.3. \frac{q}{v} = e N_A = -9,6 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль.}$$

$$3.4. \frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e^2 G} = 4,2 \cdot 10^{42}.$$

$$3.5. m'_p = \frac{e}{2\sqrt{\pi\epsilon_0 G}} = 1,86 \cdot 10^{-9} \text{ кг} \approx 10^{18} m_p.$$

$$3.6. q = \frac{8}{3} \pi r r_0^3 \rho \sqrt{\pi\epsilon_0 G} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

3.7. На гранях, перпендикулярних до швидкості, $\sigma = 1 \text{ мкКл/м}^2$, на інших гранях $\sigma = 1,15 \text{ мкКл/м}^2$.

$$3.8. q = 8l \sqrt{\pi\epsilon_0 m g \frac{\sin^3 \alpha / 2}{\cos \alpha / 2}} = 44,86 \text{ нКл.}$$

$$3.9. q = \frac{r}{\sin \alpha} \sqrt{2\pi\epsilon_0 m \left(\frac{g}{\cos \alpha} - \frac{\omega^2 r}{\sin \alpha} \right)} = 0,13 \text{ мкКл.}$$

$$3.11. q_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} q = -58 \text{ нКл, рівновага нестійка.}$$

$$3.12. \frac{q}{m} = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3 \omega^2}{q_0} = 8 \text{ мкКл/кг.}$$

3.13. Умовою спливання кулі є рівність сили тяжіння сумі архімедової сили і сили, що діє з боку електричного поля, тобто

$$\frac{1}{6} \pi d^3 \rho_1 q = \frac{1}{6} \pi d^3 \rho q + q E,$$

звідки

$$E = \frac{1}{6q} \pi d^3 g (\rho_1 - \rho) = 6 \text{ кВ/м.}$$

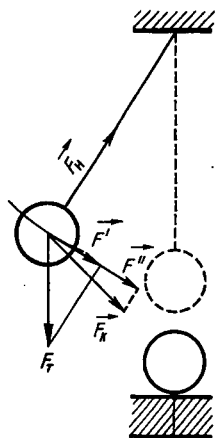


Рис. В.3.1

3.14. Крім сили тяжіння F_T і сили натягу нитки F_n , на заряджену кульку маятника діє ще електрична сила F_k притягання до протилежно зарядженої кульки, що розміщена знизу. Ця сила, як і сила тяжіння, буде давати складову на напрям руху, що збільшить поворотальну силу: $F = F_T + F_k$ (рис. В.3.1). При цьому збільшиться прискорення маятника, а період, відповідно, зменшиться.

3.15. Сила, з якою взаємодіють заряди q_1 і q_2 , за законом Кулона обернено пропорційна квадратові відстані між ними. Такою ж є залежність сили притягання між планетами і Сонцем.

За третім законом Кеплера квадрати періодів обертання планет навколо Сонця відносяться як куби великих півосей орбіт. Очевидно, закон Кеплера виконується і у випадку руху заряду q_1 навколо нерухомого заряду q_2 . Якщо визначимо період обертання заряду по колу будь-якого означеного радіуса, то цим самим одержимо відповідь на запитання задачі, тобто період обертання частинки в нашій задачі дорівнює періодові обертання частинки на коловій орбіті радіуса $(R+r)/2$. Визначимо його у випадку руху заряду q_1 . На коловій орбіті кулонівська сила буде доцентровою, тобто

$$m\omega^2 \left(\frac{R+r}{2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\left(\frac{R+r}{2} \right)^2}.$$

Тоді

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 m (R+r)^3}{2q_1 q_2}}.$$

3.16. На тіло в польоті діє сила тяжіння mg і сила з боку електричного поля qE . Оскільки ці сили напрямлені вертикально вниз, то тіло набуває прискорення $a = g + qE/m$. За формулами кінематики одержимо

$$l = \frac{2mv_0^2 \sin \alpha}{mg + qE}; \quad l = \frac{mv_0^2 \sin 2\alpha}{mg + qE}; \quad h_{\max} = \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2(mg + qE)}.$$

3.17. $q = 2\epsilon_0 mg \tan \alpha / \sigma = 3,35 \text{ нКл}.$

$$\mathbf{3.18.} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g + \frac{qE}{m}}} = 0,82 \text{ с}; \quad F_n = \frac{mg + qE}{\cos \alpha} = 11,7 \text{ мН}.$$

$$\mathbf{3.19.} \quad E_B = \frac{3}{16} \frac{e}{\pi\epsilon_0 r^2} = 4,3 \cdot 10^{11} \text{ В/м}; \quad E_C = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4,2 \cdot 10^{11} \text{ В/м}.$$

3.20. Розглянемо елемент dl нитки, який міститься від точки A на відстані r . Заряд елемента нитки $dq = \tau dl$. Напруженість $d\vec{E}$, створена цим зарядом у точці A , за модулем

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dl}{r^2}.$$

За змінну величину візьмемо кут φ , який утворює радіус-вектор $\vec{r}$ з нормаллю до нитки. З рис. В.3.2 видно, що

$$r = \frac{a}{\cos\varphi}; dl = \frac{rd\varphi}{\cos\varphi} = \frac{ad\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

$$\text{Тоді } dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{rd\varphi}{a}.$$

Виберемо осі Ox і Oy , як показано на рисунку. Визначимо проекції вектора $d\vec{E}$ на ці осі:

$$dE_x = dE \cos\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} \cos\varphi d\varphi;$$

$$dE_y = dE \sin\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} \sin\varphi d\varphi.$$

Інтегруванням цих виразів під час зміни φ від 0 до $\pi/2$ визначимо проекції шуканого вектора $\vec{E}$ в точці A і його модуль:

$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a};$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a};$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\sqrt{2}\tau}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

3.21. $F = \tau q l / (2\pi\epsilon_0 a \sqrt{4a^2 + l^2}) = 1,27 \text{ мкН}.$

3.22. $F = q_0 \tau / (2\pi\epsilon_0 R) = 3,6 \text{ мН}; E = \frac{F}{q_0} = 1,8 \cdot 10^5 \text{ В/м}.$

3.23. $E = qh / \left(2\pi\epsilon_0 \left(\frac{l^2}{4} + h^2 \right)^{3/2} \right) = 22,9 \text{ кВ/м}; h_{\text{max}} = \frac{\sqrt{2}}{4} l = 3,54 \text{ см}.$

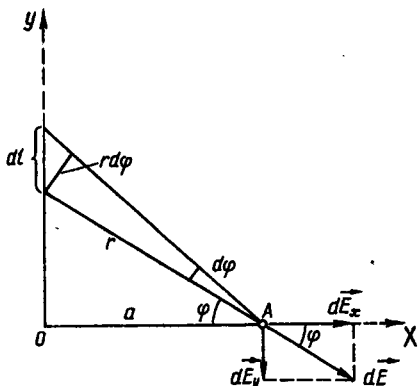


Рис. В.3.2

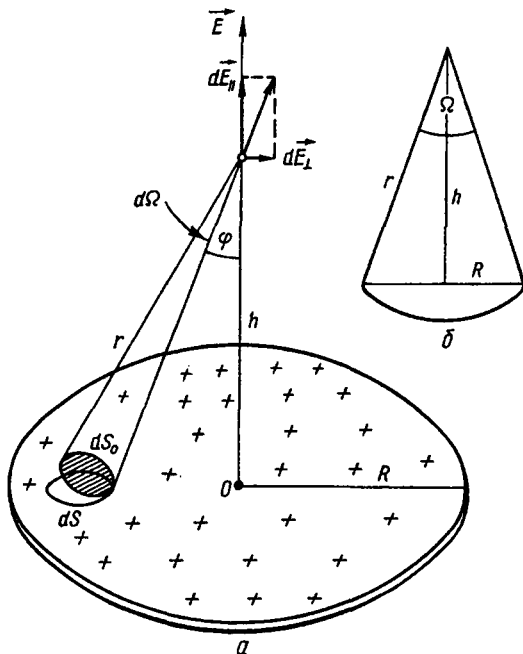


Рис. В.3.3

3.24. а) $E = R \tau x / \left(2 \epsilon_0 \left(R^2 + x^2 \right)^{3/2} \right) = 1,1 \text{ кВ/м}$; б) $E = 0$; в) $E = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 x^2}$;

$x_{\max} = \frac{R}{\sqrt{2}} = 7 \text{ см}$; $E_{\max} = \frac{\tau}{3 \sqrt{3} \epsilon_0 R} = 1,7 \text{ кВ/м}$.

3.25. Виділимо малу площадку dS на поверхні диска. Заряд, що міститься на ній, $dq = \sigma dS$ можна вважати точковим. Цей заряд створює в точці A поле $dE =$

$\frac{dq}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma dS}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$. З рис. В.3.3, а видно, що $dS = dS_0 / \cos \varphi$; $dS_0 = r^2 d\Omega$, де $d\Omega$ -

тілесний кут, під яким з точки A видно площадку dS .

Розкладемо $d\mathbf{E}$ на дві складові: $d\mathbf{E}_{\parallel}$ уздовж осі і $d\mathbf{E}_{\perp}$ - перпендикулярно до осі. Підсумовуючи за всіма елементами площі диска складові, перпендикулярні до осі, одержуємо нуль.

Складова $d\mathbf{E}_{\parallel} = dE \cos \varphi = \frac{\sigma r^2 d\Omega}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$.

Зінтегрувавши, матимемо $E = \frac{r \Omega}{4 \pi \epsilon_0}$.

Отже, з осової симетрії випливає, що результуюче поле E на осі диска напрямлене вздовж цієї осі. Тілесний кут Ω дорівнює площі сферичного сегмента (рис. В.3.3, б), поділений на r^2 :

$$\Omega = 2\pi r(r-h)/r^2 = 2\pi(1-h/\sqrt{h^2+R^2}).$$

Для напруженості поля на осі диска одержимо:

$$а) E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - h/\sqrt{h^2+R^2}\right); б) E = 0; в) E = \sigma\pi R^2/(4\pi\epsilon_0 h^2).$$

$$3.26. E = \tau\sqrt{4x_0^2 - l^2}/(2\pi\epsilon_0 x_0^2) = 3,1 \text{ МВ/м}.$$

$$3.27. E_{\max} = \tau/(\pi\epsilon_0 l) = 400 \text{ кВ/м}.$$

3.28. Розіб'ємо півсферу на тонкі кільця (рис. В.3.4). Заряд кільця

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi R d\varphi.$$

Скориставшись розв'язком задачі 3.24, визначимо напруженість dE поля, яке створюється зарядженим кільцем на його осі:

$$dE = \frac{x dq}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Вектор dE напрямлений уздовж осі всіх кілець (вісь Oz).

Враховуючи, що $r = R \sin \varphi$, $x = R \cos \varphi$, та інтегруючи за кутом φ від 0 до $\pi/2$, одержимо

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} = 85 \text{ В/м}.$$

$$3.29. а) E = \frac{4,4q_1}{\pi\epsilon_0 l^2} = 1,43 \text{ МВ/м};$$

$$б) E = \frac{2q_1}{\pi\epsilon_0 l^2} = 648 \text{ кВ/м}; в) E = \frac{0,6q_1}{\pi\epsilon_0 l^2} = 194,3 \text{ кВ/м}; г) E = \frac{\sqrt{2}q_1}{2\pi\epsilon_0 l^2} = 230 \text{ кВ/м}.$$

$$3.30. а) E = \frac{P_e}{2\pi\epsilon_0 r^3} = 4,32 \text{ В/м}; б) E = \frac{P_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} = 2,16 \text{ В/м}.$$

3.31. Розглянемо систему двох диполів з протилежними електричними моментами. Скориставшись формулою (3.1.6) для модуля напруженості поля диполя та принципом суперпозиції, одержимо $E = 3p_e l/(4\pi\epsilon_0 x^4)$.

$$3.32. F = p_e \frac{dE}{dx} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Н}.$$

$$3.33. \left| \frac{dE}{dr} \right| = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r^3} = 1,8 \text{ МВ/м}^2; F = \frac{qP_e}{2\pi\epsilon_0 r^3} = 9 \text{ мкН}.$$

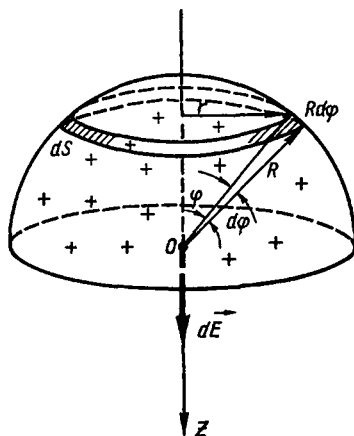


Рис. В.3.4

3.34. З формули, що виражає зв'язок між потенціальною енергією і силою $F = -\text{grad } W$, враховуючи осьову симетрію поля нитки, маємо

$$F_r = -\frac{\partial W}{\partial r}.$$

Потенціальна енергія диполя в електричному полі $W = -pE + \text{const}$. Звідси одержуємо:

$$\text{а) } F = 0; \text{ б) } F = p\tau / (2\pi\epsilon_0 r^2) = 5,9 \text{ мкН}.$$

3.35. Кожен з двох точкових диполів (молекул води) міститься в полі іншого. Покладемо, що вони розташовані вздовж осі Ox . Тоді сила, що діє на другий диполь з боку поля першого (формула (3.1.20)),

$$F_2 = p_2 \frac{\partial E_1}{\partial x},$$

оскільки за умовою $\alpha = 0$. Тут E_1 – напруженість поля, створеного диполем p_1 :

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_1}{x^3}.$$

Узявши похідну від останнього виразу за x , визначимо силу F_2 :

$$F_2 = \frac{3p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 x^4} = 2,1 \cdot 10^{-20} \text{ Н}.$$

$$\text{3.36. } W_n = -p_e^2 / (2\pi\epsilon_0 x^3) = -6,9 \cdot 10^{-28} \text{ Дж}.$$

3.37. З початкового положення (рис. В.3.5, а) диполь можна повернути на кут $\beta = 30^\circ = \pi/6$ двома способами: або за рухом стрілки годинника до кута

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \beta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad (\text{рис. В.3.5, б}), \text{ або проти руху стрілки годинника до кута}$$

$$\alpha_2 = \alpha_0 + \beta = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{рис. 3.5, в}).$$

При застосуванні першого способу диполь повертатиметься під дією сил поля. Отже, робота зовнішніх сил при цьому буде від'ємною. Застосовуючи другий спосіб, повертання диполя може бути проведене тільки під дією зовнішніх сил, і робота зовнішніх сил при цьому буде додатною.

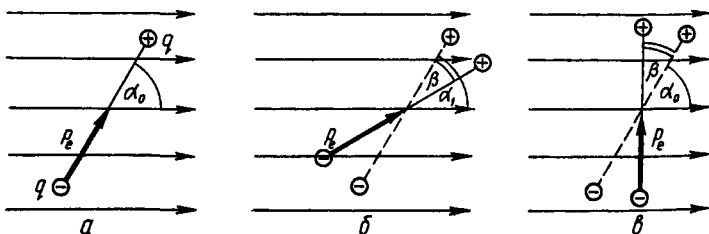


Рис. В.3.5

Елементарна робота dA , що виконується під час повертання диполя на кут $d\alpha$, виражається формулою

$$dA = Md\alpha = p_e \sin \alpha \, d\alpha .$$

Повна робота, що виконується під час повертання від кута α_0 до α ,

$$A = p_e E \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sin \alpha \, d\alpha = p_e E (\cos \alpha_0 - \cos \alpha) .$$

Під час повертання диполя за рухом стрілки годинника робота зовнішніх сил

$$A = p_e E (\cos \alpha_0 - \cos \alpha_1) = -2,19 \cdot 10^{-5} \text{ Дж} .$$

Під час повертання диполя проти руху стрілки годинника

$$A = p_e E (\cos \alpha_0 - \cos \alpha_2) = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Дж} .$$

$$3.38. \omega = \sqrt{\frac{2p_e E}{J}} = 60 \text{ рад/с} .$$

$$3.39. W = p_e E \cos \alpha = 10,4 \cdot 10^{-7} \text{ Дж} .$$

$$3.40. \text{Зросте на } \Delta W_n = p_e \sigma (1 - \cos \alpha) / \epsilon_0 = 8,8 \text{ нДж} .$$

$$3.41. \Phi_D = \Phi_{D1} = \Phi_{D2} = q; \quad \Phi_{D3} = 0 .$$

3.42. Ні. Якби силові лінії перетинались, то в точці перетину можна було б провести дві дотичні, але ж у кожній точці поля вектор напруженості $\mathbf{E}$ має цілком певний напрям. Аналогічно й щодо екіпотенціальних поверхонь.

$$3.43. \Phi_E = \pi \sigma r^2 / (2\epsilon_0) = 7,98 \text{ кВ} \cdot \text{м} .$$

$$3.44. \Phi_E = \tau r^2 \sin \alpha / (2\epsilon_0 a) = 424 \text{ мВ} \cdot \text{м} .$$

$$3.45. \text{а) } \Phi_E = q / (\epsilon_0 \epsilon) ; \text{ б) } \Phi_E = q / (6\epsilon_0 \epsilon) .$$

$$3.46. \Phi_D = \frac{q}{2} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right) = 12,5 \text{ нКл} .$$

$$3.47. \Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2} - \frac{h}{2}}{2\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2}} \right) = 96,5 \text{ кВ} \cdot \text{м} .$$

$$3.48. \text{а) } \Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2} - \frac{h}{2}}{\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2}} \right) = 24 \text{ кВ} \cdot \text{м} ; \text{ б) } \Phi_E = \frac{qh}{2\epsilon_0 \sqrt{h^2 + r^2}} = 15,2 \text{ кВ} \cdot \text{м} .$$

$$3.49. \text{а) } E = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} = 395 \text{ В/м} ; \text{ б) } E = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\epsilon_0} = 170 \text{ В/м} .$$

$$3.50. F = \frac{q^2}{2\epsilon\epsilon_0} = 5,65 \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$$

$$3.51. E_1 = 0; E_2 = \sigma_1 R_1 / (\epsilon_0 r_2) = 9,4 \cdot 10^2 \text{ В/м}; E_3 = (\sigma_1 R_1 - \sigma_2 R_2) / (\epsilon_0 r_3) = 1,5 \cdot 10^2 \text{ В/м.}$$

3.52. Проведемо через точки A і B концентричні сферичні поверхні. Враховуючи центральну симетрію полів, за теоремою Гаусса одержимо $E_A = 0$ (усередину поверхні потрапляють обидва заряди q_1 і q_2), $E_B = q_1 / (4\pi\epsilon_0 r_B^2) = 1,8 \cdot 10^4 \text{ В/м}$ (усередину поверхні потрапляє тільки заряд q_1).

Після зміщення заряду q_1 із центра сфери поля зарядів q_1 і q_2 у точці A вже не компенсуватимуть одне одного, і задача зводиться до визначення напруженості поля диполя, електричний момент якого $p = ql$. За умови, що $l \ll r$, одержимо

$$E'_A = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r_A^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \varphi} = 25 \text{ В/м.}$$

3.53. З умов симетрії випливає, що поле є перпендикулярним до поверхні шару. Як замкнену гауссову поверхню можна вибрати циліндричну поверхню з твірними, перпендикулярними до поверхні шару, та основами ΔS , які розміщені симетрично відносно площини, що проходить через середину шару (рис. В.3.6, а). Якщо $2x$ – довжина циліндра, то сумарний заряд, що міститься в циліндрі, $q_{\text{вс}} = \rho 2x \Delta S$;

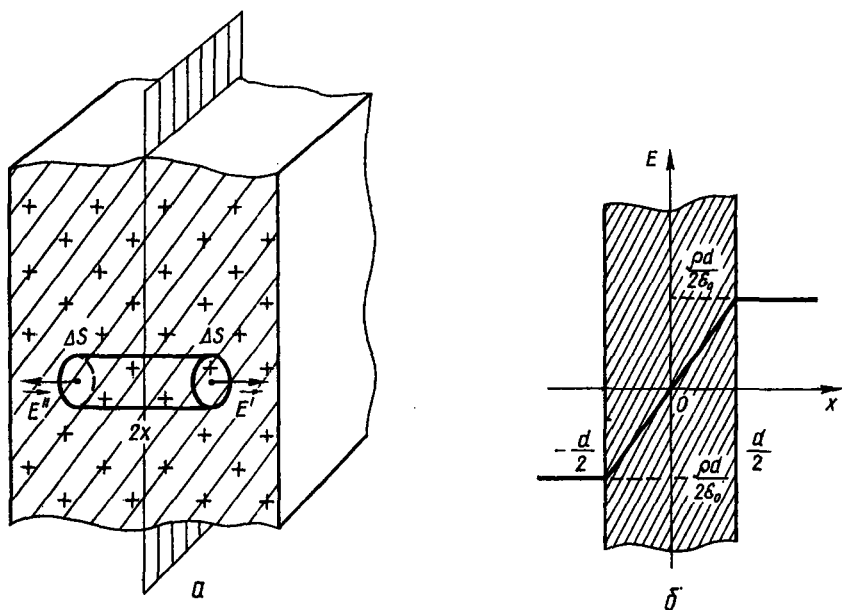


Рис. В.3.6

$$E = \frac{\rho x}{\epsilon_0}, \quad |x| \leq \frac{d}{2}; \quad E = \frac{\rho d}{2\epsilon_0}, \quad |x| > \frac{d}{2} \quad (\text{рис. В.3.6, б}).$$

$$3.54. E_1 = \rho r_1 / (3\epsilon_0) = 264 \text{ В/м}; \quad E_2 = \rho R^3 / (3\epsilon_0 r_2^2) = 234 \text{ В/м}.$$

3.55. Відома напруженість електричного поля всередині рівномірно зарядженої кулі $E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$, де r – радіус-вектор відносно центра

кулі. Поле в порожнині E можна розглядати як суперпозицію полів двох заряджених куль: позитивно зарядженої великої кулі E_+ і негативно зарядженої з тією самою густиною заряду малої кулі розміром з порожнину E_- . Для довільної точки A порожнини (рис. В.3.7) $r_A = r_0 + r'_A$, де r_A – радіус-вектор точки A відносно центра кулі; r'_A – те саме відносно центра порожнини; r_0 – радіус-вектор центра порожнини відносно центра кулі. Тоді $E = E_+ + E_- = \frac{\rho}{3\epsilon} (r - r'_A) = \frac{\rho r_0}{3\epsilon_0}$. Отже, поле в порожнині є однорідним. Якщо центр порожнини збігається з центром кулі, то $r_0 = 0$, $E = 0$.

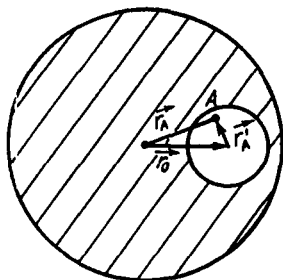


Рис. В.3.7

$$3.56. E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}, \quad 0 \leq r \leq R; \quad E = \frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0 r}, \quad R \leq r < \infty.$$

3.57. Електричне поле в порожнині є однорідним:

$$E = \frac{\rho r_0}{2\epsilon_0}, \quad r_0 - R_2 \leq r \leq r_0 + R_2.$$

В інших точках воно буде таким:

$$E_r = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(r + \frac{R_2^2}{r_0 - r} \right), \quad 0 \leq r \leq r_0 - R_2;$$

$$E_r = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(r - \frac{R_2^2}{r - r_0} \right), \quad r_0 + R_2 \leq r \leq R_1;$$

$$E_r = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(\frac{R_1^2}{r} - \frac{R_2^2}{r - r_0} \right), \quad R_1 \leq r < \infty.$$

3.58. а) Уявно виділимо всередині кулі шар, який обмежений концентричними сферичними поверхнями радіусами r і $r+dr$. Заряд такого шару

$$dq = \rho dV = \rho_0 (1 - r/R) \cdot 4\pi r^2 dr.$$

Заряд кулі радіуса r

$$q = \int_0^r 4\pi\rho_0(1 - r/R)r^2 dr = 4\pi\rho_0\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^2}{4R}\right).$$

За теоремою Гаусса потік напруженості

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0} r^2 \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right).$$

Тоді

$$E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right) = \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r}{4R}\right), \quad r \leq R.$$

Аналогічно для $r \geq R$ одержимо

$$E = \frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0 r^2}.$$

б) З умови максимуму $\frac{dE}{dr} = 0$ одержуємо $r_{\max} = \frac{2}{3}R$ і відповідне значення

$$E_{\max} = \frac{1}{9}R\frac{\rho_0}{\epsilon_0}.$$

3.59. $A = 0,1$ Дж.

$$3.60. q = \frac{\epsilon\epsilon_0 A}{\sigma R^2 \left(\frac{1}{R+r_1} - \frac{1}{R+r_2}\right)} = 8 \text{ мкКл}.$$

$$3.61. A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 - \frac{4}{\sqrt{7}} - \frac{4}{\sqrt{13}}\right) = 2,5 \text{ мкДж}.$$

$$3.62. A = \frac{q\tau \ln \eta}{2\pi\epsilon_0} = 99 \text{ мкДж}.$$

$$3.63. s = \frac{v_0^2 m}{2eE} = 2,4 \cdot 10^2 \text{ м}; \quad t = \frac{v_0 m}{eE} = 47 \text{ нс}.$$

$$3.64. A = \frac{qq_1(x_+ - x_-)}{2\pi\epsilon_0(x_1 - x_2)^2} = 0,72 \text{ нДж, де } q = q_+ = |q_-|.$$

$$3.65. r_0 = \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{2\pi v^2 \pi\epsilon_0}{qe}} \approx 7 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

$$3.66. r_{\min} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 T} \approx 7,2 \cdot 10^{-10} \text{ см}.$$

$$3.67. h = \frac{d^2 mg}{2qU} \approx 0,41 \text{ м}.$$

$$3.68. t = \sqrt{\frac{dU_1}{g(U_1 - U_2)}} \approx 0,45 \text{ с.}$$

$$3.69. q = 4\pi\epsilon_0 R^2 E = 1,11 \text{ мкКл}; \varphi = RE_0 = 10^5 \text{ В.}$$

3.70. Виділимо на стрижні нескінченно малу ділянку завдовжки dx (рис. В.3.8), заряд на якій $dq = qdx/l$ можна розглядати як точковий. Тоді потенціал поля, що створюється в точці A цим зарядом,

$$d\varphi = \frac{qdx}{4\pi\epsilon_0 l(l + x_0 - x)}.$$

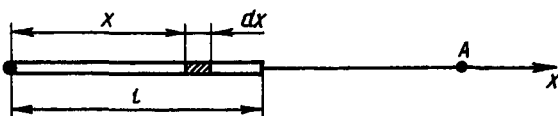


Рис. В.3.8

Інтегрування за принципом суперпозиції полів дає

$$\varphi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{l + x_0}{l + x_0 - x}.$$

За формулою, що зв'язує напруженість поля з потенціалом $E_x = -\frac{d\varphi}{dx}$, визначимо напруженість електричного поля у точці A :

$$E_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x_0(l + x_0)}.$$

$$3.71. \text{ а) } \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = 3,06 \text{ кВ}; \text{ б) } \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + h^2}} = 1,3 \text{ кВ.}$$

$$3.72. \Delta\varphi = m\omega^2 R^2 / e = 0,57 \text{ нВ.}$$

$$3.73. \Delta\varphi = (\sigma_1 - \sigma_2) d / (2\epsilon_0) = 141 \text{ В.}$$

$$3.74. \text{ а) } \varphi = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{h^2}} - 1 \right); \text{ б) } \varphi = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}; \text{ в) } \varphi = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 h}.$$

$$3.75. \Delta\varphi = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\epsilon_0} = 457 \text{ В.}$$

$$3.76. \varphi_1 = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0}, \quad |x| \leq \frac{d}{2}; \quad \varphi_2 = -\frac{\rho d(4x - d)}{8\epsilon_0}, \quad x \geq \frac{d}{2}.$$

$$3.77. \text{ а) } \varphi = \rho R^2 / (2\varepsilon_0) = 2,54 \text{ кВ}; \text{ б) } \varphi = \rho R^2 / (3\varepsilon_0) = 1,69 \text{ кВ};$$

$$\text{а) } \varphi_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(R^2 + \frac{1}{2} (R^2 - r_1^2) \right) = 2,16 \text{ кВ}, \quad r_1 < R; \quad \varphi_2 = \rho R^3 / (3\varepsilon_0 r_2) = 1,27 \text{ кВ}, \quad r_2 > R.$$

$$3.78. \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(\frac{r_0^2 - r_1^2}{2} + r_0^2 \ln \frac{r_2}{r_0} \right) = 35,27 \text{ В}.$$

$$3.79. \quad q = 4\pi\alpha(R_2 - R_1); \quad E = 0, \quad \varphi = \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad r \leq R_1;$$

$$E = \frac{\alpha}{\varepsilon_0 r^2} (r - R_1), \quad \varphi = \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \left(1 - \ln \frac{r}{R_2} - \frac{R_1}{r} \right), \quad R_1 \leq r \leq R_2;$$

$$E = \frac{\alpha}{\varepsilon_0 r^2} (R_2 - R_1), \quad \varphi = \frac{\alpha(R_2 - R_1)}{\varepsilon_0 r}, \quad r \geq R_2.$$

$$3.80. \quad F = mg \left(\frac{T_1^2}{T_2^2} - 1 \right) = 0,05 \text{ Н}; \text{ напруженість електричного поля напрямлена вертикально вгору}; \quad U = \frac{F}{q} (l_1 + \Delta d) = 1,3 \text{ МВ}; \quad \sigma = \frac{F}{q} \varepsilon \varepsilon_0 = 49 \text{ мКл/м}^2.$$

$$3.81. \quad \sigma_1 > \sigma_2; \quad \varphi_4 - \varphi_3 = -200 \text{ В}.$$

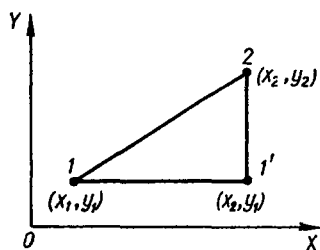


Рис. В.3.9

3.82. а) Обчислимо ротор цього поля (див. дод. А, п. XVI):

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{i} \left(-\frac{\partial(ax)}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \frac{\partial(ay)}{\partial z} + \mathbf{k} \left(\frac{\partial(ax)}{\partial x} - \frac{\partial(ay)}{\partial y} \right) = 0.$$

Це означає, що поле носить потенціальний характер і різниця потенціалів між двома точками поля

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Інтеграл можна брати вздовж будь-якої лінії, що сполучає точки 1 та 2, адже $\varphi_1 - \varphi_2$ не залежить від шляху інтегрування.

Для зручності оберемо такий шлях уздовж сторін прямого кута, який вказано на рис. В.3.9:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (E_x dx - E_y dy) = \int_1^2 ay dx + \int_1^2 ax dy = ay_1(x_2 - x_1) + ax_2(y_2 - y_1) = -ax_1y_1 - (-ax_2y_2).$$

Звідси випливає $\varphi(x, y) = -axy + \text{const}$.

$$\text{б) } \varphi = ay \left(\frac{y^2}{3} - x \right) + \text{const}; \quad \text{в) } \varphi = -y(ax + bz) + \text{const}.$$

3.85. Див. рис. В.3.10.

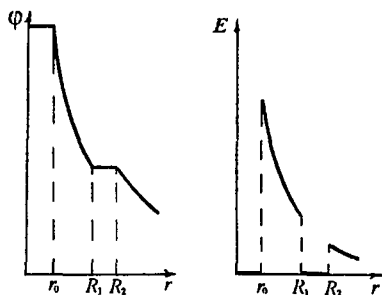


Рис. В.3.10

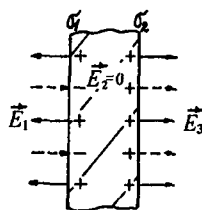


Рис. В.3.11

$$3.86. \frac{q_1}{q_2} = \sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}.$$

3.87. Струм проходитьме доти, доки потенціали куль не зрівняються.

$$3.88. \sigma = \epsilon_0 E_0 = 17,7 \text{ нКл/м}^2.$$

3.89. При внесенні пластини в зовнішнє електричне поле напруженістю E відбудеться перерозподіл електричних зарядів і поверхнева густина їх стане σ_1 і σ_2 (рис. В.3.11). За законом збереження електричного заряду сумарний заряд пластини не зміниться:

$$2\sigma = \sigma_1 + \sigma_2.$$

$$\text{Усередині пластини поле відсутнє: } E_2 = E + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} = 0.$$

$$\text{З цих рівнянь маємо: } \sigma_1 = \sigma - \epsilon_0 E; \quad \sigma_2 = \sigma + \epsilon_0 E.$$

$$\text{Зовні пластини } E_1 = E - \frac{\sigma}{\epsilon_0}; \quad E_3 = E + \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

$$3.90. q = 4(a - l \sin \alpha) \sqrt{\pi \epsilon_0 m g \tan \alpha} = 20 \text{ нКл}.$$

$$3.91. F = \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ Н}.$$

$$3.92. F = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 l^2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) = 8 \text{ Н}.$$

3.93. За методом дзеркальних відображень електричне поле між точковим зарядом і металевою площиною еквівалентне полю, яке створюється зарядом і його дзеркальним зображенням протилежного знаку в металевій площині. Тому $F = 3q^2/(32\pi\epsilon_0 h^2) = 5,4 \text{ мкН}$.

3.94. Врахувати поле, що створюється негативно зарядженою ниткою, яка є дзеркальним зображенням даної нитки у провідній площині:

$$E = \tau/(\pi\epsilon_0 h) = 0,36 \text{ МВ/м; } \varphi = 0.$$

$$3.95. C = 5,6 \text{ пФ}.$$

$$3.96. R = \frac{\epsilon \epsilon_0 \varphi}{\sigma} = 5 \text{ см.}$$

$$3.97. C = 44 \text{ пФ}; q = 1,1 \text{ нКл.}$$

$$3.98. E = 10^5 \text{ В/м.}$$

$$3.99. \text{Збільшиться в } \frac{1}{1-\eta} = 2,5 \text{ раза.}$$

$$3.100. q_1 = q/(2 - (r_1/r_2)) = 0,4 \text{ мкКл.}$$

$$3.101. \sigma'_1 = \frac{\epsilon_0 (4\pi\epsilon_0 r_2 \varphi_2 + q_1)}{r_2 (4\pi\epsilon_0 r_2 + C_1)} = 11,5 \text{ нКл/м}^2; \sigma'_2 = \frac{4\pi\epsilon_0^2 (4\pi\epsilon_0 r_2 \varphi_2 + q_1)}{C_1 (4\pi\epsilon_0 r_2 + C_1)} = 6,4 \text{ нКл/м}^2.$$

$$3.102. \text{Ні, пробивна напруга } U_{\text{пр}} = E_{\text{пр}} R_1 (R_2 - R_1) / R_2 = 43 \text{ кВ} > U.$$

$$3.103. E = \frac{UrR}{(R-r)x^2} = 44,5 \text{ кВ/м.}$$

$$3.104. \Delta q = \frac{4\pi\epsilon_0 (\epsilon - 1) R_1 R_2 U}{R_2 - R_1} = 0,5 \text{ мкКл.}$$

$$3.105. v = \sqrt{\frac{2eU}{m} \frac{\ln(r_1/r_2)}{\ln(R_2/R_1)}} = 1,24 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$$

$$3.106. U = \frac{2U_1 + U_2}{3} = 150 \text{ В.}$$

$$3.107. \frac{C_1}{C_2} = \frac{U - U_2}{U_1 - U} = 3.$$

$$3.108. q_1 = q_2 = \frac{C_1 C_2 U}{C_1 + C_2} = 240 \text{ мкКл}; U_1 = \frac{C_2 U}{C_1 + C_2} = 120 \text{ В}; U_2 = \frac{C_1 U}{C_1 + C_2} = 60 \text{ В.}$$

3.109. а) Якщо $C_1 < C_2$, то $U \leq (C_1 + C_2)U_1/C_2$; якщо $C_1 = C_2$, то $U = U_1 + U_2$; б) меншу з максимальних напруг.

$$3.110. 1,09; 1,67; 2,67; 3; 12 \text{ пФ.}$$

3.111. Таке з'єднання з п'яти конденсаторів неможливо розкласти на елементи послідовного і паралельного з'єднань. Щоб з'ясувати роль конденсатора C_5 , визначимо різницю потенціалів між точками a , b (див. рис. 3.13) після його від'єднання. Враховуючи обернено пропорційну залежність між ємностями двох послідовно з'єднаних конденсаторів і напругами на них, легко показати, що для рівності потенціалів у точках a і b достатньо виконання співвідношення $C_1 : C_2 = C_3 : C_4$. На основі цього приходимо до висновку, що потенціали точок a і b є однаковими, тобто конденсатор C_5 незаряджений, і його в цьому випадку можна від'єднати. Тоді ємність батареї

$$C_6 = C_{1,2} + C_{3,4}; C_{1,2} = C_{3,4} = \frac{C \cdot 2C}{C + 2C} = \frac{2C}{3}. \text{ Тоді } C_6 = \frac{4C}{3}.$$

$$3.112. C_x = C/2 = 1,5 \text{ мкФ.}$$

$$3.113. C = \frac{8C_1 C_2 + 6C_2^2 + C_1^2}{5C_1 + 6C_2} = 1,6 \text{ мкФ.}$$

$$3.114. q_1 = q_2 = \frac{CU}{6}; \quad q_3 = \frac{CU}{3}; \quad q_4 = q_5 = \frac{CU}{6}; \quad q_6 = \frac{CU}{3}.$$

3.115. Оскільки $r \gg a$, то сферично симетричний розподіл заряду на кожній кулі не зміниться, тому потенціали на поверхнях куль за принципом суперпозиції матимуть такий вигляд:

$$\varphi_1 \approx \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad \varphi_2 \approx \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Розв'язуючи систему рівнянь відносно q_1 і q_2 , одержимо:

$$q_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{ar}{r^2 - a^2} (r\varphi_1 - a\varphi_2) = 2,25 \text{ нКл}; \quad q_2 = 4\pi\epsilon_0 \frac{ar}{r^2 - a^2} (-a\varphi_1 + r\varphi_2) = 5,33 \text{ нКл}.$$

3.116. Якщо заземлити другу кулю, то на ній індукується такий негативний заряд $-q'_2$, який разом з незмінним позитивним зарядом першої кулі q_1 у кожній точці поверхні другої кулі створює потенціал $\varphi'_2 = 0$ (куля заземлена): $\varphi'_2 \approx$

$$\approx \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{|q'_2|}{4\pi\epsilon_0 a} = 0, \quad \text{звідки} \quad |q'_2| = q_1 a / r. \quad \text{Тоді} \quad q'_1 = q_1; \quad \varphi'_1 = \varphi_1 - \frac{a}{r} \varphi_2 = 400 \text{ В};$$

$$q'_2 = -4\pi\epsilon_0 \frac{a^2 r}{r^2 - a^2} \left(\varphi_1 - \frac{a}{r} \varphi_2 \right) = 0,22 \text{ нКл}.$$

3.117. Нехай перша куля заряджена позитивно, друга – негативно. Потенціал на поверхні кожної кулі створюється як зарядом самої кулі, так і зарядом сусідньої. Оскільки $r \gg a$, то сферично симетричний розподіл заряду на кулях не змінюється і потенціали на поверхнях куль можна обчислити як потенціали заряджених сфер. За принципом суперпозиції

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (r-a)}; \quad \varphi_2 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (r-a)}.$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} + \frac{r-a}{r-a},$$

а взаємна ємність куль $C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = 2\pi\epsilon_0 a \frac{r-a}{r-2a}.$

Враховуючи умову $r \gg a$, маємо $C \approx 2\pi\epsilon_0 a$.

3.118. Якщо $d \gg a$, то напруженість поля, що створюється кожним проводом, $E = \tau / (2\pi\epsilon_0 x)$, де x – відстань від осі проводу. Використовуючи формулу зв'язку напруженості з потенціалом та принцип суперпозиції, обчислимо напругу між проводами

$$U = \int_a^{d-a} E dx. \quad \text{Далі визначимо ємність на одиницю довжини: } C = \tau / U; \quad C \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)}.$$

3.119. Збільшиться у $\eta = 6$ разів.

3.120. $d = \epsilon_0 \epsilon S U / q = 9,3 \text{ мм}.$

$$3.121. C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(R_2 / R_1)} \approx 3,5 \text{ пФ}.$$

$$3.122. U_0 = \frac{\Delta q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0(\epsilon - 1)R_1R_2} \approx 7 \text{ кВ}.$$

$$3.123. \epsilon = \frac{\rho}{\rho - \rho_1} = 2.$$

$$3.124. \text{Збільшиться в } \frac{2\epsilon}{1 + \epsilon} = 1,38 \text{ раза.}$$

$$3.125. C = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)\epsilon_0 S}{d \ln(\epsilon_2/\epsilon_1)} = 83 \text{ пФ}.$$

$$3.126. \sigma = \frac{\epsilon\epsilon_0 U}{l} = 5,3 \text{ мкКл/м}^2; \sigma' = \frac{\epsilon(\epsilon_0 - 1)U}{l} = 4,4 \text{ мкКл/м}^2.$$

$$3.127. \text{а) } \sigma' = \epsilon_0(\epsilon - 1)\frac{U}{d} = 17,7 \text{ мкКл/м}^2, \Delta\sigma = \epsilon_0(\epsilon - 1)\frac{U}{d} = \sigma' = 17,7 \text{ мкКл/м}^2;$$

$$\text{б) } \sigma' = \epsilon_0(\epsilon - 1)\frac{U}{\epsilon d} = 2,53 \text{ мкКл/м}^2, \Delta\sigma = 0.$$

$$3.128. E = 180 \text{ кВ/м}; D = 4,8 \text{ мкКл/м}^2; \kappa = 2; P = 3,2 \text{ мкКл/м}^2; \sigma = \pm 4,8 \text{ мкКл/м}^2; \sigma' = \pm 3,2 \text{ мкКл/м}^2.$$

$$3.129. U = \frac{\sigma' d}{\epsilon_0(\epsilon - 1)} = 19,9 \text{ кВ}.$$

$$3.130. E = E_0/\epsilon = 57,1 \text{ В/м}; D = \epsilon_0 E_0 = 3,54 \text{ нКл/м}^2; P = \epsilon_0 E_0(\epsilon - 1)/\epsilon = 3,03 \text{ нКл/м}^2; \sigma' = \pm P = \pm 3,03 \text{ нКл/м}^2.$$

3.131. За теоремою Гаусса вектор електричного зміщення в будь-якій точці діелектрика $D = \frac{q}{4\pi r^2}$, або $\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$, де r – радіус сферичної поверхні. З іншого боку, вектор електричного зміщення й вектор поляризації $\mathbf{P}$ зв'язані співвідношенням $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$. Звідси $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\mathbf{E} = \frac{(\epsilon - 1)}{\epsilon}\mathbf{D} = \frac{(\epsilon - 1)}{\epsilon} \frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Нормальна складова вектора поляризації чисельно дорівнює поверхневій густині поляризаційних зарядів. У випадку сферичної поверхні $P = \sigma'$. Тоді для внутрішньої і зовнішньої поверхонь діелектрика маємо відповідно $\sigma'_1 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{q}{4\pi R^2} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^2$; $\sigma'_2 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{q}{4\pi(R + h)^2} = 1,38 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^2$.

Оскільки поле всередині діелектрика змінюється за законом $1/r^2$, то маємо співвідношення $\frac{\sigma'_1}{\sigma'_2} = \frac{(R + h)^2}{R^2}$. Звідси випливає, що $q'_1 = q'_2$. Поляризаційні заряди на внутрішній і зовнішній поверхнях діелектрика однакові за абсолютним значенням: $q'_1 = \sigma' \cdot 4\pi R^2 = \frac{q(\epsilon - 1)}{\epsilon} = 2,5 \text{ мкКл}.$

$$3.132. |q'_1| = |q'_2| = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q = 1 \text{ мкКл}; P = \frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi\epsilon r^2} \quad (R_1 < r < R_2); P_1 = 0; P_2 = 22 \text{ мкКл/м}^2;$$

$$P_3 = 0; E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r < R_1, \quad r > R_2); E_1 = 15 \text{ МВ/м}; E_3 = 1,67 \text{ МВ/м}; E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$$

$$(R_1 < r < R_2); E_2 = 1,2 \text{ МВ/м}.$$

3.133. а) Нехай початок осі Ox збігається з позитивно зарядженою обкладкою. Тоді залежність діелектричної проникності від x має вигляд $\varepsilon(x) = \varepsilon_1 + kx$. Тут $k = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/d$. Уявно поділимо діелектрик на шари завтовшки dx . Електрична ємність такого шару

$$dC = \frac{\varepsilon_0 S}{\int \frac{dx}{\varepsilon(x)}}, \text{ звідси } C = \frac{\varepsilon_0 S}{\int_0^d \frac{dx}{\varepsilon_1 + kx}} = \frac{\varepsilon_0 S (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d \ln \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)} = 280 \text{ пФ}.$$

б) Для напрямку осі Ox $D = D_x > 0$ і $E = E_x > 0$, причому $E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q}{S \varepsilon_0 \varepsilon(x)} = \frac{CU}{S \varepsilon_0 \varepsilon(x)} = E(x)$. Розглянемо паралельну обкладкам площину, яка розташована на відстані x від початку координат. Потік вектора E крізь неї $\Phi(x) = E(x)S$. Візьмемо шар діелектрика завтовшки dx . У шар буде входити потік $\Phi(x)$ і виходити потік $\Phi(x + dx) = \Phi(x) + \frac{d\Phi}{dx} dx$. Повний потік вектора E , що виходить із цього шару

$$\text{назовні, } \frac{d\Phi}{dx} dx = S \frac{dE}{dx} dx.$$

За теоремою Гаусса цей потік дорівнює зарядові, який міститься в шарі діелектрика завтовшки dx , поділеному на ε_0 . Якщо об'ємна густина заряду $\rho'(x)$, то $S \frac{dE}{dx} dx = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho'(x) S dx$. Тоді $\rho' = \frac{\varepsilon_0 dE}{dx} = - \frac{CU}{S \varepsilon^2(x)} \frac{d\varepsilon}{dx}$.

Сумарний об'ємний заряд визначимо інтегруванням:

$$q' = \int \rho'(x) S dx = CU \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} = \frac{CU(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}.$$

Тоді

$$\langle \rho' \rangle = \frac{q'}{V} = - \frac{U \varepsilon_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{d^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ln \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)} = -0,88 \cdot 10^{-2} \text{ Кл/м}^3.$$

3.134. Ємність конденсатора $C = q/U$, де $q = \sigma S$, тут σ – поверхнева густина вільних зарядів. Різниця потенціалів U зв'язана з напруженістю:

$$U = \int_1^2 E_l dl = E_1 d_1 + E_2 d_2,$$

оскільки в межах кожного діелектрика поле є однорідним. Межа поділу діелектриків перпендикулярна до силових ліній поля, тому з граничних умов $D_1 = D_2$ (нормальна складова електричного зміщення залишається неперервною), або $\epsilon_1 \epsilon_0 E_1 = \epsilon_2 \epsilon_0 E_2$. З іншого боку, $D = \sigma$. Тоді $E_1 = \sigma / (\epsilon_1 \epsilon_0)$, $E_2 = \sigma / (\epsilon_2 \epsilon_0)$. Підставляючи у формулу ємності, визначаємо

$$C = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_0 S}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}.$$

Цю формулу можна подати так: $\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\epsilon_1 \epsilon_0 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 \epsilon_0 S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$, тобто такий конденсатор можна розглядати як батарею з двох послідовно з'єднаних конденсаторів. Остаточно маємо:

$$E_1 = \frac{\epsilon_2 U}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} = 15,1 \text{ кВ/м}; \quad E_2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 = 34,9 \text{ кВ/м}; \quad D_1 = D_2 = \sigma = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_0 U}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} \approx 803 \text{ нКл/м}^2;$$

$$U_1 = \frac{\epsilon_2 d_1 U}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} = 151 \text{ В}; \quad U_2 = \frac{\epsilon_1 d_2 U}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} = 349 \text{ В}; \quad C = 16 \text{ пФ}; \quad \sigma = 803 \text{ нКл/м}^2.$$

3.135. Ємність такого конденсатора

$$C = \frac{q_1 + q_2}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

де q_1, q_2 – електричні заряди на площах S_1 і S_2 поверхні обкладки. Межа поділу діелектриків є паралельною векторові напруженості поля E , тому з обох боків напруженість однакова (відомо, що на межі поділу двох діелектриків тангенціальна складова напруженості електричного поля залишається неперервною). Для однорідного поля $\varphi_1 - \varphi_2 = Ed$. З іншого боку, $q_1 = \sigma_1 S_1$, $q_2 = \sigma_2 S_2$, де σ_1, σ_2 – поверхневі густини вільних зарядів на відповідних частинах обкладки. Виражаючи густини вільних зарядів через напруженість поля в діелектрику, $\sigma_1 = \epsilon_0 \epsilon_1 E$, $\sigma_2 = \epsilon_0 \epsilon_2 E$,

$$\text{одержимо } C = \epsilon_0 \frac{\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2}{d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 S_1}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_2 S_2}{d} = C_1 + C_2.$$

Конденсатор можна розглядати як батарею з двох паралельно з'єднаних конденсаторів.

$$\text{3.136. } C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = 59 \text{ пФ}; \quad q = CU = 8,85 \text{ нКл}; \quad q_{\text{зв}} = (E_1 - E_2) \epsilon_0 S \approx 7,1 \text{ нКл}; \quad E_1 = E_2 \epsilon = 50 \text{ кВ/м};$$

$$E_2 = \frac{U}{\epsilon(d-l) + l} = 10 \text{ кВ/м}; \quad U_1 = \frac{CU}{C_1} = 110 \text{ В}; \quad C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{l + \epsilon(d-l)} \approx 80 \text{ пФ}.$$

$$\text{3.137. } \Delta q = U(C - C_1) = \frac{U \epsilon_0 S d_2 (\epsilon - 1)}{d_1 [d_2 + \epsilon(d_1 - d_2)]} \approx 8,4 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}.$$

3.138. а) Ні, $E = 26 \text{ кВ/см} < E_{\text{гр}}$; б) ні, у повітряному зазорі $E_{\text{п}} = 31,4 \text{ кВ/см} < E_{\text{гр}}$. у склі $E_{\text{с}} = 4,5 \text{ кВ/см} < E_{\text{гр.с}}$.

$$\text{3.139. } \sigma' = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) U}{\epsilon(d - d_1) + d_1} = 0,22 \text{ мКл/м}^2; \quad C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{\epsilon(d - d_1) + d_1} = 59 \text{ пФ}.$$

$$3.140. E_i = \frac{U}{\varepsilon_i \sum_{k=1}^3 \left(\frac{d_k}{\varepsilon_k} \right)} \quad (i=1, 2, 3); \quad E_1 = 537 \text{ В/м}; \quad E_2 = 344 \text{ В/м}; \quad E_3 = 258 \text{ В/м};$$

$$\sigma'_i = (\varepsilon_i - 1)\varepsilon_0 E_i; \quad \sigma'_1 = 18 \text{ нКл/м}^2; \quad \sigma'_2 = 20 \text{ нКл/м}^2; \quad \sigma'_3 = 20,5 \text{ нКл/м}^2.$$

$$3.141. C = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \right)^{-1} = 271 \text{ пФ}; \quad \sigma'_a = -\frac{(\varepsilon_1 - 1)q}{4\pi\varepsilon_1 a^2} = -106 \text{ нКл/м}^2;$$

$$\sigma'_b = -\frac{(\varepsilon_2 - 1)q}{4\pi\varepsilon_2 b^2} = 95 \text{ нКл/м}^2; \quad \sigma'_c = \frac{q}{4\pi c^2} \left(\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} \right) = -25 \text{ нКл/м}^2.$$

$$3.142. C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad C_1 = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 (R_1 + d)}{d}; \quad C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_1 \varepsilon_0 R_2 (R_1 + d)}{R_2 - (R_1 + d)}, \quad \text{де } \varepsilon_1 = 1;$$

$$C \approx 38,9 \text{ пФ}. \quad R = 5 \text{ см}.$$

3.143. Вектори E_2 , D_2 та P_2 є колінеарними й утворюють з нормаллю кут

$$\beta = \arcsin \frac{\varepsilon \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha}}. \quad \text{Модулі векторів: } E_2 = E_1 \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\varepsilon^2} + \sin^2 \alpha} = 1,04 \text{ В/м};$$

$$D_2 = \varepsilon_0 E_1 \sqrt{\cos^2 \alpha + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha} = 5,52 \cdot 10^{-11} \text{ Кл/м}^2; \quad P_2 = D_2 - \varepsilon_0 E_2 = 4,6 \cdot 10^{-11} \text{ Кл/м}^2.$$

$$3.144. q_1 = q/2.$$

$$3.145. \text{ а) } W = \frac{q^2 \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{2\pi\varepsilon_0 a} = 109 \text{ мкДж}; \quad \text{ б) } W = \frac{q^2 (\sqrt{2} - 4)}{4\pi\varepsilon_0 a} = -52,5 \text{ мкДж}.$$

$$3.146. W = -4 \frac{3\sqrt{6} + \sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 d \sqrt{6}} l^2 \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

$$3.147. q_1 = 2,72 \text{ мкКл}.$$

$$3.148. Q = \frac{(q_1 R_2 - q_2 R_1)^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1 R_2 (R_1 + R_2)} \approx 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

$$3.149. \Delta W = \frac{(C_2 q_1 - C_1 q_2)^2}{2C_1 C_2 (C_1 + C_2)} = 4,16 \text{ мкДж}.$$

$$3.150. W = \frac{C_1 U_1^2}{2} \frac{C_2}{C_1 + C_2} \approx 0,12 \text{ Дж}.$$

$$3.151. W = q^2 / (8\pi\varepsilon_0 R) = 3,6 \text{ мДж}.$$

$$3.152. W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 2,03 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}.$$

$$3.153. W = 2\pi\varepsilon_0 r_1^4 E_1^4 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 4,7 \text{ пДж}.$$

$$3.154. W = 3q^2 / (20\pi\epsilon_0 R) = 86 \text{ пДж}; \eta = 0,83.$$

$$3.155. W = \left(\frac{4\pi\alpha^2(R_2 - R_1)}{\epsilon_0} \right) \left(1 - \frac{R_1}{R_2 - R_1} \ln \frac{R_2}{R_1} \right).$$

$$3.156. W = \frac{\pi\epsilon_0\epsilon l U^2}{\ln(D_2/D_1)} = 8,7 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

$$3.157. W = \frac{q^2 d}{8\pi\epsilon_0\epsilon R(R+d)} = 12 \text{ мкДж}.$$

$$3.158. w_e = 2e^2 / (\pi^2\epsilon_0 r^4) = 7,44 \cdot 10^{13} \text{ Дж/м}^3.$$

$$3.159. w_e = \tau^2 / (8\pi^2\epsilon_0\epsilon r^2) = 0,02 \text{ Дж/м}^3.$$

$$3.160. \sigma' = (\epsilon - 1) \sqrt{2\epsilon_0 w_e / \epsilon} \approx 2,1 \text{ мкКл/м}^2.$$

$$3.161. F = w_e S = 3 \text{ Н}.$$

$$3.162. \text{ а) } F = \frac{q^2}{2\epsilon_0\epsilon S}; \text{ б) } F = \frac{\epsilon_0\epsilon S U^2}{2d^2}.$$

$$3.163. p = w_e = 2,5 \text{ Па}; F' = \epsilon w_e S = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Н}.$$

$$3.164. p = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4}.$$

3.165. Скористаємося формулою, яка зв'язує потенціальну енергію й силу:

$$F = -\frac{\partial W}{\partial x}. \text{ Енергія зарядженого конденсатора (заряд на обкладках залишається по-}$$

стійним) $W = \frac{q^2}{2C}$. Ємність конденсатора, який частково заповнений діелектриком, а частково повітрям, можна визначити як ємність батареї з двох паралельно з'єднаних конденсаторів:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0(a-x)b}{d} + \frac{\epsilon\epsilon_0xb}{d} = \frac{\epsilon_0b(a+x(\epsilon-1))}{d}.$$

Після підстановки та диференціювання одержимо

$$F = \frac{q^2 d (\epsilon - 1)}{2\epsilon_0 b (a + x(\epsilon - 1))^2}.$$

$$3.166. C = \frac{\epsilon_0 S (\epsilon + 1)}{2d} = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ Ф}; E_1 = E_2 = \frac{2U}{d(1+\epsilon)} \approx 8 \text{ кВ/м}; \Delta W = \frac{\epsilon_0 U^2 S (\epsilon - 1)}{2d(\epsilon + 1)} \approx$$

$$\approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

$$3.167. \epsilon = \frac{CU^2 + 2\Delta W}{CU^2 - 2\Delta W} \approx 1,7.$$

3.168. В обох випадках можна використати закон збереження енергії.

