Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»
імені Ігоря Сікорського

ЗАДАЧІ ІЗ ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ

Розділ «Механіка»

Для студентів технічних спеціальностей

Рекомендовано Методичною радою ФМФ НТУУ«КПІ»

Київ
НТУУ «КПІ»
2020

Задачі із загальної фізики. Розділ «Механіка». Для студентів технічних спеціальностей. [Текст] / Уклад.: В. П. Бригінець, О. О. Гусєва, О. В. Дімарова та ін. – 83 с.

Гриф надано Вченою радою ФМФ НТУУ «КПІ»
(Протокол № 8 від 24. 11. 2015 р.)

Навчальне видання

ЗАДАЧІ ІЗ ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ

Розділ «Механіка»

Для студентів технічних спеціальностей

Укладачі: *Бригінець Валентин Петрович*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Гусєва Ольга Олександрівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Дімарова Олена Володимирівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Пономаренко Лілія Петрівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Репалов Ігор Миколайович, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний
за випуск В. М. Локтєв, д-р фіз. - мат. наук, акад. НАН України

Рецензент С. А. Решетняк, д-р фіз. - мат. наук, професор

За редакцією укладачів

Зміст

1. Кінематика

1.1. Середня та миттєва швидкості:

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}; \qquad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}.$$

1.2. Середнє та миттєве прискорення:

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\,; \quad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

1.3. Миттєва швидкість і радіус-вектор точки при довільному русі (загальні рівняння кінематики точки):

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)\mathrm{d}t\,; \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}\mathrm{d}t.$$

1.4. Переміщення точки за проміжок часу [t_1, t_2] та пройдений нею шлях:

$$\Delta\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\mathrm{d}t; \quad S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t,\ v(t) = |\vec{v}(t)|\ .$$

1.5. Нормальне, тангенціальне та повне прискорення:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}; \quad \vec{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}; \quad \vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau\,,$$

R – радіус кривизни траєкторії.

1.6. Кутові швидкість ω та прискорення β :

$$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}; \quad \vec{\beta} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}.$$

1.7. Зв'язок між лінійними та кутовими кінематичними величинами при обертанні навколо фіксованої осі:

$$L = \varphi R; \quad v = \omega R;$$
$$a_\tau = \beta R; \quad a_n = \omega^2 R; \quad a = R\sqrt{\beta^2 + \omega^4}\ ,$$

R – відстань від осі обертання.

1.8. Положення, швидкість і прискорення точки в двох системах відліку, що рухаються поступально одна відносно одної:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R} \\ \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V} \\ \vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{w} \end{cases} \quad \text{при } \vec{V} = const \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t \\ \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V} \\ \vec{a} = \vec{a}\,' \end{cases}$$

V – відносна швидкість систем відліку.

Скалярні і векторні величини

1.1. Задано вектор $\vec{a}$, напрямлений уздовж осі OX.

1) показати на рисунку вектор $\vec{a}$ та вектори $\vec{b} = 2\vec{a}$ і $\vec{c} = -2\vec{a}$;

2) чи рівні вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$? їхні модулі? проекції?

3) записати значення модулів та проекцій векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

1.2. Визначити суму $\vec{b}$ та різницю $\vec{d}$ двох векторів $\vec{a}_1$ *і* $\vec{a}_2$, які мають однакові модулі a й напрямлені вздовж осі OX: а) однаково, б) протилежно.

1.3. Задані одиничні вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ (рис. 1.1). Визначити графічно та аналітично (обчисленням) вектор $\vec{S} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}$, якщо вектори $\vec{b}$ і $\vec{d}$ нахилені до вертикалі під кутом 30°.

$$\left(\vec{S} = \vec{a}\right)$$

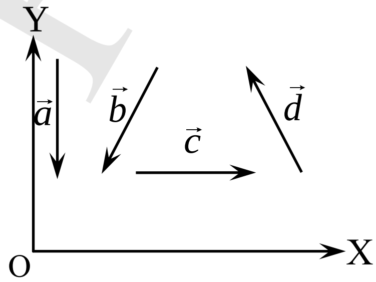


Рис. 1.1

1.4. Тіло із точки (–2; 4) (м) здійснило переміщення $\vec{S} = 6\vec{i} - 4\vec{j}$ (м). Записати координати кінцевого положення тіла.

1.5. Тіло починає рух із початку координату напрямку осі OX із точки $x = 0$ і здійснює послідовно 4 переміщення по $S = 5{,}7$ м, повертаючи після кожного ліворуч у площині XOY на кут 30°. Записати (через орти $\vec{i}, \vec{j}$) вираз вектора результуючого переміщення $\vec{S}_0$ та обчислити його модуль S_0 і напрям (кут α до осі OX). Зробити рисунок.

$$(\vec{S}_0 = 13{,}5(\vec{i} + \vec{j})\ \text{м};\ \ S_0 = 19{,}1\ \text{м};\ \ \alpha = 45°)$$

1.6. До тіла прикладені в одній площині три сили $F_1 = 10$ Н, $F_2 = 20$ Н та $F_3 = 40$ Н під кутами 120° одна до одної (рис. 1.2). Визначити аналітично модуль і напрям вектора рівнодійної сили $\vec{F}$ та показати його на рисунку.

$$\left(F = 10\sqrt{7} \approx 26{,}5\ \text{Н},\quad \textit{під кутом}\ 19°\ \textit{до}\ \vec{F}_3\right)$$

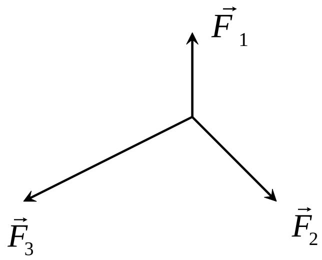


Рис. 1.