а) Заряд на обкладках конденсатора не змінюється, тому робота зовнішніх сил іде тільки на збільшення енергії конденсатора. Оскільки заряд незмінний, то для обчислення енергії конденсатора зручно користуватися формулою $W = q^2/(2C)$. Отже,

$$A_{\text{зовн}} = \Delta W = W_2 - W_1 = \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right) = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d_1} \left(\frac{d_2}{d_1} - 1 \right) = 1,99 \text{ мкДж}.$$

б) Напруга на обкладках постійна, заряд змінюється, $\Delta q = (C_2 - C_1)U$. Якщо збільшувати відстань між обкладками, то $\Delta q < 0$, тобто заряд стікає з обкладок. Робота джерела, крізь яке проходить заряд, $A_{\text{дж}} = \Delta q U$. Робота джерела струму йде на механічну роботу A^* сил електричного поля та на збільшення енергії конденсатора:

$$A_{\text{дж}} = A^* + \Delta W.$$

Робота зовнішніх сил проти сил притягання обкладок протилежна за знаком механічній роботі сил електричного поля: $A_{\text{зовн}} = -A^* = \Delta W - A_{\text{дж}}$. Для обчислення енергії конденсатора зручно користуватися формулою $W = CU^2/2$. Тоді

$$A_{\text{зовн}} = (C_2 - C_1) \frac{U^2}{2} - \Delta q U = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d_1} \left(1 - \frac{d_1}{d_2} \right) = 1,24 \text{ мкДж}.$$

3.169. $A = \epsilon_0 S d_1 U^2 / 2(d(d - d_1)) = 4,43 \text{ мкДж}$.

3.170. а) Напруга на конденсаторі залишається постійною: $U = \xi = \text{const}$. За законом збереження енергії робота джерела струму $A_{\text{дж}}$ дорівнює сумі механічної роботи A^* сил електричного поля та збільшення ΔW енергії електричного поля:

$$A_{\text{дж}} = A^* + \Delta W.$$

З іншого боку, робота джерела $A_{\text{дж}} = \Delta q \xi$, де Δq – заряд, що проходить крізь джерело й дорівнює зміні заряду на обкладках:

$$\Delta q = \xi (C_2 - C_1); A_{\text{дж}} = \xi^2 (C_2 - C_1); \Delta W = W_2 - W_1 = \xi^2 (C_2 - C_1)/2.$$

Зазначимо, що робота $A_{\text{дж}}$, яка виконується джерелом живлення, дорівнює подвоєній зміні ΔW енергії конденсатора: $A_{\text{дж}} = 2\Delta W$. Цей висновок має універсальний характер. Отже,

$$A^* = A_{\text{дж}} - \Delta W = \frac{\xi^2}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} (1 - \epsilon).$$

Робота, яку треба виконати проти сил електричного поля,

$$A_{\text{зовн}} = -A^* = \frac{\epsilon_0 S \xi^2}{2d} (\epsilon - 1) = 31,9 \text{ мкДж}.$$

б) Заряд залишається постійним, а механічна робота сил поля A^* дорівнює зміні $-\Delta W$ енергії електричного поля: $A^* = -\Delta W$. Звідси

$$A_{\text{зовн}} = -A^* = \Delta W = q^2/(2C_2) - q^2/(2C_1);$$

$$q = C_1 \xi; A_{\text{зовн}} = \epsilon_0 S \xi^2 (\epsilon - 1) \epsilon / (2d) = 1,59 \text{ мкДж}.$$

$$\mathbf{3.171.} \text{ а) } A = \frac{CU^2 \eta}{2(1 - \eta)^2} = 1,5 \text{ мДж}; \text{ б) } A = \frac{CU^2 \eta \epsilon (\epsilon - 1)}{2(\epsilon - \eta(\epsilon - 1))^2} = 0,8 \text{ мДж}.$$

$$3.172. A = \frac{(\sigma')^2 \epsilon V}{2\epsilon_0(\epsilon - 1)} = 97,63 \text{ мкДж.}$$

$$3.173. h = \frac{q^2}{2\rho\epsilon_0 S^2 g} \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \right).$$

3.174. У стані рівноваги сила, що втягує діелектрик у простір між пластинами, дорівнює силі тяжіння стовпа піднятої рідини:

$$(w_d - w_n)S = \rho g S h.$$

Підставляючи вирази для об'ємної густини енергії поля в діелектрику w_d і в повітрі w_n ,

$$w_d = \frac{\epsilon\epsilon_0 U^2}{2d^2}, \quad w_n = \frac{\epsilon_0 U^2}{2d^2},$$

маємо $U = d \sqrt{\frac{2\rho g h}{\epsilon_0(\epsilon - 1)}} = 860 \text{ В.}$

3.175. Обертальний момент, який втягує рухомі пластини конденсатора в проміжки між нерухомими, зумовлений неоднорідністю електричного поля пластин біля їх межі. Тому розв'язати цю задачу, розглядаючи кожну пластину в електричному полі сусідніх пластин, важко. Обертальний момент можна визначити, застосувавши закон збереження енергії.

а) $q = \text{const.}$ Нехай рухомі пластини під дією обертального моменту M повернуться на кут $d\varphi$. Тоді сили притягання виконують роботу $dA = M d\varphi$, яка за законом збереження енергії дорівнює зменшенню енергії конденсатора $dA = -dW$. Тоді $M = -\frac{dW}{d\varphi}$.

Враховуючи, що кожному з n проміжків між пластинами відповідає один конденсатор з площею пластин $\varphi r^2/2$ (заштриховано на рис. 3.26), то енергія конденсатора

$$W = n \frac{q^2}{2C} = \frac{nq^2 l}{2\epsilon_0 \epsilon S} = \frac{nq^2 l}{\epsilon_0 \epsilon \varphi r^2}.$$

З урахуванням останньої формули вираз обертального моменту матиме вигляд

$$M = -\frac{nq^2 l}{\epsilon_0 \epsilon r^2} \frac{d(1/\varphi)}{d\varphi} = \frac{nq^2 l}{\epsilon_0 \epsilon r^2 \varphi^2}.$$

б) $U = \text{const.}$ Знову застосуємо закон збереження енергії. Оскільки в цьому випадку конденсатор перебуває під постійною напругою, то

$$W = n \frac{CU^2}{2} = n \frac{\epsilon\epsilon_0 S U^2}{2l} = \frac{n\epsilon_0 \epsilon r^2 \varphi U^2}{4l}. \quad \text{Тоді } M = \frac{dW}{d\varphi} = \frac{n\epsilon_0 \epsilon r^2 U^2}{4l}.$$

3.176. $I = 11 \text{ нА}; v = 23 \text{ м/с.}$

3.177. $q = 2,5 \text{ Кл.}$

3.178. $q = 107,5 \text{ Кл}; I = 21,5 \text{ А.}$

3.179. $I = 8 \text{ А.}$

3.180. а) Увімкнути послідовно резистор, опір якого $R_1 \approx 10^5 \text{ Ом};$ б) увімкнути шунт, опір якого $R_2 \approx 0,1 \text{ Ом.}$

3.181. $R_x \approx 79 \text{ кОм.}$

$$3.182. r = \frac{R_0}{\sqrt{3}}. \quad 3.183. r = 2R; R_{\text{зар}} = 4R. \quad 3.184. l_1/l_2 = 4. \quad 3.185. R = 10,9 \text{ Ом}.$$

$$3.186. R = 1,9 \text{ Ом}. \quad 3.187. F = \frac{e\rho l}{S} = 8,2 \cdot 10^{-23} \text{ Н}.$$

$$3.188. E_{\text{Cu}} = 6,9 \cdot 10^{-4} \text{ В/м}; E_{\text{W}} = 350 \text{ В/м}. \quad 3.189. j = 0,13 \text{ ГА/м}^2; N = 1,2 \cdot 10^{24}.$$

$$3.190. R = \rho h / (\pi r_1 r_2) = 4,25 \text{ мОм}. \quad 3.191. I = \frac{4\pi U}{\rho(1/r_1 - 1/r_2)}.$$

$$3.192. R = \frac{\rho}{2\pi d} = 1,5 \cdot 10^2 \text{ Ом}.$$

3.193. Опір елементарного циліндричного шару радіуса r і dr завтовшки $dr = \rho dr / (2\pi r l)$, звідки після інтегрування одержимо повний опір $R = \frac{\rho}{2\pi l} \times \ln \frac{r_2}{r_1} = 0,15 \text{ мОм}$.

3.194. Використавши формулу (3.5.17) та формулу ємності сферичного конденсатора, одержимо

$$R = (r_2 - r_1) / (2\pi\sigma r_1 r_2) = 1,6 \text{ кОм}.$$

$$3.195. R = d \ln(\sigma_2 / \sigma_1) / (S(\sigma_2 - \sigma_1)) = 1 \text{ кОм}.$$

$$3.196. R = 1 / (2\pi\sigma r_0) = 15,9 \text{ Ом}; \text{ не залежить.}$$

$$3.197. R = 2\alpha / (\pi a^4); E = 2\alpha I / (\pi a^4). \quad 3.198. I = U \epsilon_0 S v / d^2 = 26,6 \text{ нА}.$$

$$3.199. \text{ За законом Ома } -\frac{dq}{dt} = \frac{U}{R} = \frac{q}{RC} \text{ (тут враховано, що заряд зменшується з}$$

часом). Розділяючи змінні та інтегруючи, одержимо $\ln q = -\frac{t}{RC} + \text{const}$. З урахуван-

ням початкових умов ($t = 0, q = q_0$) маємо закон зміни заряду $q = q_0 e^{-t/(RC)}$, звідки

можна одержати закон зміни напруги $U = \frac{q}{C} = U_0 e^{-t/(RC)}$. а) $t = RC \ln \frac{U_0}{U} = 2,77 \text{ с};$

б) $t = RC = 4 \text{ с}.$

$$3.200. \rho = t_1 / (\epsilon \epsilon_0 \ln 2) \approx 7,8 \cdot 10^{12} \text{ Ом}\cdot\text{м}; q \approx 0,2 q_0.$$

$$3.201. I = \frac{(\epsilon - 1)\epsilon_0 \delta \sigma v}{d + r(\epsilon - 1)\epsilon_0 \sigma v} \approx 7 \cdot 10^{-9} \text{ А}.$$

$$3.202. 1) \varphi_a - \varphi_b = \frac{\xi_1(r_2/r_1) + \xi_2}{1 + r_2/r_1} = 50 \text{ В}; \quad 2) \varphi_a - \varphi_b = \frac{\xi_1(r_2/r_1) - \xi_2}{1 + r_2/r_1} = 22 \text{ В}.$$

$$3.203. I = 10 \text{ мА}.$$

$$3.204. \varphi_1 - \varphi_2 = (\xi_1 - \xi_2)R_2 / (R_1 + R_2) - \xi_1 = -4 \text{ В}.$$

$$3.205. I = \alpha; \varphi_A - \varphi_B = 0.$$

$$3.206. I_1 = \xi R_2 / (R_1 r + R_1 R_2 + R_2 r) = 1,2 \text{ А}; I_2 = I_1 R_1 / R_2 = 0,8 \text{ А}.$$

$$3.207. I_1 = 0,032 \text{ А}, I_2 = 0,009 \text{ А}, I_3 = 0,023 \text{ А}; \varphi_A - \varphi_B = 1,2 \text{ В}.$$

$$3.208. R_{AB} = \frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{a+b+2\sqrt{a^2+b^2}} \gamma; \quad R_{CD} = \frac{2ab+(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{a+b+2\sqrt{a^2+b^2}} \gamma.$$

$$3.209. q = \frac{C\epsilon(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3+r} = 1,7 \text{ мкКл.}$$

$$3.210. U_1 = \frac{C_2}{C_1+C_2} \frac{R_3}{R_1+R_2+r} \epsilon \approx 0,78 \text{ В}; \quad U_2 = \frac{C_1}{C_1+C_2} \frac{R_3}{R_1+R_2+r} \epsilon \approx 0,52 \text{ В.}$$

$$3.211. \delta = 1 - \frac{R_{\text{вн}}(R+r)}{(R+r)R_{\text{вн}}+rR} \approx 0,0045.$$

$$3.212. I_1 = 0,4 \text{ А}; \quad I_2 = 0,1 \text{ А}; \quad I_3 = 0,2 \text{ А}; \quad I_4 = 0,3 \text{ А}; \quad I_5 = 0,1 \text{ А.}$$

$$3.213. \text{Рис. 3.44, а: } I_1 = I_3 = 1 \text{ А}; \quad I_2 = I_4 = -1 \text{ А; не зміняться; рис. 3.44, б: } I_1 = -0,92 \text{ А}; \\ I_2 = 0,04 \text{ А}; \quad I_3 = 0,36 \text{ А}; \quad I_4 = 0,52 \text{ А.}$$

$$3.214. t = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с.} \quad 3.215. W = leht = 2 \text{ ГДж.}$$

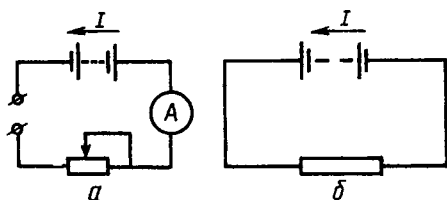


Рис. В.3.12

3.216. а) Акумулятор заряджається від зовнішнього джерела (рис. В.3.12, а). Напрямок струму в акумуляторі показано стрілкою. Робота електричних сил під час перенесення заряду в акумуляторі $A = \Delta\phi/t = 2 \text{ Дж}$. Ця робота є додатною, оскільки перенесення заряду відбувається від вищого потенціалу до нижчого. На внутрішньому опорі акумулятора виділяється кількість теплоти

$Q = I^2 r t$. Застосувавши закон Ома для неоднорідної ділянки кола (3.5.8), одержимо $I r = \Delta\phi - \epsilon_1$ і тоді $Q = I(\Delta\phi - \epsilon_1)t = 0,7 \text{ Дж}$.

б) Роботу, виконану під час перенесення заряду всередині батареї акумуляторів, визначаємо за формулою $A = -\Delta\phi/t = -2 \text{ Дж}$. Робота є від'ємною, оскільки всередині батареї акумуляторів заряд переноситься від полюса з низьким потенціалом до полюса з вищим потенціалом (рис. В.3.12, б). Кількість теплоти, що виділяється на внутрішньому опорі батареї акумуляторів, $Q = I^2 r t$. За законом Ома $I r = \Delta\phi - \epsilon_2$, тоді

$$Q = I(\Delta\phi - \epsilon_2)t = 0,6 \text{ Дж.}$$

$$3.217. \eta = 42 \%; \quad P_{\text{max}} = 6,45 \text{ Вт}; \quad \eta' = 50 \%.$$

$$3.218. R = 1,5 \text{ Ом}; \quad I = 2,5 \text{ А}; \quad P = 18,75 \text{ Вт.}$$

$$3.219. P_{\text{max}} = 33 \text{ Вт}; \quad \eta = 0,5.$$

$$3.220. P_1/P_2 = (R+2r)^2/(2R+r)^2 = 1,56.$$

$$3.221. I = 10,5 \text{ А}; \quad S = 3,58 \text{ см}^2; \quad m_1 = 4,19 \cdot 10^6 \text{ кг}; \quad m_2 = m_1/n^2 = m_1/100.$$

$$3.222. I_{\text{к.з}} = \sqrt{P/R_1} + \sqrt{P/R_2} = 1,63 \text{ А.}$$

3.223. Оскільки сила струму змінюється, то застосовуємо закон Джоуля – Ленца для нескінченно малого проміжку часу: $dQ = I^2 R dt$.

За умовою струм рівномірно зростає, тому може бути виражений формулою $I = kt$, де коефіцієнт пропорційності $k = I_{\max}/t_1$. Тоді $dQ = k^2 R t^2 dt$. Зінтегрувавши та підставивши вираз для k , одержимо

$$Q = \int_0^{t_1} k^2 R t^2 dt = k^2 R \frac{t_1^3}{3} = \frac{I_{\max}^2 R t_1}{3} = 100 \text{ кДж.}$$

3.224. а) $Q = 900 \text{ Дж}$; б) $Q = 180 \text{ Дж}$.

3.225. $w = U^2 / (\rho l^2) = 4 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^3$.

3.226. $U_2 = U_1 / \sqrt{1 - \alpha}$.

3.227. $n = \sqrt{\frac{QS}{e^2 \rho l}} = 1,26 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}$.

3.228. $N = 133$.

3.229. $t_3 = 44 \text{ хв.}$

3.230. $Q = \frac{I^2}{2\pi d} \rho l \ln \frac{R}{r} = 1,67 \text{ мДж.}$

3.231. $Q = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{CU^2}{2} = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ Дж.}$

3.232. $I_n = \pi d l B T^2 e^{-A(kT)} = 0,14 \text{ А.}$

3.233. $A = 3,1 \text{ еВ.}$

3.234. $n = \frac{I_{n2}}{I_{n1}} = \frac{B_2}{B_1} e^{\frac{1}{kT}(A_1 - A_2)} \approx 11\,000$.

3.235. $v = 987 \text{ км/с}$; $n_0 = I_w/e = 4 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$.

3.236. $s = \frac{l}{2d} \frac{U}{U_a} \left(L + \frac{l}{2} \right) = 1,88 \text{ см.}$

3.237. $\alpha = 0,82$.

3.238. $\rho = 74 \text{ МОм}\cdot\text{м.}$

3.239. $W = 430 \text{ МДж.}$

3.240. $m = 0,82 \text{ г}$; $q/m_0 = 3,06 \cdot 10^6 \text{ Кл/кг.}$

3.241. $N = 5 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$; $q = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$

3.242. $m_{\text{Fe}} = 27,9 \text{ кг}$; $m_{2\text{Fe}} = 18,6 \text{ кг}$; $m_{\text{Cl}} = 35,35 \text{ кг.}$

3.243. $R = 1 \text{ МОм.}$

3.244. $\eta = c/M = 0,0013 \text{ моль/см}^3$; $\Lambda = M/(\rho c) \approx 10^{-2} \text{ м}^2/(\text{Ом}\cdot\text{моль})$; $\alpha = M/(\rho c(u_+ + u_-)N_A) = 0,8$.

3.245. $z_2 = m_1 A_2 z_1 / (m_2 A_1) = 3$.

3.246. $k = 1,94 \cdot 10^{-7} \text{ кг/Кл}$; $l = 0,84 \text{ т.}$

3.247. Еквівалентна електропровідність води при 100%-й дисоціації $\Lambda_{\text{с}} = F(u_+ + u_-) = 488 \text{ см}^2/(\text{Ом}\cdot\text{г-екв})$. Еквівалентна концентрація $\eta = m/M$, де m – маса

кубічного сантиметра води, $m = 1 \text{ г}$; M – молярна маса води. Еквівалентна електропровідність реальної води $\Lambda = \sigma/\eta = 6,8 \cdot 10^{-7} \text{ см}^2/\text{Ом} \cdot \text{г-екв}$. Ступінь дисоціації $\alpha = \Lambda/\Lambda_\infty = 1,4 \cdot 10^{-9}$.

$$3.248. n = \sqrt{\Delta n_i / r} = 2 \cdot 10^9 \text{ м}^{-3}.$$

$$3.249. j = ne(u_+ + u_-)E = 6,78 \text{ пА/м}^2.$$

3.250. Виконується.

$$3.251. n_0 = \sqrt{\frac{n}{r}} = 3,2 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}; \quad I = \sqrt{\frac{n}{r}} e(u_+ + u_-) \frac{U}{d} S = 3,3 \cdot 10^{-9} \text{ А}; \quad I_n = en d S;$$

$$\frac{I}{I_n} = \frac{(u_+ + u_-)U}{d^2 \sqrt{rn}} = 0,034; \quad t = \frac{1}{\sqrt{rn}} = 0,03 \text{ с}.$$

$$3.252. v = \sqrt{2 \frac{\epsilon_{i0} - eU}{m}} = 1,64 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

3.253. Електрони.

3.255. Так.

3.257. Дебаївський радіус екранування $\lambda_D = 0,24 \text{ м} > l$.

Ні.

3.258. Ні.

3.259. За принципом суперпозиції магнітна індукція у точці A (рис. В.3.13) $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, де $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ – магнітні індукції полів, що створюються кожним провідником окремо. Модуль вектора $\mathbf{B}$ у загальному випадку визначаємо за теоремою косинусів:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2 \cos \alpha},$$

$$\text{де } B_1 = \mu_0 I_1 / (2\pi r_1); \quad B_2 = \mu_0 I_2 / (2\pi r_2); \quad \cos \alpha = (r_1^2 + r_2^2 - d^2) / (2r_1 r_2).$$

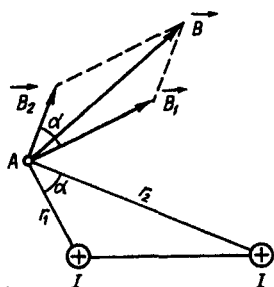


Рис. В.3.13

Підставивши числові значення, одержимо $B = 83,3 \text{ мкТл}$.

$$3.260. B = 56,4 \text{ мкТл}.$$

$$3.261. \text{ а) } B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} = 16 \text{ мкТл}; \quad \text{ б) } B = \frac{\mu_0 I(1 + \sqrt{2}/2)}{2\pi r} = 77,6 \text{ мкТл}.$$

$$3.262. B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a} = 5,64 \text{ мкТл}.$$

$$3.263. I = 2Br^3 / (\mu_0 R^2) = 21,5 \text{ А}.$$

$$3.264. B_r = \frac{\mu_0 I N}{2R \tan \alpha} = 20 \text{ мкТл}.$$

$$3.265. B_2 / B_1 = 8\sqrt{2} / \pi^2 = 1,15 \text{ раза}.$$

$$3.266. B = \frac{\mu_0 I}{4R} = 0,126 \text{ мТл}.$$

$$3.267. B = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \right) = 0,239 \text{ мТл}.$$

$$3.268. \text{ а) } B = \frac{\mu_0 I}{8} \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b} \right); \text{ б) } B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{3\pi}{2a} + \frac{\sqrt{2}}{b} \right).$$

$$3.269. B = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\pi} \right) = 67 \text{ мкТл.}$$

$$3.270. B = \frac{\mu_0 NI}{2l} \left(\frac{l+2x}{\sqrt{D^2 + (l+2x)^2}} - \frac{2x-l}{\sqrt{D^2 + (l+2x)^2}} \right). \quad B \approx 1,26; 1,26; 1,25; 1,24;$$

$$0,63; 0,003 \text{ Тл.}$$

$$3.271. v = 5 \text{ 000 км/с.}$$

$$3.272. B = \epsilon_0 \mu_0 v E \sin \alpha = 3 \text{ пТл.}$$

$$3.273. B = 1,25 \cdot 10^{-23} \text{ Тл.}$$

$$3.274. B = \frac{fmg}{Id} = 55 \text{ мТл.}$$

$$3.275. I \approx 4,6 \text{ А.}$$

$$3.276. d = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \rho S g} = 2,3 \text{ см.}$$

$$3.277. F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a^2}{2\pi b(a+b)} = 48 \text{ мкН.}$$

3.278. а) Виділимо елемент струму завдовжки dl (рис. В.3.14, а). Сила Ампера, що діє на цей елемент, за модулем $dF = IdlB \sin \alpha$, і напрямлена, як і всі інші елементарні сили, що діють на елементи півкілця, уздовж осі Oz . Тому сумарна сила визначається інтегруванням. Підставивши $dl = R d\alpha$, маємо

$$F_z = \int_0^\pi IRB \sin \alpha d\alpha = 2IRB.$$

б) Сила Ампера, що діє на елемент струму, за модулем $dF = IdlB$ для всіх елементів півкілця, а всі елементарні сили направлені вздовж радіусів. Розкладемо dF на

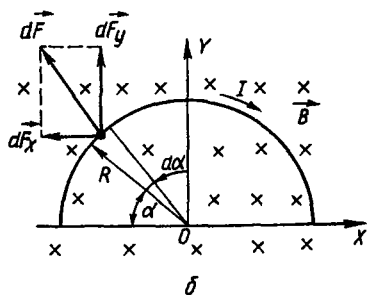
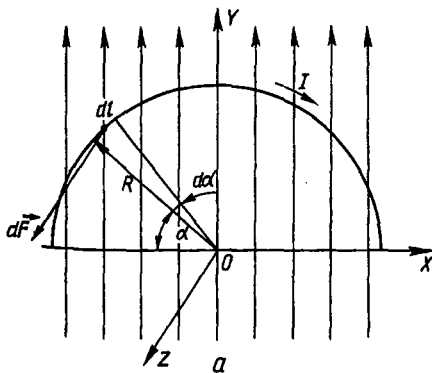


Рис. В.3.14

дві складові (рис. В.3.14, б). Із симетрії задачі випливає, що підсумовування всіх dF_x дає нуль, а результуюча сила $F = F_y$ напрямлена вздовж осі Oy :

$$F_y = \int dF_y = \int_0^\pi IBR \sin \alpha d\alpha = 2IRB.$$

$F = 0,1$ Н. Якщо провідник випрямити, то сила зросте в $\pi/2$ разів.

3.279. $F = 0,4$ Н.

3.280. $A = \mu_0 I_1 I_2 \ln(r_2/r_1)/(2\pi) = 83$ мкДж.

3.281. $p_m = 2\pi R^3 B/\mu_0 = 30$ мА·м².

3.282. $p_m = \frac{e^2}{4} \sqrt{\frac{r}{\pi \epsilon_0 m}} = 9,3 \cdot 10^{-24}$ А·м²; $\frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m} = 87,9$ ГКл/кг.

3.283. $p_m/L = \pi r \tau / m = 251$ нКл/кг.

3.284. Розіб'ємо диск на кільця радіуса r і завтовшки dr . Площа кільця $dS \approx 2\pi r dr$. Заряд на поверхні такого кільця $dq = \frac{q}{\pi R^2} \cdot 2\pi r dr$ обертається з частотою ν , утворюючи коловий струм $dI = dq\nu$, а його магнітний момент за модулем $dp_m = dI\pi r^2$. Сумарний магнітний момент (усі магнітні моменти напрямлені вздовж однієї прямої) всіх кілець

$$p_m = \int dp_m = \frac{q\pi\nu R^2}{2} = 62,8$$
 нА·м².

$p_m/L = q/(2m) = 1$ мкКл/кг.

3.285. $M = \mu_0 I_1 I_2 S R^2 / (2(R^2 + h^2)^{3/2}) = 12,4$ пН·м.

3.286. $\omega = \sqrt{\frac{2(M\varphi - 2BiS)}{I}} = 23,2$ рад/с.

3.287. Коли магнітне поле витка збігатиметься з горизонтальною складовою поля Землі; $B = 27,8$ мкТл.

3.288. $c = \frac{\pi G r^4 d}{4ILNSB} = 1,1 \cdot 10^{-7}$ А/рад.

3.289. $\frac{e}{m} = \frac{2U}{R^2 B^2} = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

3.290. $m = m_0 / \sqrt{1 - 1/\left(1 + \left(\frac{m_0 c}{eBR}\right)^2\right)}$; $m_e = 58,6 m_{0e}$, $m_p = 1,000 5/m_{0p}$, де m_{0e} , m_{0p} -

маси спокою відповідно електрона й протона.

3.291. $\Delta x = \frac{2(m_d - m_p)v}{eB} = 0,105$ м.

3.292. $h = 2\pi I \sqrt{2mU/e} \cos \alpha / (\mu_0 NI) = 4$ см.

3.293. $T = 8,9$ нс.

$$3.294. p_m = e^2 B R^2 / (2m) = 0,28 \text{ пА} \cdot \text{м}^2.$$

$$3.295. B = 1 \text{ мТл}.$$

$$3.296. \text{ а) } a = 2,48 \cdot 10^{13} \text{ м/с}^2; \text{ б) } a = -1,76 \cdot 10^{13} \text{ м/с}^2.$$

$$3.297. \nu = eB / (2\pi m) = 15,2 \text{ МГц}.$$

3.298. $A = e l B' B N_A / (2E)$; $A_1 = 4$; $A_2 = 3$. Піки іонного струму відповідають ізотопам ^4He і ^3He .

$$3.299. U = \frac{r}{q} \ln \frac{r_2}{r_1} \left(q \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} B - \frac{2\varepsilon}{r} \right) = 38,5 \text{ В}.$$

$$3.300. W = \frac{e^2 d^2 B^2}{8m_p} = 16,8 \text{ МеВ}; \nu = \frac{e dB}{2m_p} = 5,8 \cdot 10^7; t = \frac{\pi d^2 B}{8U} = 4,7 \text{ нс}; T = \frac{2\pi m}{eB}.$$

$$3.301. \varepsilon = c^2 q B / \omega.$$

$$3.302. U_{AB} = \frac{\mu_0 I H}{n e b} \approx 7 \cdot 10^{-6} \text{ В}.$$

$$3.304. R_{Cu} / R_{Al} = 1,78.$$

$$3.305. \oint B_l dl = 2,51 \text{ мкТл} \cdot \text{м}.$$

$$3.306. 1,26 \text{ мкТл} \cdot \text{м}; 3,77 \text{ мкТл} \cdot \text{м}; -1,26 \text{ мкТл} \cdot \text{м}.$$

$$3.307. B = \mu_0 N I / (\pi D) = 8 \text{ мТл}.$$

3.308. Визначимо індукцію B усередині проводу в точці A_1 , що лежить на відстані r_1 від осі проводу (рис. В.3.15). Застосуємо теорему про циркуляцію вектора B . Замкнений контур L виберемо у вигляді кола, що проходить через цю точку. Внаслідок симетрії модуль вектора B_1 є однаковим у всіх точках кола, тому

$$\oint_L B_l dl = B \cdot 2\pi r_1.$$

Якщо $j = \frac{I}{\pi R^2}$ — густина струму, то сумарний струм, що охоплюється контуром інтегрування, $\sum I = j\pi r^2$. Остаточно маємо

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r_1 = 0,27 \text{ мТл}.$$

Аналогічно визначимо магнітне поле в точці A_2 :

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} = 0,24 \text{ мТл}.$$

Отже, поле всередині проводу зростає з відстанню від осі за лінійним законом, а поле зовні проводу зменшується за гіперболічним законом.

$$3.309. \text{ а) } B = 0;$$

$$\text{ б) } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{(r^2 - R_1^2)}{r(R_2^2 - R_1^2)}; \text{ в) } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

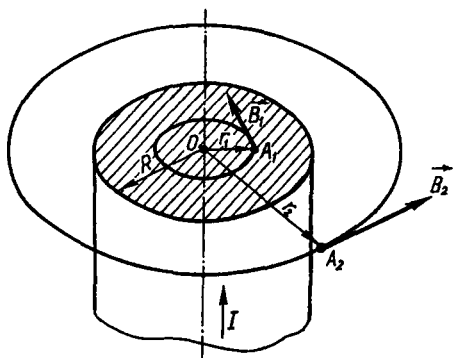


Рис. В.3.15

3.310. а) $B_1 = \mu_0 I r_1 / (2\pi a^2) = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$; б) $B_2 = \mu_0 I / (2\pi r_2) = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$;
 в) $B_3 = \frac{\mu_0 I (c^2 - r_3^2)}{2\pi r_3 (c^2 - b^2)} = 0,43 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$; г) $B_4 = 0$.

3.311. Якщо розглянути два суцільних провідники радіусів R_1 і R_2 , осі яких зміщені на r_0 і по яких проходять струми однакової густини в протилежних напрямках, та застосувати принцип суперпозиції, то одержимо:

$$B_1 = \frac{\mu_0 j}{2} \left(r + \frac{R_2^2}{r_0 - r} \right), \quad 0 \leq r \leq r_0 - R_2; \quad B_2 = \frac{\mu_0 j}{2} r_0, \quad r_0 - R_2 \leq r \leq r_0 + R_2;$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 j}{2} \left(r - \frac{R_2^2}{r - r_0} \right), \quad r_0 + R_2 \leq r \leq R_1; \quad B_4 = \frac{\mu_0 j}{2} \left(\frac{R_1^2}{r} - \frac{R_2^2}{r - r_0} \right), \quad r \geq R_1,$$

де $j = \frac{I}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}$.

3.313. $\Phi = BS \sin \varphi = 50 \text{ мкВб}$.

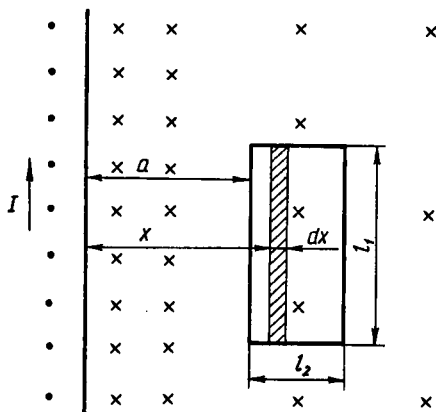


Рис. В.3.16

3.314. $\Phi = 4,9 \text{ нВб}$.

3.315. Магнітне поле є неоднорідним. Тому поділимо площу рамки на вузькі смуги так, щоб у межах кожної смуги магнітне поле можна було б вважати однорідним (рис. В.3.16). Нехай одна з таких смуг завширшки dx міститься на відстані x від проводу. Тоді елементарний магнітний потік крізь смугу

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l_1 dx.$$

Після інтегрування маємо

$$\Phi = \int_a^{a+l_2} \frac{\mu_0 I l_1}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l_1 \ln \frac{a+l_2}{a} = 0,22 \text{ мкВб}.$$

3.316. $\Phi = \mu_0 I l / (4\pi) = 2 \text{ мкВб}$.

3.317. $\Psi = \mu_0 I N^2 S / l = 308 \text{ мВб}$.

3.318. $A = 0,4 \text{ мДж}$.

3.319. $A = I B a^2 (4/\pi - 1) \sin \alpha = 10,1 \text{ мДж}$.

3.320. $A = I B \pi r^2 N \sin \beta = 27,2 \text{ Дж}$.

3.321. $A = 0,3 \text{ Дж}$.

3.322. Робота зовнішніх сил обернена за знаком до роботи сил магнітного поля $A_{\text{зовн}} = -A = -I_1(\Phi_2 - \Phi_1)$, де Φ_1 , Φ_2 – значення магнітного потоку крізь контур у початковому й кінцевому положеннях. Скористаємося виразом для потоку, одержаним у розв'язку задачі 3.315. У початковому положенні

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I l_1}{2\pi} \ln \frac{a + l_2}{a}.$$

Треба врахувати, що потік є алгебричною величиною. Знак потоку залежить від кута між позитивною нормаллю до площини рамки (її напрям утворює правий гвинт з напрямом струму) і напрямом поля. Тому в кінцевому положенні рамки потік є від'ємним

$$\Phi = -\frac{\mu_0 I l_1}{2\pi} \ln \frac{a + 2l_2}{a + l_2}; \quad A_{\text{зовн}} = \frac{\mu_0 I l_1}{2\pi} \ln \frac{a + 2l_2}{a} = 64 \text{ нДж}.$$

3.323. Проти руху і за рухом стрілки годинника.

3.324. $B = U/(vl) = 0,3 \text{ Тл}$.

3.325. З боку магнітного поля на провідник зі струмом діє сила Ампера, внаслідок чого провідник переміщується, у ньому виникає ЕРС індукції $\mathcal{E}_i = vBl$, яка за правилом Ленца буде зменшувати струм і, отже, гальмувати рух провідника. За законом Ома $I = (U_0 - vBl)/R$. Максимальна швидкість, якої набуде провідник, визначається з умови $I = 0$, тобто сила Ампера, а з нею й прискорення, перетворюються в нуль, і з цієї миті провідник рухатиметься далі рівномірно з постійною швидкістю

$$v_{\text{max}} = U_0/(Bl) = 0,2 \text{ м/с}.$$

3.326. $n = 6,4 \text{ с}^{-1}$.

3.327. а) У системі відліку, зв'язаній з диском, на електрони провідності діє відцентрова сила інерції $F = m\omega^2 r = 4\pi^2 n^2 m r$. На периферії диска накопичується негативний заряд, у центрі – позитивний. Виникає електричне поле напруженістю E , яка спрямована вздовж радіусів. Рівновага настане тоді, коли сила, що діятиме на електрони з боку цього електричного поля, дорівнюватиме відцентровій: $Ee = 4\pi^2 n^2 m r$.

Різницю потенціалів між центром і периферією визначимо як $\Delta\phi = \int_0^R E dr = 2\pi^2 n^2 m R^2 / e \approx 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ В}$, де m – маса електрона.

б) У магнітному полі на електрони провідності, що обертаються разом із диском, починає діяти сила Лоренца $F_L = evB$. Ця сила за модулем значно перевищує відцентрову, тому останньою можна нехтувати. Дійсно, $\frac{evB}{m\omega^2 r} = \frac{eB}{m\omega} \approx 10^7$. Повторюючи

міркування розв'язання а, одержуємо: $\Delta\phi \approx \int_0^R B\omega r dr = B\omega R^2 / 2 = \pi B n R^2 \approx 2,12 \text{ В}$.

3.328. $n = 1 \text{ с}^{-1}$.

3.329. $\langle \xi_i \rangle = 4nBS = 0,16 \text{ В}$.

3.330. У бруську виникає індукційний струм, який можна виразити через параметри конденсатора:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{CdU}{dt} = \frac{Cd\xi_i}{dt} = \frac{Cd(vBl)}{dt} = C a B l.$$

На брусок зі струмом діє сила Ампера. За другим законом Ньютона $ma = mg - IBl$. Тут враховано, що сила Ампера напрямлена вертикально вгору

(напряг індукційного струму – праворуч – визначається за правилом Ленца). Тоді прискорення бруска та сила струму становитимуть:

$$a = g / \left(1 + \frac{CB^2 l^2}{m} \right) \approx 9,8 \text{ м/с}^2; \quad I = CBgl = 2 \text{ нА}.$$

$$3.331. I = \frac{2\pi Rq}{\mu_0(l_2 - l_1) \ln(l_2/l_1)} = 1 \text{ кА}.$$

3.332. Оскільки рамка рухається в неоднорідному магнітному полі прямого про-
воду зі струмом, то магнітний потік крізь рамку змінюється і в рамці виникає ЕРС
індукції. Вираз для магнітного потоку встановлено в розв'язанні задачі 3.315:

$$\Phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right),$$

де x – відстань від рамки до провідника в момент часу t , $x = b + vt$.

$$\text{За законом Фарадея } \mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

$$\mathcal{E}_i = \mu_0 I a^2 v / (2\pi(vt + b)(vt + a + b)) = 4,1 \text{ нВ}.$$

3.333. $q = Bm / (16\rho D) \approx 0,41$ Кл, де ρ – питомий опір, D – густина міді.

$$3.334. U = \frac{2\mathcal{E}R - \omega B l^2 r}{2(R+r)}; \quad P_Q = \frac{(2\mathcal{E} + \omega B l^2)R}{4(R+r)^2}; \quad P = \frac{2\mathcal{E} + \omega B l^2}{4(R+r)} \omega B l^2.$$

$$3.335. v = \frac{16\rho Dg}{\alpha^2 B_0^2 d^2}.$$

$$3.336. q = \frac{2\mu_0 \pi r^2 N_1 N_2}{Rl} I \approx 1,6 \text{ мКл}.$$

$$3.337. l = \frac{2\pi B_0 S R^2}{(2\pi \rho R + rS)c_0} = 1 \text{ м}.$$

$$3.338. Q = \frac{4\beta^2 \alpha^4}{3R} t^3 = 53 \text{ мкДж}.$$

$$3.339. Q = a^2 \tau^3 / (3R).$$

$$3.340. \text{Стискатимуть кільце; } F = k^2 n^2 \mu_0^2 S t / (R l^2) = 7,1 \cdot 10^{-8} \text{ Н/м}.$$

$$3.341. I = \frac{\mu_0 N S d}{4\rho l} \frac{dl}{dt} = 0,74 \text{ мА}.$$

$$3.342. n = \frac{2}{D} \sqrt{\frac{L}{\mu_0 \pi l}} = 14,5 \text{ см}^{-1}.$$

$$3.343. L = 17 \text{ мГн}.$$

$$3.344. l = \sqrt{4\pi l_0 L / \mu_0} = 100 \text{ м}.$$

3.345. Обчислимо магнітний потік, що пронизує площу, яка обмежена проводами
(рис. В.3.17). Відомо, що $B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$.

Розіб'ємо площу між проводами на вузькі смуги, паралельні осям проводів, завширшки dx , площа яких $dS = l dx$. У межах кожної смуги магнітне поле можна вважати однорідним, тому елементарний потік крізь таку смугу $d\Phi = B dS = B l dx$.

Інтегруючи, маємо

$$\Phi_1 = \int_R^{d-R} \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d-R}{R}.$$

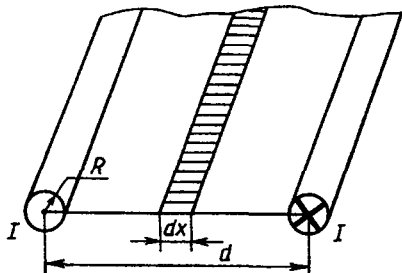


Рис. В.3.17

Оскільки струми в проводах мають протилежний напрям, то напрями полів, які створюються обома проводами між їх осями, є однаковими й повний потік буде у 2 рази більшим:

$$\Phi = 2\Phi_1 = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-R}{R} \approx \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d}{R}.$$

Звідси індуктивність

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{R} = 2,4 \text{ мГн.}$$

3.346.3 формул для енергії магнітного поля струму $W = \frac{LI^2}{2}$, $W = \int w dV = \int \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} dV$ одержимо

$$L = \frac{1}{I^2} \int \frac{B^2}{\mu_0 \mu} dV.$$

Магнітне поле існує тільки між циліндрами і створюється тільки струмом, що проходить по внутрішньому циліндру:

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r}, \quad R_1 < r < R_2.$$

Підставимо цей вираз у формулу для індуктивності. Зінтегрувавши, одержимо (елемент об'єму $dV = 2\pi r l dr$)

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

або з урахуванням того, що $R_2/R_1 = \eta$,

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \eta = 0,26 \text{ мкГн/м.}$$

3.347. $L_{12} = 8 \text{ мГн.}$

3.348. $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2} = 0,48 \text{ Гн.}$

$$3.349. L_{12} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{l} \right) = 24,3 \text{ нГн}.$$

$$3.350. l = \frac{\pi \mu_0 N^2 d^2}{4 R t} \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon - IR} = 0,57 \text{ м}.$$

$$3.351. W = \frac{1}{2} L I^2 \exp \left(-\frac{2R}{L} t \right) = 0,23 \text{ Дж}.$$

$$3.352. q = \frac{\pi \mu_0 d_1 D}{16 \rho} I_0 = 363 \text{ мкКл}.$$

$$3.353. Q = \mu_0 \pi D^2 N I_0^2 (1 - \exp(-32 \rho t / (\mu_0 \pi d D))) / (8d) = 3,2 \text{ мкДж}.$$

$$3.354. t = -\frac{L \ln(1 - \eta)}{R} = 0,16 \text{ с}.$$

$$3.355. C = 1,1 \text{ мкФ}.$$

$$3.356. I(t) = 0,2 \exp(-1500 t); Q = \frac{U_0^2 C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} = 13,3 \text{ мДж}.$$

$$3.357. B = \frac{2 \mu_0 r U_0}{\pi D^2 R} \exp \left(-\frac{4td}{\varepsilon_0 \varepsilon R \pi D^2} \right) = 3,9 \cdot 10^{-10} \text{ Тл}.$$

$$3.358. W = NI\Phi/2 = 50 \text{ мДж}.$$

$$3.359. W_1 = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} - \text{енергія магнітного поля в суцільному провіднику};$$

$$W_2 = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} - \text{енергія магнітного поля в проміжку між суцільним провідником і трубою. Енергія магнітного поля системи}$$

$$W = W_1 + W_2 = 28 \text{ мкДж}.$$

$$3.360. W = \frac{\mu_0 N^2 I^2 (R_2 - R_1)}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 11 \text{ мДж}.$$

$$3.361. W = \frac{\mu_0 S}{2l} (N_1 I_1 \pm N_2 I_2)^2 = 98,3 \text{ мДж (3,42 мДж)}.$$

$$3.362. I = \sqrt{2wIS/L} = 1 \text{ А}.$$

3.363. Орбіта електрона і його орбітальний магнітний момент прецесують навколо напрямку магнітного поля **B**.

3.364. Діамагнітний стрижень намагнічується проти поля і виштовхується в область більш слабкого поля. Парамагнітний стрижень намагнічується вздовж поля, встановлюється вздовж ліній вектора **B** і притягується до ближнього полюса електромагніту.

$$3.365. J = \chi I / (2r) = 0,72 \cdot 10^{-5} \text{ А/м}; \Delta B = \mu_0 \chi I / (2r) = 9 \text{ пТл}.$$

$$3.366. B'/B = \chi / (1 + \chi) = 1,5 \cdot 10^{-5}.$$

$$3.367. B = LI/(SN) = 5 \text{ мТл}; J = \left(\frac{L}{\mu_0 NS} - \frac{N}{I} \right) I = 21 \text{ А/м}.$$

$$3.368. H_1 = 10,6 \text{ А/м}; H_2 = 4 \text{ А/м}; B_1 = 13,3 \text{ мкТл}; B_2 = 5 \text{ мкТл}; J_1 = 0,13 \text{ МА/м}; J_2 = 0.$$

$$3.369. \mu \approx 400; I = \Phi \sqrt{I/(L\mu_0\mu S)} = 2,98 \text{ А}.$$

$$3.370. J = 1,1 \text{ МА/м}.$$

$$3.371. n = 220 \text{ м}^{-1}.$$

$$3.372. L = 0,2 \text{ Гн}.$$

$$3.373. \Phi = 0,75 \text{ мВб}; \mu \approx 1800; J = 1 \text{ МА/м}.$$

3.374. З теореми про циркуляцію вектора $\mathbf{H}$ одержуємо рівняння, яке виражає зв'язок між H і B в залізі:

$$B = \frac{NI\mu_0}{l} - \frac{\pi D - l}{l} \mu_0 H = a - kH = 1,5 - 5,9H. \quad (1)$$

Крім цього, для заліза залежність $B = f(H)$ зображена на рис. 3.70. Визначимо координати точки перетину прямої (1) з кривою $B = f(H)$. Одержимо $H \approx 350 \text{ А/м}$; $B \approx 1,3 \text{ Тл}$. Тоді

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} \approx 3 \cdot 10^3; \Phi = BS \approx 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}; W_1 = \frac{BH}{2}(\pi d - l) \approx 0,11 \text{ Дж};$$

$$W_2 = \frac{B^2}{2\mu_0} lS \approx 0,7 \text{ Дж}; W = W_1 + W_2 \approx 0,8 \text{ Дж};$$

$$L = \frac{N\Phi}{I} \approx 0,17 \text{ Гн}; L = \frac{2W}{I^2} \approx 0,18 \text{ Гн}.$$

3.375. За умовою на межі поділу магнетиків $B_{1n} = B_{2n}$. Звідси випливає, що магнітна індукція B у зазорі за значенням така сама, як і в осерді. Напруженість магнітного поля в залізі

$$H = nI = \frac{NI}{l_3} = \frac{NI}{\pi D - l_{n,3}},$$

де l_3 – довжина ділянки контуру, що проходить уздовж осі кільця в залізі; $l_{n,3}$ – у повітряному зазорі. Далі за графіком $B(H)$ (див. рис. 3.70) визначаємо магнітну індукцію B і, використавши формулу для магнітної індукції в зазорі

$$B = \mu_0 nI/(l_{n,3}/\mu_{n,3} + l_3/\mu_3)$$

та рівність $\mu_{n,3} \approx 1$, обчислимо магнітну проникність заліза: $\mu_3 = 2943$.

$$3.376. B = B_0 \sqrt{\mu^2 \sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0}; \alpha = \mu \alpha_0.$$

$$3.377. W = 0,65 \text{ Дж}.$$

$$3.378. \mu \approx 3 \cdot 10^3.$$

3.379. Магнітна проникність феромагнетика є функцією напруженості H : $\mu = \frac{B(H)}{\mu_0 H}$. Якщо з початку координат провести пряму лінію, яка проходить через

довільну точку кривої намагнічення $B(H)$, то тангенс кута нахилу цієї прямої буде пропорційним відношенню B/H , тобто μ для відповідного значення H . У разі зростання кута нахилу відповідно зростає і μ . Максимальне значення μ відповідає до-

тичній до кривої $B(H)$: $\mu_{\max} = B^*/\mu_0 H^* \approx 6 \cdot 10^3$, де B^* , H^* – значення індукції та напруженості магнітного поля в точці дотику дотичної, яка проведена з початку координат до кривої $B = f(H)$.

3.380. $w_2/w_1 = 4$.

3.381. Якщо скіп замикає осердя, то магнітний потік усередині осердя $\Phi = BS$ і напруженість поля $H = \Phi/(\mu_0 \mu S)$ зростають. Осердя намагнічується до насичення (див. рис. 3.72, б, точка А). Напруженість досягає значення H_A , за якого струм у первинній обмотці не спроможний змінити напруженості поля. Осердя перестає перемагнічуватись, ЕРС в обмотці 2 зникає.

3.382. $E = 2,5 \cdot 10^{-5}$ В/м.

3.383. $E = \epsilon \omega \Phi_0 \sin \omega t / (2\pi r)$.

3.384. $\omega = q \alpha l^2 / (2m) = 9 \cdot 10^{-6}$ рад/с.

3.385. $B = \alpha \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right) t = 3,25 \cdot 10^{-3} t$ Тл.

3.386. Змінне за часом електричне поле напруженістю E створює магнітне поле напруженістю H , силові лінії якого – це концентричні кола з центрами на осі конденсатора. Циркуляція вектора H уздовж одного з цих кіл радіуса r за рівнянням Максвелла (3.9.2)

$$2\pi r H = \pi r^2 \frac{\partial D}{\partial t},$$

у правій частині якого – струм зміщення крізь площу, яка охоплюється контуром радіуса r .

Звідси

а) $B_1 = \epsilon_0 \mu_0 \alpha r_1 / 2 = 2,5 \cdot 10^{-8}$ Тл, $r_1 \leq R$;

б) $B_2 = \epsilon_0 \mu_0 \alpha R^2 / (2r_2) = 3,3 \cdot 10^{-8}$ Тл, $r_2 \leq R$.

3.387. $E = It / (\epsilon_0 \pi R^2) = 3,6$ МВ/м; $B = \mu_0 r I / (2\pi R^2) = 0,5$ нТл.

3.388. $B_6 = \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \alpha r / (2d)$; $B_{\text{кр}} = \epsilon_0 \mu_0 \alpha (r^2 (\epsilon - 1) + R^2) / (2dR)$.

3.389. $q = CU \exp(-\sigma t / (\epsilon_0 \epsilon))$; $I_{\text{зм}} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} CU \exp(-\sigma t / (\epsilon_0 \epsilon))$.

3.390. $j_{\text{зм1}} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 n r \omega^2 I_0}{2} \sin \omega t$, $r < R$; $j_{\text{зм2}} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 n R^2 \omega^2 I_0}{2r} \sin \omega t$, $r > R$.

3.391. $j_{\text{зм}} = qv / (2\pi r^3)$.

3.392. а) Так; б) ні. Використати рівняння Максвелла в диференціальній формі для стаціонарного випадку.

3.393. Так. Використати рівняння Максвелла в диференціальній формі.

3.395. У системі спокою зарядженої частинки її електричне поле має сферичну симетрію, а в лабораторній системі відліку такої симетрії немає. Силові лінії концентруються в диск, перпендикулярний до напрямку руху. У кожній точці лабораторної системи електричне поле залежить від часу.

3.396. Ні. У системі спокою частинки електричне поле є статичним, частинка не випромінює. Наявність або відсутність випромінювання не залежить від вибору системи відліку. Однак випромінювання має місце, якщо швидкість частинки v перевищує фазову швидкість світла c/n у середовищі (випромінювання Вавилова – Черенкова).

3.397. $C' = C/\sqrt{1-v^2/c^2} = 3,06$ пФ.

3.398. $U' = U/\sqrt{1-v^2/c^2} = 25,5$ В.

3.399. На рис. В.3.18 зображено два зустрічних пучки, швидкості яких у лабораторній K -системі позначені v_0 і $-v_0$. Зв'яжемо з одним із пучків, наприклад з нижнім, K' -систему. Тоді швидкість K' -системи становить $V = v_0$, а швидкість v' верхнього пучка відносно нижнього, тобто відносно K -системи, встановимо з релятивістського закону додавання швидкостей (1.6.7) для $v = -v_0$:

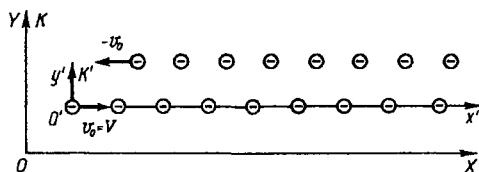


Рис. В.3.18

$$v' = -2v_0/(1 + v_0^2/c^2).$$

Спостерігач у лабораторній K -системі виміряє густину струму, що утворює нижній пучок, $j_{\text{лаб}} = \rho v_0$, де $\rho = q/(Sl)$; тут q – заряд, який міститься у відрізку пучка електронів завдовжки l , площа перерізу якого S . Якщо l_0 – довжина відрізка в K' -системі, відносно якої пучок перебуває в стані спокою, то внаслідок лоренцевого скорочення довжина l цього відрізка в K -системі, відносно якої він рухається зі швидкістю v_0 , $l = l_0(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$. Отже, $j_{\text{лаб}} = qv_0/(Sl_0(1 - v_0^2/c^2)^{1/2})$. Спостерігач у K' -системі виміряє густину струму, який проходить ліворуч: $j_{K'} = \rho_{K'} v'$, дер K' – об'ємна густина заряду, яка вимірюється в K' -системі, $\rho_{K'} = q/(S'l')$; q – заряд, що міститься у відрізку l' (заряд не змінюється); S' – переріз пучка (він також не змінюється); l' – довжина відрізка, який рухається ліворуч відносно K' -системи зі швидкістю v' : $l' = l_0(1 - (v')^2/c^2)^{1/2}$.

Підстановка значення v' дає $n = j_{K'}/j_{\text{лаб}} = 2/(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$, або за формулою (1.6.10) $n = j_{K'}/j_{\text{лаб}} = 2E/(m_e c^2) = 1,4 \cdot 10^4$, де m_e – маса спокою електрона.

3.400. Зв'яжемо систему відліку K з ниткою, а систему K' – з α -частинкою. На частинку з боку електромагнітного поля діє сила $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}])$. У K -системі магнітне поле зарядженої нитки відсутнє, $\mathbf{B} = 0$, а напруженість електричного становить $E = \tau/(2\pi\epsilon_0 r)$, причому воно напрямлене перпендикулярно до нитки, $E = E_{\perp}$, $E_{\parallel} = 0$. Тому $F = qE = q\tau/(2\pi\epsilon_0 r) = 28,8$ пН.

У K' -системі заряджена нитка рухається і, отже, створює не тільки електричне поле $\mathbf{E}'$, а й магнітне $\mathbf{B}'$. Але останнє ми відшукувати не будемо, оскільки α -частинка у K' -системі не рухається і сила з боку $\mathbf{B}'$ на неї не діє. Що ж до електричного поля $\mathbf{E}'$, то за формулами перетворення полів $E'_{\perp} = E_{\perp}/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, $E'_{\parallel} = E_{\parallel} = 0$. Отже, сила, що діє на α -частинку в K' -системі,

$$F' = qE' = qE/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = 48 \text{ пН}.$$

$$3.401. E' = \tau / (2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 - v^2/c^2}) = 2,25 \text{ МВ/м}; B' = \tau\mu_0 v / (2\pi r \sqrt{1 - v^2/c^2}) = 4,5 \text{ мТл}.$$

3.402. Будемо вважати рухомою системою відліку лабораторну систему. Тоді:

$$a) E' = \rho_1 / (2\epsilon_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}) = 925 \text{ В/м}; B' = vE' / c^2 = 1,23 \text{ мкТл};$$

$$b) E' = \rho_2 / (2\epsilon_0 r_2 \sqrt{1 - v^2/c^2}) = 1,97 \text{ кВ/м}; B' = vE' / c^2 = 2,6 \text{ мкТл}.$$

Вектори $\mathbf{E}'$ та $\mathbf{v}$ є взаємно перпендикулярними, вектор $\mathbf{B}'$ перпендикулярний до площини, що містить вектори $\mathbf{E}'$ та $\mathbf{v}$.

$$3.403. a) E' = p_e / (2\pi\epsilon_0 r_1^3 \sqrt{1 - v^2/c^2}) = 2,25 \text{ В/м}; B' = \mu_0 p_e v / (2\pi r_1^3 \sqrt{1 - v^2/c^2}) = 4,5 \text{ нТл};$$

$$b) E' = p_e / (4\pi\epsilon_0 r_2^3 \sqrt{1 - v^2/c^2}) = 1,13 \text{ В/м}; B' = \mu_0 p_e v / (4\pi r_2^3 \sqrt{1 - v^2/c^2}) = 2,25 \text{ нТл}.$$

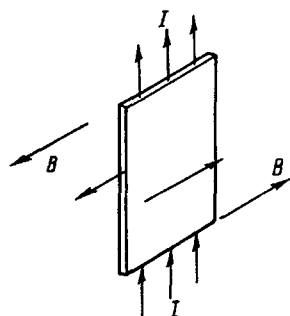


Рис. В.3.19

3.404. Поверхневий струм можна розглядати як рух зарядженої поверхні в напрямі струму. Нехай заряджена поверхня перебуває в системі K' , яка рухається зі швидкістю v упорядкованого руху носіїв струму. Електричне поле в цій системі $E' = \sigma / (2\epsilon_0)$, де σ – поверхнева густина заряду. Магнітного поля B' у цій системі немає. У системі K , відносно якої рухається площина (у лабораторній системі), $E_{\perp} = (E'_{\perp} - [\mathbf{vB}']) / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$, або у даному випадку $E_{\perp} = E'_{\perp} / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Магнітне поле в лабораторній системі відліку $B_{\perp} = (B'_{\perp} + [\mathbf{vE}'] / c^2) / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$, або у даному випадку

$$B = (vE'_{\perp} / c^2) / \sqrt{1 - v^2/c^2} = \mu_0 \sigma v / (2\sqrt{1 - v^2/c^2}).$$

Добуток σv має зміст лінійної густини поверхневого

струму: $J = \sigma v$. Оскільки $v \ll c$, то остаточно маємо індукцію магнітного поля плоского струму $B = \mu_0 J / 2 = 0,63 \text{ мТл}$. З кожного боку площини вектор індукції напрямлений паралельно площині й перпендикулярно до напрямку струму. Поля з обох боків є антисиметричними відносно площини (рис. В.3.19).

$$3.405. E' = \mu_0 p_m v / (2\pi(R^2 + r^2)^{3/2} \sqrt{1 - v^2/c^2}) = 1,52 \text{ МВ/м};$$

$$B' = \mu_0 p_m / (2\pi(R^2 + r^2)^{3/2} \sqrt{1 - v^2/c^2}) = 7,6 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}.$$

3.406. Зв'яжемо систему відліку K з нерухомою лабораторією, а систему K' – з рухомих зарядом q_1 . У K -системі сила, з якою перший заряд діє на другий,

$$\mathbf{F}_{12} = q_2(\mathbf{E}_2 + [\mathbf{v}_2 \mathbf{B}_2]), \quad (1)$$

де $\mathbf{E}_2$ – напруженість електричного, $\mathbf{B}_2$ – індукція магнітного полів, які створені зарядом q_1 у точці розміщення заряду q_2 . Щоб визначити $\mathbf{E}_2$ і $\mathbf{B}_2$, розглянемо ситуацію у K' -системі. У K' -системі заряд q_1 перебуває в стані спокою і тому створюватиме тільки електричне поле, напруженість якого $E'_2 = q_1 / (4\pi\epsilon_0 r'^2)$. Очевидно також, що $E'_2 = E'_{2\perp}$. Нерухомий заряд магнітного поля не створює, тому $\mathbf{B}'_2 = 0$. Тепер здійснимо перехід від K' - до K -системи. За законами перетворення полів

$$E_{2\parallel} = E'_{2\parallel} = 0; E_{2\perp} = E'_{2\perp} / (1 - v_1^2/c^2)^{1/2};$$

$$\mathbf{B}_{2\parallel} = \mathbf{B}'_{2\parallel} = 0; \mathbf{B}_{2\perp} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{E}'_2] / (c^2(1 - v_1^2/c^2)^{1/2}).$$

Тут враховано, що $\mathbf{B}'_{2\perp} = 0$, а $\mathbf{E}'_2 = \mathbf{E}'_{2\perp}$. Вираз для $\mathbf{B}_{2\perp}$ можна подати за тими самими законами як

$$\mathbf{B}_{2\perp} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{E}_{2\perp}] / c^2. \quad (2)$$

Підставимо рівняння (2) у вираз для сили

$$\mathbf{F}_{12} = q_2(\mathbf{E}_2 + [\mathbf{v}_2[\mathbf{v}_1 \mathbf{E}_2]]) = q_2(\mathbf{E}_2(1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2/c^2) + \mathbf{v}_1(\mathbf{v}_2 \mathbf{E}_2)/c^2).$$

Оскільки $\mathbf{v}_1 \uparrow \uparrow \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{E}_2$, $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{E}_2$, то одержимо $\mathbf{F}_{12} = q_2 \mathbf{E}_2(1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2/c^2)$, а за модулем

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2 (1 - v_1 v_2 / c^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2 \sqrt{1 - v_1^2 / c^2}}.$$

3.407. $B = \mu_0 n I / \sqrt{1 - v^2 / c^2} = 0,25 \text{ мТл}$; $E = \mu_0 n I v / \sqrt{1 - v^2 / c^2} = 7,57 \text{ кВ/м}$, перпендикулярно до соленоїда.

3.408. $E = \mu_0 I v / (2\pi r \sqrt{1 - v^2 / c^2}) = 30 \text{ мкВ/м}$; $B = \mu_0 I / (2\pi r \sqrt{1 - v^2 / c^2}) = 10 \text{ мкТл}$.

3.409. а) $v = Bc^2 / E = 7,5 \cdot 10^7 \text{ м/с}$; б) за заданих E і B не існує такої системи, в якій поле було б чисто магнітним.

3.410. У системі відліку, що пов'язана з магнітом, напруженість електричного поля $\mathbf{E} = 0$. Виникнення цього поля та електричного струму в провіднику AVB пояснюється релятивістським ефектом перетворення полів, унаслідок чого електричне поле виникає в лабораторній системі відліку. Проте в чистому вигляді цей ефект спостерігається під час рівномірного поступального руху магніту, якщо зв'язана з магнітом система буде інерціальною.

ДО РОЗДІЛУ 4

4.2. $T_a = 8 \text{ с}$, $v_a = 0,125 \text{ Гц}$, $A_a = 3 \text{ м}$, $\varphi_a = 0$, $x_a = -3 \text{ м}$; $T_b = 600 \text{ с}$, $v_b = 1,67 \text{ мГц}$, $A_b = 100 \text{ м}$, $\varphi_b = \pi/2$, $x_b = -50 \text{ м}$; $T_c = 120 \text{ с}$, $v_c = 8,33 \text{ мГц}$, $A_c = 20 \text{ м}$, $\varphi_c = (3/2)\pi$, $x_c = -20 \text{ м}$; $x = 0,2 \sin 2,5 \pi t$, м; $x_1 = 0,2 \sin 2,5 \pi t$, м; $x_2 = 0,1 \sin 5 \pi t$, м; $x_3 = 0,3 \sin (5 \pi t/6)$, м.

4.3. а) $x = 2 \cos (\pi t/2 - \pi/4)$, см; б) $x = 2 \cos (\pi t/2 + \pi/4)$, см.

4.4. $\omega = 1,57 \text{ с}^{-1}$, $a_{\max} = 12,32 \text{ см/с}^2$.

4.5. $A = 2 \text{ см}$.

4.6. $A = 4,15 \text{ см}$; $T = 1,4 \text{ с}$; $\omega t_1 + \varphi = \pm 0,09 \pi \pm 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$); $v_{\max} = 18,56 \text{ см/с}$; $a_{\max} = 83 \text{ см/с}^2$; а) $\Delta t = T/12 = 0,12 \text{ с}$; б) $\Delta t = T/6 = 0,24 \text{ с}$.

$$4.7. |\mathbf{v}_1| = \sqrt{A^2 \omega^2 - \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2} = 26 \text{ см/с}.$$

4.8. а) $\varphi = \pi/3 \text{ рад}$; б) $\varphi = 5 \pi/3 \text{ рад}$; в) $\varphi = 3 \pi/4 \text{ рад}$; г) $\varphi = 7 \pi/6 \text{ рад}$.

4.9. а) $x = 7,8 \sin (10t + 0,47 \pi)$, см; б) $x = 4,47 \cos (2t - 0,148 \pi)$, см.

4.10. $v = -2,23 A \omega$; $a = -2,87 A \omega^2$; $v_{\max} = 2,73 A \omega$. Врахувати, що в момент часу, коли швидкість стає максимальною, прискорення дорівнює нулеві.

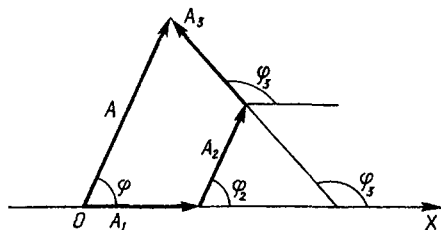


Рис. В.4.1

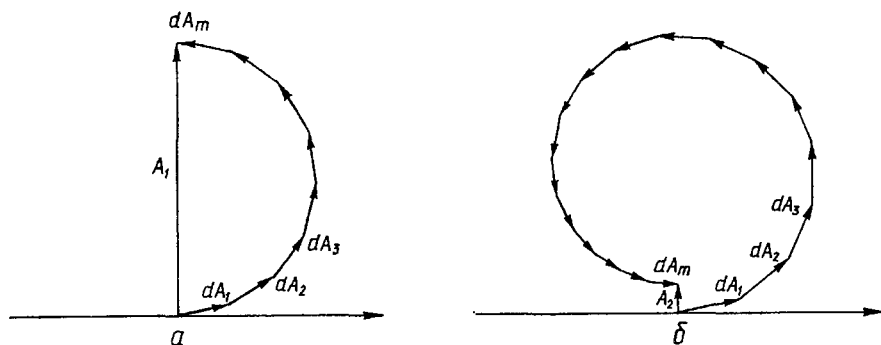


Рис. В.4.2

4.11. а) $x = 10 \cos(\pi t + 0,64)$; б) $x = ((A_1 - A_3)^2 + A_2^2)^{\frac{1}{2}} \cos \omega t$; в) $x = 10 \cos(\omega t + \pi/3)$ (рис. В.4.1).

4.12. Результирує коливання зображується векторами: а) A_1 , що замикає ламану лінію, утворену векторами $dA_1, \dots, dA_m$ (рис. В.4.2, а); б) A_2 (рис. В.4.2, б).

4.13. Експоненціальна функція (4.1.3) має прості властивості, тому обчислення спрощуються. Реальні значення фізичних величин становлять дійсну або уявну частину (4.1.3). Комплексна амплітуда $\hat{A} = Ae^{i\varphi}$ зображується у вигляді вектора, який проведено з початку координат. Внаслідок множника $e^{i\omega t}$ комплексний вектор обертається навколо початку координат проти руху стрілки годинника з кутовою швидкістю ω . Додаються комплексні числа за правилом паралелограма, тобто додавання гармонічних коливань зводиться до додавання векторів.

4.14. На рис. 4.3 зображено биття, для якого $x = 2A (\cos(\omega_1 - \omega_2)t/2)(\cos(\omega_1 + \omega_2)t/2)$. Тут $(\omega_1 + \omega_2)/2 = \langle \omega \rangle$ — середня циклічна частота коливань, $\omega_1 - \omega_2 = \omega_6$ — циклічна частота биття. З рисунка видно, що: $T_6 \langle T \rangle = \langle \omega \rangle / \omega_6 = 10$; $\omega_1 = 210 \pi$; $\omega_2 = 190 \pi$; $A_1 = A_2 = A = 2,5$ см.

4.15. а) $y = 2x/5$; б) $x^2/4 + y^2 = 1$; рух за рухом стрілки годинника. Для визначення напрямку руху можна визначити координати точки у два близьких послідовних моменти часу; в) $y = -2(A_2/A_1)x^2 + A_2$, $y = -x^2/2 + 1$.

4.16. а) $x = a \cos(\omega t + \varphi)$, $y = a \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$; б) $x = a \cos(\omega t + \varphi)$, $y = a \cos(\omega t + \varphi + 3\pi/2)$.

4.17. $T = 0,5$ с.

4.18. $y = A - \frac{2x^2}{A}$; $v = A\omega \cos \omega t \sqrt{1 + 16 \sin^2 \omega t}$; $a = A\omega^2 \sqrt{\sin^2 \omega t + 16 \cos^2 2\omega t}$.

4.19. Коло; а) еліпс; б) інші фігури Ліссажу.

4.21. $F_{\max} = 0,02$ Н; $W_{\kappa \max} = 1$ мДж.

4.22. $F = 0,55$ мН; $E = 55$ мкДж.

4.23. $A = 0,045$ м; $x = 0,045 \cos \pi t$, м; $F_{\max} = 4,44$ мН.

4.24. $t_1 = 0,21$ с; $\omega t_1 = 0,42$ рад.

4.25. Гармонічні коливання, $\ddot{x} + 100x - 2 = 0$; $x_0 = 0,02$ м; $x = 0,02(1 + 2 \sin 10t)$, м; $E = 0,8$ мДж; $U = 0,67$ мДж.

4.26. $F = 1,2 \cos 20 \pi t$, Н; $E = 1,8 \cdot 10^{-2}$ Дж; $F = 0,8$ Н; $\frac{U}{W_{\kappa}} = 0,8$.

4.27. Використовуючи формули (4.2.7), (4.2.8) і тотожності $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ і $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, обчислюємо середнє за період значення кінетичної W_{κ} та потенціальної U енергій за формулою $\langle W_{\kappa} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T W_{\kappa}(t) dt$. Маємо важливу властивість гармонічних коливань $\langle W_{\kappa} \rangle = \langle U \rangle = \frac{E}{2}$.

4.28. Рівняння руху кульки $x = A \cos \omega t$, де $A = l \sin \alpha$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Максимальна швидкість $\dot{x}_{\max} = A\omega = 0,31$ м/с. Застосовуючи закон збереження енергії, маємо $\dot{x}_{\max} = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = 0,31$ м/с.

4.29. $q = 4\sqrt{(\eta^2 - 1)\pi\epsilon_0 mg} = 4$ мкКл.

4.30. $F = mg \cos(\alpha_m \cos \omega t) + m l \omega^2 \alpha_m^2 \sin^2 \omega t$.

4.31. Годинник відстане приблизно на 14 с.

4.32. $t = 34$ °С.

4.33. $T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}} = 1,6$ с.

4.34. $x_{1,2} = \left(1 \pm \sqrt{1 - l^2 / (3l_0^2)}\right) \frac{l_0}{2}$; $x_1 = 10$ см; $x_2 = 30$ см.

4.35. $T_1 = T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}} = 1,35$ с.

4.36. $\Delta v = 0,13$ Гц.

$$4.37. \text{ а) } T = \pi \sqrt{\frac{2l(m_1 + m_2)}{g(m_2 - m_1)}}; \text{ б) } T = 2\pi \sqrt{\frac{l(3m_1 + 3m_2 + m)}{6g(m_2 - m_1)}}.$$

4.38. Центр мас опускатиметься, тому період коливань поступово зростатиме.

4.39. Збільшиться.

4.40. Рівняння руху бруска $m\ddot{x} = -kx$, де зміщення x відраховується від положення рівноваги, має розв'язок $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. З початкових умов визначаємо A і φ :

$$x(0) = A \cos \varphi = x_0; \dot{x}(0) = -A\omega_0 \sin \varphi = 0, \text{ звідси } \varphi = 0, A = x_0, x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t = 0,01 \cos 8t, \text{ м.}$$

$$4.41. \text{ Порівняно з розв'язанням задачі 4.40 такі зміни: } (m + M)\ddot{x} = -kx, x(0) = A \cos \varphi = 0; \varphi = 3\pi/2, \dot{x} = A\omega_0 = \frac{m}{m + M}v, x = \frac{mv}{M + m} \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t = 0,11 \sin 5,47t.$$

$$4.42. T = 2\pi \sqrt{\Delta x / g} = 0,6 \text{ с.}$$

$$4.43. \Delta x = 6,2 \text{ см.}$$

$$4.44. A = \sqrt{\frac{2E\Delta x}{mg}} = 1,43 \text{ см.}$$

$$4.45. t = (2n + 1)\frac{T}{8}, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$4.46. x = 0,16 \cos(20t - \pi/3), \text{ м.}$$

$$4.47. T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

$$4.48. \text{ а) } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}; \text{ б) } T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}.$$

$$4.49. v = \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

$$4.50. T = \pi \sqrt{\frac{ml}{F}} \approx 0,16 \text{ с.}$$

$$4.51. T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\rho g S}} = 0,77 \text{ с.}$$

4.52. Нехай тіло масою m розміщується на відстані x від центра Землі. На тіло діє сила тяжіння з боку кулі радіуса x $F = G \frac{mM}{x^2}$, де M – маса кулі, $M = \frac{4}{3}\pi \rho x^3$; ρ –

середня густина Землі, $\rho = \frac{3M_3}{4\pi R_3^3}$. Сила тяжіння набуває вигляду $F = g \frac{m}{R_3} x$. Окремо

доводиться (див. відповідь на задачу 1.110), що сила тяжіння з боку кульового шару, товщина якого $R_3 - x$, дорівнює нулеві. За другим законом Ньютона одержуємо дифе-

$$\text{ренціальне рівняння коливань тіла } m\ddot{x} = -g \frac{m}{R_3} x, \text{ звідки } T = 2\pi \sqrt{\frac{R_3}{g}} = 84 \text{ хв.}$$

4.53. $T = 2\pi\sqrt{h/(g(\rho_s/\rho_l - 1))} = 60,2$ с, де ρ_s , ρ_l – відповідно густини води і льоду.

4.54. $T = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2\varphi}{2M}} \approx 2$ с.

4.55. $T = 3$ с.

4.56. Напруженість електричного поля нескінченного плоского шару $E = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$, де x –

відстань від його середини до точки. Рівняння руху електрона $\ddot{x} + \frac{e\rho}{m\epsilon_0}x = 0$, звідки

$$\omega = \sqrt{\frac{e\rho}{m\epsilon_0}} = 3,7 \cdot 10^8 \text{ Гц.}$$

4.57. $v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_e E}{l}} = 2,4$ кГц.

4.58. $B = \frac{4\pi^2 l}{T^2 i S} = 8,2$ мТл.

4.59. Будемо вважати процес зміни тиску адіабатним: $pV^\gamma = \text{const}$. Після логарифмування та диференціювання одержимо:

$$dp = -\gamma p \frac{dV}{V} = -\gamma p \frac{Sx}{V},$$

де x – зміщення повітря в горлі. Повітря, густина якого ρ , має масу в горлі $\rho S l$. Сила, яка діє на повітря в горлі, $F = -\gamma p S^2 x / V$ є квазіпружною, тобто повітря у великому об'ємі діє подібно до пружини. Рівняння руху повітря в горлі

$$\ddot{x} + \frac{\gamma p S}{V \rho l} x = 0,$$

звідки

$$v_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma p S}{V \rho l}} = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{V l}} = 112 \text{ Гц,}$$

де враховано, що швидкість звуку

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}.$$

4.60. Кулька коливатиметься навколо нерухомої точки, яка лежить на відстані l_1 від неї. З умови нерухомості центра мас системи $m_2 l_1 = m_1 (l - l_1)$. Тоді

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 l}{g(m_1 + m_2)}}.$$

4.61. $f = 4\pi^2 A / (gT^2) = 0,4$.

4.62. $A\omega^2 > g$.

4.63. Якщо система здійснює малі коливання навколо положення рівноваги $x = 0$, то її потенціальну енергію $U(x)$ можна подати у вигляді ряду

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + (U''(0)x^2)/2 + \dots$$

Оскільки в положенні рівноваги $U(x)$ є мінімальною, то $U'(0) = 0$. Тоді

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -U''(0)x, \text{ тобто коефіцієнт квазіпружної сили дорівнює } U''(0), \text{ а}$$

власна частота $\omega = \sqrt{U''(0)/m}$. Отже, $T = 2\pi\sqrt{m/bk^2}$.

4.64. $\omega = \sqrt{2Da^2/m} = 5,4 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$. Див. розв'язання задачі 4.63.

4.65. Розглянемо поведінку маятника в рухомій системі відліку. Внаслідок прискореного руху системи виникає сила інерції, яка відхиляє маятник у бік, протилежний прискоренню. У стані рівноваги сила інерції зрівноважується силами тяжіння й натягу нитки (рис. В.4.3).

а) Відхилимо тепер маятник на малий кут φ від положення рівноваги. Момент, який відносно точки підвісу O створює рівнодійна сила $\mathbf{R}$, чисельно дорівнює $Rl \sin \varphi \approx Rl\varphi$.

За другим законом Ньютона з урахуванням напрямів кута й моменту $I\ddot{\varphi} = -Rl\varphi$. Тоді одержимо:

$$T = 2\pi\sqrt{I/\sqrt{a^2 + g^2}} \approx 2 \text{ с.}$$

б) Як видно з рис. В.4.3, $\mathbf{R} = m\mathbf{g} + (-m\mathbf{a})$, тому $|\mathbf{R}| = m|\mathbf{g} - \mathbf{a}|$.

У загальному випадку кут α між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{g}$ довільний, тоді з теореми косинусів

$$|\mathbf{g} - \mathbf{a}| = \sqrt{g^2 + a^2 - 2ag \cos \alpha},$$

$$T = 2\pi\sqrt{I/|\mathbf{g} - \mathbf{a}|} \approx 1,9 \text{ с.}$$

в) Для $\alpha = \pi$ $T = 2\pi\sqrt{I/(g+a)} \approx 1,8 \text{ с.}$

4.66. Розглянемо рух кулі в неінерціальній системі відліку, зв'язаній зі стрижнем. У цій системі куля перебуває в рівновазі: відцентрова сила інерції $m\omega^2 r$ зрівноважується пружною силою деформації пружини. Сили тяжіння, нормальної реакції і коріолісова (тертя не враховується) не впливають на характер руху кулі, оскільки напрямлені перпендикулярно до стрижня. Якщо відраховувати зміщення x від положення рівноваги, то у разі зміщення від центра маємо: $m\ddot{x} = m\omega^2(r+x) - kx$, звідки одержимо відповідь $T = 2\pi\sqrt{k/m - \omega^2}$. Коливання неможливі, якщо $k/m < \omega^2$.

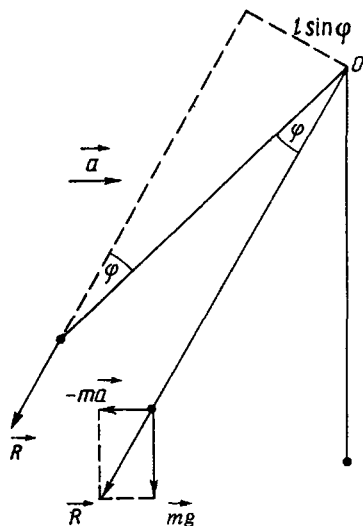


Рис. В.4.3

4.67. Виключаючи з рівнянь $\theta = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$ і $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} = -\theta_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$ час, одержуємо рівняння параметричної лінії, по якій рухається точка на фазовій площині: $\theta^2 + (\dot{\theta}/\omega_0)^2 = \theta_{\max}^2$ (рис. В. 4.4). Отримаємо коло, радіус якого дорівнює амплітуді $\theta_{\max}$.

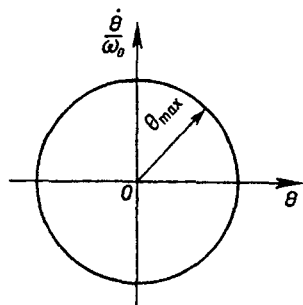


Рис. В.4.4

Сім'єю concentричних кіл із центром у початку координат. Періоди обертання точок, які зображують стан, однакові для всіх кіл.

4.68. Цю задачу зручніше розв'язати за допомогою загального методу (4.2.10), (4.2.11).

а) $E = W_k + U = \frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const}$. З рис. 4.15 $h = l(1 - \cos \varphi)$. Тут $l = R - r$. Для малих кутів $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Тоді $h = l \varphi^2/2 = x^2/(2l)$. Також для малих кутів маємо $v = \dot{x}$. Одержуємо

$$E = \frac{m(\dot{x})^2}{2} + \frac{mgx^2}{2(R-r)} = \text{const}.$$

Згідно з (4.2.11) $\omega_0 = \sqrt{g/(R-r)}$.

б) $E = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + mgh = \text{const}$; $I = \frac{2}{5}mr^2$. Згідно з (4.2.11) $\omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$.

4.69. $T = 2\pi\sqrt{3m/(2k)}$.

4.70. За законом збереження механічної енергії $E = \frac{mv^2}{2} + mgh + \frac{kx^2}{2} = \text{const}$, або

$$\frac{m(\dot{x})^2}{2} + mg\frac{x^2}{2l} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}. \text{ Тут враховано, що } h = x^2/(2l) \text{ (див. відповідь на задачу}$$

4.68, а). Звідси згідно з (4.2.11) $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m}}$.

4.71. За законом збереження механічної енергії $E = \frac{I\omega^2}{2} + (m_1 + m_2)g\frac{x^2}{2l} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}$, де I – момент інерції маятника відносно точки підвісу; x – зміщення центра мас; l – відстань від точки підвісу маятника до центра мас. Оскільки $\omega = \dot{\varphi}$, $x = l\varphi$, одержуємо

$$E = \frac{I(\dot{\varphi})^2}{2} + ((m_1 + m_2)gl + kl^2)\frac{\varphi^2}{2}.$$

Звідси згідно з (4.2.11)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)gl + kl^2}{I}} = 4,61 \text{ с}^{-1}.$$

4.72. При горизонтальному положенні стрижня пружина вже розтягнута на відстань $x_0 = mg/(2k)$, яка визначається з умови рівноваги моментів сили тяжіння і пружної сили відносно точки O . Якщо початком відліку потенціальної енергії U стрижня вважати положення рівноваги, то у разі малого зміщення правого кінця стрижня на відстань x униз його потенціальна енергія $U = -mg\frac{x}{2}$. Тоді повна механічна енергія

$$E = -mg\frac{x}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{k(x+x_0)^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2} = \text{const.}$$

Після перетворень маємо:

$$\frac{I(\dot{\phi})^2}{2} + \frac{kl^2\phi^2}{2} = \text{const},$$

звідки за (4.2.11)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{kl^2}{I}} = \sqrt{\frac{3k}{m}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}.$$

4.73. Враховуючи, що в положенні рівноваги пружина дещо розтягнута на відстань $x_0 = mg/k$, повна механічна енергія системи в разі малого зміщення тягарця вниз на x буде незмінною:

$$E = -mgh + \frac{m}{2}(r\dot{\phi})^2 + \frac{I(\dot{\phi})^2}{2} + \frac{k(x_0+x)^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2} = \text{const.}$$

Звідси згідно з (4.2.11)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + I/r^2}{k}}.$$

4.74. $A = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2hk}{mg}} = 7,5 \text{ см}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,3 \text{ с.}$ Скористатися методом, наведе-

ним у розв'язках задач 4.68–4.73, і формулами (4.2.10) та (4.2.11).

4.75. Гармонічними можуть бути не тільки малі коливання, а й будь-які, якщо виконується умова (4.2.10).

4.76. Система зв'язаних осциляторів має два ступені вільності. Позначимо координати тіл через x_1 і x_2 (рис. В.4.5). У положенні рівноваги $x_{20} - x_{10} = l_0$ – довжина нерозтягнутої пружини. Тоді $x_2 - x_1 - l_0$ є видовженням пружини. Рівняння руху тіл з урахуванням напрямів поворотальних сил відносно осі Ox мають вигляд:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0), \\ m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0). \end{cases} \quad (1)$$

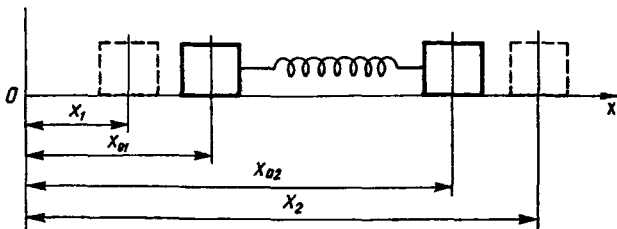


Рис. В.4.5

Звідси

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0. \quad (2)$$

Двічі зінтегрувавши, одержимо

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = C_1, \quad (3)$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = C_1 t + C_2. \quad (4)$$

Сталі інтегрування визначаються з початкових умов. Оскільки швидкості при $t = 0$ дорівнювали нулеві, то маємо $C_1 = 0$. Тоді

$$m_1 x_{10} + m_2 x_{20} = C_2. \quad (5)$$

Розглянемо будь-яке з рівнянь (1) і за допомогою (4) і (5) виключимо з нього другу координату. Після перетворень одержимо, наприклад для x_2 :

$$\ddot{x}_2 = -k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} x_2 + k x_{20} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}. \quad (6)$$

Рівняння (6) ідентично рівнянню для гармонічного осцилятора з так званою зведеною масою

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

за винятком постійного члена. Через те, що похідна від константи дорівнює нулеві, розв'язок (6) відрізнятиметься постійним доданком, що не змінить частоти. Отже,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

$$4.77. T = 2\pi \sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}.$$

$$4.78. \omega_0 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = 7,2 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}, \text{ інфрачервоний.}$$

$$4.79. \text{ Мода 1: } x_1(t) = x_2(t), \text{ маси зміщуються в один бік, } \omega_1 = \sqrt{k/m} = 8,2 \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{Мода 2: } x_1(t) = -x_2(t), \text{ маси рухаються в протилежні боки, } \omega_2 = \sqrt{3k/m} = 14,1 \text{ с}^{-1}.$$

В к а з і в к а. Записати рівняння руху кожної маси, враховуючи, що сили, які діють на маси, пропорційні зміні довжин відповідних пружин. Розв'язати систему двох лінійних рівнянь.

4.80. Мода 1: маятники відхиляються на однакові кути в один бік, пружина не деформується, пружні сили не виникають, $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Мода 2: маятники відхиляються на однакові кути в різні боки. Якщо кожний відхиляється на однакову відстань x , то деформація пружини дорівнює $2x$ і повна механічна енергія системи $E = 2mg \frac{x^2}{2l} + 2m \frac{(\dot{x})^2}{2} + \frac{k(2x)^2}{2} = \text{const}$. За методом (4.2.10) $T = 2\pi\sqrt{m/(2k + mg/l)}$.

Ні, не обмінюватимуться. Чотири моди.

4.82. $r = 2,1 \text{ кг/с}$.

4.83. У 8 разів.

4.84. $N = 35$.

4.85. $\delta = 2.3 \cdot 10^{-3}$.

4.86. $Q \approx \pi \nu_0 \tau = 1,88 \cdot 10^5$.

4.87. $Q = \sqrt{mk}/r = 20$.

4.88. $x = 0,1e^{-0,2t} \cos 8\pi t$, м.

4.89. $\beta = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$; $\delta = 10^{-2}$; $Q = 314$; $-\frac{\Delta E}{E} = 2 \cdot 10^{-2}$.

4.90. $\omega_0 = \omega\sqrt{1 + (1/4Q^2)} = 152 \text{ с}^{-1}$.

4.91. У 64 рази, $\beta = 0,3$.

4.92. $N = \frac{1}{2\delta} \ln n = 87$; $\Delta t = N\sqrt{m(4\pi^2 + \delta^2)/k} = 1,44 \text{ хв}$.

4.93. Зміщення тягарця від положення рівноваги $x = 2,22 e^{-4,36t} \cos(9t - 0,45)$, см.

4.94. Загальний шлях, який пройдено до зупинки, $s = x_{m0} + 2x_{m1} + 2x_{m2} + 2x_{m3} + \dots$, де x_{m0} – початкове відхилення, інші індекси відповідають максимальним відхиленням у той (парні індекси) чи інший (непарні) бік. Кожна відстань, крім початкової, проходить двічі – туди і назад. Із (4.3.2) маємо:

$$S = A_0 \cos \alpha + 2A_0 e^{-\beta T/2} \cos \alpha + 2A_0 e^{-\beta T} \cos \alpha + 2A_0 e^{-3\beta T/2} \cos \alpha + \dots = \\ = A_0 \cos \alpha + 2A_0 (e^{-\delta/2} + e^{-\delta} + e^{-3\delta/2} + \dots) \cos \alpha.$$

У дужках стоїть сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії зі знаменником $q = e^{-\delta/2}$, яка дорівнює $e^{-\delta/2}/(1 - e^{-\delta/2})$.

Тоді

$$s = A_0 \frac{1 + e^{-\delta/2}}{1 - e^{-\delta/2}} \cos \alpha.$$

Використовуючи функцію гіперболического котангенса, отримуємо:

$$s = A_0 \cos \alpha \operatorname{cth} \frac{\delta}{4} = 3,12 \text{ см}.$$

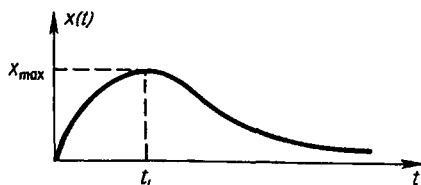


Рис. В.4.6

4.95. $\eta = -\frac{\Delta E}{E} = 95,2\%$.

4.96. Будемо шукати розв'язок рівняння (4.3.1) у вигляді $x = ue^{-\beta t}$. З умов задачі випливає, що $\beta = \omega_0$, $r = 2\sqrt{mk}$. Це випадок аперіодичного руху – так званого критичного згасання. Підставивши ці вирази в диференціальне рівняння, одержимо $\ddot{u} = 0$. Розв'язок останнього має вигляд $u = A + Bt$. Тоді $x = (A + Bt)e^{-\beta t}$, де A і B – сталі, що визначаються початковими умовами. Якщо $t = 0$, то $x = 0$, $\dot{x} = v_0$, звідки $A = 0$, $B = v_0$. Розв'язок рівняння руху набуває вигляду $x = v_0 t e^{-\beta t}$. Досягши максимального зміщення, тіло зупиниться ($\dot{x} = 0$), після чого рухатиметься до положення рівноваги: $\dot{x} = v_0 e^{-\beta t}(1 - \beta t)$, звідки $t_1 = 1/\beta = 2m/r$. У момент часу t_1 зміщення $x_{\max} = v_0/(\beta e) \approx 3,7$ см. Графік зміщення зображено на рис. В.4.6.

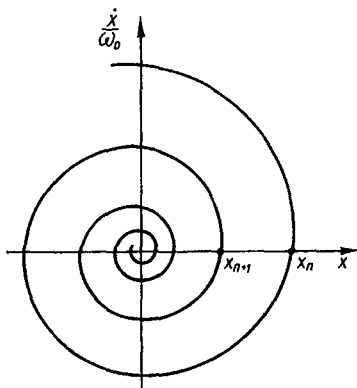


Рис. В.4.7

4.97. У цьому режимі повернення рухомої частини в положення рівноваги відбувається за мінімальний час.

4.98. Фазовою траєкторією згасаючого осцилятора є спіраль, що скручується. Вигляд траєкторії визначається логарифмічним декрементом згасання δ або добротністю: $Q = \pi/\delta$. Крок спіралі (рис. В.4.7) $x_n - x_{n+1} = A - Ae^{-\delta} = A\delta$, якщо $\delta \ll 1$, де A – амплітуда.

4.99. $\Delta x \approx A_0 \delta \exp(-\delta t/T) = 36,79$ мкм.

4.100. $\Delta t/T = 10^6$; $x(t)/(x(t + \Delta t)) = 2,2 \cdot 10^4$.

4.101. а) Нехай рівняння коливань точки має вигляд $x = x_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Тоді швидкість $\dot{x} = -x_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$. У момент часу $t = 0$

$$\begin{cases} x_0 = x_{\max} \cos \varphi, \\ 0 = -x_{\max} \omega_0 \sin \varphi, \end{cases}$$

звідки $\varphi = 0$ і $x_{\max} = x_0$.

У положенні рівноваги $x_{\text{рівн}} = x_{\max} \cos \omega_0 t = 0$. Остаточного маємо $t = \frac{\pi}{2\omega_0}$.

б) За аналогією для згасаючих коливань маємо

$$\begin{cases} x = x_{\max} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \\ \dot{x} = -x_{\max} \beta e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) - x_{\max} \omega e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi); \end{cases}$$

з урахуванням початкових умов

$$\begin{cases} x_0 = x_{\max} \cos \varphi, \\ 0 = \beta \cos \varphi + \omega \sin \varphi, \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\beta}{\omega}; \quad x_{\max} = x_0 \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega^2}}.$$

Рівняння руху матиме вигляд

$$x = x_0 \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega^2}} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \operatorname{arctg}(-\frac{\beta}{\omega})).$$

Прирівнюючи x до нуля, визначаємо час, за який точка переходить у положення рівноваги: $t = \frac{\pi}{2\omega} (1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\omega})$.

В обох випадках час переходу в положення рівноваги не залежить від початкового зміщення. Ця особливість малих коливань називається ізохронністю.

4.102. $x = 0,52 \cos(90t - 0,09)$, см; $A = 0,53$ см, $A_{\text{рез}} = 5$ см.

4.103. $\nu_{\text{рез}} \approx 1,75$ Гц.

4.104. $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2} = 224 \text{ с}^{-1}$.

4.105. $\omega_0 = \sqrt{2\omega^2 - \omega_{\text{рез}}^2} \approx 101 \text{ с}^{-1}$; $Q = \frac{1}{2\sqrt{1 - (\omega_{\text{рез}}/\omega)^2}} = 3,55$.

4.106. Якщо частота змушувальної сили $\nu = \nu/l$ буде близькою до власної частоти коливань $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}$, тоді $l = 2\pi \nu \sqrt{\frac{h}{g}} = 0,63$ м.

4.107. $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}} \approx 10 \text{ с}^{-1}$; $A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{r} \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0,2$ м.

4.108. $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = 0,5$ Гц; $\nu_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{r^2}{2m^2}} = 0,45$ Гц;

$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{r\sqrt{(g/l) - (r^2/(4m^2))}} = 3,37$ см.

4.109. $x = -0,13e^{-0,5t} \sin(8,93t + 0,8) + 0,22 \cos(8t - 0,47)$, м; $\tau_0 = \frac{2m \ln \eta}{r} = 9,2$ с.

4.110. $A_{\text{рез}}/A_{\text{статич}} = \omega_0/(2\beta) = Q$.

4.111. $F_{\text{т max}} = 2\beta m A_{\text{рез}} \omega_0 \approx 10^{-3}$ Н. Визначити коефіцієнт згасання β , скориставшись формулою (4.4.6), і порівняти його з власною частотою коливань ω_0 . У разі $\beta \ll \omega_0$ формули спрощуються.

4.112. $F = 0,2 \cos 10\pi t$, Н. Зміщення відстає від сили за фазою на $\varphi = 70^\circ$; $T_0 = 0,2$ с.

4.113. а) $\langle P \rangle = \frac{F_0^2 \omega^2 \beta / m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} = 0,002$ Вт; б) $\langle P \rangle_{\text{рез}} = \frac{F_0^2}{4\beta m} = 0,25$ Вт.

В к а з і в к а: $\langle P \rangle = \langle F\dot{x} \rangle$, де F і $\dot{x}$ визначаються з формул (4.4.1) – (4.4.3). Враху-
вати, що $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = \langle \frac{1}{2} \sin 2\omega t \rangle = 0$ та $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$.

4.114. У резонансі фаза змущувальної сили збігається з фазою швидкості, сила діє
в напрямку руху.

4.115. Коливання z, δ, e – вимушені; $a, б, в, е, ж, з$ – автоколивання.

4.116. $l_n = g/(n^2\omega^2)$, де $n = 1, 2, 3, \dots$, $\omega = 1,57 \text{ с}^{-1}$; $l_1 = 3,98 \text{ м}$, $l_2 = 0,99 \text{ м}$, $l_3 =$
 $= 0,44 \text{ м}, \dots$

4.117. $x = 1,27 \sin \pi t + 0,42 \sin 3\pi t + 0,26 \sin 5\pi t$ (рис. В.4.8).

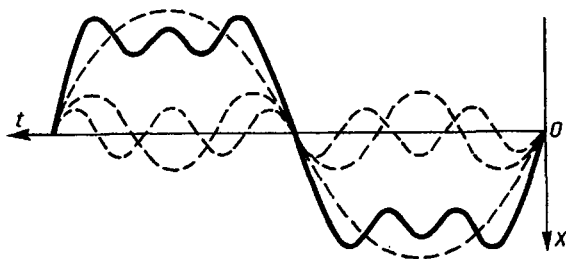


Рис. В.4.8

4.118. При розгойдуванні незгасаючого осцилятора періодичними поштовхами
зображувальна точка на фазовій площині зміщується по вертикалі на коло іншого

радіуса на відстань $\int_{\tau}^{t+\tau} f(t)dt/(m\omega_0)$, де $f(t)$ – зовнішня сила, що діє на осцилятор;

τ – тривалість поштовху.

а) $T = T_0 + \Delta$ (рис. В.4.9, а). Перший поштовх переводить точку з початку коор-
динат у точку A_1 , причому значення OA_1 пропорційне імпульсові. Далі відбувається
гармонічне коливання з частотою ω_0 . Зображувальна точка рухається по колу. Наступ-
ний поштовх застигне осцилятор після того, як він зробить одне повне коливання,
наприклад у точці B_1 . Ордината стрибкоподібно зростає. Точка знову йде по колу.
Кути $A_1OB_1, A_2OB_2, A_3OB_3, \dots$ – однакові між собою, тому що кутова швидкість руху
 ω_0 зображувальної точки не залежить від амплітуди. Внаслідок цього настає момент,
коли поштовхи почнуть зменшувати амплітуду коливаль. Після того, як вона змен-
шиться майже до нуля, поштовхи знову збільшуватимуть її. Виникають биття.

б) $T = T_0 - \Delta$ (рис. В.4.9, б). Ситуація подібна до п. а.

в) $T = T_0$ (рис. В.4.9, в). Амплітуда стає як завжди великою – спостерігається
явище резонансу.

г) $T = nT_0$. Резонанс настає повільніше.

д) $T = T_0/4$. Виникають биття, як у п. а, б.

е) $T = T_0/2$. Коливання з постійною амплітудою чергуються через $T_0/2$ з нерухо-
вим станом точки.

4.119. $f(x - vt)$, де $f(x)$ – функція, що описує форму імпульсу при $t = 0$.

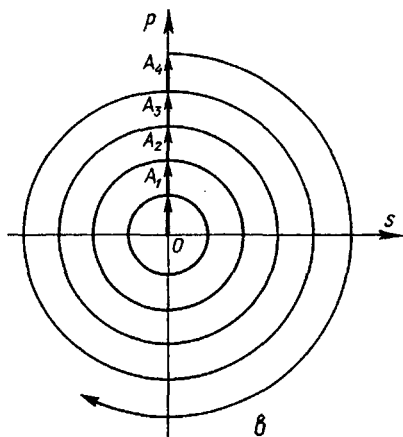
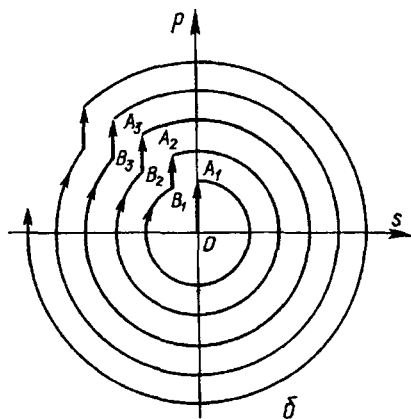
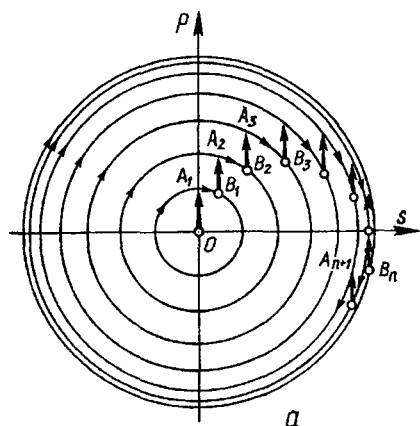


Рис. В.4.9

4.120. Описує плоску хвилю, що поширюється вздовж осі Ox зі швидкістю $v = a/b$.

4.121. Функції a , b , δ — u .

4.122. Усі частинки середовища здійснюють коливання навколо своїх положень рівноваги. У всіх точках площини $x = \text{const}$ частинки коливаються в однаковій фазі й мають однакове зміщення. Може збігатися в поперечній хвилі.

4.123. $\lambda_n = 3,31$ мкм; $\lambda_a = 14$ мкм; $\lambda_{\text{ст}} = 61$ мкм.

4.125. $\xi = 3$ см.

4.126. $\lambda = 8$ м; $\xi(x, t) = 0,1 \cos 5\pi(t - \frac{x}{20})$, м;

$\xi_1 = 0$; $\xi_2 = -0,07$ м.

4.127. $\xi_{\text{max}} = 64,15$ мкм.

4.128. $\xi = 0,5 \sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{18}x + \frac{7}{9}\pi\right)$, м.

4.129. $v = 1,7$ км/с; $\xi = 30$ мкм, $\dot{\xi} = -5,1$ м/с, $\ddot{\xi} = -9,7 \cdot 10^7$ м/с²; $\dot{\xi}_{\text{max}} = 54$ м/с.

4.130. $\varepsilon = 1,93 \cdot 10^{-4}$.

4.131. $\lambda = 123,67$ м; а) $x_0 = 3,71 \left(2 - \frac{n}{60}\right) \cdot 10^3$ м, де $n = 0, 1, 2, \dots, 120$;

б) $x_{\text{max}} = 3,71 \left(2 - \frac{2n+1}{120}\right) \cdot 10^3$ м, де $n = 0, 1, 2, \dots, 119$.

4.132. Використавши закон Гука в диференціальній формі $\sigma = E d\xi/dx$, одержимо $F_{\max} = \pi^2 d^2 \xi_0 \sqrt{\rho E} / (2T) = 3,11 \text{ мН}$.

4.133. $v_{\text{ст}} = 5,05 \text{ км/с}$; $v_{\text{мд}} = 3,54 \text{ км/с}$; $v_{\text{ал}} = 5,05 \text{ км/с}$.

4.134. $n = \sqrt{E/G} = 1,64$.

4.135. $F = \pi d^2 v \sqrt{\rho E} / 2 = 90,9 \text{ МН}$; $t = 2m / (\pi d^2 \sqrt{\rho E}) = 49,28 \text{ мкс}$.

4.136. $v_{\text{гл}} = 1,9 \text{ км/с}$.

4.137. $\langle \Phi \rangle = 2\pi^2 v^2 A^2 \sqrt{F_{\text{н}} \mu} = 62,36 \text{ Вт}$.

4.138. $\Phi = \frac{1}{2} \xi_{\max}^2 S \sqrt{\rho E} = 5,81 \text{ Вт}$.

4.139. $|\sigma| = \sqrt{wE} = 5,48 \text{ МПа}$.

4.140. $A = 47 \text{ мкм}$.

4.141. $v_r = 972 \text{ м/с}$; $v_{\text{аз}} = 337 \text{ м/с}$; $v_{\text{в.г}} = 262 \text{ м/с}$.

4.142. $t = \frac{2x_0}{\ln(T_1/T_2)} \sqrt{\frac{M}{\gamma R T_1}} \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 \right) = 22 \text{ с}$, де γ – показник адіабати повітря.

4.143. $v_{\text{зв}} = \langle v \rangle \sqrt{\gamma/2}$, де γ – показник адіабати повітря.

4.144. $v_{\text{зв}} = 331 \text{ м/с}$; $\langle v \rangle = 468 \text{ м/с}$; $(\xi)_{\max} = 2 \text{ см/с}$.

4.145. $t = 6 \text{ с}$.

4.146. $(\Delta p)_0 = \sqrt{2I\rho v}$; $(\Delta p)_{0\text{п}} = 6,53 \text{ Па}$; $(\Delta p)_{0\text{в}} = 387 \text{ Па}$; $(\Delta p)_{0\text{ст}} = 2 \cdot 10^3 \text{ Па}$.

4.147. $L = 51 \text{ дБ}$.

4.148. $A = \frac{1}{2\rho\pi v} \sqrt{\frac{RT}{\gamma M}} \sqrt{2\rho I_0 10^{10} \sqrt{\frac{\gamma M}{RT}}} = 0,55 \text{ мкм}$.

4.149. $\left(\dot{\xi} \right)_{\max} = \sqrt{\frac{2I}{\rho v}} = 0,07 \text{ мм/с}$, де інтенсивність звуку $I = 10^6 I_0$; $I_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$.

4.150. Амплітуда зміщення молекул повітря у хвилі $\xi_{\max} = \frac{1}{2\pi v} \sqrt{\frac{2I}{\rho v}}$, де I – інтенсивність хвилі; v – її швидкість; ρ – густина повітря. Для частоти хвилі $\nu = 4 \text{ кГц}$, до якої людське вухо найбільш чутливе, поріг чутності $I_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$. Навіть коли $I = 100 I_0$, то зміщення молекул повітря $\xi = 2,72 \cdot 10^{-11} \text{ м}$, що значно менше, ніж діаметр молекули повітря $d \approx 10^{-10} \text{ м}$.

4.151. а) $(\Delta p)_0 = 10^{-5}$ Па; б) $(\Delta p)_0 = 10^2$ Па. Звук є пружною хвилею дуже малої інтенсивності.

4.152. $v_1 = 1\,118$ Гц; $v_2 = 1\,133$ Гц.

4.153. $v = 122,4$ км/год; $v_0 = 990$ Гц.

4.154. $\Delta v = 272,1$ Гц.

4.155. $\alpha = 42^\circ$.

4.156. Якщо швидкість літака v менша за швидкість звуку $v_{\text{зв}}$, то хвильові поверхні звукових хвиль, які збуджуються літаком, згущені перед ним і розріджені за ним. Коли $v = v_{\text{зв}}$, то хвильові поверхні дотикаються до джерела звуку. Якщо $v > v_{\text{зв}}$, то від літака поширюються ударні хвилі. Ударна хвиля – стрибок ущільнення – має вигляд конуса. Коли конус доходить до поверхні Землі, то вухо людини реєструє ударну хвилю, що виникла. Різка перебудова хвильових фронтів сприймається людиною як “постріл”.

4.157. $\alpha = 0,68$ рад $\approx 38^\circ 57'$.

4.158. $\Delta\varphi = \frac{2\pi \ln \eta}{\lambda \gamma} = 0,67$ рад.

4.159. $\gamma = \frac{\ln \left(\eta \frac{r_1}{r_2} \right)}{r_2 - r_1} = 0,1 \text{ м}^{-1}$; $\lambda = 30$ м; $v = 4\,500$ м/с.

4.160. $P = 12,56$ мкВт.

4.161. $\gamma = \frac{1}{2\Delta r} \ln \frac{\eta}{1 + \Delta r / r_1} = 9,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$.

4.162. $x_0 = \frac{\ln \eta}{2av^2}$; а) $x_0 = 17$ км; б) $x_0 = 7$ см.

4.163. $I'_1 = 3,8 \cdot 10^{-10} \text{ Вт/м}^2$.

4.164. $x = L/(8,69 av^2)$; $x_n = 17,3$ м; $x_b = 11,5$ км.

4.165. $x_n = 5,8$ м; $x_b = 3,8$ км.

4.166. $n = 0,067$.

4.167. $F = R(v_{\text{ст}} - v_b)/(2v_{\text{ст}}) = 2,65$ м.

4.168. $A_1'/A_2 = ((\rho v)/(\rho_b v_b) - 1)/2$, де ρ_b , v_b – густина й швидкість поздовжньої хвилі у воді. $A_1'/A_2 = 1,57$.

4.169. Якщо імпеданс середовища, з якого падає хвиля, менший за імпеданс середовища, від якого вона відбивається.

4.170. $\eta = 0,03$ %.

4.171. $D = 0,1$ %; не зміниться.

4.172. а) $D = 83$ %; б) $D = 14$ %.

4.173. При $Z_1 = Z_2$ енергія хвилі в місці з'єднання проходить без відбивання. За формулою (4.5.18) коефіцієнт відбиття $V = 0$.

4.174. Інтерферувати можуть будь-які хвилі незалежно від їхньої фізичної природи за умови, що вони підкоряються принципів суперпозиції. При додаванні лінійно поляризованих у взаємно перпендикулярних напрямках хвиль у загальному випадку виникає еліптично поляризована хвиля, інтенсивність якої дорівнює сумі інтенсивностей складових хвиль, тому інтерференції немає.

4.175. Гіперболоїди обертання, осі яких проходять через обидва джерела (рис. В.4.10). Найменша відстань між ними дорівнює половині довжини хвилі, що випромінюється джерелами.

4.176. $A = 0,61$ мм.

4.177. $\nu = 1\,700$ Гц.

4.178. $\Delta p = \frac{(\Delta p)_0}{2} \sqrt{5} \sin\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{3} + \arctg 2\right)$; а) $\Delta p = 9,3$ мПа; б) $\Delta p = 2,2$ мПа.

4.179. а) Частинки здійснюють коливання перпендикулярно до площини xOy , амплітуда коливань залежить від координат точок, інтерференція має місце; б) частинки рухаються по еліпсам (колам), інтерференції немає.

4.180. Ні. Стояча хвиля енергію не переносить.

4.181. Енергія переходить з потенціальної, яка зосереджена поблизу вузлів, де містяться пучності деформації, у кінетичну, яка зосереджена біля пучностей хвилі, де містяться пучності швидкостей частинок середовища, і навпаки.

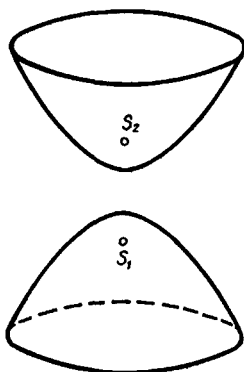


Рис. В.4.10

4.182. $\lambda = 50$ см; $\xi_{\max} = 7,4$ мм або $\xi_{\max} = 4,8$ мм; номер обертона $n = \frac{2l}{\lambda_n} = 6$.

4.183. $\xi_{\max} = 20$; 17; 10 см.

4.184. а) $x_{\text{вуз}} = \frac{(2n+1)v}{4v} = 2,5; 7,5; 12,5; \dots$ см; $x_{\text{пуч}} = \frac{nv}{2v} = 0; 5; 10; \dots$ см;

б) $x_{\text{вуз}} = \frac{nv}{2v} = 0; 5; 10; \dots$ см; $x_{\text{пуч}} = \frac{(2n+1)v}{4v} = 2,5; 7,5; 12,5; \dots$ см; $n = 0; 1; 2; \dots$

4.185. $v = 2lv_1 = 512$ м/с; $F_k = \pi\rho(v_1 l a)^2 = 1,62$ кН.

4.186. $v_6 = v_{\text{кам}} - \frac{1}{dl} \sqrt{\frac{F_H}{\rho\pi}} = 3$ Гц.

4.187. $v_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$; $0,23n \leq v_n \leq 0,44n$, с^{-1} ; $n = 1, 2, 3, \dots$

4.188. $v_n = \frac{2n+1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, тут $n = 0, 1, 2, \dots; 3,154; 9,46; 15,77$ кГц.

4.189. $v_1 = \frac{v}{4L} = 50$ Гц; $v_3 = \frac{5v}{4L} = 250$ Гц.

$$4.190. v_1 = 200 \text{ Гц}, v_2 = 400 \text{ Гц}, v_3 = 600 \text{ Гц}.$$

$$4.191. v_1 = 446 \text{ Гц}, v_2 = 1338 \text{ Гц}.$$

4.192. Кінетична енергія елемента dx струни $dW_k = \mu (\dot{\xi})^2 dx/2$, де $\mu = m/l$ – лінійна густина струни. Повну енергію $W_{k \max}$ визначимо інтегруванням по довжині:

$$W_{k \max} = m\pi^2 v_1^2 n^2 A^2 = 0,62 \text{ Дж}.$$

$$4.193. v_1 = 250 \text{ м/с}; v_2 = 240,5 \text{ м/с}; u = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = 50 \text{ м/с}.$$

$$4.194. v_1 = v_2 = 20 \text{ м/с}; u = 200 \text{ м/с}.$$

$$4.195. \text{ а) } \omega(k) = k \sqrt{\frac{F}{\rho S}}; \text{ б) } \omega(k) = k \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}. \text{ Ні.}$$

4.196. Як правило, звукові хвилі в повітрі не зазнають дисперсії, тому групова швидкість дорівнює фазовій.

$$4.197. \text{ За умови } k = \sqrt{\frac{g\rho}{\sigma}}; \lambda = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{g\rho}} = 1,71 \text{ см}; v = u = \sqrt{\frac{g\lambda}{\pi}} = 23,1 \text{ см/с};$$

$$u = 3 \sqrt{\frac{\pi\sigma}{2\lambda\rho}} = 101,6 \text{ см/с}; \eta = 2,5.$$

4.198. Подіяти на котушку змінним магнітним полем, а на конденсатор – короткочасним імпульсом напруги. Збільшити діаметр провідника, яким намотана котушка.

4.199. 1) Зменшиться внаслідок збільшення ємності конденсатора; 2) а) зменшиться; б) збільшиться.

$$4.200. v = 1 \text{ МГц}.$$

$$4.201. t = 10 \text{ мкс}; I_{\max} = 0,47 \text{ А}.$$

$$4.202. T = 2 \text{ мс}; I(t) = 28,2 \cos(10^3 \pi t + \frac{\pi}{2}), \text{ мА}; L = 0,34 \text{ Гн}.$$

$$4.203. T = 5 \text{ мс}; C = 0,63 \text{ мкФ}; W_{L \max} = W_{C \max} = 0,2 \text{ мДж}; U_C(t) = 8\pi \cos 400\pi t, \text{ В}.$$

$$4.204. W_L = 0,063 \text{ Дж}.$$

$$4.205. T = 8 \text{ мс}; \delta = 0,7; U(t) = \frac{q_{m0}}{C} e^{-\beta t} \cos \omega t = 80 e^{-87t} \cos 250\pi t, \text{ В}.$$

$$4.206. I(t) = 49,7 e^{-7 \cdot 10^5 t} \cos(7,09 \cdot 10^6 t + 1,67), \text{ мА}; \delta = 0,62; W_L = 12,18 \text{ нДж}.$$

$$4.207. R = 37 \text{ Ом}.$$

$$4.208. N = 20.$$

$$4.209. Q = 100.$$

$$4.210. N_e = \frac{\sqrt{L/C}}{\pi R} = 15.$$

$$4.211. \text{ Не зміниться.}$$

$$4.212. \text{ Напруга на конденсаторі й струм у контурі змінюються за законами}$$

$$U = U_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

$$I = I_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi + \psi),$$

де $\cos \psi = -\beta/\omega_0$; тобто за наявності в контурі активного опору ($\beta = R/(2L)$) зсув фаз між напругою і струмом відрізняється від $\pi/2$ (що має місце, коли $R = 0$). Нехай струм досягає максимуму в деякий момент часу t_m такий, що $\omega t_m + \varphi + \psi = 0$, $I = I_m = I_{m0} e^{-\beta t_m}$. При цьому напруга на конденсаторі

$$U = U_{m0} e^{-\beta t_m} \cos(\omega t_m + \varphi) = U_{m0} e^{-\beta t_m} \cos(-\psi). \text{ Враховуючи, що } U_{m0} = \frac{q_{m0}}{C}, \quad I_{m0} = q_{m0} \omega_0,$$

$$\text{одержуємо: } \left(\frac{W_L}{W_C} \right)_{I_m} = \left(\frac{LI^2}{CU^2} \right)_{I_m} = \frac{1}{\cos^2 \psi} = \frac{4L}{R^2 C} = 20.$$

$$4.213. -\Delta W = 2\pi R \frac{CU_{m0}^2}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 31,4 \text{ мкДж}.$$

$$4.214. t = \pi \sqrt{LC} \ln n\delta = 1,7 \text{ мс}.$$

$$4.215. W = W_0 \exp(-\omega_0 t/Q); \eta = 50 \text{ \%}.$$

4.216. Загальна ємність конденсаторів стане більшою, ніж $4L/R^2$, розряд стане аперіодичним.

$$4.217. \text{ Ні, коливання виникають за умови } C < 4L/R^2 = 1,6 \text{ мкФ}.$$

$$4.218. I = 24,2 \sin(314t - 0,54), \text{ А}.$$

$$4.219. \varphi = \arctg \sqrt{\left(\frac{U_m}{I_m R} \right)^2 - 1} \approx 0,8 \text{ рад}.$$

$$4.220. I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = 57 \text{ мА}; \varphi = -1,56 \text{ рад}; U_L = 0,36 \sin(314t +$$

$$+ 3,13), \text{ В}; U_C = 180 \sin(314t - 0,01), \text{ В}.$$

$$4.221. v = 15,92 \text{ кГц}.$$

$$4.222. \text{ а) } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} = 345 \text{ с}^{-1}; \text{ б) } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC - (R^2 C^2)/2}} = 372 \text{ с}^{-1}.$$

$$4.223. T = 0,2 \text{ мс}; L = 1/(\omega_{\text{рез}}^2 C) = 10,14 \text{ мГн}; R = 10,6 \text{ Ом}; I(t) = 4,72 \cos 10^4 \pi t, \text{ мА}.$$

$$4.224. L = 0,1 \text{ Гн}; I(t) = -0,025 \pi \sin 10^3 \pi t, \text{ А}.$$

$$4.225. C = 101 \text{ мкФ}.$$

$$4.226. v_{\text{рез}} = 278 \text{ кГц}; U_{mC_{\text{рез}}} = U_{mL_{\text{рез}}} = 2,39 \text{ В}.$$

$$4.227. v_1 = 210 \text{ Гц}; v_2 = 236 \text{ Гц}.$$

$$4.228. Q = 1/(2\pi v_{\text{рез}} RC) = 50,6.$$

$$4.229. Q = U_{mC_{\text{рез}}}/U_m = 30.$$

4.230. *Периодичний спосіб. Метод векторних діаграм.* Конденсатор і резистор перебувають під однаковою напругою, але струми в них зсунуті за фазою. Побудуємо векторну діаграму струмів, взявши за основу вектор амплітуди напруги (вісь напруг

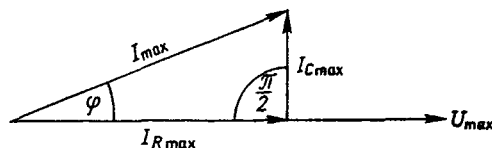


Рис. В.4.11

$U_{\max}$, горизонталь) (рис. В.4.11).
Довжини векторів: $I_{R\max} = U_{\max}/R$;
 $I_{C\max} = U_{\max}\omega C$. Повний струм $I_{\max}$
є векторною сумою обох векторів.
Довжина результуючого вектора
 $I_{\max} = U_{\max} \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}$, повний опір

$Z = U_{\max}/I_{\max} = R/\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}$, а кут, на який повний струм випереджає напругу,
 $\varphi = \arctg(\omega CR)$.

Другий спосіб. Метод комплексних опорів. При паралельному з'єднанні сумарний імпеданс кола

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_C \cdot \hat{Z}_R}{\hat{Z}_C + \hat{Z}_R} = \frac{-iR/(\omega C)}{R - i/(\omega C)}.$$

Помножимо і поділимо праву частину рівняння на $R + i/(\omega C)$ і приведемо сумарний імпеданс до алгебричної форми: $\hat{Z} = X + iY$. Повний опір є модулем $\hat{Z}$:

$$Z = |\hat{Z}| = \sqrt{X^2 + Y^2} = R/\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2} = 60,2 \text{ Ом}.$$

Зсув фаз $\varphi = \arctg(Y/X) = -\arctg R\omega C = -0,27$ рад.

Кут $\varphi < 0$, а це означає, що струм випереджає напругу (формула (4.7.2)).

4.231. $C = 1/(4\pi^2 \nu^2 L) = 51$ мкФ.

4.232. $\nu_{\text{рез}} = 160$ кГц; $I_{m1} = 5,5$ мА; $I_{m2} = 5$ мА; $I_{m \text{ зовн}} = 0,5$ мА.

4.233. $I_m = 0,34$ мА.

4.234. $Z = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{(\omega CR)^2 + (1 - \omega^2 CL)^2}} = 51,7$ Ом; $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = 1,46 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$;

$Z_{\text{рез}} = \frac{L}{CR} = 1,11$ кОм (див. розв'язання задачі 4.230).

4.235. Напруга U на всіх ділянках кола є однаковою, а сили струмів у гілках – різними. Повна сила струму $I = I_L + I_C + I_R$. Щоб додати коливання струму, побудуємо векторну діаграму струмів (рис. В.4.12). Тут $I_{R\max} = U_{\max}/R$, $I_{L\max} = U_{\max}/(\omega L)$, $I_{C\max} = U_{\max}\omega C$. Коливання повного струму визначаються векторною сумою

$$I_{\max} = \sqrt{I_{R\max}^2 + (I_{C\max} - I_{L\max})^2} =$$

$$= U_{\max} \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = 6 \text{ А}.$$

Кут, на який коливання струму випереджають за фазою коливання напруги.

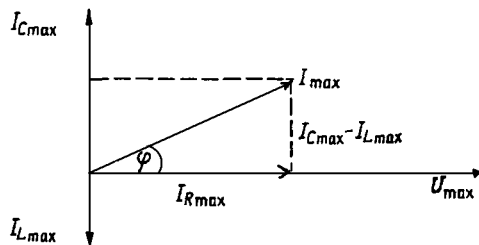


Рис. В.4.12

$$\varphi = \arctg R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = 6,53^\circ.$$

$$4.236. \nu \approx 80 \text{ Гц.}$$

$$4.237. \langle P \rangle = 0,18 \text{ мВт.}$$

$$4.238. \varphi = \arccos \sqrt{1 - (X_L / Z)^2} = 37^\circ; \langle P \rangle = I_{\text{эф}}^2 \sqrt{Z^2 - X_L^2} = 160 \text{ Вт.}$$

$$4.239. R = 2 \langle P \rangle / L(U_{\text{мс}}^2 / C) = 2 \text{ Ом.}$$

$$4.240. Q = U_{\text{мс}}^2 \sqrt{C / L} / (2 \langle P \rangle) = 100.$$

4.241. Максимальна енергія електричного поля конденсатора $W_{C, \text{max}} = C U_{\text{мс}}^2 / 2$ перетворюється в енергію магнітного поля котушки $W_{L, \text{max}} = L I_m^2 / 2$. Звідси $I_m = U_{\text{мс}}^2 \sqrt{C / L}$. Середня потужність, що споживається, $\langle P \rangle = R I_m^2 / 2 = U_{\text{мс}}^2 C R / (2L) = 2 \text{ мВт}$.

$$4.242. R = \omega L - r = 189,1 \text{ Ом}; \langle P \rangle_{\text{max}} = U_{\text{эф}}^2 / (2\omega L) = 118,6 \text{ Вт.}$$

$$4.243. \cos \varphi_2 = 0,8.$$

$$4.244. \eta = 1 + \omega^2 L^2 / R^2 = 1,5 \text{ раза.}$$

$$4.245. \rho = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon\nu} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} = 6 \text{ МОм}\cdot\text{м.}$$

4.246. У механічних – залежить, в електричних – ні.

4.247. На реактивних опорах можуть виникати напруги, що значно перевищують напругу в колі.

4.248. При малому значенні $\cos \varphi$ потужність, що передається, є невеликою, а втрати на нагрівання проводів $I_m^2 R$ не залежать від $\cos \varphi$. Але вони можуть стати великими внаслідок великого струму, який вимушено збільшують.

$$4.249. \lambda = 0,67 \text{ м.}$$

$$4.250. \Delta\lambda = \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} - 1 \right) \frac{c}{\nu} = 50 \text{ м.}$$

4.251. Не змінюється. У воді змінюється довжина світлової хвилі, але сприйняття кольорів визначається частотою, яка не змінюється під час переходу світла з повітря у воду.

$$4.252. \nu = 1,94 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

$$4.253. t = \frac{2l}{3c(\epsilon_1 - \epsilon_2)} (\sqrt{\epsilon_1^3} - \sqrt{\epsilon_2^3}) = 7 \cdot 10^{-8} \text{ с.}$$

$$4.254. \lambda = 376,8 \text{ м.}$$

$$4.255. L_1 = 50 \text{ мкГн}, R_1 < 632 \text{ Ом}; L_2 = 0,5 \text{ мкГн}, R_2 < 63,25 \text{ Ом.}$$

4.256. а) $\mathbf{H} = \mathbf{e}_z \epsilon_0 c E_m \cos kx = -0,32 \mathbf{e}_z$; б) $\mathbf{H} = \mathbf{e}_z \epsilon_0 c E_m \cos k(ct - x) = -0,18 \mathbf{e}_z$, де $\mathbf{e}_z$ – орт осі Oz (H вимірюється в амперах на метр).

4.257. За умовою маємо одновимірний випадок, тобто $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ залежать тільки від координати x і часу t . Враховуючи, що всі частинні похідні в рівняннях Максвелла за координатами y і z дорівнюють нулеві, одержимо $E_x = \text{const}$, $H_x = \text{const}$, а також дві незалежні групи рівнянь:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t};$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t},$$

звідки випливає, що змінне за часом електричне поле E_y спричиняє появу тільки магнітного поля H_z , напрямленого вздовж осі Oz , тобто електричне й магнітне поля перпендикулярні одне до одного.

$$4.258. I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_m^2 = 1,2 \text{ Вт/м}^2.$$

$$4.259. (j_{\text{пр}})_m = \sigma \sqrt{2I \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}}} = 22 \text{ МА/м}^2; (j_{\text{зм}})_m = \epsilon\epsilon_0 \omega \sqrt{2I \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}}} = 5,84 \text{ МА/м}^2.$$

$$4.260. \langle S \rangle = 12 \text{ ГВт/м}^2.$$

$$4.261. \text{ а) } E_m = \sqrt{\frac{2I}{c\epsilon_0}} = 27 \text{ ГВ/м}; H_m = \sqrt{\frac{2I}{c\mu_0}} = 73 \text{ МА/м}; \text{ б) } E_m = 1,01 \text{ кВ/м}; H_m = 2,68 \text{ А/м}.$$

$$4.262. \langle w \rangle = \frac{P}{4\pi r^2 c} = 0,32 \text{ нДж/м}^3.$$

$$4.263. W = \epsilon_0 c E_m^2 S t / 2 = 2 \text{ нДж}.$$

$$4.264. U_{\text{max}} = l \sqrt{P / (2\pi R^2 \epsilon_0 c)} = 0,16 \text{ В}.$$

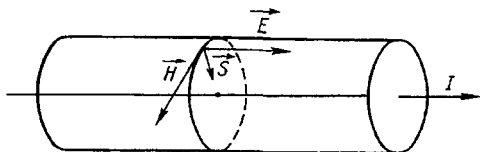


Рис. В.4.13

усередину провідника нормально до його бічної поверхні. Потік енергії крізь бічну поверхню $\Phi = EH \cdot 2\pi Rl = I^2 \rho l / S = 0,1 \text{ Вт}$. Електромагнітна енергія поширюється вздовж провідника в оточуючому його просторі. Джоулеве тепло виділяється завдяки тій енергії, яка поступає в провідник крізь його поверхню з оточуючого простору.

4.266. а), в) Зовні кабелю, а також у центральному проводі й оболонці потоку енергії немає, оскільки там немає електричного поля; б) $S = \frac{IU}{2\pi r^2 \ln(r_2 / r_1)} = 37,5 \text{ кВт/м}^2$, вектор

Пойнтінга напрямлений паралельно осі кабелю; $\Phi = UI = 8 \text{ Вт}$. Уся енергія, яка надходить до споживача, переміщується вздовж кабелю в об'ємі між проводами у вигляді електромагнітної енергії.

$$4.267. S = \mathbf{e}_x c \epsilon_0 \sqrt{\epsilon} E_m^2 \cos^2 k \left(\frac{c}{\sqrt{\epsilon}} t - x \right) = 452 \mathbf{e}_x, \text{ де } \mathbf{e}_x - \text{орт осі } Ox \text{ (} S \text{ вимірюється}$$

у ватах на квадратний метр).

$$4.268. p = 2,68 \cdot 10^{-14} \text{ Па.}$$

$$4.269. p = \frac{4W}{\pi d^2 \tau c} \approx 25 \text{ Па.}$$

$$4.270. p = \frac{\epsilon_0 E_m^2}{2} = 0,1 \text{ мкПа.}$$

4.271. Напруженість E електричного поля осцилюючого диполя у хвильовій зоні зменшується з відстанню за законом $1/r$ на відміну від поля статичного диполя, напруженість якого зменшується за законом $1/r^3$.

4.272. Хвилі лінійно поляризовані, причому напрями коливань векторів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ залежать від положення точки. Вектори $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ перпендикулярні до радіуса-вектора, який проведений у дану точку з центра диполя. Вектор $\mathbf{E}$ напрямлений по дотичній до меридіана, а вектор $\mathbf{H}$ — по дотичній до паралелі концентричних сфер з центром усередині диполя і з полюсами на продовженні його осі.

4.273. Ні, через те, що модулі векторів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ у різних точках сфери залежать від полярного кута θ .

4.274. Струми низької частоти випромінюють дуже слабо — потужність випромінювання пропорційна четвертому степеню частоти.

$$4.275. \Phi = \text{const.}$$

4.276. Повна потужність, що випромінюється диполем в усіх напрямках, не залежить від відстані (див. формулу (4.8.11)). Потік енергії Φ крізь сферичну поверхню довільного радіуса r : $\Phi = 4\pi r^2 \langle S \rangle$, середнє значення густини потоку енергії $\langle S \rangle \sim E_m H_m$. Якщо втрат енергії немає, повний потік енергії не повинен змінюватися з відстанню. Це можливо, коли $\langle S \rangle \sim 1/r^2$, або $E_m \sim H_m \sim 1/r$.

$$4.277. B_{m1} = E_{m1}/c = 66,7 \text{ нТл}; B_{m2} = E_{m2}/c = E_{m1} r_1 \sin \theta_2 / (c r_2) = 16,7 \text{ нТл.}$$

$$4.278. E_m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\langle P \rangle}{\pi \epsilon_0 c}} \frac{\sin \theta}{r} = 0,21 \text{ В/м}; B_m = E_m/c = 0,7 \text{ нТл.}$$

$$4.279. \langle S \rangle = 3 \langle P \rangle \sin^2 \theta / (8\pi r^2) = 79 \text{ мкВт/м}^2.$$

$$4.280. \langle S \rangle = \frac{\epsilon_0 c^3 B_m^2}{2} \frac{r^2 \sin^2 \theta_1}{r_1^2 \sin^2 \theta} = 1 \text{ нВт/м}^2; \langle P \rangle = \frac{4\pi}{3} \epsilon_0 c^3 r^2 B_m^2 = 1 \text{ мВт.}$$

$$4.281. \langle w \rangle = \frac{l r^2 \sin^2 \theta_1}{c r_1^2 \sin^2 \theta} = 3,7 \cdot 10^{-13} \text{ Дж/м}^3.$$

$$4.282. \langle P \rangle = 8\pi c r^2 w / (3 \sin^2 \theta) = 1,13 \text{ кВт.}$$

$$4.283. \xi_{\text{max}} = \frac{a^2 \omega}{2cr} \sqrt{\frac{3\langle P \rangle}{\pi \epsilon_0 c}} = 0,016 \text{ В.}$$

$$4.284. \alpha = 12^\circ.$$

$$4.285. \theta = \arcsin \frac{c}{6vd} = 12^\circ.$$

4.286. Нехай диполі розміщені вздовж осі Oy . Спочатку випромінювання було максимальним вздовж осі Ox : $I = 4I \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right)$; $I_{\max} = 4I_0$, коли $\theta_1 = 0$ і $\theta_2 = \pi$.

Після зсуву фаз на кут $\delta_0 = \pi$ розподіл інтенсивності мав вигляд $I = 4I \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right)$;

$I_{\max} = 4I_0$, якщо $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ і $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$, тобто випромінювання зникло в напрямі осі Ox і стало максимальним вздовж осі Oy .

4.287. $I = 2I_0 \left[1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right)\right]$; інтенсивність випромінювання є максимальною тільки тоді, коли $\theta = \frac{3\pi}{2}$; дзеркальної симетрії немає.

4.288. Енергія, що випромінюється системою антен, зосереджується в окремих напрямках. Розмістити принаймні дві антени випромінювача паралельно на відстані $\frac{\lambda}{2}$ одна від однієї і встановити між ними різницю фаз, що дорівнює нулеві, або π . Більш удосконаленим є використання антенної решітки.

4.289. При $\theta = 0$ і $\theta = \pi$. $I = N^2 I_0$.

4.290. $d = \lambda$.

4.291. Згідно з формулою (4.8.14) напрямки максимумів визначаються за умовою $\sin \theta = m \frac{\lambda}{d}$, де $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Оскільки $|\sin \theta| \leq 1$, то найбільше значення m дорівнює цілій частині відношення $\frac{d}{\lambda}$. Умову $\sin \theta = m\lambda/d$ задовольняє як θ , так і $\pi - \theta$.

Тому максимуми є дзеркально-симетричними відносно напрямів $\theta = \frac{\pi}{2}$ і $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Отже, усього маємо два максимуми, які відповідають $m = 0$, і по чотири максимуми на кожне ціле число, яке не перевищує $\frac{d}{\lambda}$; а) два максимуми при $\theta = 0$ і $\theta = \pi$; б) десять максимумів $I = N^2 I_0 = 0,36$ мкВт/м².

4.292. Див. рис. В.4.14.

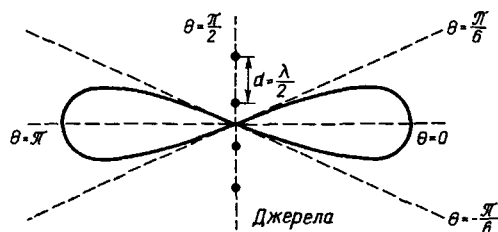


Рис. В.4.14

$$\mathbf{4.293.} \quad I = I_0 \frac{\sin^2(\pi(2\sin\theta - 1))}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}(2\sin\theta - 1)\right)};$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{6};$$

$$I_{\max} = N^2 I_0 = 4,8 \text{ кВт.}$$

$$\mathbf{4.294.} \quad \theta = \arcsin\left(\frac{\lambda}{d}\right) = 1^\circ 12'.$$

ДО РОЗДІЛУ 5

$$5.1. n = \frac{V(\lambda_2)}{V(\lambda_1)} = 1,59.$$

$$5.2. \Phi_{el} = \frac{K_0}{V(\lambda_1)} \Phi_1 = 0,03 \text{ Вт, де } K_0 - \text{ механічний еквівалент світла, } K_0 = \Phi_e / \Phi = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/лм.}$$

$$5.3. \Phi = \eta P = 1400 \text{ лм; } I = \frac{\eta P}{4\pi} = 111,5 \text{ кд.}$$

$$5.4. I = \frac{\Phi}{4\pi \sin^2(\theta/2)} = 467 \text{ ккд.}$$

$$5.5. r = h\sqrt[3]{n} = 3,42 \text{ м.}$$

$$5.6. \text{ а) } \Phi = 4\pi I_0; \text{ б) } \Phi = \pi^2 I_0; \text{ в) } \Phi = \pi I_0.$$

$$5.7. 9,1 \text{ м від першого стовпа.}$$

$$5.8. E = I \frac{h^2 + (h + 2l)^2}{h^2(h + 2l)^2}.$$

$$5.9. E = 541 \text{ лк.}$$

$$5.10. h = \frac{r}{\sqrt{2}} = 0,71 \text{ м.}$$

$$5.11. E_1 = \frac{I}{h^2} = 278 \text{ лк; } E_2 = \frac{Ih}{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = 60 \text{ лк; } \langle E \rangle = \frac{2I}{r^2} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right) = 125 \text{ лк.}$$

В к а з і в к а. Визначити тілесний кут Ω , що спирається на стіл, $\Omega = 2\pi \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right)$, світловий потік $\Phi = I\Omega$ і середню освітленість $\langle E \rangle = \frac{\Phi}{\pi r^2}$.

5.12. Діаметр зображення $d = 2f \operatorname{tg}(\alpha/2)$. Потік світла крізь лінзу дорівнює поточкові, що концентрується на зображенні. Звідси $E_1 = E \frac{D^2}{4f^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} = 2,83 \cdot 10^8 \text{ лк.}$

5.13. Ні. Світловий потік $d\Phi$, що випромінюється предметом у просторі зображень, переходить у потік $d\Phi'$, що пронизує зображення, $d\Phi = d\Phi'$. Звідси з урахуванням так званої умови синусів Аббе доводиться, що $B = B'$, тобто яскравість зображення дорівнює яскравості предмета.

5.14. Око людини розрізняє предмети за освітленістю зображення на сітківці. Освітленість зображення залежить від діаметра зіниці ока й дорівнює відношенню світлового потоку до площі зображення. Зі збільшенням відстані до джерела зменшується світловий потік, що потрапляє в око, але одночасно зменшується й площа зображення, тому їх відношення не змінюється.

$$5.15. R = 4(1 - \eta) \frac{I}{d^2} = 6,4 \cdot 10^4 \text{ лм/м}^2; B = \frac{R}{\pi} = 2,04 \cdot 10^4 \text{ кд/м}^2.$$

$$5.16. E = \pi B r^2 / r_1 = 31,4 \text{ лк.}$$

$$5.17. E = \frac{\Phi_{\text{пад}}}{S} = 100 \text{ лк; } R = \rho E = 80 \text{ лм/м}^2; B = \frac{R}{\pi} = 25 \text{ кд/м}^2.$$

$$5.18. B = \frac{E r^2}{d l} = 5 \cdot 10^3 \text{ кд/м}^2; R = \pi B = 1,57 \cdot 10^4 \text{ лм/м}^2; \eta = \frac{R \pi d l}{P} = 49,2 \text{ лм/Вт.}$$

5.19. Визначимо тілесний кут $d\Omega$, під яким з площадки dS видно площадку dS' . Площа проекції протяжного джерела dS' на площину, перпендикулярну до напрямку r , або, іншими словами, видима з площадки dS поверхня площадки dS' дорівнює $dS' \cos \theta'$. Тоді тілесний кут $d\Omega = dS' (\cos \theta') / r^2$. У цей тілесний кут джерело dS посилає світловий потік $d\Phi$. З формули (5.1.8), що визначає яскравість, впливає $d\Phi = B d\Omega dS \cos \theta = (B dS \cos \theta dS' (\cos \theta') / r^2)$. За означенням, освітленість $dE' = d\Phi / dS' = B dS \cos \theta (\cos \theta') / r^2$.

5.20. Скористаємося відповідно на задачу 5.19. Освітленість площадки dS' , яка створюється джерелом dS , $dE' = B dS \cos \theta (\cos \theta') / r^2$. Цей вираз можна розглядати як $dE' = B ((dS \cos \theta) / r^2) \cos \theta'$, або $dE' = B d\Omega \cos \theta'$, де $d\Omega$ – тілесний кут, під яким з площадки dS' що освітлюється, видно площадку dS , що випромінює. Повна освітленість E' площадки dS' визначається інтегруванням по видимій поверхні джерела: $E' = \int B \cos \theta' d\Omega$. З міркувань симетрії розіб'ємо диск на кільця. Елементарний тілесний кут $d\Omega$ спирається на заштриховану площадку dS . Для визначення тілесного кута $d\Omega$ між двома конічними поверхнями врахуємо, що $dS = 2\pi r dr$. Тоді $d\Omega \approx dS / (r^2 + R^2) = 2\pi \sin \theta' d\theta$. Зінтегрувавши, маємо $E' = \int_0^{\theta_{\text{макс}}} 2\pi B \cos \theta' \sin \theta' d\theta' = \pi B \sin^2 \theta'_{\text{макс}}$, де $\theta'_{\text{макс}}$ – кут, що утворений крайнім променем

$$\text{з віссю диска. Тоді } E' = \frac{\pi B}{1 + (h/R)^2} = 96,62 \text{ лк.}$$

5.21. Сонце, поверхня якого $S_C = 4\pi R_C^2$, випромінює світловий потік $\Phi_{\text{випр.}}$. Він падає зсередини на поверхню сфери $S_{\text{орб}}$ радіуса $R_{\text{ЗС}}$, який дорівнює відстані від Землі до Сонця – радіусу орбіти Землі. Отже, освітленість поверхні Землі $E = \Phi_{\text{пад}} / S_{\text{орб}} = \Phi_{\text{випр.}} / S_{\text{орб}}$. Яскравість поверхні Сонця як ламбертового джерела

$$B_C = \frac{\Phi_{\text{випр.}}}{\pi S_C} = \frac{E S_{\text{орб}}}{\pi S_C} = \frac{E}{\pi \text{tg}^2(\alpha/2)}; B_C = 1,03 \cdot 10^9 \text{ кд/м}^2.$$

5.22. Яскравість паперового аркуша $B = \rho E / \pi$, освітленість $E = I / R_{\text{ЗС}}^2$, де $R_{\text{ЗС}}$ – відстань від Землі до Сонця. Оскільки Сонце можна вважати ламбертовим джерелом світла, то сила світла Сонця пропорційна видимій площі Сонця: $I = B_C \pi R_C^2$. Тоді

$$B = \rho \left(\frac{R_C}{R_{\text{ЗС}}} \right)^2 B_C, \text{ звідки } \frac{B_C}{B} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{R_{\text{ЗС}}}{R_C} \right)^2 = \frac{1}{\rho \alpha^2}, \text{ де } \alpha - \text{кутовий радіус Сонця,}$$

$$\alpha = \frac{R_C}{R_{\text{ЗС}}} = 16'. \text{ Для ідеально білої поверхні коефіцієнт відбиття } \rho = 1. \text{ Отже,}$$

$$\frac{B_C}{B} = 4,64 \cdot 10^4.$$

5.23. Освітленість поверхні Землі, що створюється елементом сферичної поверхні

у точці O (рис. В.5.1) $dE = \frac{dI}{R^2} \cos\theta$.

Для ламбертових джерел $dI = B dS$, де dI – сила світла в напрямі нормалі (радіуса); dS – елементарна площадка, що є видимою з точки O . З рис. В.5.1 площа елементарної поверхні, яка вказана штриховкою, $dS = (2\pi R \sin\theta) R d\theta$. Тоді $dE =$

$= 2\pi B \sin\theta \cos\theta d\theta$. Зінтегрувавши за θ у межах від 0 до $\pi/2$, одержуємо

$$E = 2\pi B \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta = \pi B; E = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ лк.}$$

Ні.

5.24. $n = 1,33$.

5.25. $\text{tg } i = n$.

5.26. $i_2 = 41^\circ 41'$.

5.27. Кути при основі $\alpha = 72^\circ$, кут при вершині $\beta = 36^\circ$.

5.28. а) $\frac{h}{h'} = n = 1,33$; б) $\frac{h}{h'} = n \left(1 - \frac{\sin^2 i}{n^2} \right)^{\frac{3}{2}} / \cos^3 i = 4,69$.

5.29. Якщо a_1 і a_2 – ширини пучка світла відповідно в повітрі і воді, то, застосувавши закон заломлення світла, одержуємо

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\cos i_2}{\cos i_1} > 1,$$

оскільки $i_2 < i_1$, де i_1, i_2 – кути падіння і заломлення.

5.30. Шари повітря, які стикаються з асфальтом, сильно нагріваються, і їх показник заломлення n стає меншим, а швидкість світла в розрідженому повітрі – більшою. Світлові промені, що йдуть від неба, поширюються не прямо, а завертають у теплі шари повітря, щоб скоротити час згідно з принципом найменшого часу Ферма. Світло йде за кривою, промені вигинаються опуклістю в бік зменшення n . Уявна вода – це відбиття неба.

5.31. $i_{\text{гп}} = 62^\circ 28'$.

5.32. $\delta = 47^\circ 48'$; $\delta_1 = 14^\circ 05'$.

5.33. $d = 2h/\sqrt{n^2 - 1} = 22,73 \text{ м}$; світле коло радіуса $R = (H - h)/\sqrt{n^2 - 1} = 9,38 \text{ м}$, за межами якого видно зображення точок дна, відбиті від поверхні.

5.34. $l = d(\sin(i_1 - i'_1))/\cos i'_1 = d \sin i_1 (1 - \sqrt{(1 - \sin^2 i_1)/(n^2 - \sin^2 i_1)}) = 1,04 \text{ см}$. Тут i'_1 – кут заломлення.

5.35. $\sin i_1 = n \sin(45^\circ - i_{\text{гп}})$, де $i_{\text{гп}}$ – граничний кут повного відбиття; $i_1 = 4^\circ 47'$.

5.36. $h = D\sqrt{n^2 - 1}/2 = 0,88 \text{ см}$.

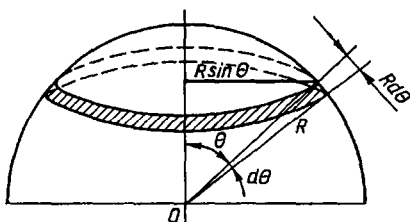


Рис. В.5.1

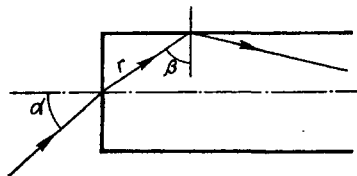


Рис. В.5.2

5.37. За законом заломлення $\sin r = (\sin \alpha)/n$ (рис. В.5.2). Найнесприятливіші умови при $\alpha = \pi/2$. Максимальне значення кута заломлення визначається з умови $\sin r = 1/n$. На внутрішню поверхню світловода промінь має падати під кутом, не меншим від граничного: $\beta = 90^\circ - r$. Тоді $\sin \beta = \cos r \geq 1/n$. Після піднесення до квадрата та додавання масмо $n \geq \sqrt{2}$.

5.38. $n_1 \geq \sqrt{1 + n_2^2} = 1,82$.

5.40. Спрямувати світловий пучок на верхню грань так, щоб повне відбиття відбувалося від вертикальної бічної грані. Виміряти кут падіння i_m , при якому починається повне відбиття. Тоді $n = \sqrt{1 + \sin^2 i_m}$; $v = c/n$.

5.41. $v_2 = 2$ м/с.

5.42. Змістилось на 3,5 см.

5.44. Половина зросту людини: $h = H/2$.

5.45. Зміниться на протилежний.

5.47. $R = 2\beta s/(\beta - 1) = -30$ см.

5.48. $f = -l\beta/(1 - \beta^2) = -10$ см.

5.49. $s' = \frac{sR}{2s - R} = 6,7$ см; $h' = \frac{h(R - s')}{R - s} = 3,3$ см.

5.50. На відміну від плоского дзеркала, коли зображення буде видимим тільки при певному положенні ока, в опуклому дзеркалі зображення видно незалежно від місця розташування предмета й ока.

5.51. Принципово це можливо, але такого великого дзеркала Архімед не міг виготовити.

5.52. Щоб визначити хід променя I (рис. В.5.3, а), проведемо побічну оптичну вісь $O'O'$, паралельну цьому променеві. Промінь, що поширюється вздовж оптичної осі, свого напрямку не змінює. Оскільки паралельні промені збираються у фокальній площині, то промінь I має пройти крізь точку A перетину фокальної площини Σ і побічної оптичної осі $O'O'$. Щоб встановити хід променя після заломлення в розсіювальній лінзі (рис. В.5.3, б), проведемо оптичну вісь $O'O'$, паралельну цьому променеві. Оскільки розсіювальна лінза розсіює промені, то в уявному побічному фокусі B зберуться продовження всіх променів, паралельних побічній оптичній осі $O'O'$. Сам промінь, заломившись лінзою, піде в напрямі I .

5.58. $R_1 = -R_2 = 2(n - 1)\Phi = 0,2$ м.

5.59. У середовищі, показник заломлення якого $n' > 1,6$.

5.60. $\Phi = 2,9$ дптр.

5.61. а) $\Phi_1 = -2$ дптр; $\Phi_2 = 2$ дптр; б) $\Phi_1 = 0,8$ дптр; $\Phi_2 = -0,8$ дптр.

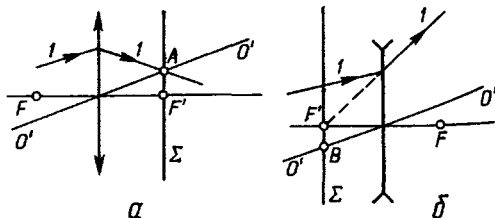


Рис. В.5.3

5.62. Не зміниться, в обох випадках оптична сила є однаковою.

5.63. $s' = -10$ см; $\beta = 0,5$.

5.64. $s = -13,3$ см; $\beta = 3$.

5.65. $s' = 20$ см; $h' = 5$ см.

5.66. $f'_a = f'_n \frac{n-1}{n/n_a-1} = 39,1$ см.

5.67. З формул (5.2.11) оптична сила для тонкої лінзи ($d \approx 0$) $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, де Φ_1 , Φ_2 – оптичні сили її поверхонь. $\Phi = (n - n_a)/R_1 + (n_n - n)/R_2 = 3,55$ дптр. Тоді фокусна відстань у повітрі $f'_n = 28,2$ см, у воді $f'_a = -37,4$ см.

5.68. $f'_a/f'_n = n_a(n-1)/(n-n_a) = 3,91$.

5.69. а) 17,1 см; б) 40 см; в) 18,8 см; г) -17,1 см; д) -40 см; е) -120 см.

5.70. $s = -2f'$. В к а з і в к а. Дослідити на мінімум функцію $s' - s$.

5.71. $s' = -60$ см.

5.72. Покласти лінзу на дзеркало, використати паралельний дзеркалові непрозорий екран з точковим отвором, за яким розташувати джерело світла. Екран переміщувати доти, доки дійсне зображення точкового джерела, що дає система на екрані, не збігатиметься із самим джерелом. Джерело при цьому міститься у фокусі.

5.73. $f'_2 = \frac{f'_1}{((s-s')f'_1/(ss'))-1} = -21,4$ см.

5.74. $s = -1$ м.

5.75. $\Delta s = 2$ см.

5.76. Так. Згідно з формулою (5.2.10), якщо показники заломлення з обох боків лінзи є різними, то різними будуть і фокусні відстані.

5.77. Скористатися тим, що середовище з обох боків системи є однаковим, тобто $n = n'$, $f = -f'$, і вузлові N , N' та головні H , H' точки збігаються.

5.78. Скористатися тим, що в задній фокальній площині від'ємної системи перетинаються не самі промені, що є паралельними в просторі предметів, а їх продовження.

5.80. $f' = -f = 39,6$ мм; $s'_F = f' + s'_H = 30,6$ мм; $s_F = f + s_H = -34,2$ мм; $s'_H = -9$ мм; $s_H = 5,4$ мм.

5.81. $s'_H = 0,91$ см; $s_H = 1,52$ см; $f' = -f = -16,71$ см.

5.82. $\Phi = \frac{d(n-1)^2}{nR^2} > 0$, лінза збиральна; $s_H = s'_H = -\frac{R}{n-1}$.

5.83. Так, якщо товщина лінзи $d > \frac{n(R_1 - R_2)}{n-1}$, радіуси кривизни $R_1 > 0$, $R_2 < 0$.

5.84. $f' = 8,28$ см. Застосувати формулу Гаусса (5.2.8), враховуючи, що $-f = f'$, і розв'язати квадратне рівняння.

5.85. $\Delta s' = 0,1$ м.

5.87. Око сприймає уявне зображення й перетворює його в дійсне зображення на сітківці.

5.88. Майже відсутні сферична та хроматична аберації, кома, астигматизм, дисторсія.

5.91. Око діє як додаткова лінза, яка з розбіжних пучків світла дає на сітківці дійсне зображення.

$$5.92. R = \frac{2(n-1)D}{\Gamma} = 5 \text{ см.}$$

$$5.93. \Gamma = 8.6.$$

$$5.94. \text{Далекозорість. } \Phi = +1.5 \text{ дптр.}$$

5.95. На виході з телескопа промені залишаються паралельними, але око бачить зображення під більшим кутом зору, що дає змогу розглядати дрібні деталі, тобто предмет здається наближеним.

$$5.96. \Gamma = -\frac{\Gamma_{\text{ок}}}{\Phi D} = -40, \text{ мінус означає перевернуте зображення.}$$

$$5.97. \Phi = 60 \text{ дптр.}$$

$$5.98. \text{Окуляр треба висунути на } z = 5 \text{ мм.}$$

$$5.99. \Gamma \approx -234; s = -4,1 \text{ мм.}$$

$$5.100. L = 30,5 \text{ см; } \Gamma = -250.$$

$$5.101. -s = f'(1 + (h/h')) = 66,9 \text{ м.}$$

$$5.102. 1:500: 1:250. \text{ Можна розрізняти предмети розміром } 0,5 \text{ м.}$$

$$5.103. \text{ Якщо додаються хвилі, які поляризовані в ортогональних напрямках.}$$

$$5.104. \delta = \pi.$$

$$5.105. \Delta L_1 = 1 \text{ мм; } \Delta L_2 = 1.44 \text{ мм.}$$

$$5.106. \text{ а) } 667 \text{ і } 500 \text{ нм; б) } 571 \text{ і } 444 \text{ нм.}$$

$$5.107. t_{\text{ког}} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ с; } l_{\text{ког}} \approx 6,3 \text{ км.}$$

$$5.108. t_{\text{ког}} \approx 2,7 \text{ нс; } \Delta \lambda \approx 0,46 \text{ нм; } m_{\text{max}} \approx 1,3 \cdot 10^6.$$

$$5.109. \text{ Для збільшення просторової когерентності світла, що падає на щілини; } b < \frac{\lambda L}{d} = 0,15 \text{ мм.}$$

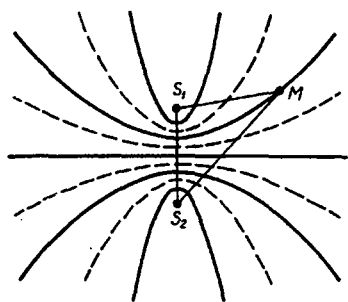
5.110. Освітленість змішаного кольору монотонно спадає до країв екрана, інтерференційних смуг немає.

5.111. Відстань між смугами зросла в $\lambda_2/\lambda_1 = 1,63$ рази. У випадку червоного світлофільтра інтерференційні смуги мали більшу ширину, $\Delta x \approx \lambda$.

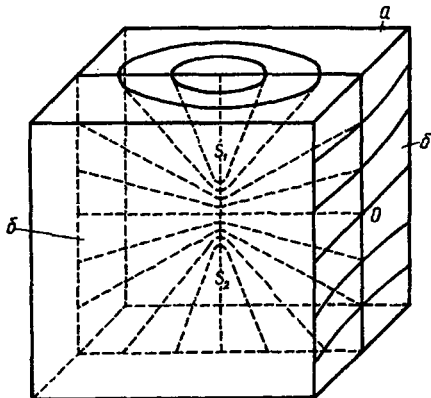
$$5.112. d \geq \rho_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{\phi} = 0,06 \text{ мм, де } \rho_{\text{ког}} - \text{радіус когерентності для сонячних променів.}$$

5.113. Такою, як діаметр пучка на виході лазера (наприклад, 1...10 мм для гелієво-неонового лазера).

5.114. Геометричним місцем точок простору, для яких різниця відстаней від точок S_1 і S_2 постійна, є поверхня – гіперболоїд обертання (рис. В.5.4. б). На рис. В.5.4. а показано гіперболи – переріз гіперболоїдів площиною рисунка (умова б). Максимальна інтенсивність світла при інтерференції спостерігатиметься в точках, які лежать на гіперболах з фокусами у точках S_1 і S_2 , а різниця ходу хвиль становить при цьому ціле число хвиль λ . За умови а інтерференційні смуги мають вигляд концентричних кілець з центром у точці перетину екрана з лінією S_1S_2 (рис. В.5.4. а). У центральній частині картина складається з паралельних світлих і темних смуг, які містяться приблизно на однаковій відстані одна від одної (рис. В.5.4. б).



a



б

Рис. В.5.4

5.115. Різниця фаз коливань у точці, положення якої задано радіусом-вектором $\mathbf{r}$, становить $\varphi_2 - \varphi_1 = (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)\mathbf{r} = \mathbf{k}\mathbf{r}$. У всіх точках поверхні, що визначається рівнянням $\mathbf{k}\mathbf{r} = \text{const}$, умови інтерференції є однаковими, це є поверхні однакової інтенсивності. Останнє рівняння описує площини, які перпендикулярні до вектора $\mathbf{k} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ (штрихові лінії на рис. В.5.5). Плоский екран перетинає ці площини вздовж паралельних прямих, на екрані спостерігаються темні й світлі інтерференційні смуги, що чергуються (рис. В.5.5).

5.116. $\Delta x = 0,36$ мм; а) $\Delta x = 0,14$ мм; б) $\Delta x = 0,72$ мм.

5.117. $n_x = n_n + N\lambda/l = 1,000\ 865$.

5.118. $\lambda_0 = xd/(ml) = 0,55$ мкм.

5.119. $\lambda = 400$ нм.

5.120. $\Delta x = \lambda l/(2h) = 0,35$ мм.

5.121. Для малих заломних кутів β відхилення променів $\varphi \approx \beta(n-1)$, відстань між уявними джерелами $d =$

$$= 2a(n-1)\beta, \text{ тоді } \Delta x = \frac{\lambda(a+b)}{2a(n-1)\beta} = 0,75 \text{ мм},$$

ширина інтерференційної картини на екрані $2b(n-1)\beta$, кількість смуг

$$N = \frac{4ab(n-1)^2\beta^2}{\lambda(a+b)} = 5.$$

5.122. Для виконання умови часової когерентності різниця ходу відбитих

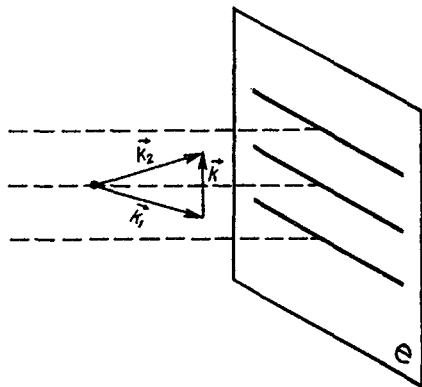


Рис. В.5.5

хвиль $\Delta = 2b(n^2 - \sin^2 i)^{1/2} \pm \lambda/2$ не повинна перевищувати довжину когерентності $\lambda^2 / \Delta\lambda$. Звідси випливає, що $b < \lambda^2 / (2\Delta\lambda)$. Граничне значення товщини: а) кілька десятків мікрометрів; б) кілька сантиметрів.

$$5.123. b_{\min} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = 0,1 \text{ мкм.}$$

5.124. Якщо товщина плівки наближається до нуля, то різниця ходу утворюється тільки завдяки відбиттю однієї з інтерферуючих хвиль від густішого середовища. Вона дорівнює $\lambda/2$, що відповідає умові мінімуму для всіх довжин хвиль.

$$5.125. b_1 \approx 0,23 \text{ мкм}; b_2 \approx 1,13 \text{ мкм.}$$

$$5.126. b_{\min} \approx 89 \text{ нм.}$$

$$5.127. h = \frac{(2m+1)\lambda}{4\sqrt{n}} \text{ де } m = 0, 1, 2, \dots$$

5.128. Товщина просвітлювальної плівки задовольняє умову мінімуму відбиття для зеленого світла ($\lambda \approx 0,55 \text{ мкм}$). Тому для фіолетового і червоного країв видимого спектра відбиті хвилі підсилюються.

5.129. У світлі, що проходить, інтерферують хвилі, які пройшли безпосередньо та відбиті парне число разів від дзеркал. Тому проходить світло, довжина хвилі якого дорівнює подвоєній товщині шару діелектрика.

5.130. Світло відбивається як від верхньої, так і від нижньої поверхонь клина (рис. В.5.6). Для малих кутів α промені 1 і 2 можна вважати паралельними і оптична різниця їх ходу ($i = 0$) $\Delta = 2bn \pm \frac{\lambda}{2}$. Для темних смуг на поверхні різниця ходу дорівнює непарному числу півхвиль: $2b_m n + \frac{\lambda}{2} = \pm (2m+1) \frac{\lambda}{2}$, або $b_m = \frac{m\lambda_0}{2n}$, де b_m – товщина клина в місці, в якому спостерігається темна смуга з номером m . Темній смузі номера $m + N$ відповідає товщина b_{m+N} . Тоді кут α можна виразити з рис. В.5.6:

$$\alpha \approx \sin \alpha = \frac{b_{m+N} - b_m}{l} = \frac{N\lambda}{2nl}. \text{ Отже, } \lambda = \frac{2nl\alpha}{N} = 0,541 \text{ мкм.}$$

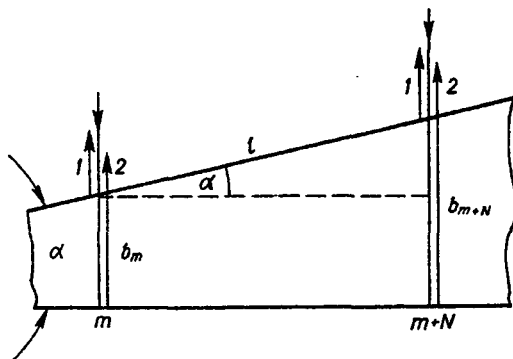


Рис. В.5.6

$$5.131. \Delta x = \frac{\lambda}{2n\alpha} = 3,15 \text{ мм.}$$

$$5.132. \alpha = 0,2'.$$

5.133. Стають сприятливішими умови часової та просторової когерентностей.

5.134. $\alpha = \lambda N / (2n) = 3,2'$. Відбиті хвилі будуть когерентними, якщо різниця ходу не перевищує довжину когерентності, інакше інтерференційні смуги зникають, тобто $2bn - \frac{\lambda}{2} \leq \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$, звідки $b \approx \frac{\lambda^2}{2n\Delta\lambda}$, оскільки $b \approx l\alpha$, $l = \frac{\lambda^2}{2n\alpha\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda N} = 2,5 \text{ см.}$

$$5.135. \lambda = n_1^2 \Phi / (n - 1) = 0,5 \text{ мкм.}$$

$$5.136. R = 15 \text{ м.}$$

$$5.137. \Delta r_2 = 0,34 \text{ мм.}$$

$$5.138. m_2 = 998.$$

$$5.139. n = k^2 = 1,46.$$

5.140. Фаза хвилі змінюється на π під час відбивання як від нижньої, так і від верхньої поверхонь прощарку. Внаслідок цього у відбитому світлі центральна пляма буде світлою. Кільця змінюють кольори на додаткові в разі освітлення білим світлом. У разі монохроматичного світла змінюється порядок розташування світлих і темних кілець.

$$5.141. n = m\lambda R / r_m^2 = 1,33; r_{m1} = \sqrt{r_m^2 - 2Rh} = 1,2 \text{ мм.}$$

$$5.142. r_m = \sqrt{\frac{m\lambda R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \text{ де } m = 0, 1, 2, \dots$$

$$5.143. \lambda \Delta N / 2 = d = 0,11 \text{ мм.}$$

5.144. а) Смуги рівного нахилу у вигляді концентричних кілець з центром у фокусі об'єктива зорової труби; фокусувати на нескінченність; оскільки максимальний порядок інтерференції розміщується в центрі, то зі збільшенням товщини повітряного зазору народжуються кільця більш високих порядків, тому смуги переміщуватимуться від центра; б) смуги рівної товщини, паралельні ребру повітряного клина; фокусувати на дзеркало; зі збільшенням товщини повітряного зазору (клин) кожна лінія рівної товщини, що відповідає постійній різниці ходу, переміщуватиметься до ребра клина.

5.145. Світлі кільця замінюються на темні й навпаки. Кільця зростають у радіусі, переміщуються від центра, народжуючись у центрі. Відбувається биття інтенсивності під час накладання світлових хвиль з близькими частотами: хвилі, відбитої нерухомим дзеркалом, і хвилі, відбитої рухомим дзеркалом, частота якої внаслідок ефекту Доплера дещо зсунута.

$$5.146. n_2 = 1,000\,312.$$

$$5.147. m = 81.$$

$$5.148. h = 1 \text{ мкм.}$$

5.149. а) Найбільший, $m = 2d/\lambda = 2 \cdot 10^5$; б) $m = 2d(\cos r)/\lambda = 199\,239$. Це забезпечує велику роздільну здатність еталона.

5.150. Внаслідок мализни довжин світлових хвиль.

5.151. Дифракційні смуги зникають. Оскільки розміри зон Френеля залежать від довжини хвилі, у разі немонохроматичного світла накладаються дифракційні картини, які не збігаються.

5.152. У центрі картини, що є чергуванням світлих і темних кілець, буде світла або темна пляма залежно від того, якою – парною чи непарною – буде кількість відкритих зон Френеля.

5.153. $r_3 = 866$ мкм.

5.154. $S_1 = S_2 = S_3 = 9,42$ мм².

5.155. Світлим. Кількість відкритих зон Френеля $m = D^2 / (4\lambda b) = 5$.

5.156. Світла, якщо $r = \sqrt{(2n-1)\frac{ab}{a+b}}\lambda$, і темна, якщо $r = \sqrt{2n\frac{ab}{a+b}}\lambda$, де $n = 1, 2, \dots$

5.157. Не залежить.

5.158. Зменшиться в 4 рази.

5.159. Скориставшись методом графічного додавання амплітуд, визначимо: а) $I = 4I_0$; б) $I = 2I_0$; в) $I = I_0$.

5.160. $I \approx I_0$.

5.161. $b_{\max} = r^2 / (2\lambda) = 1$ м.

5.162. Кількість зон Френеля, які вміщуються в отворі, буде поступово зменшуватись. Інтенсивність світла в точці P періодично сягає максимуму і мінімуму залежно від того, яка – парна чи непарна – кількість зон Френеля вміщується в отворі. Найбільша інтенсивність буде, коли в отворі вміщується лише одна зона Френеля, найменша інтенсивність відповідає двом зонам. У разі значного віддалення екрана, коли в отворі вміщується тільки частина першої зони Френеля, інтенсивність поступово зменшується до нуля.

5.163. $m = 3$.

5.164. $r = \sqrt{\frac{ab}{a+b}}\lambda = 0,68$ мм; а), б) зменшиться у 2 рази; в) дорівнюватиме нулеві;

г) зменшиться в 4 рази. В к а з і в к а. Скористатися векторною діаграмою додавання амплітуд.

5.165. За умов a, b – світло, за умови σ – темрява.

5.166. а) $h = \frac{(k+3/8)\lambda}{n-1}$; $h_{\min} = 0,45$ мкм; б) $h = \frac{(k+7/8)\lambda}{n-1}$; $h_{\min} = 1,05$ мкм;

в) $h = \frac{k\lambda}{n-1}$, або $h = \frac{(k+3/4)\lambda}{n-1}$; $h_{\min} = 0$, або $h_{\min} = 0,9$ мкм, де $k = 0, 1, 2, \dots$ В к а з і в к а.

Скористатися векторною діаграмою додавання амплітуд. Врахувати, що фаза світлових хвиль збільшується стрибкоподібно на межі виїмки на величину $\delta = 2\pi h(n-1)/\lambda$. Встановити відповідне умовам a, b, σ положення центра (фокуса) спіралі, що закручується.

5.167. Світла пляма в центрі геометричної тіні від непрозорого круглого диска (кулі) існує завжди, але інтенсивність світла (освітленість) у центрі тіні залежить від числа закритих диском зон. Інтенсивність плями Пуассона є дуже малою при розмірах перешкоди, великих порівняно з розмірами зон Френеля, коли номер першої відкритої зони Френеля великий. Крім того, краї перешкоди можуть не суміщуватись точно з краями зон Френеля. Нарешті, світло має бути когерентним.

5.168. Якщо диск видно під великим кутом з точки спостереження або із джерела, то ширина першої відкритої зони Френеля виявляється дуже малою (інтенсивність плями Пуассона мала).

5.169. а) Проходить ряд максимумів і мінімумів, осцилює зі згасанням; б) монотонно спадає до нуля. Так, дифракційні максимуми поблизу краю тіні в освітленій області. В к а з і в к а. Скористатися векторною діаграмою додавання амплітуд (спіраллю Корню).

5.170. $\Delta x \sim \sqrt{\lambda R} \approx 14 \text{ м.}$

5.171. $\varphi = 30^\circ$, $\varphi_1 = 22,08^\circ$.

5.172. $m \leq b/\lambda - 0,5 = 2$.

5.173. $b = 86 \text{ мкм.}$

5.174. $\Delta l = 5,1 \text{ мм; } l = 1 \text{ см.}$

5.175. $\lambda = b\Delta l/L = 0,63 \text{ мкм.}$

5.176. Див. рис. В.5.7; $I_1/I_0 = 0,045$;
 $I_2/I_0 = 0,016$; $I_3/I_0 = 0,0083$.

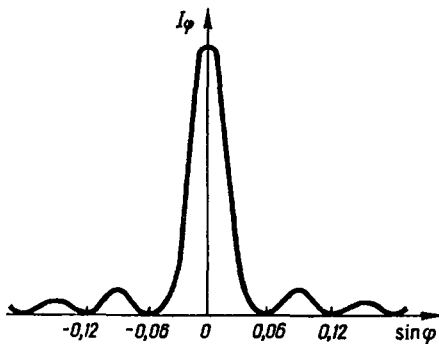


Рис. В.5.7

5.177. Критерієм класифікації дифракційних явищ є параметр $p = r_1/D$ – відношення радіуса r_1 першої зони Френеля до лінійних розмірів D отвору (або перешкоди). У нашому випадку $p = \sqrt{\lambda L}/b$. Якщо $p \ll 1$, то кількість

зон Френеля, що вміщує отвір, є великою і розподіл інтенсивності описується законами геометричної оптики (варіант в: $p = 0,1$). Якщо $p \approx 1$, то спостерігається дифракція Френеля (варіант б: $p = 1$). Якщо $p \gg 1$, то отвір перекриває малу частину першої зони Френеля, має місце дифракція Фраунгофера (варіант а: $p = 500$).

5.178. Дифракція Фраунгофера; $\Delta l = 2\lambda L/b = 2 \text{ см.}$

5.179. Область дифракції Фраунгофера простягається від нескінченності до деякої мінімальної віддалі. В області $b^2/(l\lambda) \ll 1$ дифракцію можна спостерігати без лінзи. Якщо використовувати лазерне випромінювання, то необхідність у лінзі, що формує паралельний пучок світла, і збиральній лінзі відпадає завдяки великій просторовій когерентності.

5.180. У разі дифракції Френеля інтенсивність у центрі буде пульсувати, проходячи поперемінно через максимуми й мінімуми, що не дорівнюють нулеві. У разі дифракції Фраунгофера інтенсивність змінюється монотонно, зі збільшенням ширини щілини центральний максимум стає різкішим, а при її звуужуванні кутовий розмір світлої смуги збільшується.

5.181. У разі дифракції Фраунгофера розподіл інтенсивності визначається тільки напрямом променів. Розподіл інтенсивності у фокальній площині збиральної лінзи завжди симетричний по відношенню до її осі незалежно від положення щілини.

5.182. Одержати дифракційну картину в повітрі й воді в монохроматичному світлі. Визначити кути φ_n і φ_v дифракції для максимуму одного порядку в повітрі й воді: $v = c/n = c\lambda_n/\lambda_n = c \sin \varphi_v / \sin \varphi_n$.

5.183. $\varphi_3 = 9^\circ$.

5.184. $m = 9$.

5.185. Не можуть. Спектри перекриваються за умови $0,76 \text{ м} > 0,4 (m + 1)$, отже, починаючи зі спектрів другого і третього порядків.

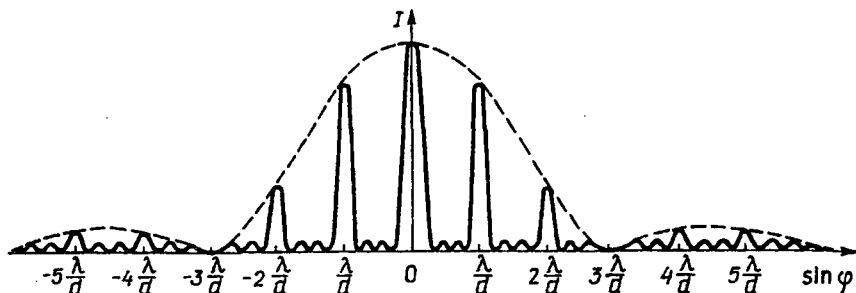


Рис. В.5.8

5.186. $d = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos \Delta\varphi}}{\sin \Delta\varphi} = 1.2 \text{ мкм}$, де $\lambda_1 = 400 \text{ нм}$, $\lambda_2 = 760 \text{ нм}$.

5.187. $\lambda = 520 \text{ нм}$. Область $600 \dots 780 \text{ нм}$ спектра другого порядку накладається на область $400 \dots 520 \text{ нм}$ у спектрі третього порядку.

5.188. $\Delta x = 7,04 \text{ см}$.

5.189. $\Delta\varphi = 5^\circ 54'$.

5.190. Див. рис. В.5.8. П'ять максимумів; не можуть спостерігатися $m = 3, 6, 9, \dots$ порядків; $I_2/I_0 = 0,17$.

5.191. $m = 4l$; $\delta\varphi_0 = 2 \arcsin \frac{\lambda}{Nd} = 1^\circ 26'$; $\delta\varphi_m = \arcsin \left(m + \frac{1}{N} \right) \frac{\lambda}{d} - \arcsin \left(m - \frac{1}{N} \right) \frac{\lambda}{d}$, звідки

$\delta\varphi_3 = 1^\circ 27'$.

5.192. а) Максимуми будуть у 2 рази рідшими; б) максимуми будуть у 2 рази гущішими; в) положення максимумів не зміниться.

5.193. $d = 2b$.

5.194. Зовнішні забарвлені у червонуватий колір, а внутрішні – у синій.

5.195. У спектрі ґратки не можуть з'явитися монохроматичні складові з частотами, яких немає у спектрі падаючого випромінювання.

5.196. У фокальній площині лінзи утворюються спектри, окремі монохроматичні компоненти яких розділені у просторі. Напруженість поля у фраунгоферовій дифракційній картині – це двовимірне перетворення Фур'є функції $E(x, y)$, яка описує поле хвилі в площині xOy у межах отвору. Дифракція дає змогу спостерігати окремі фур'є-компоненти цієї функції, отже, фізично здійснюється розкладання функції $E(x, y)$ у двовимірний інтеграл Фур'є.

5.197. $d = 293 \text{ нм}$.

5.198. $\lambda = 55,8 \text{ нм}$.

5.199. Так.

5.200. $\lambda = 151,7 \text{ нм}$.

5.201. Якщо пучок рентгенівських променів падає на деякі з кристалів полікристала так, що утворюється кут ковзання θ , то відбиті промені відхиляються від напрямку пучка на кут 2θ (рис. В.5.9), який визначається з умови $\lg 2\theta = r/l$. Тоді $d \approx m\lambda / 2\sin(0,5 \arctg(r/l)) = 184,3 \text{ нм}$.

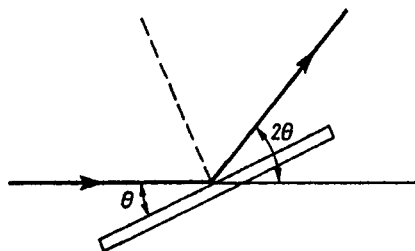


Рис. В.5.9

5.202. Кристалічна ґратка NaCl не є простою кубічною, оскільки містить різні іони – Na і Cl. Її слід розглядати як складну ґратку, утворену відповідно двома кубічними гранецентрованими ґратками іонів Na і Cl (див. розв'язання задачі 7.12). Розрахунок дає для такої ґратки параметр $a = \sqrt[3]{4M/(N_A \rho)}$, де $a = 2d$, d – віддаль між сусідніми іонами протилежних знаків.

Отже, $\lambda = \frac{2 \sin \theta}{m} \sqrt[3]{\frac{M}{2 \rho N_A}} = 244 \text{ нм}$.

5.203. $D_\varphi = \frac{m}{d \sqrt{1 - (m\lambda/d)^2}} = 4.1 \cdot 10^{-4} \text{ рад/нм}$; $D_l = 0.41 \text{ мм/нм}$.

5.204. $D_\varphi = (\tan \varphi)/\lambda = 3 \cdot 10^{-4} \text{ рад/нм}$.

5.205. $D_\varphi = (\tan \varphi)/\lambda$, або $D_\varphi = \frac{m}{d \sqrt{1 - (m\lambda/d)^2}}$.

5.206. $d = m\lambda / \sin \varphi = 3,9 \text{ мкм}$; $R = m/d = 15385$; $D_l = f(\tan \varphi)/\lambda = 0,44 \text{ мм/нм}$.

5.207. Ні, перекривання починається зі спектрів другого і третього порядків, через те що умова перекривання спектрів $m > 1,1$; у 6.3 раза.

5.208. Якщо $d \gg \lambda$, то ґратка є грубою, кути дифракції – малими. Малому періодові d відповідає велика кутова дисперсія у спектрах низьких порядків, які мають більшу інтенсивність. Збільшується можливість роздільного сприйняття близьких спектральних ліній. Зі зростанням кількості штрихів N при заданому d збільшується різкість головних максимумів та інтенсивність у максимумах ($I \sim N^2$).

5.209. $R = mN \leq \frac{Nd}{\lambda}$, довжиною робочої області Nd .

5.210. $N_1 = 982$; $N_2 = 491$; $l_1 = 9,8 \text{ мм}$; $l_2 = 4,9 \text{ мм}$.

5.211. $l = 1,12 \text{ см}$.

5.212. $R = 24000$; $\delta\lambda = 0,02 \text{ нм}$.

5.213. $N = 128$; $l = 177 \text{ мкм}$.

5.214. Так. При куті падіння, близькому до 90° .

5.215. У разі косоного падіння променів на ґратку проекція періоду ґратки на напрям, перпендикулярний до променя, відіграє роль нового періоду ґратки, який стає меншим. Це дає змогу одержувати чіткішу дифракційну картину й від більш коротких хвиль.

5.216. $d(\sin \varphi - \sin i) = \pm m\lambda$.

5.217. $\lambda = \frac{1}{Nm} (\sin \varphi - \sin i) = 381 \text{ нм}$.

5.218. а) $\lambda = d$; б) $\lambda = 2d$.

5.219. 1. Якщо $m = 0$, то $\varphi_0 = -\psi$, тобто напрям визначається дзеркальним відбиттям від площини ґратки. 2. По обидва боки від напрямку на максимум нульового порядку. 3. В ультрафіолетовій області 3 600...1 200 штрихів на 1 мм, у видимій області 1 200...600, в інфрачервоній 300...1.

5.220. Довжина когерентності джерела світла має бути більшою від максимальної різниці ходу між опорною і предметною хвилями. Такій умові відповідає лазер. У голографії потрібні джерела світла з високим ступенем часової та просторової когерентностей.

5.221. Дифракційне розширення пучка зумовлено хвильовою природою світла і принципово не може бути усунено; а) $\theta \sim 10^{-4}$ рад; б) $\theta \sim 0,05$ рад.

5.222. Найменша кутова відстань між точками, які ще видно окремо, становить $\delta\varphi = 35''$ (кутових секунд). Користуючись формулою (5.4.15), визначимо діаметр зіниці ока $d \approx 4$ мм.

5.223. Дифракція світла принципово обмежує збільшення, тому мінімальна відстань між двома точками, які роздільно видно в мікроскоп, $d \sim \lambda$, що значно більше за розміри молекули.

5.224. Збільшується роздільна здатність, а головне, збільшується кількість світлової енергії, якої набуває телескоп від небесних об'єктів.

$$\mathbf{5.225.} \ D_{\min} = 67,1 \text{ см.}$$

$$\mathbf{5.226.} \ R \approx 5,9 \text{ км.}$$

$$\mathbf{5.227.} \ S \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^2.$$

5.228. Монохроматичне світло завжди поляризоване, у загальному випадку еліптично.

$$\mathbf{5.230.} \ \frac{I_2}{I_1} = \frac{\cos^2 \varphi_2}{\cos^2 \varphi_1} = 3.$$

$$\mathbf{5.231.} \ \varphi = 45^\circ.$$

$$\mathbf{5.232.} \ \eta = \frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2 \cos^2 \varphi} = 9,88.$$

$$\mathbf{5.233.} \ \eta = \frac{I_0}{I_3} = \frac{2}{\tau^3 \cos^4 \varphi} = 85,73.$$

$$\mathbf{5.234.} \ \varphi = \arccos \sqrt{\frac{2E_2}{(1-k)^2 E_1}} = 58,24^\circ.$$

$$\mathbf{5.235.} \ I = \frac{I_0 \cos^4 \varphi}{2} = 0,28 I_0.$$

$$\mathbf{5.236.} \ n = 1,73; i_{B1} = 52,45^\circ.$$

$$\mathbf{5.237.} \ i_{B\min} = 45^\circ.$$

$$\mathbf{5.238.} \ i_B = 52,6^\circ.$$

$$\mathbf{5.239.} \ v = 2,26 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

$$\mathbf{5.241.} \ \alpha = 37^\circ.$$

$$\mathbf{5.242.} \ n = 1,63; i \geq 67^\circ.$$

$$\mathbf{5.243.} \ \alpha = 2 \arctg (n_2/n_1) + \pi/2 = 173,12^\circ.$$

5.244. Якщо падаюче світло поляризоване в площині падіння, а кут падіння дорівнює куту Брюстера; $i_B = \arctg(n_2/n_1) = 48,4^\circ$.

$$5.245. I_1 = \frac{1}{2} I_{np}(1-k); P_1 = 1.$$

$$5.246. \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1+\rho}{1-\rho} = 7.$$

$$5.247. P = \frac{1}{1 + 2 \sin^2 \beta / (k-1)} = 0,67.$$

$$5.248. \frac{I_{np}}{I_{пол}} = 0,48; P = 0,68.$$

$$5.249. \frac{I_{np}}{I_{пол}} = \frac{1}{P} - 1 = 4.$$

5.250. $\Delta = \frac{\cos^2(i-r) - \cos^2(i+r)}{\cos^2(i-r) + \cos^2(i+r)} = 0$ (у разі нормального падіння різниця між $I_{\perp}$ і $I_{\parallel}$ зникає, бо поняття площини падіння не має сенсу); 0,93; 1; 0, де i – кут падіння; r – кут заломлення, $r = \arcsin \frac{\sin i}{n}$.

5.251. $\Delta = -0,004; -0,026; -0,058; -0,165$. У разі заломлення природного світла $\Delta < 0$, що за визначенням ступеня поляризації відповідає переважній поляризації в площині падіння.

$$5.252. \Delta = \frac{4n^2 - (n^2 + 1)^2}{4n^2 + (n^2 + 1)^2} = -0,04.$$

$$5.253. \rho = \frac{(n^2 - 1)^2}{2(n^2 + 1)^2} = 3,86 \cdot 10^{-2}.$$

$$5.254. I_o/I_e = \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

$$5.255. 0.$$

5.256. Пропустити плоскополяризоване світло крізь пластинку у чверть хвили, установлену так, що її оптична вісь утворює кут 45° з площиною коливань світла.

$$5.257. \Delta = d(n_o - n_e) = 0,182 \text{ мкм}.$$

$$5.258. d_{\min} = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)} = 0,85 \text{ мкм}; \text{ еліптично поляризованим}.$$

5.260. Лінійно поляризованим. Пластинка у півхвилі зберігає лінійну поляризацію світла, але змінює напрям коливань.

$$5.261. d_{\min} = 3,42 \text{ мкм}.$$

$$5.263. c_1 = 10 \text{ \%}.$$

$$5.264. c = 0,2 \text{ г/см}^3.$$

$$5.265. d_2 = \varphi_2 d_1 / \varphi_1 = 4,5 \text{ мм}.$$

$$5.266. d = 3,03 \text{ мм}; \text{ вирізати перпендикулярно до оптичної осі}; \text{ так}.$$

5.267. $B = 0,13$ Тл; поле спрямоване проти ходу світлового пучка. При зворотному ході світла поворот площини поляризації подвоїться, вона стане перпендикулярною до напрямку пропускання першого поляризатора, світло не проходитьиме.

$$5.268. E = 1/(2\sqrt{B}) = 1,5 \text{ МВ/м.}$$

5.269. Різниця фаз між коливаннями звичайного і незвичайного променів $\delta = \pi/2$, світло стає еліптично поляризованим і проходить крізь аналізатор.

$$5.270. U = \frac{\lambda}{4\alpha} = 4,2 \text{ кВ.}$$

$$5.271. n_2 = 1,0008; n_3 = 1,00024.$$

$$5.272. n_2 = \sqrt{\frac{(n_1^2 - 1)p_2 T_1}{p_1 T_2} + 1} = 1,007761.$$

5.273. Показник заломлення води визначається її діелектричною проникністю $n = \sqrt{\epsilon}$, остання – поляризованістю речовини. Вода, яка складається з полярних молекул, в електричному полі зазнає орієнтаційної поляризації. Якщо поляризація середовища зумовлена електромагнітною хвилею, то вона змінюється з тією самою частотою ω , що й змінне електричне поле електромагнітної хвилі. Для низьких частот ($\omega < 10^{10} \text{ с}^{-1}$, діапазон радіохвиль) період зміни напруженості електричного поля $T = 2\pi/\omega$ є набагато більшим, ніж час встановлення рівноваги молекул (час релаксації). Тому діелектрична проникність $\epsilon(\omega)$ має таке саме значення, що й у постійному електричному полі ($\epsilon = 81$). Відповідний показник заломлення радіохвиль $n = \sqrt{81} = 9$. За дуже високих частот оптичного діапазону дипольні моменти молекул не встигають повертатися вздовж поля. Тоді діелектрична проникність буде меншою за своє статичне значення, для води набуває значення $\epsilon = 1,77$, відповідно показник заломлення $n = \sqrt{1,77} = 1,33$.

$$5.274. N = 4\pi^2 \epsilon_0 m (1 - n^2) / (e^2 \lambda^2) = 2,13 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}.$$

5.275. $n^2 = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$, де $\omega_p^2 = Ne^2 / (m\epsilon_0)$; ω_p – плазмова частота; $n = 1 - 1,4 \cdot 10^{-6}$. Оскільки $n \rightarrow 1$, то середовище стає прозорим для проходження променів. Таке значення n зумовлює широке застосування рентгенівських променів у медицині та техніці.

5.276. Ні. Монохроматична хвиля може поширюватись із фазовою швидкістю $v > c$, а швидкість сигналу (групову швидкість) не може перевищувати c . Монохроматична нескінченна хвиля не передає сигналу.

5.277. $n^2 = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$, де $\omega_p^2 = Ne^2 / (m\epsilon_0)$; а) $n < 1$, тобто для коротких радіохвиль іоносфера є оптично менш густою, ніж повітря, і при деяких кутах падіння відбувається повне відбиття коротких радіохвиль від іоносфери, що використовується в радіозв'язку; б) $n \rightarrow 1$, радіохвилі вільно проходять крізь іоносферу.

$$5.278. v \approx c \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \text{ де } \omega_p^2 = Ne^2 / (m\epsilon_0); u = c^2 / v.$$

$$5.279. \text{ а) } u = v/2; \text{ б) } u = 3v/2; \text{ в) } u = 2v; \text{ г) } u = v/3.$$

$$5.280. \tau_1 = 0,9; \tau_2 = 0,026.$$

5.281. а) На 2 %; б) на 98,2 %.

5.282. а) У 1,041 раза; б) у 1,13 раза; у $1,63 \cdot 10^5$ раза.

5.283. $E_0/E = 8,4 \cdot 10^9$.

5.284. Згідно із законом Релея короткі хвилі (фіолетова частина спектра) розсіюються значно сильніше. Пряме сонячне світло (зоря) збагачене червоними променями. Колір неба був би чорним. Якби дисперсія була значною, а поглинання і розсіювання слабкими, то сонячні промені під час сходу або заходу Сонця розділялись би за кольорами. Спочатку колір Сонця був би синім, потім зеленим і т. д.

5.285. $I_c/I_q \approx 4$.

5.286. Світло, що проходить крізь речовину, спричиняє коливання електронів в атомах. Відбувається перевипромінювання. Потужність випромінювання вторинних хвиль зарядом, що коливається, пропорційна четвертому степеню частоти.

5.287. Якщо розміри частинок (крапель води), на яких відбувається розсіювання світла, значно перевищують довжину світлової хвилі ($r \gg \lambda$), то інтенсивність розсіяного світла не залежить від λ .

5.288. $\theta_2 = 49,1^\circ$.

5.289. У разі взаємного зближення джерела і спостерігача у формулі (5.6.5) $\theta = \pi$.

Враховуючи, що $v = c/\lambda$, одержимо $\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$, звідки $\lambda_0 = 608$ нм.

5.290. $v = \frac{c(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = 49,7 \cdot 10^3$ км/с, де c – швидкість світла у вакуумі.

5.291. $\Delta\lambda = \lambda_0 \left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \right) = 109$ нм.

5.292. $v = 0,93$ с.

5.293. а) $\frac{\Delta v}{v_0} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 = 6,7 \cdot 10^{-3}$; б) $\frac{\Delta v}{v_0} \approx \frac{\beta^2}{2} = 2,2 \cdot 10^{-5}$.

5.294. $v = v_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$. Оскільки $v \ll c$, то за формулами наближених обчислень

$v = v_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right)$, звідки $\lambda_0 = \frac{v}{\Delta v} = 56$ см.

5.295. Від нелазерних джерел $E \approx 0,1 \dots 10$ В/см, від лазерних джерел $E \approx 10^6 \dots 10^7$ В/см.

5.296. Під час взаємодії сильного світлового поля з речовиною проявляється нелінійна залежність між поляризованістю P діелектрика та напруженістю E електричного поля світлової хвилі. У лазерних пучках напруженість електричного поля світлової хвилі може сягати $10^6 \dots 10^8$ В/см, тобто є близькою до напруженостей полів усередині атома. Оптичні характеристики середовища (показник заломлення, коефіцієнт поглинання та ін.) починають нелінійно залежати від E . Виникають принципово нові ефекти – зменшення коефіцієнта поглинання зі зростанням інтенсивності світла, подвоєння частоти, самофокусування світла тощо.

5.297. Нехай на поверхню середовища падає монохроматична світлова хвиля, напруженість електричного поля якої

$$E = E_0 \cos(\omega t - kz). \quad (1)$$

Рівняння вимушених коливань пружинно-в'язаного електрона, який перебуває під дією електричного поля напруженістю E , має вигляд (без урахування згасання)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE(t)}{m}. \quad (2)$$

Частинний розв'язок цього рівняння дає зміщення x електрона з положення рівноваги:

$$x(t) = \frac{eE(t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (3)$$

Якщо відхилення x не можна вважати малим, то в розкладанні потенціальної енергії атомного осцилятора $U(x)$ за степенями x

$$U = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{3}\beta x^3 + \frac{1}{4}\gamma x^4 + \dots \quad (4)$$

треба враховувати члени більш високого порядку, ніж квадратичний член, який припускає квазіпружний характер діючої сили. Обмежуючись другим членом, одержуємо рівняння руху електрона

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{\beta}{m} x^2 = \frac{e}{m} E, \quad (5)$$

де β – параметр ангармонічності. Вважаючи $\frac{\beta}{m} x^2 \ll \omega_0^2 x$, рівняння (5) можна розв'язувати методом теорії збурень. Зобразимо розв'язок у вигляді суми

$$x = x_{\text{л}} + x_{\text{нл}}, \quad (6)$$

де $x_{\text{л}}$ – розв'язок (3) лінійного рівняння (2), а $x_{\text{нл}}$ – розв'язок нелінійного, причому $x_{\text{нл}} \ll x_{\text{л}}$. Підставляючи (6) у (2) і відкидаючи члени більш високого порядку мализни, одержуємо лінійне неоднорідне рівняння, права частина якого є відомою:

$$\ddot{x}_{\text{нл}} + \omega_0^2 x_{\text{нл}} = -\frac{\beta}{m} x_{\text{л}}^2. \quad (7)$$

Враховуючи тригонометричне співвідношення $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$, з (1) та (3) маємо

$$x_{\text{л}}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right)^2 (1 + \cos 2(\omega t - kz)). \quad (8)$$

У правій частині лінійного неоднорідного диференціального рівняння (7) збурювальна сила має дві компоненти – таку, що не залежить від часу, і таку, що змінюється з часом з подвійною частотою 2ω .

Розв'язок (7) визначиться суперпозицією розв'язків, що відповідають дії кожної компоненти збурювальної сили зокрема. Отже,

$$x_{\text{нл}} = -\frac{1}{2} \frac{\beta}{m} \left(\frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right)^2 \left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{\cos 2(\omega t - kz)}{\omega_0^2 - (2\omega)^2} \right). \quad (9)$$

Поляризованість P можна зобразити у вигляді, який містить лінійні і нелінійні члени:

$$P = eNx = eNx_{\text{л}} + eNx_{\text{нл}} = P_{\text{л}} + P_{\text{нл}}, \quad (10)$$

де N – концентрація атомів речовини. Перший доданок у $P_{\text{нл}}$ описує статичну поляризованість (оптичне детектування). Другий доданок описує поляризованість, яка змінюється з частотою 2ω . Внаслідок цього атом буде перевипромінювати на частоті ω , а також на частоті 2ω другої оптичної гармоніки.

5.298. За допомогою пластин з кристала KDP або ніобату барію, вирізаних певним чином.

5.299. Показники заломлення на частотах ω і 2ω мають бути однаковими $n(\omega) = n(2\omega)$. Ця умова називається фазовим або просторовим синхронізмом початкової хвилі та її другої гармоніки. В ізотропних середовищах виконання умови фазового синхронізму є неможливим. Однак її можна здійснити між звичайною і незвичайною хвилями в деяких кристалах, наприклад, у кристалі дигідрофосфату калію KDP у напрямі, який становить певний кут з оптичною віссю.

5.300. $V = 2 \cdot 10^8$ м/с.

5.301. $\theta = 33,6^\circ$.

5.302. а), в) Так; б) ні.

5.303. Для електронів буде, для α -частинок – ні.

ДО РОЗДІЛУ 6

6.1. Ні, не існують. Якщо отвір досить малий, то промінь, який потрапляє крізь нього до порожнини, зазнає багато відбиттів перед тим, як вийти назовні. При кожному відбитті має місце часткове поглинання світла стінками порожнини, і тому світло, що виходить крізь отвір з порожнини, має значно меншу інтенсивність, ніж те, що потрапляє до неї. Спектральний склад випромінювання, яке поглинається таким отвором, близький до складу випромінювання абсолютно чорного тіла. Пляшка з чорного скла краще поглинає падаюче на нього випромінювання, ніж пляшка з посрібленими стінками. Швидше охолоне пляшка з чорного скла, бо вона краще випромінює.

6.2. Тіло світитиметься кольором, додатковим до червоного. Колір тіла зумовлений його прозорістю для випромінювання певної частоти (або діапазону частот): якщо тіло має червоний колір, то воно не поглинає випромінювання, яке цьому кольору відповідає, і не випромінює його.

$$\mathbf{6.3.} \quad T = \sqrt[4]{P/(\sigma S)} = 815 \text{ К}.$$

$$\mathbf{6.4.} \quad T = \sqrt[4]{P/(4\pi\sigma aR^2)} = 1224 \text{ К}.$$

$$\mathbf{6.5.} \quad a = E/(\sigma T^4 S) = 1,23 \cdot 10^{-3}.$$

6.6. $T_3 = T_C \sqrt{R/(2R_0)} = 280$ К, де R – радіус Сонця; R_0 – середній радіус земної орбіти.

6.7. Ні.

$$6.8. \lambda_{\max} = b \sqrt{\frac{\sigma a S}{(1-\eta)P}} = 1,11 \text{ мкм.}$$

6.9. $\Delta m = (4\pi\sigma/c^2)(b/\lambda_{\max})^4 R^2 t = 1.38 \cdot 10^{17}$ кг. Використати співвідношення Ейнштейна $\Delta m = E/c^2$; $R_e = \sigma(b/\lambda_{\max})^4 = 64,17$ МВт/м²; $\Phi = 4\pi\sigma(b/\lambda_{\max})^4 R^2 = 3.95 \cdot 10^{20}$ МВт; $I = P/S = \sigma(b/\lambda_{\max})^4 (R/R_0)^2 = 1.40$ КВт/м², де R – радіус Сонця; R_0 – радіус земної орбіти.

6.10. $T = \left(18\sigma t / (\rho c d) + (\lambda_{\max}/b)^3\right)^{-\frac{1}{3}} = 1791$ К. Під час зниження температури на dT куля віддає кількість теплоти $dQ = -cmdT$, де c – питома теплоємність матеріалу кулі; m – її маса, $m = \pi r d^3/6$; ρ – густина. Вважаючи, що вся теплота витрачається кулею на випромінювання, маємо $dQ = \sigma T^4 S dt = \pi\sigma T^4 d^2 dt = -cmdT$. З наведених співвідношень маємо $dt = -cd\rho dT / (6\sigma T^4)$, звідки, використовуючи (6.1.5), одержуємо відповідь.

6.11. Ні, не буде. Розподіл за частотами, який описується формулами (6.1.2), (6.1.3), встановлюється внаслідок процесів поглинання, спонтанного та вимушеного випромінювання квантів. Жоден з цих процесів не має місця при взаємодії квантів з вільними електронами: відповідно до умов задачі основним процесом є комптонівське розсіяння, яке не спричиняє вказаних розподілів.

$$6.12. \lambda = h/(m_e c) = 2.4 \cdot 10^{-12} \text{ м}; m = h/(\lambda c) = 1.8 \cdot 10^{-31} \text{ кг.}$$

$$6.13. m = (p/(2c)) \cos \theta = 10^{-32} \text{ кг.}$$

$$6.14. n = I/(h\nu) = 10^{24} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

6.15. Системи відліку, в якій фотон перебуває в стані спокою, немає.

$$6.16. N = P\lambda/(hc) = 1.4 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}.$$

$$6.17. \langle j \rangle = n = N/(4\pi l^2) = P\lambda/(4\pi hcl^2) = 6 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

6.18. Припускаючи, що випромінювання кванта є можливим, із законів збереження енергії та імпульсу маємо $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_\gamma$, $E = E_1 + \epsilon$, де $\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_\gamma$, E, E_1, ϵ – імпульси та енергії електрона відповідно до і після випромінювання кванта, а також імпульс та енергія кванта. Оскільки електрон вільний, то можна перейти до системи відліку, в якій $\mathbf{p} = 0$. Тоді, використовуючи наведені співвідношення, а також відому з теорії відносності рівність $E^2 = c^2(p^2 + m^2 c^2)$, маємо $c^2 p_1^2 + \epsilon^2 + 2E_1 \epsilon = 0$. Ця рівність не може виконуватись, оскільки всі члени в її лівій частині є додатними, що свідчить про хибність зробленого припущення. Так само доводиться неможливість поглинання кванта.

6.19. Дзеркальна; так, залежить.

$$6.20. p = (h\nu/\lambda)(1 + \rho) = 0,19 \text{ МПа.}$$

$$6.21. N = F\lambda / (h(1 + \rho)) = 8 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}.$$

$$6.22. \lambda_0 = hc/A, \quad v_{\max} = \sqrt{2(A - hc/\lambda)/m_e}; \text{ для цезію } \lambda_0 = 630 \text{ нм, } v_{\max} = 1,27 \cdot 10^6 \text{ м/с; для натрію } \lambda_0 = 540 \text{ нм, } v_{\max} = 1,22 \cdot 10^6 \text{ м/с; для платини } \lambda_0 = 235 \text{ нм, } v_{\max} = 6,6 \cdot 10^5 \text{ м/с; для цинку } \lambda_0 = 310 \text{ нм, } v_{\max} = 9,4 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

$$6.23. T_{\max} = hc/\lambda - A = 8,21 \text{ еВ; } \langle E \rangle = 3kT/2 = 3,9 \cdot 10^{-2} \text{ еВ; } T_{\max} \gg \langle E \rangle.$$

$$6.24. \varepsilon = m_e c^2 \left(1 / \sqrt{1 - v^2/c^2} - 1 \right) = 1,49 \text{ МеВ; } p = \varepsilon/c = 7,92 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с; } m = 2,64 \cdot 10^{-30} \text{ кг.}$$

$$6.25. \text{ а) } v_{\max} = \sqrt{2hc/(\lambda m_e)} = 3,83 \cdot 10^7 \text{ м/с; б) } v_{\max} = c \sqrt{1 - 1 / \left(1 + \varepsilon / (m_e c^2) \right)^2} = 0,97c.$$

Взяти до уваги, що заданим довжинам хвиль випромінювання відповідають енергії квантів ε , які задовольняють умову $\varepsilon \gg A$ (A – робота виходу), і у співвідношенні (6.1.10) можна знехтувати першим доданком. За умови а) маємо також $\varepsilon \ll m_e c^2$, і тому для кінетичної енергії частинки використовується нерелятивістський вираз, за умови б) $\varepsilon \gg m_e c^2$ і використовується релятивістський вираз.

$$6.26. Q = (e\eta P / (\hbar\omega))^2 R t = 0,17 \text{ кДж.}$$

$$6.27. \Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = 8,40 \cdot 10^{-26} \text{ кг} \cdot \text{м/с, де } p_1 - \text{імпульс, що надає пластинці випущений електрон, } p_1 = 0,5 \sqrt{2m(hc/\lambda - A)}; p_2 - \text{імпульс, який передається їй поглинутим фотоном, } p_2 = h/\lambda.$$

6.28. $\phi = hc/(e\lambda) = 62,06 \text{ В}$. Взяти до уваги, що заряджена пластинка гальмує електрони, випущені під дією випромінювання: порівнюючи значення робіт виходу для металів та енергію квантів $\varepsilon = hc/\lambda$, бачимо, що роботою виходу можна нехтувати.

$$6.29. h = e\lambda_1\lambda_2(U_2 - U_1)/(c(\lambda_1 - \lambda_2)) = 6,52 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с; } A = hc/\lambda_{1,2} - eU_{1,2} = 2,39 \text{ еВ.}$$

6.30. Вільними вважаються електрони, енергія зв'язку яких є значно меншою, ніж енергія налітаючих квантів. Не спостерігається, тому що максимальна комптонівська зміна довжини хвилі $\Delta\lambda = 2\lambda_c$ значно менша від довжини хвиль оптичного діапазону, а також тому що енергія фотонів видимого світла приблизно дорівнює енергії зв'язку електрона в атомі.

6.31. а) У цьому разі відбувається відносно збільшення кількості вільних електронів; б) розсіяння зі зменшенням частоти відбувається тільки на вільних електронах, властивості яких не залежать від природи речовини.

$$6.32. \Delta\lambda_{\max} = 2\lambda_c = 2h/(m_0c), \text{ де } m_0 - \text{маса розсіювача; для електрона } \Delta\lambda_{\max} = 4,85 \text{ пм; для протона } \Delta\lambda_{\max} = 2,64 \text{ фм.}$$

$$6.33. \lambda'_1 = \lambda + \Delta\lambda_1 = \lambda + 2\lambda_c \sin^2(\theta_1/2) = 7,42 \text{ пм; } \lambda'_2 = \lambda + \Delta\lambda_2 = \lambda + 2\lambda_c \sin^2(\theta_2/2) = 9,84 \text{ пм;}$$

$$T = \frac{hc}{\lambda} \frac{\Delta\lambda/\lambda}{1 + \Delta\lambda/\lambda}, T_1 = 0,08 \text{ MeB}, T_2 = 0,12 \text{ MeB}; E = T + m_e c^2, E_1 = 0,52 \text{ MeB},$$

$$E_2 = 0,63 \text{ MeB}; p = \sqrt{E^2 - (m_e c^2)^2} / c, p_1 = 1,53 \cdot 10^{-22} \text{ кг}\cdot\text{м/с}, p_2 = 2,0 \cdot 10^{-22} \text{ кг}\cdot\text{м/с}.$$

6.34. $\Delta\lambda = (T/(\varepsilon - T))\lambda = 1,34 \text{ пм}$, де T – кінетична енергія електрона віддачі,

$$T = m_e c^2 \left(1 / \sqrt{1 - v^2/c^2} - 1 \right); \varepsilon - \text{енергія падаючого фотона}, \varepsilon = hc/\lambda; \theta = 2 \arcsin \sqrt{\frac{\Delta\lambda}{2\lambda_c}} = 63^\circ 30'.$$

6.35. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{1 + \lambda_c/\lambda}$. Використати закон збереження імпульсу.

6.36. $\lambda_e/\lambda_p = \sqrt{m_p/m_e} = 43$, де m_p, m_e – маси відповідно протона і електрона.

6.37. Принцип дії електронного, протонного та іонного мікроскопів полягає у використанні хвильових властивостей відповідних частинок для дослідження матеріальних об'єктів. Оскільки найменша відстань, яку можна розрізнити (на екрані, фотопластинці тощо), пропорційна довжині хвилі, то найбільшу роздільну здатність за даної умови матиме іонний мікроскоп.

6.38. а) $\lambda = h/(mv_1) = 7,36 \cdot 10^{-10} \text{ м}$; б) $\lambda = h/\sqrt{2emU} = 7,20 \cdot 10^{-12} \text{ м}$; в) $\lambda = h/\sqrt{2mkT} = 1,78 \cdot 10^{-10} \text{ м}$; г) $\lambda = h/(mv_2) = 6,62 \cdot 10^{-31} \text{ м}$.

6.39. $\lambda' = \frac{n+1}{n-1} \lambda = 3 \text{ пм}$.

6.40. $v = h/(mb \sin(\Delta\varphi/2)) = 8,43 \cdot 10^4 \text{ м/с}$.

6.41. $n = 43$.

6.42. $\Delta x = h l / (d \sqrt{2mT}) = 7,36 \text{ мкм}$.

6.43. Для нерелятивістської частинки $v = \omega/k = \hbar k/(2m)$, $u = d\omega/(dk) = \hbar k/m = p/m$, де ω – циклічна частота, k – хвильове число хвилі де Бройля частинки, p – її імпульс, m – маса; зі швидкістю частинки в ньютонівській механіці збігається вираз для групової швидкості. Для релятивістської частинки $v = c \sqrt{1 + (m_0 c/(\hbar k))^2}$, $u = c / \sqrt{1 + (m_0 c/(\hbar k))^2}$, де m_0 – маса спокою частинки. З формули для фазової швидкості для релятивістської частинки бачимо, що для неї $v > c$; проте це не суперечить твердженню про граничний характер швидкості світла. Це твердження стосується швидкості сигналу, яка зв'язана з груповою швидкістю.

6.44. Спрямуємо вісь Ox уздовж щілини; тоді внаслідок дифракції хвиль де Бройля під час проходження крізь щілину частинка набуватиме складову імпульсу вздовж цієї осі: $p_x = p \sin \varphi$. За міру невизначеності імпульсу частинки вважатимемо розкид даної проекції в межах центрального дифракційного максимуму, тобто $|\Delta p_x| = 2p |\sin \varphi|$, де $\sin \varphi = \pm \lambda/b$, $\lambda = h/p$. Використовуючи наведені співвідношення, одержуємо $|\Delta p_x| = 4\pi \hbar / b$, або $|\Delta p_x| > \hbar / b$.

6.45. $\Delta v/v \sim h/(l \sqrt{2m_e T}) \approx 10^{-4}$.

6.46. $v_p \sim 10^7$ м/с. Будемо розглядати розмір ядра як невизначеність координати електрона. Для оцінки його швидкості, виходячи з нерелятивістського співвідношення $v \sim \hbar/(m_e r_n)$, одержуємо $v \approx 10^{11}$ м/с, що перевищує швидкість світла у вакуумі і свідчить про те, що електрони, наявність яких у ядрі передбачається, мають бути релятивістськими. Тоді з рівності (6.2.2) випливає, що $\Delta p r_n \geq \hbar$, звідки $r_n \geq \hbar/\Delta p$. Доцільно вважати, що $p \geq \Delta p$, тоді $r_n \geq \hbar/p$. Вказана нерівність має виконуватись при будь-якому імпульсі релятивістського електрона, зокрема при комптонівському імпульсі $p = \hbar/\lambda_c$, тобто має виконуватись нерівність $r_n \geq \lambda_c/(2\pi)$. Підставляючи значення r_n та λ_c , бачимо, що ця нерівність не виконується, тобто електрони не можуть бути локалізованими в об'ємі ядра.

6.47. Ні. Користуючись виразами для швидкостей молекул, знайдемо імпульс частинки p та її дебройлівську довжину хвилі λ . Виявляється, що $\lambda \sim 10^{-17}$ м. Радіус частинки $r = \sqrt[3]{3m/(4\pi\rho)} \sim 10^{-6}$ м; отже, маємо $\lambda \ll r$. Це означає, що у даному випадку поняття траєкторії набуває змісту.

6.48. $\Delta x \approx \hbar/(d\sqrt{2m_e eU}) \approx 10^{-9}$ м. Вважаючи кут між віссю електронного пучка та напрямом на периферію плями малим, покласти $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$.

6.49. Ні. Кінетична енергія є функцією імпульсів, а потенціальна – функцією координат. Внаслідок співвідношень невизначеностей (6.2.2) кінетична й потенціальна енергії не можуть водночас мати визначені значення.

6.50. $\Delta E \approx \hbar/\tau \approx 66$ нВ; $\tau_1 \approx \hbar/\Delta E \approx 6,6 \cdot 10^{-17}$ с.

6.51. $\Delta E/E \approx \hbar/(E\tau) \approx 4,7 \cdot 10^{-13}$; $\frac{\Delta E/E}{\Delta E_H/E_H} \approx 2,4 \cdot 10^{-5}$.

6.52. Нерівність a може виконуватись, нерівність b – ні. Вираз $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV$ означає ймовірність перебування частинки в об'ємі dV у момент часу t , і тому $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV < 1$. Проте $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ може бути й більшим за одиницю.

6.53. Ні. Інтенсивність хвилі де Бройля визначає не енергію частинки, а розподіл ймовірностей перебування її в різних областях простору. Хвильову функцію в досліді виміряти не можна, бо вона не описує поширення коливань реальних фізичних величин, які б діяли на вимірювальний прилад.

6.54. в), г) Ні; зокрема, для вільної частинки з визначеним імпульсом, як випливає з (6.2.7), $|\Psi_p(\mathbf{r}, t)|^2 = \text{const}$. Це означає, що ймовірність перебування такої частинки поблизу будь-якої точки простору та сама; у свою чергу, це веде до розбіжності інтеграла у (6.2.6).

6.55. Так само, як другий закон Ньютона є законом руху в класичній механіці, часові рівняння Шредінгера є законом руху у квантовій. Для того щоб визначити за допомогою цього рівняння хвильову функцію в будь-який момент часу, слід знати її значення у початковий момент.

6.56. Підставляючи у (6.3.1) наведений в умові вираз, маємо

$$i\hbar\psi(\mathbf{r})\frac{dT}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}T\Delta\psi + U(\mathbf{r})T\psi, \text{ або } \frac{i\hbar dT/dt}{T} = \frac{(-\hbar^2/(2m))\Delta\psi + U(\mathbf{r})\psi}{\psi}.$$

Оскільки аргументом функції лівої частини цього співвідношення є час t , а праворуч – просторові координати, то рівність цих частин означає, що вони не залежать від своїх змінних і кожна з них дорівнює деякій сталій α , тобто $\frac{i\hbar}{T} \frac{dT}{dt} = \alpha$, $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + U(r)\psi = \alpha\psi$. Перше з цих рівнянь має розв'язок $T(t) = Ae^{(-i/\hbar)\alpha t}$, який є періодичним за часом.

6.57. Для плоскої хвилі доданок $\Delta\psi$ треба взяти у прямокутних координатах, а для сферичної – у сферичних. Так, вони описують стаціонарний стан з енергією $E = \hbar\omega$.

6.58. Існують, бо рівняння (6.3.1) є диференціальним рівнянням першого порядку за часом, а класичне хвильове рівняння – другого.

6.59. Ні, оскільки вона не підлягає рівнянню (6.3.1), у чому можна переконатися прямою підстановкою.

6.60. Ні, бо вона є суперпозицією стаціонарних станів з різними енергіями. Ні.

6.61. Розв'язки рівняння (6.3.5) залежать від енергії як від параметра. З іншого боку, ці розв'язки мають задовольняти певну граничну умову (так, із співвідношення (6.2.6) випливає, що $|\psi|^2$ має бути функцією, інтегрованою на нескінченності). Це можливо лише за певних значень параметра E , які і є дозволеними значеннями енергії квантово-механічної системи.

6.62. $\psi_p(r) = Ae^{(i/\hbar)pr}$. Знаки плюс-мінус відповідають рухові частинки в протилежних напрямках. Оскільки $|\psi_p(r)|^2 = A^2 = \text{const}$, то ймовірність перебування частинки у всіх областях простору є однаковою, тобто в частинки немає визначеної координати (для неї $|\Delta x| = |\Delta y| = |\Delta z| \rightarrow \infty$), бо вона має визначений імпульс. Можна, оскільки частинка вільна, то для неї в просторі немає виділених точок, тобто має бути $|\psi_p(r)|^2 = A^2 = \text{const}$.

6.63. $\nu = E/\hbar = 9,09 \cdot 10^{15}$ Гц; $E = \hbar^2/(2m\lambda^2) = 37,62$ еВ.

6.64. Неперервний, енергія частинки не квантується, бо немає ніяких обмежень на неї у вигляді граничних умов. Порівняно з класичним описанням новим тут виявляється узгодження з принципом невизначеності для координат та імпульсів (6.2.2).

6.65. $\Delta E_{n,n+1} \sim 1/(m a^2)$. У загальному випадку $\Delta E_{n,n+1}/E_n = (2n+1)/n^2$; для $n = 1$ $\Delta E_{n,n+1}/E_n = 3$; для $n = 10$ $\Delta E_{n,n+1}/E_n = 0,21$. Зі зростанням n знайдене відношення прямує до нуля, тобто при цьому зменшується ефект квантування енергії, а разом з ним зменшується похибка у разі заміни квантового підходу на класичний.

6.66. $E_{a1,2} = \frac{1,5\pi^2\hbar^2}{m_e a_a^2} = 4,51$ еВ; $E_{a1,2} = \frac{1,5\pi^2\hbar^2}{m_N a_a^2} = 25,35$ МеВ; тут m_e – маса електрона, m_N – маса нуклона.

6.67. $m = \frac{\pi^2\hbar^2}{2E_1 a^2} = 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг.

$$6.68. a = \sqrt{1,5\pi^2 \hbar / (m_e \omega)} = 5,85 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

$$6.69. w_1 = \int_{a/3}^{2a/3} |\psi_1(x)|^2 dx = 0,61; \quad w_2 = \int_{2a/3}^a |\psi_1(x)|^2 dx = 0,2.$$

6.70. У цьому випадку рівняння (6.3.5) має парний ($\psi(-x) = \psi(x)$) та непарний ($\psi(-x) = -\psi(x)$) розв'язки. Для парного розв'язку $\psi_{\text{парн}}(x) = \sqrt{2/a} \cos \frac{2n+1}{a} \pi x$, $E_{\text{парн}} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (2n+1)^2$; для непарного розв'язку $\psi_{\text{нп}}(x) = \sqrt{2/a} \sin \frac{2\pi(n+1)x}{a}$, $E_{\text{нп}} = \frac{2\hbar^2 \pi^2}{ma^2} (n+1)^2$; $n \in \mathbb{Z}$. Основному стану відповідає значення $n=0$, тоді маємо $E_{0\text{парн}} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$, $E_{0\text{нп}} = \frac{2\hbar^2 \pi^2}{ma^2}$, тобто $E_{0\text{парн}} < E_{0\text{нп}}$, і основний стан є парним.

6.71. У цьому разі стаціонарне рівняння Шредингера має вигляд $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2 \psi = 0$, де $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$. Граничні умови, що відповідають заданій ямі, такі: $\psi(0, y) = \psi(l_1, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, l_2) = 0$. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді $\psi(x, y) = A \sin k_1 x \sin k_2 y$. При цьому умови $\psi(0, y) = \psi(x, 0) = 0$ виконуються автоматично. Умови $\psi(l_1, y) = 0$ та $\psi(x, l_2) = 0$ дають $k_1 = \pm n_1 \pi / l_1$, $k_2 = \pm n_2 \pi / l_2$, де $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Підставляючи значення $\psi(x, y)$ у вихідне рівняння, маємо $E_{n_1, n_2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2} \right)$. Енергія основного стану $E_{1,1} = 26,12 \text{ еВ}$, $E_{1,2} = 54,35 \text{ еВ}$, $E_{2,1} = 76,29 \text{ еВ}$.

6.72. $E_n = \pi^2 \hbar^2 n^2 / (2ma^2)$, $\psi_n(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{(\sin \pi n r / a)}{r}$. Використовуємо рівняння (6.3.5), оператор Лапласа в якому взятий у сферичній системі координат. Для розв'язків, що мають центральну симетрію, можна покласти $\psi(r) \rightarrow \psi(r)$. Тоді рівняння (6.3.5) в області ($0 \leq r \leq a$) матиме вигляд $-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) = E \psi$.

Далі введемо допоміжну функцію $v(r) = \psi(r)r$, тоді $\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2mEv}{\hbar^2} = 0$. Оскільки стінки, що оточують порожнину, є абсолютно непроникними, то на її межі має виконуватися умова $\psi(a) = 0$, а в центрі значення $v(0)$ має бути скінченним. Загальний розв'язок рівняння для $v(r)$ має вигляд $v(r) = A_1 e^{-ikr} + A_2 e^{ikr}$, де $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$.

Умові скінченності в центрі задовольняє розв'язок з $A_1 = -A_2 = A/(2i)$, де A – стала, яка визначається з умови нормування (6.2.6). Отже, маємо $\psi(r) = (A \sin kr)/r$. Елемент об'єму у сферичному просторі $dV = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$, тому з рівності (6.2.6)

$$A = \left(4\pi \int_0^a \sin^2 kr \cdot dr \right)^{-1/2}. \text{ Можливі значення енергії частинки визначаються з умови}$$

на межі порожнини: $\sin ka = 0$, звідки $k_n = \pi n/a$, де $n \in N$. Обчислюючи A та використовуючи зв'язок між k та E , одержуємо відповіді на запитання задачі.

$$6.73. A = 1 / \left(\int_V |\psi(r)|^2 dV \right)^{1/2} = 1 / (\pi a_0^3)^{1/2}; a_0 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / (m_e e^2) - \text{перший борівський}$$

$$\text{радіус; } E_0 = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}; \langle r \rangle = \int_V r |\psi(r)|^2 dV = \frac{3}{2} a_0; \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{3} a_0; \langle r^2 \rangle = \int_V r^2 |\psi(r)|^2 dV;$$

$$r_1 = a_0, \text{ де } r_1 - \text{корінь рівняння } \frac{d}{dr} \rho = 0 \quad (\rho = 4\pi r^2 |\psi(r)|^2), \text{ який не дорівнює нулеві.}$$

$$6.74. \langle U \rangle = \int_V U(r) |\psi(r)|^2 dV = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} = -27,22 \text{ еВ}; U(\langle r \rangle) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \langle r \rangle} = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 a} \neq \langle U \rangle.$$

$$6.75. \text{Класичні границі визначаються з умови } E_0 = U(r). \text{Тоді } w_r = \int_{V_0} |\psi_0(r)|^2 dV = 0,76,$$

де V_0 – об'єм атома, який визначається класичними границями; $w_l = 1 - w_r = 0,24$.

$$6.76. \text{а) } U_1 = -E_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = 13,59 \text{ еВ}; \text{б) } U_1 = -E_2 = \frac{1}{8} \frac{m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = 3,40 \text{ еВ};$$

$$\text{в) } U_1 = -E_3 = \frac{1}{18} \frac{m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = 1,51 \text{ еВ}; \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 2\pi c R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right); \text{ для видимої частини спектра } n = 2, m = 3 \dots 6. \text{ Для } m = 3 \text{ маємо } \omega = 2,87 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}; \text{ для } m = 4 \omega = 3,87 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}; \text{ для } m = 5 \omega = 4,34 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}; \text{ для } m = 6 \omega = 4,60 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

$$6.77. v = \frac{3\hbar R}{4m_a} \approx 3,26 \text{ м/с, де } m_a - \text{маса атома.}$$

$$6.78. \lambda = \frac{\hbar c}{U_{i2} + T} = 188 \text{ нм, де } U_{i2} - \text{енергія іонізації атома водню, який міститься}$$

$$\text{на першому збудженому рівні, } U_{i2} = \frac{1}{8} \frac{m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = 3,40 \text{ еВ.}$$

$$6.79. E_{\min} = \frac{E_0}{9} = -1,51 \text{ еВ.}$$

$$6.80. \Delta E_{n,n+1} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} E_1, \text{ якщо } n \gg 1, \text{ то } \Delta E_{n,n+1} \approx \frac{2}{n^3} E_1; \text{ вказана різниця при}$$

$n \gg 1$ прямує до нуля, тобто в цьому випадку можливий перехід до класичної границі.

$$6.81. \lambda \approx \frac{16}{3RZ^2} \approx 54 \text{ нм.}$$

6.82. $r = r_0/Z^2$, де r_0 – перший борівський радіус для водню; для іона He^+ $r = 13,2$ пм, для іона Li^{2+} $r = 5,9$ пм.

$$6.83. \frac{m_{\text{H}}}{m_e} = \frac{R_{\text{H}}}{R_{\infty} - R_{\text{H}}} = 1836; \quad \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{H}}} = \frac{R_{\infty} - R_{\text{H}}}{R_{\infty} - R_{\text{He}}} = 4.$$

$$6.84. Z = \sqrt{\eta} = 3, \text{ літій.}$$

$$6.85. n = \frac{m\omega_0 A^2 / \hbar - 1}{2} \approx 5 \cdot 10^{25}, \text{ де } \omega_0 = \sqrt{g/l}. \text{ Ні, не доцільно.}$$

$$6.86. A = \sqrt{(2n+1)\hbar/(m\omega_0)} = 5,2 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

6.87. $A_0 = (\pi^{1/2} x_0)^{-1/2}$, $A_1 = (2\pi^{1/2} x_0^3)^{-1/2}$, $\alpha = -1/x_0^2$, де $x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega_0)}$; $E_0 = \hbar\omega_0/2$; $E_0 = \hbar\omega_0/2$; $E_1 = 3\hbar\omega_0/2$. Стала α та енергії станів визначаються підстановкою наведених в умові виразів до рівняння (6.3.5) для гармонічного осцилятора, сталі A_0 , A_1 – з умови нормування (6.2.6).

$$6.88. \langle x_{0,1} \rangle = \langle x_{\text{кл}} \rangle_T = 0; \quad \sqrt{\langle x_0^2 \rangle} = x_0/\sqrt{2}; \quad \sqrt{\langle x_1^2 \rangle} = \sqrt{3/2} x_0; \quad x_i = \pm x_0.$$

$$6.89. \langle U_0 \rangle = \hbar\omega_0/4; \quad \langle U_1 \rangle = 3\hbar\omega_0/4; \quad \langle T_0 \rangle = \langle U_0 \rangle; \quad \langle T_1 \rangle = \langle U_1 \rangle; \quad \langle U_{0,1} \rangle \neq U(\langle x_{0,1} \rangle).$$

Вказівка. Скористатися формулами п. Х дод. А та парністю підінтегральної функції.

6.90. Зі зниженням температури залишаються збудженими лише найнижчі енергетичні рівні осциляторів. Це відбувається доти, доки всі осцилятори не перейдуть на рівень з енергією нульових коливань, менше за яку вони мати не можуть.

$$6.91. \omega_0 = \hbar/(mx_0^2) = 1,17 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}; \text{ прийняти } x_0 = d.$$

$$6.92. \text{ а) } D \approx \exp\left(-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m_e(U_0 - E)}\right), \quad D \approx \exp\left(-\frac{8l\sqrt{2m}}{3\hbar U_0}(U_0 - E)^{3/2}\right); \quad \text{ б) } D_1 = 0,36;$$

$$D_2 = 0,006; \quad R_1 = 0,64; \quad R_2 = 0,994.$$

$$6.93. D_2/D_1 \approx 1,053 \cdot 10^{-4}.$$

$$6.94. D \approx \exp\left(-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}\right) \approx 10^{-34}.$$

$$6.95. l_0 = \hbar/\sqrt{8m_0(U_0 - E)} \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

$$6.96. D \approx \exp\left(-\frac{\pi l}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{U_0}}(U_0 - E)\right).$$

6.97. Може.

$$6.98. l = l_1 + l_2 = 3; \quad l = l_1 + l_2 - 1 = 2; \quad l = l_1 + l_2 - 2 = 1; \quad m_z = -l_{\text{max}} = -3; \quad m_z = -l_{\text{max}} + 1 = -2; \quad m_z = -l_{\text{max}} + 2 = -1; \quad m_z = -l_{\text{max}} + 3 = 0; \quad m_z = l_{\text{max}} - 1 = 2; \quad m_z = l_{\text{max}} - 2 = 1; \quad m_z = l_{\text{max}} = 3.$$

$$6.99. \alpha_1 = \pi - \arccos \sqrt{2/3} = 0,8\pi; \quad \alpha_2 = \pi - \arccos(1/\sqrt{6}) = 0,63\pi; \quad \alpha_3 = 0,5\pi; \\ \alpha_4 = \arccos(1/\sqrt{6}) = 0,37\pi; \quad \alpha_5 = \arccos \sqrt{2/3} = 0,2\pi.$$

$$M_j = \frac{3\sqrt{7}}{2} \hbar, \quad \frac{\sqrt{35}}{2} \hbar; \quad M_{jz} = \pm \frac{1}{2} \hbar, \quad \pm \frac{3}{2} \hbar, \quad \pm \frac{5}{2} \hbar, \quad \pm \frac{7}{2} \hbar.$$

6.100. $\Delta M_{l,l+1} = M_l (\sqrt{1+2/l} - 1)$; при $l \gg 1$ $\Delta M/M \sim 1/l$, тобто для $l \gg 1$ квантування орбітального моменту імпульсу є неістотним; у цьому разі можливий перехід до класичної границі. Для спіну умова $s \gg 1$ не задовольняється, тому тут перехід до класичної границі неможливий.

$$6.101. M_s = \sqrt{3} \hbar / 2; \quad s = s_1 + s_2 = 1, \quad s = s_1 + s_2 - 1 = 0.$$

6.102. У досліді Штерна і Герлаха використовуються атоми елементів першої групи періодичної системи для того, щоб виділити внесок окремого електрона (для двох електронів спіни можуть бути скомпенсовані); ці атоми мають бути в основному стані, щоб уникнути внеску орбітального моменту руху електронів.

6.103. $|M_{lz \max}| = l \hbar, M_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}, |M_{lz \max}| < M_l$. Ця нерівність пояснюється тим, що у квантовому випадку співвідношення $M_l = \sqrt{M_{lx}^2 + M_{ly}^2 + M_{lz}^2}$ не має місця, оскільки всі три проекції M_{lx}, M_{ly}, M_{lz} не можуть водночас набирати визначених значень.

$$6.104. {}^2P_{1/2}, {}^2P_{3/2}; \quad J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}.$$

$$6.105. \kappa = 2S + 1 = 2; \quad \text{наявність у атомі спінового моменту; Li: } 1s^2 2s; \\ \text{N: } 1s^2 2s^2 2p^3; \text{ Ne: } 1s^2 2s^2 2p^6; \text{ Na: } 1s^2 2s^2 2p^6 3s; \text{ Ca: } 1p^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2.$$

6.106. $3 \leq L \leq 5$. Мультиплетність атомного стану $\kappa = 2S + 1$, звідки $S = 3$. Для внутрішнього квантового числа атома маємо рівняння $J(J+1) = 20$, і нас цікавить тільки додатний корінь цього рівняння, тому $J = 4$. Можливі значення числа L визначаємо із системи нерівностей $L + S \leq |L - S|$.

$$6.107. M_J = 2\sqrt{5} \hbar, 1s^2 2s^2 2p^2 2p^6 3s 4f, {}^3F_4.$$

6.108. Заповнена електронна оболонка містить $2(2l+1)$ електронів, тому для неї можливі тільки нульові значення магнітного та спінового квантових чисел. Звідси випливає, що така оболонка не дає внеску до орбітального L та спінового S квантових чисел атома. Оскільки внутрішнє квантове число, яке визначає повний механічний та магнітний моменти електрона, лежить в інтервалі $L + S \leq |L - S|$, то для неї $J = 0$, і внаслідок співвідношень (6.4.11), (6.4.13) повний механічний M_J та магнітний μ_J моменти заповненої електронної оболонки атома дорівнюють нулеві.

$$6.109. \text{ а) } S = 0: g = 1; \text{ б) } L = 0: g = 2; \text{ в) } {}^2P_{3/2}: g = 4/3; {}^2P_{1/2}: g = 2/3; \text{ г) } {}^3P_1: g = 3/2, {}^3F_3: g = 13/12.$$

$$6.110. {}^2D_{3/2}: \mu_J = 2\sqrt{\frac{3}{5}} \mu_B; \quad {}^2P_{3/2}: \mu_J = 2\sqrt{\frac{5}{3}} \mu_B.$$

6.111. $\mu_J = 3\sqrt{\frac{7}{5}}\mu_B$ (заданий електрон перебуває в стані, орбітальне квантове число якого $l = 2$, тому для нього $j_{\max} = \frac{5}{2}$).

6.112. $M_J = \sqrt{\frac{3}{2}}\hbar$ (у цьому разі $g = 0$).

6.113. У багатоелектронних атомів поле, в якому міститься окремий електрон, не є чисто кулонівським, тому енергія електрона в такому полі залежить не тільки від головного квантового числа, але й від інших чисел, зокрема від орбітального числа l . При цьому не існує монотонної залежності між енергією електрона та значенням його головного квантового числа. Тому може статися, що із двох станів електрона з квантовими числами n_1, l_1 ($l_1 < n_1$) та n_2, l_2 ($l_2 < n_2$), які задовольняють умови $n_2 > n_1, l_2 < l_1$, другому стану відповідає менша енергія. Це пояснює наявність незаповнених електронних оболонок у багатоелектронних атомах.

6.114. У випадках синглетних станів ($S = 0$) та S -станів ($L = 0$); розщеплення завдяки наявності спінового моменту відбувається у S -станах.

6.115. Так, крім випадку $S = 2$; у цьому разі найменше значення внутрішнього квантового числа атома $J = |L - S| = 0$, тоді $\mu_J = 0$, і ефект Зеемана не спостерігається, як це видно з формули (6.4.13).

6.116. Складний.

6.117. а) 5; б) 4.

6.118. $\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU} = 31 \text{ нм}$.

6.119. $h = eU\lambda_{\min} / c = 6,61 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$.

6.120. $v_{\max} = \sqrt{2\frac{hc}{\lambda_{\min} m_e}} = 1,48 \cdot 10^7 \text{ м/с}$.

6.121. $\lambda = \frac{4}{3R(Z-\sigma)^2} = 7,59 \cdot 10^{-11} \text{ м}$; $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = 16,35 \text{ кеВ}$; $U_{\min} = \frac{3hcR}{4e}(Z-\sigma)^2 = \frac{\varepsilon}{e} = 16,35 \text{ кеВ}$.

6.122. $Z = \sigma + \sqrt{\frac{n^2 m^2}{R\lambda(m^2 - n^2)}} = 75$ ($n = 1, m = 2$); реній.

6.123. Рентгенівський. Лінії, що належать цьому спектрові, відповідають зміні станів електронів, які містяться поблизу ядра, де електричне поле майже не екрановане іншими електронами. Тому вигляд рентгенівського спектра істотно залежить від заряду ядра і значно змінюється при переході від одного елемента до іншого. Щодо оптичних спектрів, то вони зв'язані зі зміною станів оптичних (валентних) електронів, які перебувають на значних відстанях від ядра, де електричне поле ядра в значній мірі екрановано іншими електронами. Тому під час переходу від одного елемента до іншого ці спектри змінюються порівняно з рентгенівськими.

6.124. Зміна оптичних спектрів атомів під час вступу їх до хімічних сполук; у той самий час їхні характеристичні рентгенівські спектри не змінюються. Крива, яка зображує залежність потенціальної енергії міжатомної взаємодії від віддалі між атомами, має локальний мінімум. Цей мінімум відповідає енергії дисоціації молекули, тобто енергії, що виділяється під час її утворення. Цій енергії відповідає рівноважна міжатомна віддаль у молекулі.

6.125. Зміст іонного зв'язку полягає в тому, що один з атомів приєднує до себе один чи кілька електронів і стає негативним іоном, у той самий час інший атом ці електрони втрачає і перетворюється в позитивний іон. Сили електростатичної взаємодії між цими іонами зумовлюють іонний зв'язок у молекулі. Ковалентний зв'язок з погляду квантової механіки полягає у виникненні обмінної взаємодії між електронами з протилежними спінами під час їх руху в спільному просторі, тобто електрони узагальнюються і не можна сказати, до якого з атомів кожний з них належить.

6.126. $E = 48$ Дж. Енергія іонізації атома перевищує електронну спорідненість на $\Delta U = U_i - U_e = 1,3$ еВ, тобто перехід електрона від атома Na до атома Cl вимагає витрат енергії. З наведеної в умові формули для потенціальної енергії електричного поля кристалічних ґраток NaCl бачимо, що під час наближення іонів один до одного ця енергія зменшується, тобто під час утворення кристала енергія виділяється. Саме за рахунок цієї енергії відбувається утворення молекули NaCl, якщо відстань між іонами r досягне рівноважного значення r_0 ; під час утворення одного моля NaCl виділяється енергія $E = N_A (U_e - U_i) - U$, або $E = N_A (U_e - U_i + 1,748 \frac{e^2}{r_0}) = 48$ Дж.

6.127. Антипаралельно. Атом є своєрідною потенціальною ямою для електронів. Під час утворення молекули розміри ями збільшуються, а енергія основного стану частинки в цій ямі зменшується. Для того щоб обидва електрони виявилися на цьому рівні, згідно з принципом Паулі необхідно, щоб вони мали протилежні спіни.

6.128. $z = 2$. Для елементів другої групи досить близько до рівня з нульовим спіном, що відповідає основному станові з електронною конфігурацією s^2 , розміщений рівень, який відповідає збудженому станові з електронною конфігурацією sp та спіном $S = 1$. Елементи третьої групи можуть бути одно- і тривалентними, тому що близько до нормального стану з електронною конфігурацією s^2p і спіном $S = 1/2$, якому відповідає валентність $z = 1$, є збуджений стан з конфігурацією електронів sp^2 і спіном $S = 3/2$, якому відповідає валентність $z = 3$.

$$6.129. \quad r = \sqrt{\hbar \lambda / (2\pi \mu)} = 2,23 \cdot 10^{-10} \text{ м, де } \mu - \text{зведена маса молекули, } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

тут m_1, m_2 – маси атомів ^{200}Hg та ^{35}Cl .

$$6.130. \quad I = \hbar / (2\pi \nu) = 1,46 \cdot 10^{-46} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad r_0 = \sqrt{I / \mu} = 1,13 \cdot 10^{-10} \text{ м; } \mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$$

де m_1, m_2 – маси атомів ^{12}C та ^{16}O .

6.131. Для водню: $E_{r=1} = 1,53$ меВ, $E_{r=2} = 4,59$ меВ, $E_{r=3} = 9,18$ меВ, $E_{r=4} = 15,3$ меВ; для дейтерію: $E_{r=1} = 0,765$ меВ, $E_{r=2} = 2,30$ меВ, $E_{r=3} = 4,59$ меВ, $E_{r=4} = 7,65$ меВ.

$$6.132. \quad \Lambda = \sqrt{M r_0^2 E_r / (2 N_A)} = 3,5 \hbar, \text{ де } M - \text{молярна маса кисню.}$$

6.133. $T = 4\hbar^2(r+1)N_A / (kMr_0^2) = T_0(r+1)$, де r – оберталне число одного зі станів молекули; M – молярна маса водню; T_0 – температура, за якої збуджується рівень з $r=0$, $T_0 = 0,18$ К.

6.134. Ні.

6.135. Більшу енергію коливаний має молекула H_2 .

6.136.
$$v = \frac{1}{2} \left(\frac{E_n}{\hbar} \sqrt{\frac{M}{k_1 N_A}} - 1 \right) = 8$$
, де M – молярна маса водню.

6.137.
$$T = 2 \frac{\hbar}{k} \sqrt{\frac{k_1 N_A}{M}} = 5,40 \cdot 10^3$$
 К, де M – молярна маса водню.

6.138.
$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \sqrt{\frac{k_1 (M_1 + M_2) N_A}{M_1 M_2}} = 0,26$$
 еВ, де M_1, M_2 – атомні маси відповідно

водню та фтору.

6.139. Системи a, δ описуються статистикою Фермі – Дірака, системи $b-z, e$ – статистикою Бозе – Ейнштейна.

6.140. Ця функція показує, скільки в середньому частинок із заданою орієнтацією спіну міститься поблизу фіксованої точки в комірці фазового простору однієї частинки.

6.141. Середня кількість частинок в одній комірці фазового простору $\langle n \rangle = \sum_i w_i n_i$, де n_i – кількість частинок із заданими характеристиками стану, w_i – їх імовірності. Для фермі-частинок внаслідок принципу Паулі $w_i = 1$; якщо $n_i = 1$, то всі інші ймовірності дорівнюють нулеві. Отже, $\langle n \rangle = w$, де w – імовірність знаходження фермі-частинки із заданим спіном у заданій комірці поблизу фіксованої точки її фазового простору. Для бозе-частинок такого тлумачення дати не можна.

6.142. Шукана функція розподілу визначається із співвідношення $f(\epsilon) = \frac{dN}{Nd\epsilon}$, де N – повна кількість частинок у системі. З формули (6.6.4) одержуємо
$$N = \frac{gV m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{kT}} \pm 1} d\epsilon$$
. Це співвідношення визначає також хімічний потенціал

системи частинок μ як функцію N і T . Маємо $f(\epsilon) = c \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{kT}} \pm 1}$, де константа

$$c = \frac{1}{\int_0^\infty \frac{\epsilon'^{1/2} d\epsilon'}{e^{\frac{\epsilon'-\mu}{kT}} \pm 1}}$$
 визначається з умови нормування функції розподілу $\int_0^\infty f(\epsilon) d\epsilon = 1$ або

$$f(\epsilon) = \frac{\epsilon^{1/2} \langle n(\epsilon) \rangle}{\int_0^\infty \epsilon'^{1/2} \langle n(\epsilon') \rangle d\epsilon'}$$
. Тут інтеграл можна обчислити в замкненому вигляді тільки

при $T = 0$, тоді одержуємо (6.6.8).

6.143. $\Delta v = \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \Delta x \Delta y \Delta z = h^3$; використовуючи формулу (6.6.2), одержуємо

$$d\Gamma = \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} V.$$

6.144. $f(v) = \frac{3}{v_{\max}} \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)^2 = \left(\frac{m_e^3}{\pi^2 n \hbar^3} \right) v^2$; $\langle v \rangle / v_{\max} = \frac{3}{4}$. Для одержання $f(v)$

слід у формулі (6.6.8) перейти до розподілу за швидкостями, користуючись співвідношенням $f(v)dv = f(v)dv$, яке випливає з інваріантності форми першого диференціала функції. Середню швидкість обчислюємо за формулою $\langle v \rangle = \int_0^{v_{\max}} v f(v) dv$.

6.145. $f(\lambda) = \frac{8\pi}{n\lambda^4}$, де n – концентрація електронів. До розподілу за довжинами хвиль можна перейти за допомогою співвідношення $f(\lambda)d\lambda = f(\epsilon)d\epsilon$ (див. відповідь на задачу 6.144). Тоді $\langle \lambda \rangle = \int_{\lambda_{\min}}^{\infty} \lambda f(\lambda) d\lambda = (9\pi/n)^{1/3}$, де $\lambda_{\min} = (\hbar^2 / (2m_e \epsilon_F))^{1/2}$,

$$\sqrt{\langle \lambda^2 \rangle} = \sqrt{\int_{\lambda_{\min}}^{\infty} \lambda^2 f(\lambda) d\lambda} = \left(\frac{3\pi^2}{n^2} \right)^{1/6}.$$

6.146. $T_a = \frac{\hbar^2}{2m_e k} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3} \approx 8,3 \cdot 10^4$ К; при кімнатній температурі, тобто при $T \approx$

≈ 300 К, газ вироджений. Газ стає невиродженим при температурі T_a , яка є більшою від температури плавлення та випаровування міді.

6.147. $\frac{\eta}{100\%} = \frac{\int_{\epsilon_{\max}/2}^{\epsilon_{\max}} f(\epsilon) d\epsilon}{1} = 1 - 2^{-3/2}$; $\eta = 64,64\%$.

6.148. $z = \frac{n}{n_a} = \frac{8\pi M}{3\hbar^3 N_A \rho} (2m_e \epsilon_F)^{3/2} = 0,96$, де n, n_a – концентрація відповідно віль-

них електронів та атомів; M – молярна маса натрію; ρ – його густина; m_e – маса електрона. Концентрація вільних електронів обчислюється за допомогою формули (6.6.5),

а атомів – з виразу $\rho = \frac{M}{N_A} n_a$.

6.149. Ні. Потенціальна енергія U взаємодії електронів пропорційна до e^2/r , де r – середня відстань між ними, що має порядок $n^{1/3}$. Тому $U \sim e^2 n^{1/3}$. Кінетична енергія в

області енергій, де виродження є істотним, $T \approx \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n)^{2/3}$. Отже, зі збіль-

шенням концентрації електронів кінетична енергія зростає швидше, ніж потенціальна, а це і є умовою більшого ступеня ідеальності газу.

6.150. $T = \frac{\hbar^2}{5k m_e} \left(\frac{3\pi^2 \rho N_A}{M} \right)^{2/3} = 3 \cdot 10^4 \text{ K}$, де ρ , M – відповідно густина та молярна маса міді. Для обчислення середньої енергії електронів використовується співвідношення $\langle \epsilon \rangle = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon f(\epsilon) d\epsilon$, де функція розподілу електронів за енергіями при $T = 0$ визначається рівністю (6.6.8).

6.151. Припустимо, що $\mu > 0$. Тоді, як це впливає з формули (6.6.1), середня кількість частинок, енергія яких міститься поблизу значення $\epsilon = \mu$, перетворюється в нескінченності. Отже, це неможливо внаслідок скінченної кількості частинок у системі. Із вказаного протиріччя й випливає, що для системи бозе-частинок $\mu \leq 0$.

6.152. Для гелію $T_b = \frac{3,31}{g^{2/3}} \frac{\hbar^2 N_A n^{2/3}}{k M}$; для $g = 1$ (парагелій) $T_b = 3,61 \cdot 10^{-2} \text{ K}$; для $g = 3$ (ортогелій) $T_b = 1,74 \cdot 10^{-2} \text{ K}$; для електронного газу ($g = 2$) $T_b = \frac{\hbar^2}{2m_e k} (3\pi^2 n)^{2/3} = 6,48 \cdot 10^4 \text{ K}$.

6.153. Енергія поля випромінювання, що припадає на інтервал частот ω , $\omega + d\omega$ в об'ємі dV , $W = u d\omega dV$. З іншого боку, $dW = \epsilon dN_\epsilon$, де dN_ϵ – кількість фотонів з енергіями, що належать інтервалові ϵ , $\epsilon + d\epsilon$. Для dN_ϵ маємо $dN_\epsilon = g \langle n \rangle d\Gamma = 4\pi p^2 dp dV / h^3$, де p – імпульс фотона, $p = \hbar\omega/c$. Для заданої енергії й напрямку поширення фотон має два поляризаційних стани ($g = 2$). Зрівнюючи обидва вирази для енергії поля випромінювання та користуючись співвідношеннями (6.1.2), (6.1.3), маємо $\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/(kT)} - 1}$. Зрівнюючи одержаний вираз з формулою (6.6.1), бачимо, що для фотонного газу $\mu = 0$.

6.154. $t = \frac{\lambda}{A_{21}} \ln \eta = 2,53 \cdot 10^{-8} \text{ c}^{-1}$. Зменшиться в $\eta = 2e$ разів.

6.155. $N = P\lambda\tau/(hc) = 3,13 \cdot 10^9$.

6.156. $P = \frac{N\hbar c}{\lambda\tau} \left(\frac{g_2}{g_1} \right) e^{-\frac{\hbar c}{\lambda kT}} = 234 \text{ мВт}$, де $g_1 = 6$, $g_2 = 2$; внаслідок виконання нерів-

ності $\hbar c/\lambda \gg kT$ кількість атомів в основному стані майже не відрізняється від їх повної кількості.

6.157. $\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{\hbar c}{\lambda kT}} = 1,84 \cdot 10^{-6}$, де $g_1 = 2$, $g_2 = 6$.

6.158. Ні.

6.159. Розглянемо систему, яка взаємодіє з полем випромінювання та може перебувати у станах з енергіями E_n , E_m , причому $E_n > E_m$. Вихід атома зі стану з енергією E_n можливий внаслідок двох процесів – спонтанного та вимушеного випромінювання. Кількість атомів, які за час dt в одиниці об'єму здійснюють спонтанний перехід, буде $dN_{nm \text{ сп}} = N_n A_{nm} dt$, де N_n – кількість атомів у стані E_n . Щодо вимушеного переходу,

то його ймовірність пропорційна до спектральної густини енергії поля випромінювання, тобто $dN_{nm \text{ вим}} = N_n B_{nm} u(\omega, T) dt$. Крім того, деяка частина атомів під дією випромінювання переходить зі стану з енергією E_m до стану з енергією E_n внаслідок поглинання квантів. Кількість цих квантів $dN_{nm \text{ погл}} = N_m B_{mn} dt$; оскільки система перебуває в стані статистичної рівноваги, маємо $dN_{nm \text{ сп}} + dN_{nm \text{ вим}} = dN_{nm \text{ погл}}$ або $N_n A_{nn} + N_n B_{nm} u(\omega, T) = N_m B_{mn}$ (6.7.5) одержуємо $g_n B_{nm} = g_m B_{mn}$. Для спектральної густини енергії поля випромінювання, також використовуючи рівність (6.7.5), маємо $u(\omega, T) = \frac{A_{nm}/B_{nm}}{\frac{E_n - E_m}{e^{kT}} - 1}$; правило частот Бора дає $E_n - E_m = \hbar\omega_{nm}$, а відно-

шення A_{nm}/B_{nm} одержуємо, вимагаючи, щоб при $\hbar\omega_{nm}/(kT) \ll 1$ вираз для $u(\omega, T)$ переходив у формулу Релея – Джинса, що дає $A_{nm}/B_{nm} = \hbar\omega_{nm}^3/(\pi^2 c^3)$. Маючи на увазі, що одержаний результат слушний за будь-яких n та m , остаточно одержуємо

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3/\pi^2 c^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

6.160. У зовнішньому електричному полі стани молекули аміаку з електричним дипольним моментом орієнтовані уздовж поля та проти нього. Якщо поле неоднорідне, то воно діє на молекули з різною орієнтацією електричного дипольного моменту в протилежні боки і таким чином розділяє їх у просторі.

6.161. У системах з двома рівнями випромінювання накачування і заселяє, і спустошує верхній робочий рівень. Це відбувається доти, доки заселеності рівнів не зрівняються. Інверсія зникає.

6.162. Виділяють у просторі напрям лазерної генерації та здійснюють позитивний зворотний зв'язок – багаторазове проходження світла крізь активне середовище. Між дзеркалами поширюються дві хвилі – та, що падає, і відбита. При накладанні вони утворюють стоячу електромагнітну хвилю. Для забезпечення резонансу необхідно, щоб між дзеркалами укладалося ціле число півхвиль: $m\lambda/2 = L$.

6.163. Ні, не має. Зменшується.

6.164. Щоб накопичити якнайбільшу кількість збуджених атомів, які потім одночасно будуть підсилювати світловий потік, штучно зменшують добротність лазера, наприклад, порушуючи паралельність дзеркал резонатора. Навіть при значній інверсії заселеності рівнів при цьому порушенні лазерного випромінювання не відбувається. Потім дзеркала повертають знову паралельно одне одному. На цей час інверсія стає дуже значною. Потужність лазерного імпульсу сильно зростає.

6.165. Квантові переходи між коливальними рівнями молекули CO_2 , яким відповідають моди симетричного, антисиметричного та деформаційного коливань молекули.

6.166. а) Газовий лазер; б) твердотільний.

6.167. Показник заломлення світла залежить від частоти світла та стану атмосфери, тому відхилення від монохроматичності світла спричиняє похибку у визначенні його швидкості та внаслідок цього – похибку у визначенні відстані. Застосування монохроматичного лазерного випромінювання дало змогу уникнути цієї похибки.

Крім того, у лазерних світлодалекомірах завдяки малій розбіжності лазерного променя можна досягти великої дальності дії.

$$6.168. \Delta v = c / (2L) = 1,5 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}, \Delta v_{\text{пр}} \sim 1,6 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}, \Delta v_{\text{пр}} \leq \Delta v.$$

$$6.169. l = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} = \frac{c}{\Delta v} = 300 \text{ м.}$$

6.170. Явище магнітного резонансу полягає в резонансному поглинанні енергії змінного магнітного поля під час зміни орієнтації магнітних моментів частинок, які були спочатку зорієнтовані зовнішнім постійним полем. Якщо цими моментами є спінові магнітні моменти електронів, то кажуть про електронний спіновий резонанс; якщо ними будуть магнітні моменти атомів парамагнітного середовища, – про парамагнітний резонанс. У разі магнітних моментів ядер мова йтиме про ядерний магнітний резонанс.

$$6.171. B_0 = 4\pi\nu_p m_p / (ge) = 1,0 \text{ Тл}; \nu_p / \nu_n = 1,41.$$

$$6.172. \omega_0 = 2,64 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}.$$

$$6.173. B_0 = \hbar\omega/\mu = 4,84 \text{ Тл.}$$

ДО РОЗДІЛУ 7

7.1. Періодичність у розташуванні частинок, яка спостерігається відносно будь-якої обраної частинки, при “далекому” порядку не порушується на великих відстанях від неї всередині середовища. Такий порядок існує в кристалах. Якщо вказана періодичність досить швидко порушується, то маємо “близький” порядок. Він спостерігається в рідинах та аморфних тілах, а також у молекулах полімерів.

7.2. Найважливішою відмінністю між кристалічними і аморфними тілами є відсутність у аморфних тіл, на протилежність кристалічним, точки плавлення. Існують. Не зберігає.

7.3. Монокристал має правильну форму, полікристал – це сукупність монокристалів, він має неправильну форму.

7.4. Іонний, молекулярний, ковалентний, водневий, металевий; у кристалі NaCl – іонний, Ge – ковалентний, H₂O – водневий, Fe – металевий.

7.5. Рідинні кристали зберігають основні властивості рідин (наприклад, плинність) і твердих тіл (анізотропія фізичних властивостей). У деяких рідинних кристалах молекули розташовуються паралельно одна одній, в інших – паралельними шарами.

7.6. Триклінна, моноклінна, ромбічна, тетрагональна, ромбосдрична, гексагональна, кубічна.

7.7. Дефекти кристалічних ґраток – це порушення правильності заповнення їх вузлів; вакансії, дислокації, домішки та ін. Дефекти кристалічних ґраток змінюють пружність, пластичність та міцність кристала.

$$7.8. [\bar{1}01].$$

$$7.9. \alpha = \pi/4.$$

$$7.10. \frac{a}{2}, \frac{b}{3}, \frac{c}{6}.$$

$$7.11. d_1 = d = 3,14 \cdot 10^{-10} \text{ м}, d_2 = d/\sqrt{2} = 2,22 \cdot 10^{-10} \text{ м}, d_1 > d_2.$$

7.12. У кубічних ґратках кожний атом (або іон), що міститься у вершині куба, належить одночасно восьми сусіднім елементарним коміркам. Оскільки кількість вершин у кубі дорівнює восьми, даній комірці належить $8 \times 1/8 = 1$ атом. У гранцетрованих ґратках, на відміну від кубічних, існують вузли двох типів: 1) такі, що містяться у вершинах елементарної комірки кубічних гранцетрованих ґраток; 2) такі, що містяться в точках перетину діагоналей граней елементарної комірки. Кількість вузлів першого типу обчислена вище; вона дає внесок до кількості атомів, що належать одній елементарній комірці, який дорівнює одному атому. Кожний вузол другого типу одночасно належить двом граням, тому даній комірці він належить на одну другу. Куб має шість граней, тому даній комірці належить $6 \times 1/2 = 3$ вузли такого типу і така сама кількість атомів. Отже, повна кількість атомів, що належить елементарній комірці у гранцетрованих ґратках кубічної структури, є $1 + 3 = 4$. В об'ємцентричних ґратках також існують вузли двох типів: 1) такі, що містяться у вершинах куба; 2) такі, що містяться у його центрі. Внесок вузлів першого типу обчислено вище: він дорівнює одному атому. Внесок вузлів другого типу також дорівнює одному атому, і тому повна кількість атомів, які належать елементарній комірці об'ємцентричних ґраток кубічної структури, дорівнює $1 + 1 = 2$.

7.13. $\rho = \frac{M}{V_m} = \frac{4M}{N_A a^3} = 1.84 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Об'єм елементарної комірки $V = a^3$, іонів

кожного знаку у молі — N_A , об'єм, що припадає на один іон, становить $\frac{1}{4}V$, тому

$$V_m = \frac{1}{4}V \cdot N_A.$$

7.14. $a = \sqrt[3]{\frac{4M}{\rho N_A}} = 0,36 \text{ нм}$. Взяти до уваги, що ґратки міді є гранцетрованими,

і тому на одну елементарну комірку тут припадає чотири атоми (див. відповідь на задачу 7.12).

7.15. $\frac{d_{06}}{d_{\text{гп}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sqrt{\frac{3}{2}} = 0,97$. Користуючись рис. В.7.1, обчислимо $d_{\text{гп}} = \frac{a_{\text{гп}}}{\sqrt{2}}$,

$d_{06} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_{06}$, де $a_{\text{гп}}$, a_{06} — відповідні сталі ґраток. Оскільки у гранцетрованих

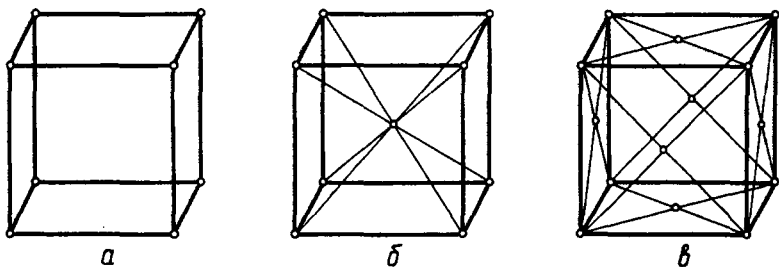


Рис. В.7.1

гратках в елементарній комірни містяться чотири атоми, а в об'ємочентричних – два, то із сталості об'єму, що припадає на один атом, маємо $a_{\text{тр}}^3/4 = a_{\text{об}}^3/2$.

$$7.16. \rho = \frac{4M}{\sqrt{3}N_A a^2 c} = 7,39 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3. \text{ У разі гексагональної системи на елементарну}$$

комірку припадає два атоми. Тоді $Z_m = \frac{2M}{\sqrt{3}a^2 c \rho} = \frac{N_A}{2} = 3,01 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$.

$$7.17. \text{ Ні.}$$

$$7.18. F = \frac{k}{4\alpha r_0} = 1,03 \text{ нН.}$$

7.19. У стані рівноваги середня сила F_x (див. формулу (7.2.1)), що діє на атом у вузлі граток, дорівнює нулеві, тобто $\langle x \rangle = \frac{k_2}{k_1} \langle x^2 \rangle$. Розглядаються малі коливання атомів уздовж однієї прямої, тому у виразі для потенціальної енергії $U(x) = \frac{k_1 x^2}{2} - \frac{k_2 x^3}{3}$, яка зв'язана з цієї силою, другим членом можна нехтувати. Тоді

$$\langle U(x) \rangle = \frac{k_1}{2} \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} kT, \text{ і } \langle x^2 \rangle = \frac{k}{k_1} T, \text{ звідки } \langle x \rangle = k \frac{k_2}{k_1} T, \text{ тобто } \langle x \rangle \sim T.$$

$$7.20. \beta = 3\alpha.$$

$$7.21. \sigma = \alpha (T - T_0) E = 85,5 \text{ МПа.}$$

$$7.22. \Delta N = \frac{\alpha l}{2\pi R_0} \frac{T_1 - T_2}{(1 + \alpha(T_2 - T_0))(1 + \alpha(T_1 - T_0))} = 7,59 \text{ об.}$$

$$7.23. l_{01} = \alpha_2 \Delta l / (\alpha_2 - \alpha_1) = 0,36 \text{ м; } l_{02} = \Delta l + l_{01} = 0,46 \text{ м.}$$

$$7.24. \frac{\eta}{100\%} = \frac{\alpha \Delta t}{1 + \alpha t_1}; \eta = 4,05 \cdot 10^{-2} \%.$$

$$7.25. S_1 = \pi r^2 (1 + 2\alpha \Delta t) = 63,86 \text{ мм}^2. \text{ Пройде.}$$

7.26. Будь-яке зміщення атомів у вузлах кристалічних граток зі стану рівноваги утворює поле змішень, що залежить від часу і (у певному діапазоні частот) описує заичайний звук. Так само, як у випадку електромагнітного поля хвилі із заданими енергією і станом поляризації можна поставити у відповідність світловий квант – фотон, так і пружній хвилі можна поставити у відповідність частинку – фонон. Проте фонон не є звичайною частинкою, він відрізняється від реальних частинок і є прикладом так званих квазічастинок. Зокрема, фонон не може існувати у вакуумі, зв'язок між енергією та імпульсом у фононів може не збігатися зі зв'язком цих величин для реальних частинок і, взагалі, зв'язок є різним для різних граток. На відміну від фотона фонон має три стани поляризації – дві поперечні та одну поздовжню.

7.27. Більшою є енергія Фермі, тому що вона зв'язана з рухом електронів, а дебаївська – з рухом атомів: $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n)^{2/3} \sim \frac{1}{m_e}; E_D = \hbar \omega_D \sim \hbar \sqrt{\frac{k_1}{m_a}}$, де k_1 – жорсткість зв'язку атома в кристалічних гратках.

$$7.28. E_D = k\Theta_D = 7,59 \text{ меВ.}$$

$$7.29. \omega_D = \frac{k\Theta_D}{\hbar} = 3,93 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}; \rho_D = 8,3 \cdot 10^{-25} \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с.}$$

$$7.30. \langle l \rangle = \frac{\lambda M}{\rho u R} = 1,38 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

$$7.31. k_1 = \frac{M}{N_A} \left(\frac{k}{\hbar} \Theta_D \right)^2; \text{ для алмазу } k_1 = 1,18 \cdot 10^3 \text{ Н/м, для срібла } k_1 = 22,0 \text{ Н/м.}$$

7.32. Виводячи формулу (7.2.7), вважати, що тверде тіло є суцільним середовищем, в якому можуть поширюватися тільки такі пружні хвилі, частота яких $\omega \leq \omega_D$, а також, що зв'язок між частотою та хвильовим числом має вигляд $\omega = uk$, де u – швидкість поширення хвиль.

7.33. Для бісмуту, калію та золота.

7.34. Так.

$$7.35. \text{ Для берилію } Q = 0,6\pi^4 \frac{m}{M} \frac{R}{\Theta_D^3} \left((T + \Delta T)^4 - T^4 \right) = 30,56 \text{ кДж; для бісмуту}$$

$$Q = 3 \frac{m}{M} R \Delta T = 0,60 \text{ кДж.}$$

$$7.36. \Theta_D = \sqrt[3]{\frac{3\pi^4 R m}{5 M Q} (T_2^4 - T_1^4)} = 328,65 \text{ К.}$$

$$7.37. \omega_D = \frac{kT}{\hbar} \sqrt[3]{12\pi^4 \frac{R}{5 M c}} = 3,14 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}.$$

$$7.38. \text{ а) } \Theta_D \approx 220 \text{ К; б) } C = 10 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К); в) } \omega_D = 4,1 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}.$$

7.39. Тому, що частоти коливань атомів у вузлах кристалічних ґраток пропорційні до величини $\sqrt{k/m}$, де k – коефіцієнт квазіпружної сили, m – маса атома.

7.40. Для металів внесок у теплоємність дає як електронний газ, так і коливання ґраток (фононний газ). Тому теплоємність металів при низьких температурах змінюється за законом $C = AT + BT^3$. У діелектриків внесок електронного газу відсутній, тому для них $C \sim T^3$. У металі, починаючи з деякої температури, внесок коливань ґраток до теплоємності перевищуватиме електронний. Дійсно, у системі з N вільних електронів, що містяться в об'ємі V , є $N/2$ енергетичних рівні. Середня віддаль між рівнями $\Delta \epsilon = 2\epsilon_F / N$. У разі теплового збудження, яке задовольняє умову $kT \ll \epsilon_F$, до внутрішньої енергії електронного газу дають внесок електрони, енергія яких лежить у смузі $2kT$ біля рівня Фермі, кількість цих електронів $2kT/\Delta \epsilon = (kT/\epsilon_F)N$. Якщо взяти для середньої енергії теплового руху електрона класичний вираз $\epsilon = 3kT/2$ (це, звичайно, спрощення), для внеску сукупності N електронів до внутрішньої енергії одержимо $U = \epsilon(kT/\epsilon_F)N = (3/2\epsilon_F) \nu kRT^2$, де ν – кількість молей газу, $\nu = N/N_A$. Для його молярної теплоємності маємо $C = \frac{dU}{\nu dT} = (3kT/\epsilon_F)R$, тобто в нашому випадку

$A = 3kR/\varepsilon_F$, $B = 12\pi^4 R/(5\Theta_D^3)$ (див. формулу (7.2.10)). Гратковий внесок перевищує електронний, якщо $BT^2 > A$, або якщо $T > 0,11\Theta_D(\Theta_D/T_F)^{1/2}$, де T_F – температура Фермі. Оскільки $\Theta_D/T_F \ll 1$, то гратковий внесок перевищує електронний при дуже низьких температурах.

7.41. З одного боку, це є наслідком ангармонічності коливань атомів у вузлах ґраток. З іншого боку, виразові для теплоємності C при $T \gg \Theta_D$ можна надати вигляду

$$C = 3R \left(1 - \frac{1}{20} \left(\frac{\Theta_D}{T} \right)^2 \right), \text{ де другий член у дужках є першим членом розкладання теп-}$$

лоємності C за степенями $\frac{\Theta_D}{T}$.

7.42. У разі низьких температур верхню межу інтегрування в інтерполяційній формулі (7.2.7) можна вважати нескінченністю, а за високих – слід обчислювати інтеграл, розкладаючи знаменник підінтегрального виразу до ряду Маклорена, та обмежуватися першим ненульовим доданком.

7.43. $\langle v \rangle = IM/(eDN_A S) = 0,74$ мм/с, де D – густина заліза.

7.44. $\rho = Im_e l/e = 2,28 \cdot 10^{-6}$ кг·м/с.

7.45. $t = eN_A DIS/(Ml) = 34,47$ діб; $F = eN_A D l \rho / M = 1,025$ МН, де D – густина міді.

7.46. $\langle v \rangle / \langle u \rangle = \frac{IM}{eN_A DS} \sqrt{\frac{\pi m_e}{8kT}} = 6,93 \cdot 10^{-11}$, де D – густина міді.

7.47. У класичній теорії опір електричному струмові виникає при розсіянні електронів на іонах кристалічних ґраток, а у квантовій теорії виникнення електричного опору зумовлено розсіянням електронних хвиль де Бройля на дефектах ґраток, тобто з погляду квантової теорії ідеальний кристал не чинить опору електричному струмові.

$$\mathbf{7.48.} \quad \langle l \rangle_{\text{кл}} = \frac{\sigma}{e^2 n} \sqrt{32 / (\pi k T m_e)} \approx 5 \cdot 10^{-9} \text{ м}; \quad \langle l \rangle_{\text{кв}} = \frac{\sigma \hbar}{e^2} \left(\frac{3\pi^2}{n^2} \right)^{1/3} \approx 3,7 \cdot 10^{-8} \text{ м, де } \langle l \rangle_{\text{кл}} \text{ і}$$

$\langle l \rangle_{\text{кв}}$ – величини, обчислені за класичною та квантовою теоріями; $\langle l \rangle_{\text{кл}} > a$, ця нерівність у класичній фізиці не має пояснення; $\langle l \rangle_{\text{кв}} > \langle l \rangle_{\text{кл}} > a$, ця нерівність пояснюється дифракцією електронів у кристалічних ґратках. Класичну теорію застосовувати не можна.

7.49. Із статистичних уявлень для середньої довжини вільного пробігу електронів маємо $\langle l \rangle_F = (n_\Phi \sigma)^{-1}$, де n_Φ – концентрація фононів; σ – ефективний переріз зіткнення електрона з фононом. Усі величини, що входять до формули (7.3.2), за винятком $\langle l \rangle_F$, від температури майже не залежать. Якщо взяти до уваги, що фонони є бозе-частинками і їхня кількість не зберігається ($\mu = 0$), то для концентрації фононів одержимо $n_\Phi = \frac{4\pi g}{h^3} \int_0^{p_D} \frac{p^2 dp}{e^{\frac{\varepsilon(p)}{kT}} - 1}$, тут p_D – імпульс фонона, який відповідає дебаївській

частоті; g – кількість спінових станів фонона, що відповідає двом поперечним та одній поздовжній поляризації, $g = 3$. Припускаючи, що фонони різних поляризацій

поширюються з однаковими швидкостями u , а зв'язок між фононною частотою ω та швидкістю їхнього поширення має вигляд $\omega = uk$ (k – модуль хвильового вектора фонона, $k = p/\hbar$), після відповідних підстановок маємо $n_{\Phi}(T) = \frac{3}{2\pi^2 u^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$.

Якщо $T \gg \Theta_D$, тоді $n_{\Phi} = \frac{3kT\omega_D^2}{4\pi^2 \hbar u^3}$, звідки $\langle l \rangle_F \sim T^{-1}$ та $\rho \sim T$.

$$7.50. \alpha = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 l_2 - \rho_2 l_1}; \alpha_{Cu} = 4,36 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}; \alpha_{Fe} = 6,52 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}; \alpha_{Zn} = 4,18 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1};$$

$$\alpha_{Al} = 4,49 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}; \alpha_{Bi} = 4,58 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}.$$

$$7.51. T = 273 + t = 423,0 \text{ K, де } t = \frac{\rho_{0Al} - \rho_{0Cu}}{\alpha_{Cu} \rho_{0Cu}} = 150 \text{ }^\circ\text{C}.$$

$$7.52. E = \frac{\langle v \rangle}{e \langle l \rangle_F} \sqrt{2\varepsilon \varepsilon_F m} = 15,1 \text{ мВ/м}; \varepsilon = eE \langle l \rangle_F = 0,3 \text{ eВ}.$$

$$7.53. \langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} k \left(273 + \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0 \alpha} \right) = 48,43 \text{ меВ}.$$

7.54. Тим, що електричний заряд та енергія теплового руху в металах переносяться тими самими частинками.

7.55. Для обчислення теплопровідності електронного газу візьмемо вираз

$$\lambda = \frac{1}{3} \langle l \rangle_F < \langle u \rangle_F \rho C / M,$$

де $\langle l \rangle_F$, $\langle u \rangle_F$ – середня довжина вільного пробігу та середня швидкість електронів з енергією Фермі; C – молярна теплоємність; M – молярна маса електронного газу,

а для електропровідності – формулу (7.3.2). Тоді маємо $\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{2}{3} \frac{m \langle u \rangle_F^2}{2} \frac{\rho C}{e^2 n M}$, або $\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{2}{3} \varepsilon_F \frac{\rho C}{e^2 n M}$. Для визначення густини газу візьмемо $\rho = \frac{M}{N_A} n$, тоді $\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{2}{3} \varepsilon_F \frac{C}{e^2 N_A}$.

Для обчислення теплоємності електронного газу з розв'язку задачі 7.40 маємо $C = 3R \frac{kT}{\varepsilon_F} = 3k^2 N_A T / \varepsilon_F$, тому $\frac{\lambda}{\sigma} = 2 \frac{k^2}{e^2} T$, і вираз (7.3.5) одержано. Щодо коефіцієнта 2, то при використаних наближеннях його значення можна вважати задовільним. Великих розбіжностей немає.

$$7.56. \lambda = C T \sigma \frac{1 + \alpha t_{20}}{1 + \alpha t}; \lambda_W \approx 119 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}; \lambda_{Cu} \approx 400 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}; \lambda_{Fe} \approx 63 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}.$$

$$7.57. \sqrt{\frac{\langle r_1^2 \rangle}{\langle r_2^2 \rangle}} = \sqrt{\frac{\chi_1 Z_2}{\chi_2 Z_1}} = 1,65.$$

7.58. Ні. Якщо розглядати взаємодію між спіновими магнітними моментами електронів як взаємодію між коловими струмами, відстань між якими d , то модуль енергії їх взаємодії $U = \mu_0 \mu_e^2 / (2\pi d^3) \approx 5 \cdot 10^{-23}$ Дж, де μ_e – спіновий магнітний момент електрона. При температурах, які визначаються співвідношенням $U = kT$ (у даному випадку $T \approx 4$ К), тепловий рух дезорієнтує магнітні моменти електронів. Ця температура значно менша за температуру Кюрі для феромагнетиків, тому магнітна взаємодія електронів не спроможна подолати їхній тепловий рух та бути причиною спонтанної намагніченості феромагнетиків. У атомів деяких хімічних елементів (залізо, кобальт, нікель, деякі сплави) є електронні оболонки, які заповнені не повністю. Між електронами в цих оболонках у межах атома, а також у кристалічних ґратках на відстанях близько 10^{-5} м виникає обмінна взаємодія, мінімуму енергії якої відповідає паралельна орієнтація спінових магнітних моментів, що, у свою чергу, спричиняє спонтанну намагніченість.

7.59. а) У кристалічних ґратках деяких хімічних сполук обмінна взаємодія між електронами, які входять до сусідніх атомів, стає причиною того, що їхні спінові магнітні моменти вибудовуються антипаралельно один до одного, внаслідок чого ці моменти повністю компенсуються, і результуюча намагніченість середовища дорівнює нулеві. б) У деяких середовищах сусідні атоми (або іони) мають неоднакові магнітні моменти, які є антипаралельними. Тому повної компенсації цих магнітних моментів не відбувається, і у середовищі існує невелика спонтанна намагніченість. Зумовлено великими значеннями магнітної проникності та малої електропровідності. Ферити є магнітними напівпровідниками та магнітними діелектриками.

$$\mathbf{7.60.} \quad \frac{\Delta\chi}{\chi} \cdot 100\% = \frac{T_N}{T} \cdot 100\% = 95,31\%.$$

7.61. Кінетичній енергії електрона в однорідному магнітному полі можна надати вигляду $T = \frac{p_{\perp}^2}{2m_e} + \frac{p_{\parallel}^2}{2m_e}$, де $p_{\perp}$ – модуль проекції вектора імпульсу електрона на площину, яка є перпендикулярною до напрямку поля, а $p_{\parallel}$ – модуль проекції імпульсу на вісь гвинтової лінії (напрямок поля), уздовж якої рухається електрон. Оскільки момент імпульсу електрона відносно осі квантується, то маємо $p_{\perp} r = m v r = n \hbar$, де r – радіус гвинтової лінії. З боку магнітного поля на електрон діє сила Лоренца, яка є доцентровою силою, тобто $\frac{m_e v^2}{r} = e B v$. З наведених рівностей одержуємо, що кінетична енергія обертального руху електрона в магнітному полі $T_{\perp} = n \hbar \omega_L$ (ω_L – частота обертання електрона навколо напрямку поля, яка дорівнює ларморовській, $\omega_L = \frac{eB}{2m_e}$), тобто величина $T_{\perp}$ квантується.

7.62. Повний енергії електрона в магнітному полі можна надати вигляду $\varepsilon = T_{\perp} + p_{\parallel}^2 / (2m_e) - \mu_s B$, де $T_{\perp} = n \mu_B B$, μ_s – вектор спінового магнітного моменту. Отже, $\varepsilon = n \mu_B B + p_{\parallel}^2 / (2m_e) - \mu_s B$. Тут перший доданок можна розглядати як потенціальну енергію колового струму, створеного електроном, у зовнішньому полі. Магніт-

ний момент цього струму нде зорієнтовано проти поля, що є характерним для діаманетизму. Цей ефект також можна розглядати як наслідок співвідношень невизначеностей для координат та імпульсів (або кінетичної та потенціальної енергій). Насправді, поки магнітного поля немає, електрон є вільною частинкою і описується плоскою хвилею де Бройля з визначеними імпульсом та кінетичною енергією. Обертальний рух у магнітному полі порушує визначеність поперечних до поля компонент імпульсу. Це зумовлює невизначеність кінетичної енергії електрона і дає змогу тлумачити додатний доданок до повної енергії, що пропорційний до індукції магнітного поля, як потенціальну енергію колового струму.

$$7.63. \Delta S = h/(2eB) = 2,07 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2; B' = h/(2eS) \sim 10^5 \text{ Тл.}$$

7.64. Основний внесок у парамагнітну сприйнятливість цих металів робить електронний газ внаслідок орієнтувальної дії магнітного поля на спінові моменти електронів провідності. Цей внесок не залежить від температури, оскільки він зумовлений електронами з енергією Фермі.

7.65. Внаслідок дії принципу Паулі. Саме він перешкоджає магнітному полю зорієнтувати спінові магнітні моменти електронів уздовж поля. Дія цього принципу є сильною, ніж дезорієнтувальна дія теплового руху на магнітні моменти іонів.

7.66. Рух електронів у кристалічних ґратках можна розглядати як поширення хвиль де Бройля, які розсіюються атомами у вузлах ґраток. Ці хвилі внаслідок дифракції можуть проходити в ґратках віддалі, що значно перевищують міжатомні віддалі в кристалічних ґратках.

7.67. Ні, бо внаслідок зіткнень із атомами у вузлах ґраток імпульс електрона не зберігається. У загальному випадку не збігається. Може.

7.68. Перекриттям електронних оболонок валентних електронів, між якими виникає обмінна взаємодія, яка внаслідок принципу Паулі зумовлює розщеплення енергетичних рівнів валентних електронів ізолюваних атомів і утворення енергетичних зон. Утворення зон можна також пояснити як наслідок тунельного ефекту. Справді, зі зближенням атомів для валентних електронів зменшується ширина енергетичного бар'єра, який розділяє атоми, внаслідок чого завдяки тунельному ефекту збільшується ймовірність переходу електрона до іншого атома. Час життя атома стає скінченним і, відповідно до співвідношення невизначеностей для енергії та часу, це спричиняє розширення рівня, а отже, утворення енергетичної зони.

7.69. Електронна конфігурація атома берилію має вигляд $1s^2 2s^2$. При утворенні кристала рівні обох валентних електронів розщеплюються і утворюється валентна зона, яка містить $2N$ рівнів. Ця зона є повністю заповненою, що відповідає діелектрику. Проте у берилію над валентною зоною є зона, що містить рівні, які утворюються при розщепленні рівнів $2p$ -електронів. Ця зона перекривається з валентною, що й зумовлює належність берилію до металів.

7.70. У напівпровідників питомий опір зменшується, а в провідників – збільшується.

$$7.71. \Delta \epsilon = \frac{2kT_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln n = 0,33 \text{ еВ.}$$

7.72. Під діркою розуміють квазічастинку, яка означає, що електрона на даному енергетичному рівні у валентній зоні немає, тобто це електронна вакансія. Поза напівпровідником дірки не існують. Зони провідності для електронів та дірок не збігаються; так, для дірок зоною провідності є валентна зона; $\epsilon_{\min} = \frac{2kT_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln n = 1,12 \text{ еВ.}$

$$7.73. \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = e^{\frac{\Delta \varepsilon (T_2 - T_1)}{2kT_1 T_2}} = 84,68.$$

7.74. Тому, що їхня електропровідність значно залежить від температури.

7.75. Рівність $\langle n_e(\varepsilon) \rangle + \langle n_d(-\varepsilon) \rangle = 1$ впливає із самого змісту функції $\langle n(\varepsilon) \rangle$ (в кожному стані перебуває лише електрон або дірка), тому $\langle n_d(-\varepsilon) \rangle = 1 - \langle n_e(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_d - \mu_d}{kT}} + 1}$, де хімічний потенціал та енергія дірок зв'язані з відповідними величи-

нами для електронів співвідношенням $\varepsilon_e - \mu_e = -(\varepsilon_d - \mu_d)$. Відлік енергії дірок здійснюється від стелі валентної зони донизу, а електронів – від дна зони провідності вгору.

7.76. а) *p*-типу; б) *n*-типу.

7.77. Енергія активації донорного рівня $\Delta \varepsilon = -E_{\min}$, де $E_{\min}$ – енергія основного стану системи. Отже, задача зводиться до відшукування цієї величини. Повна енергія

системи $E = \frac{p^2}{2m^*} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$, де p – імпульс електрона, r – віддаль між електроном та іоном, масу іона порівняно з масою електрона вважаємо нескінченною. Для оцінки енергії основного стану вважаємо $\Delta r \approx r$, $\Delta p \approx p$. Тоді $rp \sim \hbar$, звідки $p \approx \hbar/r$. Для енергії системи це дає $E = \frac{\hbar^2}{2m^*r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$. Основному станові системи відповідає

віддаль r_0 , для якої функція $E(r)$ має мінімум: $r_0 = 4\pi\epsilon_0\epsilon \hbar^2 / (m^*e^2)$. Тоді $\Delta \varepsilon = -E_{\min} = -m^*E_0/(m\epsilon^2) \approx 0,06$ еВ, де E_0 – енергія основного стану атома водню, $E_0 = -13,65$ еВ.

7.78. Електропровідність напівпровідника $\sigma = e(n_+ u_+ + n_- u_-)$, де $n_+ = n_{+b} + n_{+d}$, $n_- = n_{-b} + n_{-d}$; індексом “*b*” позначена концентрація носіїв при власній провідності, “*d*” – при домішкочій. Кожна з концентрацій зростає з підвищенням температури за експоненціальним законом: $n_b \sim \exp(-\Delta \varepsilon/(2kT))$, $n_d \sim \exp(-\Delta \varepsilon_d/(2kT))$.

У першій формулі під $\Delta \varepsilon$ розуміють енергію активації власної провідності, в другій під $\Delta \varepsilon_d$ – домішкочої. Оскільки $\Delta \varepsilon > \Delta \varepsilon_d$, при низьких температурах основний внесок до електропровідності напівпровідника роблять домішкові носії струму. Зі зростанням температури головну роль відіграє концентрація носіїв власної провідності.

$$7.79. \alpha = \frac{d\rho}{\rho dT} = -\frac{\Delta \varepsilon}{2kT^2} = -4,32 \cdot 10^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

7.80. У використанні внутрішнього фотоефекту: нагріті тіла випускають теплове випромінювання, у спектрі якого є частоти, що спричиняють у напівпровіднику внутрішній фотоефект.

7.81. Електропровідність ділянок мішені змінюється завдяки явищу внутрішнього фотоефекту. Чим більшою є освітленість ділянки зображення, тим менший опір фотопровідника і тим швидше відбувається його розрядження.

7.82. Внутрішній фотоефект, завдяки якому фоторезистор змінює свій електричний опір під дією випромінювання, а у фототранзисторі здійснюється керування колекторним струмом, при цьому світлові сигнали перетворюються в електричні з одночасним їх підсиленням.

7.83. $\lambda \leq hc/\Delta\epsilon$; для германію $\lambda \leq 1,85 \cdot 10^{-6}$ м, для селену $\lambda \leq 6,88 \cdot 10^{-7}$ м, для сірого олова $\lambda \leq 1,24 \cdot 10^{-5}$ м. Для германію та сірого олова встановлений інтервал містить у собі інфрачервоні промені. видиме та рентгенівське випромінювання, а для селену – видиме та рентгенівське випромінювання.

7.84. а) Змінюється; б) ні.

7.85. Не змінюється, з домішкою арсену – змінюється.

7.86. За знаком холлівської різниці потенціалів.

$$7.87. \frac{R_{X1}}{R_{X2}} = e^{\frac{\Delta\epsilon(T_2 - T_1)}{2kT_1T_2}} = 2,71, \text{ де } \Delta\epsilon - \text{енергія активації германію.}$$

$$7.88. u_- = \frac{R_X}{\rho} = 0,4 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с}).$$

$$7.89. n_+ = \frac{U}{U_X} \frac{Bl}{e\rho L} = 5 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}, u_+ = \frac{U_X}{U} \frac{L}{Bl} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с}).$$

7.90. $|u_- - u_+| = \frac{1}{\eta B} = 0,20 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с}); n_+ / n_- = \eta^2 = 4,0$. Виділимо в напівпровіднику об'єм ΔV із зарядом Δq . Швидкість упорядкованого руху цього заряду V_c обчислюємо як швидкість своєрідного центра заряду $V_c = \frac{v_+ Q_+ - v_- Q_-}{Q_+ + Q_-}$ (знак мінус вказує

на те, що позитивні та негативні заряди у даному об'ємі переміщуються у протилежних напрямках). Маємо $v_{\pm} = u_{\pm} E$, $Q_{\pm} = en_{\pm} v_{\pm} S \Delta t = en_{\pm} u_{\pm} S \Delta t E$, де $v_{\pm} S \Delta t$ – об'єм, з якого заряд $Q_{\pm}$ виходить за час Δt ; E – напруженість поздовжнього електричного поля. Отже,

$$V_c = \frac{n_+ u_+^2 - n_- u_-^2}{n_+ u_+ + n_- u_-} E, \text{ і на заряд } \Delta q, \text{ який рухається в однорідному магнітному полі}$$

$$\text{перпендикулярно до його силових ліній, діє сила } \Delta F = \Delta q \cdot V_c \cdot B = \Delta q \frac{n_+ u_+^2 - n_- u_-^2}{n_+ u_+ + n_- u_-} EB.$$

Переміщення цього заряду під дією вказаної сили зумовлює утворення поперечного (холлівського) електричного поля з напруженістю $E_X = \frac{\Delta F}{\Delta q} = \frac{n_+ u_+^2 - n_- u_-^2}{n_+ u_+ + n_- u_-} EB$; закон

Ома дає $E = \rho j = j / (e(n_+ u_+ + n_- u_-))$ (див. формулу (7.4.3)), тому $E_X = R_X j B$, де R – стала Холла для напівпровідникового матеріалу зі змішаним типом провідності,

$$R = \frac{1}{e} \frac{n_+ u_+^2 - n_- u_-^2}{(n_+ u_+ + n_- u_-)^2}. \text{ Оскільки провідник бездомішковий, у ньому } n_+ = n_- = n, \text{ і тому}$$

$$R_X = \frac{1}{en} \frac{u_+ - u_-}{u_+ + u_-} = \frac{u_+ - u_-}{\sigma}. \text{ Якщо під } R_X, E_X, j, E \text{ та } B \text{ розуміти модулі відповідних}$$

величин, можна записати $E_X = \frac{|u_+ - u_-|}{\sigma} j B = |u_+ - u_-| EB$, звідки одержуємо наведений

результат. Відповідь на друге запитання випливає з умови $R_X = \frac{1}{e} \times$
 $\times \frac{n_+ u_+^2 - n_- u_-^2}{(n_+ u_+ + n_- u_-)^2} = 0$.

7.91. Зовнішня контактна різниця потенціалів виникає внаслідок різниці робіт виходу електронів із металів, що перебувають у контакті. Це – різниця потенціалів між точками, що містяться поблизу кожного з металів. Внутрішня контактна різниця потенціалів – це різниця потенціалів між точками, що лежать усередині металів, які перебувають у контакті. Ця різниця зумовлена різницею хімічних потенціалів металів, що контактують.

$$\mathbf{7.92.} \Delta\varphi_e = \frac{A_1 - A_2}{e} = 0,53 \text{ В};$$

$$\text{при } T = 0: \Delta\varphi_{in} = \frac{\varepsilon_{F_2} - \varepsilon_{F_1}}{e} = \frac{\hbar^2}{2m_e e} (3\pi^2 N_A)^{\frac{2}{3}} \left(\left(\frac{2D_2}{M_2} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{D_1}{M_1} \right)^{\frac{2}{3}} \right) = 4,67 \text{ В};$$

$$\text{при } T = 1050 \text{ К: } \Delta\varphi_{in} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{e} = \frac{\varepsilon_{F_2} - \varepsilon_{F_1}}{e} + \frac{\pi^2}{12e} (kT)^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{F_1}} - \frac{1}{\varepsilon_{F_2}} \right) = 4,671 \text{ В}.$$

7.93. У разі досить малої різниці температур $T_2 - T_1$.

$$\mathbf{7.94.} \xi = \alpha_{AB} (T_2 - T_1) n = 1,2 \text{ В}; \quad n = \frac{\xi}{\alpha_{AB} (T_2 - T_1)} = 15.$$

$$\mathbf{7.95.} \frac{\eta_{\text{полс}}}{\eta} = \frac{n+1}{n+n_1} = \frac{101}{105} < 1, \text{ зменшиться}; \quad \frac{\eta_{\text{пар}}}{\eta} = \frac{n_1(n+1)}{nn_1+1} = \frac{505}{501} > 1, \text{ збільшиться}.$$

7.96. Енергія Фермі в напівпровіднику є значно меншою, ніж у провіднику (внаслідок меншої концентрації носіїв струму); як випливає з формул (7.5.3) – (7.5.5), це спричиняє збільшення питомої термо-ЕРС. Крім того, у напівпровідниковій термопарі у переносі електрики беруть участь два типи носіїв струму – електрони та дірки, що також збільшує питому термо-ЕРС.

$$\mathbf{7.97.} T_2 = T_1 + ncR / \alpha_{AB} = 334,5 \text{ К}.$$

$$\mathbf{7.98.} \alpha_{AB} = I(R_1 + R_2) / \Delta T = 43,7 \text{ мВ/К}.$$

7.99. Зі зміною напрямку струму теплота, що виділяється внаслідок ефекту Джоуля – Ленца, не змінює знака, а при ефекті Пельтьє – змінює, тобто нагрівання спаю зміниться його охолодженням.

$$\mathbf{7.100.} \frac{Q_{\text{п}}}{Q_{\text{дж}}} = \frac{\alpha_{AB} T}{IR} = 5,8.$$

$$\mathbf{7.101.} N = \frac{Q}{e\alpha_{AB} T} = 3,1 \cdot 10^{18}; \quad U = \frac{Q}{eN} \approx 10,4 \text{ мВ}.$$

7.102. Контакти набувають вентильної властивості внаслідок утворення на межі середовищ подвійного електричного шару. Якщо напрям зовнішнього поля збігається з напрямом поля в шарі, то маємо пропускний напрям, якщо напрями

протилежні – заперний. Коефіцієнт випромінювання буде найбільшим у разі контакту напівпровідників p - та n -типу, тому що тут товщина подвійного шару виявляється найбільшою.

7.103. а), б) Нелінійний характер вольт-амперної характеристики p – n -переходу; в) вейтільний фотоэффект; г) народження надлишкових електронів та дірок під дією світла, що зумовлює зростання зворотного струму фотодіода.

7.104. Струм, що проходить крізь підключений у прямому напрямі p – n -перехід, за певних умов збуджує випромінювання світла (явище інжекційної електролюмінесценції). Для здійснення цього процесу необхідно створити інверсну заселеність рівнів енергії у напівпровіднику. Тоді частота переходу електронів із зони провідності у валентну зону буде більшою, ніж в оберненому напрямі. Внаслідок рекомбінації інжекттованих електронів і дірок під дією прикладеної напруги в область p – n -переходу випускаються кванти випромінювання. На відміну від теплових джерел світла світлодіоди мають вузький спектр випромінювання, тому сприймаються як однокольорові (червоні, зелені). Інша перевага – швидкодія, яка зумовлена малим часом життя неосновних носіїв. Найчастіше використовують GaAs, GaP, SiC з домішками цинку, ксено (червоні) або азоту (зелені).

$$7.105. U = \frac{kT}{e} \ln n = 0,18 \text{ В.}$$

$$7.106. I_0 = I_{\text{зв}} \frac{I_{\text{пр}}}{I_{\text{пр}} - I_{\text{зв}}} = 20,2 \text{ мкА.}$$

$$7.107. n_2 = n_1^{1/(1+n)} = 818,16.$$

7.108. В к а з і в к а. Функція $R(I)$ має вигляд: для прямого напрямку $R_{\text{пр}} = \frac{kT}{e} \frac{1}{I_{\text{пр}} + I_0}$, для зворотного напрямку $R_{\text{зв}} = \frac{kT}{e} \frac{1}{I_0 - I_{\text{зв}}}$.

7.109. Тому, що ширина бази є малою; дифузія.

7.110. Згідно з квантовою механікою навіть при $T = 0 \text{ К}$ атоми рідкого гелію здійснюють нульові коливання. Внаслідок малої маси атомів гелію амплітуда цих коливань $A_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega_0)}$ виявляється величиною того самого порядку, що й стала кристалічних ґраток; крім того, оскільки гелій є інертним газом, то сили міжатомної взаємодії в ньому надзвичайно слабкі. Вказані фактори перешкоджають кристалізації рідини.

7.111. Нормальна компонента має всі властивості звичайної рідини, а надплинна відповідає за її надплинні властивості і, зокрема, має нульову в'язкість. Ці компоненти співіснують у кожній точці рідини. Як матеріальні об'єкти такі компоненти не існують, і тому розділити їх у просторі не можна.

7.112. а) Крізь капіляр проходить надплинна компонента, бо фонони, які характеризують нормальну компоненту, гальмуються у разі стикання зі стінками капіляра; б) з підвищенням температури в рідині збільшується відносна частка нормальної компоненти, тому зростає її в'язкість і як наслідок цього – момент імпульсу, який переноситься від зовнішнього циліндра до внутрішнього.

7.113. У кристалічних ґратках мають місце два види взаємодії електронів – внаслідок обміну фотонами та обміну фононами. Обмін фотонами спричиняє відштовху-

вання між електронами. Щодо обміну фононами, то зі зниженням температури кристала при деякій $T = T_k$ він зумовлює виникнення притягання між парою електронів, енергія яких близька до енергії Фермі. Якщо вони мають протилежні імпульси та спіни. Починаючи з критичної температури та нижче від неї, сумарна міжелектронна взаємодія для вказаної пари електронів має характер притягання. Отже, у кристалі утворюються зв'язані стани двох електронів – куперівські пари. Такі пари не існують поза кристалом, зокрема у вакуумі. Зменшується внаслідок ізотопічного ефекту (див. формулу (7.6.4)).

$$7.114. T_2 = T_1 \sqrt{M_1/M_2} = 0,89 \text{ К.}$$

7.115. Метал у надпровідному стані можна розглядати як ділянку електричного кола, яка складається з двох провідників, з'єднаних паралельно один одному: в одному з них опір нормальний, в іншому – дорівнює нулеві. Повний опір такої ділянки дорівнює нулеві; напруженість електричного поля всередині металу також дорівнює нулеві (для доведення скористатися законом Ома в диференціальній формі).

$$7.116. E_{\text{ж}} \approx kT_k = 0,43 \text{ мЕВ.}$$

7.117. Перший не буде, другий – буде (порівняти критичні температури для цих матеріалів з температурою зрідження азоту, яка за нормальних умов дорівнює 77 К).

7.118. Температура переходу в надпровідний стан пропорційна енергії зв'язку куперівської пари (енергетичній щільності надпровідника), яка визначається силою зв'язку електронів із фононами. У провідників цей зв'язок слабкий, тому енергетична щільність та температура переходу тут є невеликими. Отже, високотемпературні надпровідники слід шукати серед таких матеріалів, які мають досить широкі енергетичні щільності, а це можливо лише в разі сильного електрон-фононного зв'язку, що виключає добру провідність у нормальному стані.

7.119. Нехай металеве кільце, яке перебуває в надпровідному стані, вміщено в зовнішнє магнітне поле. Якщо деформується кільце або змінюється поле, то в кільці індукується ЕРС, яка за законом Ленца дорівнює $-\frac{d}{dt}(\Phi_B + \Phi'_B)$, де Φ_B – магнітний потік крізь кільце, зв'язаний із зовнішнім полем; Φ'_B – потік, який створює магнітне поле надпровідного струму. За законом Ома для замкненого кола маємо $-\frac{d}{dt}(\Phi_B + \Phi'_B) = RI$, де R – активний опір повного кола. У надпровідному колі $R = 0$, і тому $\Phi_B + \Phi'_B = \text{const}$.

$$7.120. \Delta I = BV/(\mu_0 N^2 S) = 0,1 \text{ мА.}$$

7.121. Принцип дії вказаних екранів полягає в тому, що порожнисті надпровідники, так само як суцільні, “виштовхують” магнітні поля, і тому всередині таких надпровідників магнітних полів немає.

7.122. Застосуємо до контуру $ABCD$ (рис. В.7.2) друге правило Кірхгофа. Оскільки контур надпровідний та взаємною індуктивністю нехтуємо, маємо $L_B dI_B/dt - L_D dI_D/dt = 0$, де L_B, L_D – індуктивності гілок. Інтегруючи наведене рівняння, одержимо $L_B I_B - L_D I_D = \text{const}$. Якщо в момент часу $t = 0$ $I_B = I_D = 0$, то $\text{const} = 0$, і остаточно маємо $I_B/I_D = L_D/L_B$.

7.123. Другого роду.

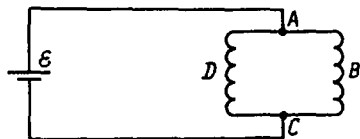


Рис. В.7.2

7.124. Надпровідні екрани перешкоджають розсіянню магнітного потоку, а отже, сприяють його концентрації навколо полюсів магніту.

7.125. Електричний струм, який проходить по нижньому кільцю, створює неоднорідне магнітне поле, що діє на диск (див. рис. 7.2). Надпровідність кільця та диска уможлиблює одержання сильних магнітних полів без істотних теплових втрат.

$$7.126. \omega = \frac{2e}{\hbar} \Delta\phi = 6,07 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}.$$

$$7.127. I = h / (2eL) = 2,07 \text{ мкА}.$$

$$7.128. \Delta\phi = \frac{\hbar}{2e} \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1,04 \text{ нВ}.$$

$$7.129. B = \Phi_0 / S = 0,21 \text{ нТл}.$$

7.131. Для виготовлення еталона напруги (вольта) використовується ефект Джоузефсона: відповідно до співвідношення (7.6.3) обирається такий еталонний елемент, який під час проходження крізь нього надпровідного струму випускає випромінювання, частота якого відповідає напрузі на діелектрику $\Delta\phi = 1 \text{ В}$. Виготовлення еталона опору (ома) ґрунтується на квантовому ефекті Холла: обирається такий зразок, опір якого дорівнює холлівському (співвідношення (7.6.5)). Оскільки цей опір залежить лише від фундаментальних констант $\hbar$ і e , то він визначається з високою точністю й може бути обраний як еталонний.

ДО РОЗДІЛУ 8

$$8.1. \theta = 2 \arccos \frac{4\pi\epsilon_0 r T}{Z_1 Z_2 e^2} = 179,37^\circ, \text{ де } Z_1, Z_2 - \text{відповідно зарядові числа } \alpha\text{-частинки}$$

$$\text{та ядра-мішені; } \eta = 1 - \pi \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 T} \cotg \frac{\theta}{2} \right)^2 \frac{DN_A d}{M} = 0,94.$$

$$8.2. Z_2 = \frac{4\pi\epsilon_0 T}{Z_1 e^2} \sqrt{\frac{0,01 \eta M}{N_A \sigma_{\text{пов}}}} \tg \frac{\theta}{2} = 29, \text{ де } Z_1 - \text{зарядове число } \alpha\text{-частинки}.$$

$$8.3. r_{\min} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 T} = 3,12 \cdot 10^{-15} \text{ м}; r_{\text{я}} \sim 10^{-15} \text{ м}.$$

$$8.5. R_{\text{п}} = 4,47 \text{ см}; R_{\text{ал}} = 1,43 \cdot 10^{-3} \text{ см}; N = \frac{T}{E_i} = 2,06 \cdot 10^5.$$

$$8.6. R_{\text{пал}} = 2,51 \cdot 10^{-3} \text{ см}; R_{\alpha\text{ал}} = 0,31 \cdot 10^{-3} \text{ см}; R_{\text{дал}} = 4,48 \cdot 10^{-3} \text{ см}; R_{\text{р см}} = 1,84 \cdot 10^{-3} \text{ см}; R_{\alpha\text{ем}} = 0,23 \cdot 10^{-3} \text{ см}; R_{\text{д ем}} = 3,26 \cdot 10^{-3} \text{ см}.$$

8.7. а) Циклотрон непридатний для прискорення електронів, що мають енергію $T_1 = 0,5 \text{ Мев}$, оскільки вона є близькою до енергії спокою електрона ($E_0 = 0,511 \text{ Мев}$); при такій енергії порушується умова синхронізації; б) енергія спокою протона $E_0 \approx 940 \text{ Мев}$, тому для нього $T_1 < E_0$, і умова синхронізації виконується; в) для прискорення протонів указаній енергії циклотрон непридатний, тому що $T_2 > E_0$.

$$8.8. \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{T}{e} = 75 \text{ Вб/с.}$$

$$8.9. T_1 = 2T_0^2 / (m_e c^2) + 4T_0 = 5,64 \cdot 10^3 \text{ Гев.}$$

8.10. а) Електромагнітна; б) сильна та слабка; в) гравітаційна; найуніверсальнішою є гравітаційна.

8.11. У цьому разі не стало б β -розпаду, тому зросла б кількість стабільних частинок, зокрема підвищилася б частка стабільних нуклідів, світ став би більш різноманітним.

8.12. Калібрувальні бозони – це переносники фундаментальних взаємодій: фотони – електромагнітної, гравітони – гравітаційної, $W^\pm$ - та Z^0 -бозони – слабкої, глюони – сильної. Зв'язок існує: $r \sim 1/m$, де r – радіус взаємодії, m – маса її переносника. Фотони і глюони – це калібрувальні бозони, які переносять відповідно електромагнітну і сильну взаємодію; фотон не має заряду тих частинок, взаємодію між якими він переносить, а глюон має колір.

8.13. б та в; реакція а заборонена законом збереження першого лептонного заряду.

8.14. Ні, цей розпад заборонено законом збереження першого та другого лептонних зарядів.

8.15. Нейтральними є піон π^0 , γ -квант, η -мезон. Квантові числа цих частинок збігаються з квантовими числами їхніх античастинок.

8.16. Можливими є процеси б, в, г.

8.17. Розпади $a - e$ заборонені законами збереження лептонних зарядів, г – заборонено законом збереження баріонного заряду.

8.18. Ні, бо піони мають від'ємну просторову парність.

8.19. Ні; так.

8.20. Електронне нейтрино ν_e та його античастинка $\bar{\nu}_e$ не тотожні, тобто ν_e не є дійсно нейтральною частинкою.

8.21. Всі частинки, дивність яких дорівнює нулеві.

8.22. Різною кількістю кварків у складі частинки: мезони складаються з двох кварків, нуклони – із трьох. Нуклонний ізодублет: $p(uud)$, $n(udd)$, піонний ізотриплет: $\pi^+(u\bar{d})$, $\pi^-(\bar{u}d)$, $\pi^0(u\bar{u})$, $\pi^0(d\bar{d})$. Не можна, бо серед них немає кварків з ненульовою дивністю. Каонний ізомультиплет: $K^+(u\bar{s})$, $K^-(u\bar{s})$, $K^0(d\bar{s})$, $\bar{K}^0(\bar{d}s)$.

8.23. Кількість кваркових ароматів має дорівнювати шести. У межах покоління є більш легкий і більш важкий кварки, маси кварків також зростають зі збільшенням номера покоління. Те саме стосується лептонів.

8.24. Це модель утримання частинок на кінцях пружини: зі збільшенням деформації (віддалі між частинками) сили притягання між ними зростають.

8.25. При високих енергіях $E = cp$, тому з формули де Бройля маємо $\lambda = \hbar c/E$, тобто пристрій, який використовує пучок частинок з високими енергіями, має високу роздільну здатність, що дає змогу розрізняти дуже малі деталі частинки-мішені.

8.26. Енергії зв'язку ядер виявляються значно більшими за власну енергію електрона, а розміри ядер – меншими за невизначеність області локалізації електрона (його комптонівської довжини хвилі); протонно-електронна модель ядра (зокрема, ^{14}N) дає

значення спіну ядра, яке не узгоджується з дослідом; малі магнітні моменти ядер порівняно з магнітними моментами електронів.

8.27. ^3He : 1 протон, 2 нейтрони; ^7Li : 3 протони, 4 нейтрони; ^9Be : 4 протони, 5 нейтронів; ^{13}N : 7 протонів, 6 нейтронів; ^{17}O : 8 протонів, 9 нейтронів; ^{23}Na : 11 протонів, 12 нейтронів; ^{54}Fe : 26 протонів, 28 нейтронів; ^{104}Ag : 47 протонів, 57 нейтронів; ^{235}U : 92 протони, 143 нейтрони; ^{238}U : 92 протони, 146 нейтронів.

8.28. ^4He ; ^4He ; ^7Be ; ^7Li ; ^8Li ; ^8B ; ^{10}Ne ; ^{10}Ne ; ^{15}O ; ^{15}N ; ^{16}O ; ^{16}O ; ^{27}Al ; ^{27}Si ; ^{52}Fe ; ^{52}Fe ; ^{53}Fe ; ^{53}Co ; ^{54}Co ; ^{54}Co .

8.29. Ізотопів – неоднакові, ізобарів – однакові.

$$8.30. A = \sum_{i=1}^5 \eta_i A_i = 58,76614, \text{ де } \eta_i - \text{розповсюдженість.}$$

$$8.31. A_x = \frac{A_{\text{Mo}}}{8} = 12, \text{ магною.}$$

$$8.32. D \approx \frac{m_x}{(4\pi R_0^3)/3} \approx 1,45 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3; n = \frac{1}{(4\pi R_0^3)/3} \approx 0,87 \cdot 10^{44} \text{ м}^{-3}; \langle r \rangle = \frac{1}{n^{1/3}} = 2,26 \cdot 10^{-15} \text{ м.}$$

$\rho = \frac{e}{((4\pi R_0^3)/3)(1+N/Z)} \approx 1,39 \cdot 10^{25} \text{ Кл/м}^3$, де N – кількість нейтронів; при розрахунку прийнято $R_0 = 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ м}$.

$$8.33. \frac{R_{\text{Al}}}{R_{\text{H}}} = 3; \frac{R_{\text{Ar}}}{R_{\text{Li}}} = 2; \frac{R_{\text{Cd}}}{R_{\text{He}}} = 3; \frac{R_{\text{Hg}}}{R_{\text{Mg}}} = 2.$$

8.34. Ні, не можуть.

8.35. Одиницею магнітних моментів електронів є магнетон Бора μ_B , а ядер – ядерний магнетон μ_N . Відношення цих моментів $\mu_B/\mu_N = 1836,5$, і тому внеском магнітного моменту ядер до сумарного магнітного моменту атома, як правило, нехтують.

8.36. Відомо, що нуклон складається з кварків: протон – (uud), нейтрон – (udd). Магнітний момент кварка $\mu_k = Q\hbar/(2m_k)$, де Q – заряд, а m_k – маса кварка; u - та d -кварки мають різні за значенням та знаком заряди. Це зумовлює відмінність від одиниці гіромагнітного відношення для протона та ненульове значення магнітного моменту нейтрона.

8.37. Ні, внаслідок того, що ядерні сили, маючи нецентральний характер, роблять неможливим визначення моменту імпульсу й магнітного моменту окремого нуклона.

$$8.38. F_{e,s} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 9,22 \text{ Н}; F_{r,n} = G \frac{m_p^2}{r^2} = 7,44 \cdot 10^{-36} \text{ Н, де } m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг,}$$

$$r = 5 \cdot 10^{-15} \text{ м.}$$

Оскільки протон має власний магнітний момент (для оцінки візьмемо $\mu_p \approx \mu_N$), його магнітне поле можна розглядати як поле колового струму. Магнітна індукція цього

$$\text{поля на відстані } r \text{ від центра контуру } B = \frac{\mu_0 \mu_p}{2\pi(a^2 + r^2)^{3/2}}, \text{ де } a - \text{радіус кола. Силу,}$$

що діє з боку одного протона на інший, визначимо як силу, яка діє на контур зі струмом (дипольний магнітний момент контуру μ_p) у неоднорідному магнітному полі.

створеному першим протоном: $F_{\text{м.в}} = \mu_p \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{3}{2\pi} \frac{\mu_0 \mu_p^2 r^2}{(a^2 + r^2)^{5/2}}$. В ядрі вважаємо $r \approx a \approx 5 \cdot 10^{-15}$ м. Тоді $F_{\text{м.в}} \approx 4,32 \cdot 10^{-3}$ Н.

Найбільша з цих сил – електростатична, але вона є силою відштовхування і тому не може претендувати на роль ядерної. Інші сили є значно меншими.

8.39. Це свідчить про залежність сильної взаємодії від взаємної орієнтації спінів нуклонів; тому що, не маючи електричного заряду, нейтрони можуть досить легко наблизитися до ядра і потрапити до сфери дії ядерних сил.

8.40. Про властивість насичення, тобто про властивість нуклонів взаємодіяти лише з певною кількістю інших нуклонів.

8.41. З обмінного характеру ядерних сил впливає такий механізм взаємодії нуклонів: один з нуклонів випускає частинку (піон), яка поглинається іншим нуклоном. Для оцінки можна прийняти, що за час Δt , який пройшов з моменту випускання піона до його поглинання, піон пройшов шлях $r_{\pi} = c\Delta t$, де r_{π} – радіус дії ядерних сил. Внаслідок співвідношення невизначеностей для енергії та часу енергія піона буде невизначеною на величину $\Delta E \sim \hbar/\Delta t$. На підставі спеціальної теорії відносності можна

вважати, що $\Delta E = m_{\pi} c^2$, де m_{π} – маса переносника взаємодії. Звідси $r_{\pi} \approx \frac{\hbar}{m_{\pi} c}$,

тобто радіус взаємодії визначається комптонівською довжиною хвилі переносника взаємодії. Маса піона $m_{\pi} = \frac{\hbar}{cr_{\pi}} \approx 3 \cdot 10^{-28}$ кг $\approx 0,2$ а. о. м.

8.42. Це двічі магічні ядра.

8.43. Повної аналогії не існує. Це пояснюється різним характером залежності енергії рівнів від головного квантового числа n . В ядрі енергія рівня зростає швидше, ніж в атомі, що є наслідком короткодіяного характеру сил взаємодії між нуклонами.

8.44. Ні, не буде, бо в ньому існує великий надлишок нейтронів; а) ядро ^{20}Ne ; б) ядро ^{48}Ca .

$$\mathbf{8.45.} \quad E_{\text{пов}} = a_2 A^{\frac{2}{3}}; \quad E_{\text{кул}} = a_3 Z^2 A^{-\frac{1}{3}};$$

для ядра ^{16}O : $E_{\text{пов}} = 113,02$ МеВ, $E_{\text{кул}} = 18,03$ МеВ, $E_{\text{пов}} > E_{\text{кул}}$;

для ядра ^{56}Fe : $E_{\text{пов}} = 260,54$ МеВ, $E_{\text{кул}} = 125,45$ МеВ; $E_{\text{пов}} > E_{\text{кул}}$;

для ядра ^{128}Te : $E_{\text{пов}} = 452,09$ МеВ, $E_{\text{кул}} = 380,94$ МеВ, $E_{\text{пов}} > E_{\text{кул}}$;

для ядра ^{235}U : $E_{\text{пов}} = 683,60$ МеВ, $E_{\text{кул}} = 969,71$ МеВ, $E_{\text{пов}} < E_{\text{кул}}$.

8.46. Найбільш стабільні ядра відповідають хімічним елементам, що містяться в середині періодичної системи елементів Менделєєва (приблизно такі, для яких $40 < A < 80$). Легкі ядра нестійкі відносно реакції синтезу, а важкі – реакції поділу.

8.47. $E \approx 210$ МеВ.

8.48. Для ядра ^{235}U : $m_{\pi} = 235,000\,72$ а. о. м., $\Delta m = 1,714\,5$ а. о. м.; для ядра ^{238}U : $m_{\pi} = 238,007\,61$ а. о. м., $\Delta m = 1,933\,75$ а. о. м.

8.49. $m_n = Zm_p + (A - Z)m_n - E_{\text{зв}} / c^2$; $m_n = m_n + Zm_p$; для ядра ${}^6\text{Li}$: $m_n = 6,013\,52$ а. о. м, $m_n = 6,015\,17$ а. о. м; для ядра ${}^7\text{Li}$: $m_n = 7,014\,44$ а. о. м, $m_n = 7,016\,09$ а. о. м. Більш стабільне ядро ${}^7\text{Li}$.

8.50. $E_{\text{min}} = E_{\text{звF}} - E_{\text{звO}} = 8$ MeB.

8.51. $E_{\text{зв}} = 28,3$ MeB, $\Delta m = 0,030\,37$ а. о. м.

8.52. $E_{\text{зв He}} = 7,7$ MeB, $E_{\text{зв H}} = 8,5$ MeB; енергія зв'язку тритію є більшою, тому що в енергію зв'язку гелію робить від'ємний внесок енергія кулонівського відштовхування.

8.53. $E_{\text{звLi}} = 39,2$ MeB; $E_{\text{звBe}} = 37,6$ MeB. Для берилію вона є меншою, тому що це ядро – нестійке.

8.54. $E_{\text{звS}} - E_{\text{звCl}} = 6,3$ MeB; $E_{\text{нонS}} = E_{\text{нонCl}} = 183,131$ MeB; $E_{\text{кулS}} = 56,666$ MeB; $E_{\text{кулCl}} = 63,971$ MeB.

8.55. $E_{\text{н}} = E_{\text{н}}(A, Z) - E_{\text{н}}(A-1, Z)$; $E_{\text{зв p}} = E_{\text{зв}}(A, Z) - E_{\text{зв}}(A-1, Z-1)$. Для ядра ${}^{142}\text{Cs}$ $E_{\text{зв n}} = 4,24$ MeB, $E_{\text{зв p}} = 10,89$ MeB, $\Delta E = 6,65$ MeB.

8.56. а) ${}^{10}_5\text{B} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^8_4\text{Be}$; б) ${}^{22}_{11}\text{Na} + {}^1_1\text{p} \rightarrow {}^3_2\text{He} + {}^{20}_{10}\text{Ne}$; в) ${}^{17}_8\text{O} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{20}_{10}\text{Ne} + {}^1_0\text{n}$; г) ${}^{37}_{17}\text{Cl} + {}^1_1\text{p} \rightarrow {}^1_0\text{n} + {}^{37}_{18}\text{Ar}$; д) ${}^{12}_6\text{C} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^2_1\text{H} + {}^{14}_7\text{N}$.

8.57. а) $A' = A - 3$, $Z' = Z - 1$; б) $A' = A + 1$, $Z' = Z + 1$; в) $A' = A - 4$, $Z' = Z - 2$; г) $A' = A$, $Z' = Z + 1$; д) $A' = A$, $Z' = Z - 1$.

8.58. а) $T_{\text{пор}} = 4m_e c^2 \approx 2,04$ MeB; б) $T_{\text{пор}} = 2m_e c^2 \left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right) = 1,023$ MeB; в) $T_{\text{пор}} = 2m_e c^2 \left(1 + \frac{m_e}{m_C}\right) = 1,02$ MeB; $Q = -2m_e c^2 = -1,02$ MeB.

8.59. Відбуваються реакції а, з, д. В к а з і в к а. Знайти енергії реакцій; відбуваються тільки екзотермічні.

8.60. $T_{\text{пор}} = 6m_n c^2 \approx 5,64$ GeB; $Q = -2m_n c^2 = -1,88$ GeB, де m_n – маса нуклона. В к а з і в к а. Розглянути реакцію $p + p \rightarrow p + p + N + \bar{N}$, де N – позначення нуклонів. Різницею мас m_n і m_p нехтувати.

8.61. $E = (m_{\text{Ra}} - (m_{\alpha} + m_{\text{Rn}}))c^2 = 4,92$ MeB; $T_{\text{від}} = E - T = 0,22$ MeB.

8.62. Радіоактивними називають ядра, час життя яких $t \gg t_n$, де t_n – характерний ядерний час, $t_n \sim \frac{r_n}{c} \sim 10^{-23}$ с, тут r_n – радіус дії ядерних сил. Альфа-розпад є внутрішньо-

ядерним процесом, $\beta^{(\pm)}$ -розпади – внутрішньонуклонними процесами; електронне захоплення – це внутрішньонуклонний процес, який супроводжується перебудовою електронної оболонки атома після електронного захоплення та виникненням внаслідок цього характеристичного рентгенівського випромінювання.

$$8.63. \lambda = -\frac{1}{t} \ln(1 - 0,01\eta) = 1,13 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}.$$

$$8.64. \text{ Частка ядер, які розпалися: } \eta = \frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t}; \text{ за одну добу } \eta_1 = 6,78 \cdot 10^{-5};$$

за 15 років $\eta_2 = 0,31$. Частка ядер, які залишаться: через 10 років $\xi_1 = 0,78$, через 100 років $\xi_2 = 0,084$.

$$8.65. t = T \frac{\ln((k+1)/k)}{\ln 2} = 1,98 \cdot 10^9 \text{ р.}, \text{ де } T - \text{період піврозпаду } {}^{238}\text{U}.$$

$$8.66. m_p = \frac{1}{0,01\eta} \frac{T_U}{T_{Ra}} \frac{M_U}{M_{Ra}} m_{Ra} = 1,66 \cdot 10^4 \text{ кг.}$$

$$8.67. N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t} (1 - e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}); \quad t_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

$$8.68. N_1(t) = \frac{\rho}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 t}), \quad N_2(t) = \frac{\rho}{\lambda_2} \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} \right), \quad N_3(t) = \rho \times \\ \times \left(t - \frac{\lambda_2 (1 - e^{-\lambda_1 t})}{\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\lambda_1 (1 - e^{-\lambda_2 t})}{\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \right). \text{ Закони зміни кількості ядер кожного нукліда з часом}$$

мають вигляд $\frac{dN_1}{dt} = \rho - \lambda_1 N_1$, $\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1$, $\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2$. Розв'язуючи дану систему рівнянь з початковими умовами $N_1(0) = N_2(0) = N_3(0) = 0$, одержимо наведену відповідь.

8.69. У важких ядрах діють досить великі сили кулонівського відштовхування між протонами, що зменшує енергію зв'язку цих ядер. Випускання α -частинок атомними ядрами є туїельним ефектом, який не має класичного тлумачення.

8.70. $E_p = 6,3 \text{ MeV}$, $E_\alpha = -0,511 \text{ MeV}$. Для ядра ${}^{238}\text{U}$ маємо $M(Z, A) > M(Z - 2, A - 4) + M(2, 4)$, і це ядро виявляється нестійким відносно α -розпаду. Тому з енергетичного погляду йому вигідніше позбавлятися зайвих нуклонів випусканням саме α -частинки, а не окремих нуклонів.

8.71. Імовірність виходу α -частинки з ядра за одиницю часу $\lambda = Dn$, де D - коефіцієнт прозорості потенціального бар'єра; n - кількість зіткнень частинки з поверхнею ядра. Якщо бар'єр прямокутний, то $n = \frac{v}{2r_0} = \frac{1}{2r_0} \sqrt{\frac{2T}{m}}$, де v - швидкість частинки в

ядрі. Отже, маємо $\lambda = \frac{1}{2r_0} \sqrt{\frac{2T}{m}} \exp \left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - T)} r_0 \right)$. Від кінетичної енергії T час-

тинки залежить довжина її пробігу; ця величина стоїть у показнику степеня функції, яка є дуже чутливою до його зміни. Тому невеликі зміни енергії частинки ведуть до значної зміни сталих розпаду α -нестійких ядер.

$$8.72. {}^{229}\text{Th} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^{225}\text{Ra}; \quad T = E_{Ra} + E_\alpha - E_{Th} = 5,2 \text{ MeV}.$$

8.73. Ядра ${}^3\text{H}$, ${}^6\text{He}$, ${}^9\text{Li}$ зазнають β^- -розпаду, ядра ${}^{18}\text{Ne}$, ${}^{25}\text{Al}$ – β^+ -розпаду, а ядра ${}^7\text{Be}$, ${}^{37}\text{Ar}$, ${}^{55}\text{Fe}$ – електронного захоплення.

8.74. Енергія першої реакції $Q = (m_n - m_p - m_e)c^2 = 783$ кеВ, енергія другої реакції $Q = (m_p - m_n - m_e)c^2 = -1.81$ МеВ. Отже, вільний нейтрон розпадається за вказаною в умові схемою, а вільний протон – ні.

$$8.75. \Delta m = \frac{h}{c^2 \tau_n} = 1.52 \cdot 10^{-54} \text{ кг}, \Delta m_1 = \Delta m_n - \Delta m_p = 2.3 \cdot 10^{-30} \text{ кг, тобто } \Delta m \ll \Delta m_1.$$

Нейтрон, зв'язаний в ядрі, має меншу масу, ніж вільний, і тому час життя такого нейтрона буде значно більшим, ніж наведений в умові; узагалі, його розпад в ядрі може здатися неможливим. Маса протона в ядрі також відрізняється від маси вільної частинки, і тому частинки, які є стабільними у вільному стані, в ядрі можуть бути нестабільними.

8.76. $p(uud)$, $n(udd)$: під час розпаду вільного нейтрона один з d -кварків, що входить до складу нейтрона, зазнає розпаду $d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$. Для протона відповідно $u \rightarrow d + e^+ + \nu_e$. Оскільки для вільного протона розпад не відбувається, то можна дійти висновку, що $m_u < m_d$.

8.77. $Q = (m_n - m_p)c^2 + \Delta E_2 - \Delta E_1 = 1.69$ МеВ; $\epsilon = Q - T_e = 1.36$ МеВ; $\epsilon_{\max} = Q = 1.69$ МеВ.

$$8.78. e^- + {}^{41}\text{Ca} \rightarrow {}^{41}\text{K} + \nu_e.$$

8.79. Тому, що з погляду класичної механіки ці електрони містяться ближче до ядра та їхній зв'язок з ядром є найсильнішим.

8.80. Ні, не може (див. розв'язання задачі 6.18). Внутрішньоядерну, збуджені ядра, зокрема такі, що утворилися внаслідок α - та β -розпадів, віддають енергію збудження, випромінюючи γ -кванти. Момент імпульсу ядра, тому що спин γ -кванта дорівнює одиниці (в одиницях $\hbar$); оскільки магнітний момент ядра, зв'язаний з його моментом імпульсу, змінюється, то магнітний момент ядра також змінюється.

8.81. Атомні та ядерні спектри належать різним ділянкам шкали електромагнітних хвиль.

8.82. Перехід атомного ядра зі збудженого стану в нормальний з передачею енергії збудження електрону можна розглядати як випускання ядром електромагнітного випромінювання з його наступним поглинанням електроном, який вилітає з атома. Оскільки β -електрони випускаються разом з антинейтрино, то вони мають суцільний спектр енергій у той самий час, як атомні мають дискретний спектр.

8.83. Ні, оскільки зсув цього рівня внаслідок віддачі на п'ять порядків перевищує його природну ширину.

8.84. Тому, що маса вільного ядра значно менша за масу кристала, і тому при випромінюванні γ -квантів ядро зазнає значної віддачі, а кристал – ні.

8.85. Наявність пологого максимуму на графіку вказаної функції, з чого випливає, що енергія ядра виділяється під час синтезу більш важких ядер з легких та у разі поділу важких ядер на більш легкі. Другий із вказаних механізмів виділення енергії ядра лежить в основі ядерної енергетики, а перший дає змогу використовувати енергію в керованому термоядерному синтезі.

8.86. Перевагами ядерного палива є значно більша теплотворна здатність палива, практична невичерпність та більша екологічна безпека АЕС порівняно з тепловими. Недоліки ядерного палива полягають у великій частці екологічного ризику, порівняно дорогих засобах технічної безпеки на АЕС та в необхідності переробки та утилізації відходів експлуатації ядерного палива. Остання проблема загострюється зі зростанням об'ємів використання ядерного палива, проте вона може знайти повне розв'язання в термоядерній енергетиці. Як ядерне паливо можуть використовуватись ізотопи ^{235}U , ^{238}U , ^{233}Pu , ^{232}Th .

8.87. Реакції поділу важких ядер і реакції синтезу. Радіоактивний розпад може використовуватись для створення стаціонарних малопотужних джерел енергії.

8.88. Тому, що у важкому ядрі на один протон припадає більша кількість нейтронів, ніж у легких та середніх. Через це при поділі важкого ядра продукти поділу переважатимуть нейтронами. Для деяких з таких ядер може здатися енергетично вигідним позбавитися зайвих нейтронів внаслідок β^- -розпаду.

8.89. До поділу ядро перебуває в стані, в якому його енергія має мінімум (E_0). З того, що відбувається процес поділу ядра, випливає, що він є вигідним з енергетичної точки зору, тобто після поділу уламки ядра перейдуть до стану з іншим мінімумом енергії (E'_0), причому ($E'_0 < E_0$). Якщо розглядати енергію ядра як функцію параметра його деформації під час поділу, то може виявитися, що між цими мінімумами буде максимум E_{max} ; тоді енергія активації $E_{\text{акт}} = E_{\text{max}} - E_0$, тобто це та мінімальна енергія, яку треба надати ядру, щоб процес поділу мав місце. Ця енергія відіграє роль ефективного порога реакції, і тому поділ ядра, що одержує енергію $E < E_{\text{акт}}$, може відбуватися лише внаслідок тунельного ефекту.

8.90. Для того, щоб під дією нейтрона з енергією T відбувся поділ ядра, необхідно виконання умови $T \geq E_{\text{акт}} - E_{\text{зв}}$, де $E_{\text{зв}}$ – енергія зв'язку нейтрона в ядрі, утвореного після захоплення нейтрона. Внаслідок захоплення нейтрона ядром ^{235}U утворюється ядро ^{236}U , для якого $E_{\text{акт}1} = 5,3 \text{ MeV}$, $E_{\text{зв}} = 6,4 \text{ MeV}$, тобто для цього ядра немає порога, і воно поділяється повільними нейтронами. Щодо ядра ^{238}U , то після захоплення нейтрона утворюється ядро ^{239}U , для якого $E_{\text{акт}2} = 6,1 \text{ MeV}$, $E_{\text{зв}} = 4,8 \text{ MeV}$; у цьому разі для енергії падаючого нейтрона існує поріг $T_{\text{пор}} = E_{\text{акт}} - E_{\text{зв}} = 1,3 \text{ MeV}$, і, якщо енергія нейтрона $T < T_{\text{пор}}$, поділ ядра ^{239}U не відбувається.

8.91. $Q = E_{\text{яRb}} + E_{\text{яCs}} - E_{\text{яU}} = 149,53 \text{ MeV}$. Максимальний внесок до енергії реакції дає енергія кулонівського відштовхування протонів, а також поверхнева енергія.

8.92. Ядерний реактор – це пристрій, в якому відбувається керована ланцюгова реакція поділу ядер. Він призначений для одержання ядерної енергії та перетворення її в інші види у промислових масштабах, одержання радіоактивних ізотопів для обробки ядерним випромінюванням матеріалів з метою зміни їхніх фізичних властивостей. У ядерному реакторі має місце режим з $k = 1$ (критичний), в ядерній бомбі $k > 1$ (надкритичний режим). Коефіцієнт розмноження нейтронів у ядерному реакторі зменшується внаслідок поглинання нейтронів речовиною в активній зоні реактора та їхнього виходу за межі цієї зони.

$$8.93. \eta = \frac{\Delta E}{E_0} = \frac{4A \sin^2(\theta/2)}{(A+1)^2}, \text{ де } A - \text{ масове число ядра; на ядрі лейтерію } \eta = 0,89;$$

гелію $\eta = 0,64$; вуглецю $\eta = 0,28$.

8.94. $t = T \frac{\ln \eta}{\ln k} = 0,23 \text{ с.}$ Наведене збільшення кількості нейтронів за такий малий проміжок часу призведе до перегрівання реактора.

$$8.95. k = e^{T\tau} = 1,00005.$$

8.96. Сповільнення нейтронів слід здійснювати так, щоб під час зіткнення з мішенню вони втрачали значну частку своєї енергії. Цього можна досягти, якщо нейтрони будуть стикатися з ядрами легких елементів. З таких речовин найкращим сповільнювачем буде D_2O . Газовий сповільнювач 4He непридатний, насамперед внаслідок малої концентрації атомів сповільнювача; щодо звичайної води, то вона непридатна для сповільнення нейтронів, тому що ядра звичайного водню добре поглинають нейтрони.

$$8.97. m = \frac{PM}{QN_A} = 0,47 \text{ кг.}$$

$$8.98. P = \eta \frac{m}{M} \frac{N_A Q}{t} = 52,2 \text{ МВт.}$$

$$8.99. \frac{m}{t} = \frac{PM}{\eta N_A Q} = 3,05 \cdot 10^{-5} \text{ кг/с; за добу} - 2,63 \text{ кг.}$$

$$8.100. m_1 = \frac{m N_A Q}{M q} = 7 \cdot 10^7 \text{ кг.}$$

8.101. $n + {}^{238}U \rightarrow {}^{239}U + \gamma, {}^{239}U \rightarrow {}^{239}Np + {}_{-1}e + \bar{\nu}_e, {}^{239}Np \rightarrow {}^{239}Pu + {}_{-1}e + \bar{\nu}_e; m_U = \frac{M_U}{N_A} \times$
 $\times \frac{P t}{Q} = 1,05 \text{ кг. } m_{Pu} = (v-1) \frac{M_{Pu}}{M_U} m_U = 1,58 \text{ кг; отже, } m_{Pu} > m_U, \text{ і відбувається відтворення}$
 ядерного пального.

$$8.102. Q = (3m - m_C)c^2 = 4,24 \text{ МеВ, де } m_C - \text{ маса ядра } {}^{12}C.$$

8.103. $m = \frac{1}{3} v M_B = 3,67 \text{ г, } E = \frac{1}{3} (m_B + m_H - 3m_{He})c^2 v N_A = 279,47 \text{ ГДж; тут } m_B, m_H,$
 $m_{He} - \text{ маси відповідних ядер; } M_B - \text{ молярна маса бору.}$

8.104. $E_1 = \frac{m}{2M_D} N_A (2m_2 - m_3 - m_p)c^2 = 323,38 \text{ ГДж, } E_2 = \frac{m}{2M_D} N_A (2m_2 - m'_3 -$
 $- m_n)c^2 = 292,22 \text{ ГДж, } E_3 = \frac{\eta m}{M} N_A (m_2 + m_3 - m_\alpha - m_n)c^2 = 403,59 \text{ ГДж, де } m_2, m_3,$
 $m'_3, m_\alpha - \text{ маси ядер } {}^2H, {}^3H, {}^3He, {}^4He; M - \text{ молярна маса дейтерію (або тритію); } \eta -$
 масова частка дейтерію (або тритію) у плазмі.

8.105. Реакція відбудеться, якщо енергія електричного відштовхування ядер матиме порядок енергії їх теплового руху, тобто $kT \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, де r – віддаль між ядрами.

$r \approx 5 \cdot 10^{-15}$ м, звідки маємо $T \sim 10^9$ К. Якщо температура буде нижчою за одержану, то можливий синтез окремих ядер гелію (або тритію) внаслідок тунельного ефекту або внаслідок існування розподілу ядер водню за кінетичними енергіями.

8.106. $a_0 = \frac{N_A \ln 2}{MT} = 74,85 \text{ Ки/кг}$, $m = \frac{MAT}{N_A \ln 2} = 1 \text{ г}$, де M – молярна маса відповідного нукліда; T – період його піврозпаду.

8.107. $A_i = \frac{\ln 2}{T_i} \frac{m_i}{M_i} N_A$; $A_1 = 1 \text{ мкКи}$; $A_2 = 0,45 \text{ мкКи}$; $A_3 = 18,38 \text{ фКи}$;

$A = A_1 + A_2 + A_3 \approx 1,45 \text{ мкКи}$.

8.108. $\tau = T \frac{\ln(100/\eta)}{\ln 2} = 4,22 \cdot 10^3 \text{ р}$.

8.109. $a_2/a_1 = n = 10$.

8.110. $1 \text{ Р} = 0,011 \text{ Дж/м}^3$, експозиційній дозі в 1 Р відповідає поглинута доза в $8,5 \text{ мГр}$.

8.111. Так, одержить.

8.112. $\mu_1 = \frac{1}{l_1} \ln k = 3,97 \text{ м}^{-1}$; $\mu_2 = \frac{1}{l_2} \ln k = 46,99 \text{ м}^{-1}$.

8.113. $l_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} l_1 = 0,27 \text{ м}$.

8.114. $\frac{I}{x_{1/2}} = \frac{\ln k}{\ln 2} = 9,97$.

ДОДАТКИ

А. Деякі відомості з математики

I. Математичні сталі

$$\pi = 3,1416; e = 2,7183; \ln 10 = 2,3026; \lg e = 0,4343; \ln x = 2,303 \lg x.$$

II. Формули комбінаторики

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n; (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n;$$

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1); C(n, m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

III. Скінченні суми

Біном Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots = \sum_{m=0}^n C(n, m)a^{n-m}b^m;$$

Арифметична прогресія

$$S_n = a + a + d + a + 2d + \dots = \sum_{m=0}^{n-1} (a + md) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a + a_n),$$

де a – перший член, a_n – останній член, d – різниця прогресії.

Геометрична прогресія

$$S_n = a(1 + q + q^2 + \dots) = \sum_{m=1}^n aq^{m-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}, \text{ якщо } |q| < 1,$$

де q – знаменник прогресії.

Суми натурального ряду чисел та їх квадратів

$$\sum_{m=1}^n m = 1 + 2 + 3 + \dots = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$\sum_{m=1}^n m^2 = 1 + 4 + 9 + \dots = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

IV. Відомості з геометрії

Теорема косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

де a, b, c – сторони трикутника; A, B, C – відповідні кути.

Площа трикутника

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Одиниці плоского кута:

$$1 \text{ градус } (\dots^\circ), 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} = 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ рад}, 1 \text{ рад} \approx 57,3^\circ;$$

$$1 \text{ мінута } (\dots'), 1' = 2,91 \cdot 10^{-4} \text{ рад};$$

$$1 \text{ секунда } (\dots''), 1'' = 4,85 \cdot 10^{-6} \text{ рад}.$$

Довжина кола $l = 2\pi r$. Площа круга $S = \pi r^2$.

Площа поверхні кулі $S = 4\pi r^2$.

$$\text{Об'єм кулі } V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Об'єм сферичного шару завтовшки dr

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

Рівняння прямої на площині з кутовим коефіцієнтом k

$$y = kx + b.$$

Рівняння прямої у відрізках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Відстань між двома точками

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Спрямовуючі косинуси

$$\cos \alpha_x = \frac{x_2 - x_1}{l}; \quad \cos \alpha_y = \frac{y_2 - y_1}{l}; \quad \cos \alpha_z = \frac{z_2 - z_1}{l}.$$

Рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Рівняння параболи

$$y^2 = 2px.$$

V. Комплексні числа

Алгебрична форма

$$z = x + iy, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Модуль

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Аргумент

$$\arg z = \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right).$$

Тригонометрична і показникова форма

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z = re^{i\varphi}.$$

Формула Ейлера

$$e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi.$$

Дійсна частина

$$\operatorname{Re} z = x = r \cos \varphi.$$

Уявна частина

$$\operatorname{Im} z = y = r \sin \varphi.$$

Піднесення до цілого степеня (формула Муавра)

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

VI. Обчислення визначників та розв'язки алгебричних рівнянь

Визначник другого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y = p, \\ b_1 x + b_2 y = q. \end{cases} \quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

де Δ_1, Δ_2 – визначники, які одержано відповідно заміною стовпців $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ на

$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Аналогічно одержують розв'язок систем з трьох лінійних рівнянь.

Умова існування ненульового розв'язку однорідної системи: $\Delta = 0$.

Квадратне рівняння

$$az^2 + bz + c = 0, \quad z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

де D – дискримінант рівняння, $D = b^2 - 4ac$.

VII. Властивості деяких елементарних функцій

1. Логарифмічна функція

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y; \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y; \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

2. Показникові функції

$$a^x a^y = a^{x+y}; \quad a^x b^x = (ab)^x;$$

$$(a^x)^y = a^{xy}; \quad e^{x+2\pi ni} = e^x.$$

3. Тригонометричні функції

Періодичність:

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x; \quad \cos(x + 2n\pi) = \cos x; \quad \operatorname{tg}(x + n\pi) = \operatorname{tg} x.$$

Зв'язок між тригонометричними функціями:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1; \quad \operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = 1;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}; \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}; \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Парність тригонометричних функцій:

$$\sin(-x) = -\sin x; \quad \cos(-x) = \cos x; \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x.$$

Формули додавання

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y; \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; \quad \operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.$$

Формули половинного аргументу

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}; \quad \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

4. Обернені тригонометричні функції

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \arccos \sqrt{1-x^2};$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\operatorname{arccotg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right).$$

VIII. Похідні елементарних функцій

Функція	Похідна	Функція	Похідна
x^a	ax^{a-1}	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
e^{ax}	ae^{ax}	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
a^x	$a^x \ln a$	$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{cosec} x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

IX. Формули інтегрування

Таблиця невизначених інтегралів (сталі інтегрування опущені)

$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}, \quad a \neq -1$	$\int \cos x dx = \sin x$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x $	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x $
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a }$	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x $
$e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$
$\int \ln x dx = x(\ln x - 1)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$
$\int \sin x dx = -\cos x$	

Інтегрування частинами

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Формула Ньютона – Лейбніца

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

де F – первісна функції $f(x)$.

Середнє значення функції на інтервалі (a, b) :

$$\langle f \rangle = f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad a \leq c \leq b.$$

X. Визначені інтеграли

$\int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2(2\alpha)^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}$
$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 2,31, & n=1/2 \\ \frac{\pi^2}{6}, & n=1 \\ 2,405, & n=2 \\ \frac{\pi^4}{15}, & n=3 \\ 24,886, & n=4 \end{cases}$	$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x + 1} = \begin{cases} \frac{\pi^2}{12}, & n=1 \\ 1,8030, & n=2 \\ \frac{7\pi^4}{120}, & n=3 \\ 23,330, & n=4 \end{cases}$

XI. Розклад елементарних функцій у степеневі ряди

Ряд Тейлора $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$.

Функція	Розклад у ряд	Область збіжності
$(1 \pm x)^a$	$1 \pm ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n a(a-1)\dots(a-n+1) \frac{x^n}{n!}$	$ x \leq 1$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$ x < \infty$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$ x < \infty$
$\operatorname{tg} x$	$x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \dots$	$ x < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{x} - \frac{1}{3} x - \frac{1}{45} x^3 + \dots$	$0 < x < \pi$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$ x < \infty$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$ x \leq 1$

XII. Формули наближених обчислень

При малих x ($|x| \ll 1$) мають місце наближені рівності $(1 \pm x)^a \approx 1 \pm ax$; окремі

випадки: $\frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x$; $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{1}{2} x$; $\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \approx 1 \mp \frac{1}{2} x$; $\ln(1 \pm x) \approx \pm x$; $e^{\pm x} \approx 1 \pm x$;

$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x$; якщо $|x| \ll |a|$, $\sqrt{a^2 \pm x^2} \approx a \pm \frac{x^2}{2a}$; $\frac{1}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} \approx a \mp \frac{x^2}{2a}$.

XIII. Диференціальні рівняння та їх розв'язки

1. Рівняння першого порядку

Рівняння, в яких змінні розділяються: $y' = f_1(x) f_2(y)$;

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C.$$

Лінійні рівняння

$$y' + f_1(x)y = f_2(x). \quad y(x) = e^{-F(x)} \left(y(x_0) + \int f_2(x) e^{F(x)} dx \right).$$

$$\text{де } F(x) = \int_0^x f_1(x) dx.$$

2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Однорідне рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

$$y(x) = \begin{cases} \left\{ A e^{-\frac{a_1}{2}} \cos \left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} x + \alpha \right) \right\}, & \text{якщо } |a_0| > \left| \frac{a_1}{2} \right|, \\ A_1 e^{-\left(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \right) x / 2} + A_2 e^{-\left(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \right) x / 2}, & \text{якщо } |a_0| < \left| \frac{a_1}{2} \right|, \\ \left(A_1 x + A_2 \right) e^{-\frac{a_1}{2} x}, & \text{якщо } a_0 = \frac{a_1^2}{4}, \end{cases}$$

де A, A_1, A_2, α – сталі інтегрування.

Неоднорідне рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

$$f(x) = F_0 \cos \omega x,$$

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x),$$

де $y_0(x)$ – загальний розв'язок однорідного рівняння;

$$y_1(x) = \frac{F_0 \cos(\omega x - \gamma)}{\sqrt{(a - \omega^2)^2 + a_1^2 + \omega^2}},$$

$$\gamma = \arctg \frac{a_1 \omega}{a_0 - \omega^2}.$$

XIV. Спеціальні системи ортогональних координат

Система	Координати	Елемент площі поверхні	Елемент об'єму	Дія оператора Лапласа на скалярну функцію	Зв'язок із прямокутною системою
Прямокутна	x, y, z	$dxdy (dxdz, dydz)$	$dxdydz$	$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	—
Полярна	r, φ	$\frac{1}{2} r^2 d\varphi$	—	$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$	$x = r \cos \varphi,$ $y = r \sin \varphi$

Система	Координати	Елемент площі поверхні	Елемент об'єму	Дія оператора Лапласа на скалярну функцію	Зв'язок із прямокутною системою
Сферична	r, ϑ, φ	$r^2 \sin \vartheta dr d\varphi$	$r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta$	$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) +$ $+ \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \times$ $\times \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) +$ $+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$	$x = r \sin \vartheta \cos \varphi,$ $y = r \sin \vartheta \sin \varphi,$ $z = r \cos \vartheta$
Циліндрична	r, φ, z	$r dr d\varphi$	$r dr dz d\varphi$	$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) +$ $+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$x = r \cos \varphi,$ $y = r \sin \varphi,$ $z = z$

XV. Обчислення кратних і криволінійних інтегралів

1. Обчислення подвійних інтегралів

Якщо область S задана нерівностями $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, то

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_S f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

2. Обчислення потрійних інтегралів

Якщо область V задана нерівностями $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$,

то

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

3. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду

Рівняння поверхні, на якій міститься крива, уздовж якої обчислюється інтеграл, задано в явній формі:

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), z(x, y)) \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (p + qy'(x))^2} dx.$$

4. Обчислення поверхневих інтегралів першого роду

Поверхня, вздовж якої обчислюється інтеграл, задана рівнянням у явній формі:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \int_{S'} f(x, y(x), z(y(x), x)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx,$$

де S' – область на площині XOY , яка відповідає проекції S на цю площину.

XVI. Елементи векторної алгебри та векторного аналізу

1. Елементи векторної алгебри

Розкладання вектора за базисними векторами (ортами)

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

де a_x, a_y, a_z – проекції вектора на відповідні напрямки.

Додавання векторів (рис. Д.1) $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Модуль вектора

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Задання вектора за допомогою орта $\mathbf{a} = a \mathbf{e}_a$, де $\mathbf{e}_a$ – орт вектора $\mathbf{a}$ ($|\mathbf{e}_a| = 1$).

Скалярний добуток векторів $\mathbf{ab} = ab \cos(\hat{\mathbf{ab}})$.

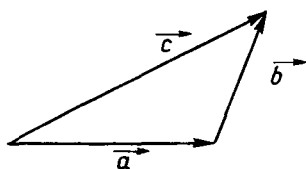


Рис. Д.1

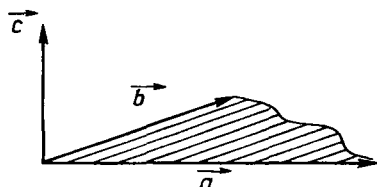


Рис. Д.2

Векторний добуток векторів (рис. Д.2)

$$\mathbf{c} = [\mathbf{ab}], \quad c = ab \sin(\hat{\mathbf{ab}}).$$

Змішаний добуток векторів

$$[\mathbf{ab}] \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}.$$

Подвійний векторний добуток векторів

$$[\mathbf{a} [\mathbf{bc}]] = \mathbf{b} (\mathbf{ac}) - \mathbf{c} (\mathbf{ab}).$$

2. Елементи векторного аналізу та теорії поля

Скалярне поле – область простору, кожній точці P якої відповідає певне значення скаляра φ :

$$\varphi = \varphi(P) = \varphi(r) = \varphi(x, y, z).$$

Наприклад, поле температур $T(\mathbf{r})$, потенціальна енергія $U(\mathbf{r})$, електростатичний потенціал $\varphi(\mathbf{r})$.

Геометричне місце точок, в яких скалярна функція має однакове значення $\varphi(x, y, z) = \text{const}$, називається *поверхнею рівня скаляра* φ .

Градiєнтом скалярного поля в даній точці називається вектор, який позначається символом $\text{grad } \varphi$ і визначається рівністю

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Швидкість зміни поля має найбільше значення в напрямі $\text{grad } \varphi$. Вектор $\text{grad } \varphi$ напрямлений за нормаллю до поверхні рівня в бік зростання функції φ .

Векторне поле – область простору, кожній точці P якої відповідає певне значення вектора $\mathbf{A}(P)$:

$$\mathbf{A}(P) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(x, y, z) \mathbf{i} + A_y(x, y, z) \mathbf{j} + A_z(x, y, z) \mathbf{k}.$$

Наприклад, поле вектора швидкості рідини $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, напруженість електростатичного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, індукція магнітного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

Потоком Φ_A векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, або потоком вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, крізь орієнтовану поверхню S називається поверхневий інтеграл першого роду по поверхні S від проекції вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ на нормаль $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ до цієї поверхні:

$$\Phi_A = \int_S A_n dS = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S},$$

де $d\mathbf{S}$ – вектор елементарної поверхні, його модуль dS дорівнює площі елементарної поверхні, а напрям збігається з напрямом додатної нормалі до площини елементарної поверхні.

Дивергенцією векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, або дивергенцією вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, у даній точці називається границя відношення потоку вектора крізь поверхню, яка оточує точку, до об'єму, що міститься всередині поверхні, коли поверхня стягується в точку; позначається символом $\text{div } \mathbf{A}$:

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{1}{V} \oint_S A_n dS.$$

Символ $\oint$ означає інтеграл по замкненій поверхні.

Точки векторного поля, в яких $\text{div } \mathbf{A} > 0$, називаються джерелами, а точки, в яких $\text{div } \mathbf{A} < 0$, називаються стоками векторного поля. Дивергенція є мірою густини джерел. Векторне поле, дивергенція якого дорівнює нулеві ($\text{div } \mathbf{A} = 0$), називається вихровим (соленоїдним). Вихрове поле не має джерел і стоків.

Теорема Гаусса – Остроградського: потік вектора крізь довільну замкнену поверхню дорівнює інтегралові від дивергенції по об'єму, обмеженому цією поверхнею:

$$\oint_S A_n dS = \int_V \text{div } \mathbf{A} dV.$$

З теореми Гаусса – Остроградського одержуємо

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Циркуляцією C_A векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, або циркуляцією вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, називається криволінійний інтеграл першого роду вздовж замкнутої орієнтованої кривої L :

$$C_A = \oint_L A_t dl = \oint_L \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{l},$$

де A_t – проекція вектора на напрям орієнтованої дотичної до контуру L ; dl – приріст довжини контуру; $d\mathbf{l}$ – вектор елемента контуру, направлений уздовж дотичної до контуру в додатному напрямі. Символ $\oint_L$ означає інтеграл уздовж замкнутої кривої L .

Ротом векторного поля в точці P називається вектор (позначається символом $\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$), нормальна до площадки в даній точці проекція якого є границею відношення циркуляції вектора $\mathbf{A}$ вздовж контуру площадки до її площі, коли контур стягується в точку:

$$\text{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{L \rightarrow P} \frac{\oint_L A_t dl}{S}.$$

Вираз для ротора через проекції вектора $\mathbf{A}$ на осі декартової системи координат

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right),$$

або в символічній формі

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Визначник розкривається за елементами першого рядка, при цьому операція множення елемента другого рядка на елемент третього вважається операцією диференціювання.

Векторне поле, ротор якого дорівнює нулеві, називається потенціальним. Умова потенціальності векторного поля $\text{rot } \mathbf{A} = 0$, або $\mathbf{A} = \text{grad } \varphi$, де φ – скалярний потенціал поля.

Теорема Стокса: циркуляція вектора $\mathbf{A}$ вздовж замкнутого контуру L дорівнює потоку вектора $\text{rot } \mathbf{A}$ крізь поверхню, натягнуту на контур:

$$\oint_L A_t dl = \int_S \text{rot}_n \mathbf{A} dS.$$

Застосування оператора ∇ . Диференціальний оператор ∇ (оператор “набла”) є вектором зі складовими $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Оператор набуває змісту, якщо він застосовується до скалярної або векторної функції. Символічно помноживши ∇ на φ , одержуємо градієнт

$$\nabla\varphi = \text{grad } \varphi.$$

Скалярний добуток векторів ∇ і $\mathbf{A}$ дає дивергенцію вектора $\mathbf{A}$

$$\nabla\mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A}.$$

Векторний добуток векторів ∇ і $\mathbf{A}$ дає ротор вектора $\mathbf{A}$

$$[\nabla\mathbf{A}] = \text{rot } \mathbf{A}.$$

XVII. Елементи теорії ймовірностей

Ймовірність випадкової події

$$w_i = \frac{N_i}{N},$$

де N – загальна кількість можливих подій.

Середнє значення функції випадкової величини x у разі неперервного розподілу

$$\langle F(x) \rangle = \int_a^b f(x) F(x) dx,$$

де $f(x)$ – функція розподілу випадкової величини, яка визначається співвідношенням

$$f(x) = \frac{dw}{dx},$$

де dw – ймовірність того, що випадкова величина набуває значення з одиничного інтервалу значень, який міститься біля заданого значення x .

Функція розподілу є нормованою, тобто

$$\int_a^b f(x) dx = 1;$$

це означає, що набування випадковою величиною будь-якого значення з області її визначення ($a \leq x \leq b$) є вірогідною подією.

XVIII. Ряди та інтеграл Фур'є

Розкладання періодичної функції в ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos \omega n x + b_n \sin \omega n x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{i n \omega x},$$

де ω – колова частота зміни функції, $\omega = 2\pi/T$, тут T – період функції; a_n, b_n – коефіцієнти Фур'є.

Коефіцієнти Фур'є

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) \cos \omega n x dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) \sin \omega n x dx.$$

Комплексна форма ряду Фур'є

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{in\omega x},$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx.$$

Розкладання неперіодичної функції в інтеграл Фур'є

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

де $A(\omega)$, $B(\omega)$, $C(\omega)$ – коефіцієнти розкладання неперіодичної функції в інтеграл Фур'є (амплітуди Фур'є).

Амплітуди Фур'є

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \omega x dx,$$

$$B(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \omega x dx,$$

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Б. Таблиці фізичних величин

1. Префікси і множники для утворення кратних і часткових одиниць

Найменування	Позначення	Множник	Найменування	Позначення	Множник
екса	Е	10^{18}	деци	д	10^{-1}
пета	П	10^{15}	санти	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	мілі	м	10^{-3}
гіга	Г	10^9	мікро	мк	10^{-6}
мега	М	10^6	нано	н	10^{-9}
кіло	к	10^3	піко	п	10^{-12}
гекто	г	10^2	фемто	ф	10^{-15}
дека	да	10^1	атто	а	10^{-18}

2. Фундаментальні фізичні сталі

Назва	Позначення	Числове значення
Швидкість світла у вакуумі	c	$2,998 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$
Електрична стала	ϵ_0	$8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$
Магнітна стала	$\mu_0 = (\epsilon_0 c^2)^{-1}$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}$
Гравітаційна стала	G	$6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
Стала Планка	h	$6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
	$\hbar = h/(2\pi)$	$1,0546 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Елементарний заряд	e	$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Магнетон Бора	μ_B	$9,274 \cdot 10^{-24} \text{ Дж} \cdot \text{Тл}^{-1}$
Ядерний магнетон	μ_N	$5,051 \cdot 10^{-27} \text{ Дж} \cdot \text{Тл}^{-1}$
Квант магнітного потоку	$\Phi_0 = h/(2e)$	$2,068 \cdot 10^{-15} \text{ Вб}$
Стала Рідберга	R_∞	$1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Борівський радіус	a_0	$0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Маса спокою електрона	m_e	$9,109 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
		$0,511 \text{ Мев}$
		$5,49 \cdot 10^{-4} \text{ а. о. м.}$
Маса спокою протона	m_p	$1,673 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
		$1,00728 \text{ а. о. м.}$
Маса спокою нейтрона	m_n	$1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
		$1,00866 \text{ а. о. м.}$
Атомна одиниця маси	а. о. м.	$1,661 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
		$931,494 \text{ Мев}$
Комптонівська довжина хвилі електрона	λ_c	$2,426 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Стала Авогадро	N_A	$6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Стала Больцмана	k	$1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1}$
Універсальна газова стала	R	$8,315 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Стала Стефана – Больцмана	σ	$5,670 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Стала в законі зміщення Віна	b	$2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Прискорення вільного падіння	g	$9,807 \text{ м}/\text{с}^2$

3. Астрономічні величини

Середня відстань від Землі до Місяця	$3,844 \cdot 10^8$ м
Середня відстань від Землі до Сонця	$1,496 \cdot 10^{11}$ м
Радіус Сонця	$6,96 \cdot 10^8$ м
Радіус Землі	$6,37 \cdot 10^6$ м
Радіус Місяця	$1,74 \cdot 10^6$ м
Маса Сонця	$1,99 \cdot 10^{30}$ кг
Маса Землі	$5,98 \cdot 10^{24}$ кг
Маса Місяця	$7,35 \cdot 10^{22}$ кг

4. Густини ρ речовин

Речовина	ρ	Речовина	ρ
<i>Гази за нормальних умов ($T = 273,15$ К; $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Па), кг/м³</i>			
Азот	1,250	Кисень	1,429
Водень	0,089	Метан	0,717
Вуглекислий газ	1,977	Неон	0,900
Гелій	0,178	Повітря	1,293
<i>Рідини, кг/м³</i>			
Бензол ($t = 20$ °C)	879	Скипидар ($t = 16$ °C)	858
Вода ($t = 4$ °C)	1 000	Спирт етиловий ($t = 0$ °C)	789
Вода ($t = 100$ °C)	958	Спирт метиловий ($t = 0$ °C)	792
Гас ($t = 0$ °C)	800	Толуол ($t = 18$ °C)	870
Гліцерин ($t = 20$ °C)	1 260	Ртуть ($t = 0$ °C)	13 596
<i>Тверді тіла, 10³ кг/м</i>			
Алюміній	2,69	Олово лите	7,23
Вольфрам	19,1	Сталь лита	7,7...8,0
Залізо, хімічно чисте	7,86	Свинець	11,22...11,44
Латунь	8,3...8,7	Срібло	10,42...10,57
Лід (0 °C)	0,91	Титан	4,5
Мідь електролітична	8,88...8,96	Цинк	6,86...7,24
Нікель	8,4...9,2	Чавун	6,6...7,3

5. Густина води ρ , кг/м³, при різних температурах

$t, ^\circ\text{C}$	ρ	$t, ^\circ\text{C}$	ρ	$t, ^\circ\text{C}$	ρ
0	999,87	12	999,52	24	997,32
1	999,93	13	999,40	25	997,07
2	999,97	14	999,27	26	996,81
3	999,99	15	999,13	27	996,54
4	1000,00	16	998,97	28	996,26
5	999,99	17	998,80	29	995,97
6	999,97	18	998,62	30	995,67
7	999,93	19	998,43	31	995,37
8	999,88	20	998,23	32	995,05
9	999,81	21	998,02	33	994,72
10	999,73	22	997,80	34	994,40
11	999,63	23	997,57	35	994,06

6. Параметри газів (за нормальних умов)

Температурний коефіцієнт тиску β , К⁻¹; питома теплоємність c_p , Дж/(кг·К); відношення теплоємностей $\gamma = C_p/C_v$; теплопровідність λ , Вт/(м·К); в'язкість η , мкПа·с

Газ	$\beta \cdot 10^{-3}$	c_p	γ	λ	η
Азот	3,674	$1,0 \cdot 10^3$	1,40	0,023 9	16,7
Водень	3,662	$1,43 \cdot 10^4$	1,40	0,169	8,4
Вуглекислий газ	3,726	848	1,30	0,014 7	14,0
Гелій	3,660	5 240	1,66	0,143	18,9
Кисень	3,674	913	1,40	0,024 5	19,2
Повітря сухе *	3,674	1 011	1,40	0,024 1	17,5

* Склад повітря за об'ємом, %: 78,03 N₂; 20,99 O₂; 0,933 Ar; 0,03 CO₂; 0,01 H₂; 0,0018 He та ін.

7. Діаметри d атомів і молекул, нм

Речовина	d	Речовина	d
Азот	0,31	Гелій	0.19
Аргон	0,29	Кисень	0.29
Водень	0,23	Оксид вуглецю	0.32
Водяна пара	0,26	Хлор	0.37
Вуглекислий газ	0,33		

8. Поправки Ван-дер-Ваальса

Речовина	$a, \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}^3}{\text{моль}^2}$	$b, 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$	Речовина	$a, \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}^3}{\text{моль}^2}$	$b, 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$
Азот	0,136	4,0	Вуглекислий газ	0,364	4,3
Аргон	0,132	3,0	Кисень	0,137	3,0
Водяна пара	0,554	3,0			

9. Критичні значення температури і тиску

Речовина	T_k, K	$p_k, \text{МПа}$	Речовина	T_k, K	$p_k, \text{МПа}$
Азот	126	3,4	Вуглекислий газ	304	7,4
Аргон	151	4,87	Гелій	5,2	0,23
Водень	33	1,28	Кисень	154,78	5,01
Водяна пара	647	21,8	Хлор	417	7,71

10. Характеристики рідин (при температурі 20 °С)

Поверхневий натяг на межі рідина – повітря σ , Н/м; в'язкість η , Па·с; коефіцієнт об'ємного розширення β , K^{-1} ; точка кипіння t_k , °С, при $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Па; питома тепломісткість c , кДж/(кг·К); питома теплота пароутворення при точках кипіння q , Дж/кг; теплопровідність λ , Вт/(м·К)

Рідина	$\sigma, 10^{-3}$	$\eta, 10^{-3}$	$\beta, 10^{-6}$	t_k	c	$q, 10^5$	λ
Бензол	0,03	0,673	124	80,2	1,72	3,94	–
Вода	0,072 6	1,005	21	100,0	4,18	22,6	0,6
Гліцерин	0,066	1,480	50	290,0	2,43	–	0,29
Олія рицинова	0,0364	970	–	–	1,8	–	–

Рідина	$\alpha, 10^{-3}$	$\eta, 10^{-3}$	$\beta, 10^{-6}$	t_k	c	$q, 10^5$	λ
Ртуть	0,5	1,590	18	356,7	0,138	2,85	9,08
Спирт етиловий	0,022	1,2	110	78,3	2,51	8,57	0,17

11. Коефіцієнти теплового розширення

Речовина	Коефіцієнт	Речовина	Коефіцієнт
<i>Лінійного розширення $\alpha, 10^{-5}, K^{-1}$</i>			
Алюміній	2,4	Свинець	29,3
Залізо (сталь)	1,2	Скло	1,0
Латунь	1,9	Цинк	2,9
Мідь	1,7		
<i>Об'ємного розширення $\beta, 10^{-5}, K^{-1}$</i>			
Вода, $t = \dots^\circ C$		Вода, $t = \dots^\circ C$	
5...10	5,3	40...60	45,8
10...20	15,0	60...80	58,7
20...40	30,2	Ртуть, $t = 18^\circ C$	19,0

12. Деякі теплофізичні характеристики твердих тіл

Температурний коефіцієнт лінійного розширення в інтервалі $0...100^\circ C$ α, K^{-1} ; питома теплоємність c при $18^\circ C$, $kJ/(kg \cdot K)$; теплопровідність λ при $18^\circ C$, $W/(m \cdot K)$; температура плавлення $t_{пл}, ^\circ C$; питома теплота плавлення r , DJ/kg

Речовина	$\alpha, 10^{-6}$	c	λ	$t_{пл}$	$r, 10^5$
Алюміній	23,8	0,92	200,6	660	3,8
Ебоніт	84,0	—	0,17	—	—
Залізо	12,1	0,46	58,5	15,39	2,7
Лід	51,0	2,09	2,5	0	3,35
Мідь	16,7	0,38	384,0	1 083	1,8
Парафін	107...407	3,20	0,21	38...56	1,5
Політетрафторетилен	80...110	1,05	0,24	327	—
Свинець	29,3	0,12	34,7	327	0,25
Срібло	19,7	0,25	422,2	960,8	0,88

13. Тиск і густина насиченої водяної пари при різних температурах

Тиск p , ГПа; густина ρ_0 , г/м³

$t, ^\circ\text{C}$	p	ρ_0	$t, ^\circ\text{C}$	p	ρ_0	$t, ^\circ\text{C}$	p	ρ_0
0	6,11	4,84	18	20,64	15,4	36	59,41	41,8
1	6,57	5,22	19	21,97	16,3	37	62,76	44,0
2	7,05	5,60	20	23,65	17,3	38	66,25	46,3
3	7,59	5,98	21	24,87	18,3	39	69,91	48,7
4	8,13	6,40	22	26,44	19,4	40	73,75	51,2
5	8,72	6,48	23	28,93	20,6	45	95,83	65,4
6	9,35	7,3	24	29,84	21,8	50	123,32	83,0
7	10,01	7,8	25	31,68	23,0	55	157,32	104,3
8	10,73	8,3	26	33,61	24,4	60	199,18	130
9	11,48	8,8	27	35,65	25,8	65	249,98	161
10	12,28	9,4	28	37,80	27,2	70	311,57	198
11	13,12	10,0	29	40,05	28,7	75	385,43	242
12	14,03	10,7	30	42,42	30,8	80	473,43	293
13	14,97	11,4	31	44,93	32,1	85	578,08	354
14	15,99	12,1	32	47,54	33,9	90	701,00	424
15	17,05	12,8	33	50,30	35,7	95	845,13	506
16	18,17	13,6	34	53,20	37,6	100	1013,25	598
17	19,37	14,5	35	56,24	39,6			

14. Пружні властивості твердих тіл

Модуль Юнга (модуль поздовжньої пружності) E , ГПа; модуль зсуву G , ГПа; коефіцієнт Пуассона μ ; межа міцності σ_m , МПа

Речовина	E	G	μ	σ_m
Алюміній	68,5	24,5	0,36...0,37	98...390
Гетинакс	10...17	—	—	—
Залізо коване	200...220	69...83,7	0,28	390...590
Латунь	78...98	26...36	0,30...0,40	98...490
Мідь деформована	112	41,5	0,36...0,38	156...441
Свинець	16,2	5,62	0,446	19,6
Сталі різних марок	195...206	79...89	0,23...0,31	490...1570
Текстоліт	1,4...2,8	—	—	—
Чавун	74...176	49	0,23...0,27	117...127

15. Швидкість звуку v , м/с

Речовина	v	Речовина	Швидкість v поздовжньої хвилі	
			у стрижнях	у необмеженому середовищі
<i>Гази за нормальних умов</i>		<i>Тверді тіла ($t = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$)</i>		
Азот	333,63	Алюміній	5 080	6 260
Водень	1286,0	Ебоніт	1 570	2 405
Вуглекислий газ	260,3	Латунь	3 490	4 430
Гелій	965,0	Мідь	3 710	4 700
Кисень	314,84	Нікель	4 785	5 630
Повітря сухе	331,46	Свинець	1 200	2 160
<i>Рідини</i>		Скло кварцове	5 370	5 570
Бензол	1 295	Срібло	2 640	3 600
Вода ($t = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$)	1 407	Сталь	5 050	6 100
Вода ($t = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$)	1 482	Цинк	3 810	4 170

16. Теплопровідність λ речовин

Речовина	λ , Вт/(м · К)	Речовина	λ , Вт/(м · К)
Азбест	0,14	Накип котловий	2,3
Азот	0,16	Повітря	0,026
Алюміній	205,0	Пробка	0,035
Бісмут	10,0	Сажа	0,25
Вода	0,58	Свинець	34,8
Дерево (поперек волокон)	0,17	Скло	0,74
Ебоніт	0,16	Смола	0,52
Залізо (сталь)	62,0	Цегляна кладка	0,84
Мідь	390,0		

17. Діелектрична проникність ϵ

Речовина	ϵ	Речовина	ϵ
Вода	81	Масло трансформаторне	2,2
Восковий папір	3,7	Парафін	2
Гас	2	Скло	5,5...10
Ебоніт	2,6	Слюда	6
Кварц	2,7	Фарфор	6

18. Питомий опір ρ і температурний коефіцієнт опору α
(при температурі $t = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$)

Провідник	ρ , нОм·м	α , K^{-1}	Провідник	ρ , нОм·м	α , K^{-1}
Алюміній	28	0,003 8	Нікелін	400	0,000 017
Вольфрам	55	0,005 1	Ніхром	980	0,000 26
Вугілля	40	-0,000 8	Платина	107	0,003 9
Графіт	8 000	-	Ртуть	958	0,000 9
Залізо	98	0,006 2	Свинець	211	0,004 2
Константан	480	0,000 02	Сталь	120	0,006
Мідь	17,2	0,004 3			

19. Рухливість іонів

<i>Водні розчини, $\text{мм}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$</i>					
H^+	0,326	OH^-	0,18		
Na^+	0,045	F^-	0,049		
K^+	0,067	Cl^-	0,068		
Ag^+	0,056	Br^-	0,07		
NH_4^+	0,067	NO_3^-	0,064		
<i>Гази за нормальних умов, $\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$</i>					
Речовина	Позитивні іони	Негативні іони	Речовина	Позитивні іони	Негативні іони
Азот	1,3	1,8	Оксид вуглецю	1,0	1,1
Водень	5,4	7,8	Повітря	1,4	1,9
Кисень	1,3	1,8	Хлор	0,6	0,5

20. Енергія іонізації, eВ

Азот	15,80	Гелій	24,45
Аргон	15,70	Кисень	13,56
Водень	15,40	Натрій	5,12
Вуглекислий газ	14,40	Неон	21,48

21. Електрохімічні еквіваленти k , мг / Кл

Речовина	k	Речовина	k
Алюміній (Al^{+++})	0,093	Мідь (Cu^{++})	0,329
Бісмут (Bi^{+++})	0,719	Нікель (Ni^{++})	0,304
Залізо (Fe^{++})	0,289	Нікель (Ni^{+++})	0,203
Залізо (Fe^{+++})	0,193	Срібло (Ag^+)	1,118
Золото (Au^+)	2,043	Хром (Cr^{+++})	0,180
Золото (Au^{++})	0,681	Цинк (Zn^{++})	0,338
Мідь (Cu^+)	0,660		

22. Робота виходу A електронів з металу, еВ

Метал	A	Метал	A	Метал	A
Вольфрам	4,50	Мідь	4,47	Рубідій	2,13
Залізо	4,47	Молибден	4,20	Срібло	4,47
Золото	4,68	Натрій	2,30	Таптал	4,07
Калій	2,00	Нікель	5,00	Цезій	1,97
Літій	2,40	Платина	5,29	Цинк	4,00
Магній	3,46	Ртуть	4,52		

23. Дебайвська температура Θ_D , К

Метал	Θ_D	Метал	Θ_D
Берилій	1 000	Калій	100
Бор	1250	Літій	400
Бісмут	120	Магній	318
Вуглець (алмаз)	1 860	Свинець	88
Золото	170	Срібло	215

24. Ширина забороненої зони (енергія активації) напівпровідників ΔE , еВ

Речовина	Чиста	З домішкою		
		бору	індію	арсену
Германій	0,67	0,01	0,011	0,013
Силіцій	1,12	0,046	0,16	0,049
Селен	1,87	—	—	—
Сіре олово	0,1	—	—	—

25. Питома термоЕРС деяких пар металів ξ , мкВ/К

Термопара	ξ
Залізо—платина	19
Мідь—константан	43
Мідь—платина	7,5
Платина—сурма	40

26. Показники заломлення n (середні для видимого випромінювання)

Речовина	n	Речовина	n
Алмаз	2,42	Повітря	1,000 29
Вода ($t = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$)	1,33	Сірковуглець	1,63
Кварц	1,54	Скипидар ($t = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$)	1,47
Лід ($t = -4\text{ }^{\circ}\text{C}$)	1,31	Скло	1,50

27. Атомна маса $m_{\text{ат}}$ деяких нуклідів, а. о. м.

Нуклід	$m_{\text{ат}}$	Нуклід	$m_{\text{ат}}$
Водень (^1H)	1,007 825	Титан (^{50}Ti)	49,944 736
Дейтерій (^2H)	2,014 108	Титан (^{51}Ti)	50,949 858
Тритій (^3H)	3,016 028	Ванадій (^{52}V)	51,944 800
Гелій (^3He)	3,016 045	Марганець (^{55}Mn)	54,930 249

Нуклід	$m_{ат}$	Нуклід	$m_{ат}$
Гелій (^4He)	4,002 596	Кобальт (^{58}Co)	57,935 776
Літій (^6Li)	6,015 110	Стронцій (^{90}Sr)	89,907 711
Літій (^7Li)	7,016 046	Полоній (^{210}Po)	209,982 760
Берилій (^7Be)	7,016 925	Радон (^{222}Rn)	222,017 422
Бор (^{11}B)	11,009 304	Радій (^{226}Ra)	226,025 279
Вуглець (^{14}C)	14,003 217	Торій (^{232}Th)	232,038 112
Силіцій (^{31}Si)	30,975 350	Уран (^{238}U)	238,050 637
Фосфор (^{31}P)	30,973 762	Уран (^{239}U)	239,054 149
Кальцій (^{44}Ca)	43,955 49	Плутоній (^{239}Pu)	239,052 037

28. Період піврозпаду T деяких радіоактивних нуклідів

Нуклід	T	Нуклід	T
Вуглець (^{14}C)	5 730 років	Радій (^{226}Ra)	1 620 років
Кобальт (^{58}Co)	71 доба	Торій (^{232}Th)	$1,41 \cdot 10^{10}$ років
Стронцій (^{90}Sr)	28 років	Уран (^{238}U)	$4,5 \cdot 10^9$ років
Полоній (^{210}Po)	140 діб	Уран (^{239}U)	23,54 хвилини
Радон (^{222}Rn)	3,82 доби	Плутоній (^{239}Pu)	24 390 років

29. Лінійний коефіцієнт поглинання γ -випромінювання з енергією $\varepsilon = 6 \text{ MeV}$ для деяких речовин $\mu, \text{ м}^{-1}$

Речовина	μ
Залізо	23,99
Свинець	49,36
Бетон (густина $\rho = 2,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$)	6,19

Навчальний посібник

Гаркуша Ігор Павлович

Горбачук Іван Тихонович

Курінний Володимир Павлович

Кучерук Іван Митрофанович

Певзнер Мендель Шендерович

ЗАГАЛЬНИЙ КУРС ФІЗИКИ

Збірник задач

Редактор *С. К. Кашка*

Оформлення художника *В. О. Гурлєва*

Художній редактор *С. В. Анненков*

Коректори *І. В. Іванюс, Н. М. Мірошніченко*

Комп'ютерна верстка *С. Ф. Лобунець*

Підписано до друку 21.04.03. Формат 60х84¹/₁₆

Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.

Друк офсетний. Умов. друк. арк. 32,55.

Обл.-вид. арк. 36,69. Тираж 13 000 прим. Зам. № 3-144.

Видавництво "Техніка". 04053, Київ, вул. Обсерваторна, 25.

Свідцтво про внесення до Державного реєстру України
суб'єктів видавничої справи ДК № 357 від 12.03.2001 р.

Віддруковано на ВАТ "Білоцерківська книжкова фабрика",
09117, м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4.

**Загальний курс фізики: Зб. задач / І. П. Гаркуша, І. Т. Горбачук,
314 В. П. Курінний та ін.; За заг. ред. І. П. Гаркуші. – К.: Техніка, 2003. – 560 с.**

ISBN 966-575-130-1

Збірник складено відповідно до діючої програми загального курсу фізики для фізичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів, а також переважної більшості спеціальностей вищих технічних навчальних закладів. Він містить близько 2 200 задач з усіх розділів курсу, які мають широкий діапазон рівня складності. Відповіді до найбільш складних задач супроводжуються вказівками та розв'язаннями. Різноманітний за змістом та рівнем складності набір задач дає змогу використовувати збірник також під час вивчення загального курсу фізики у вузах з підвищеним обсягом викладання фізики.

Для студентів інженерно-технічних і педагогічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

ББК 22.3я73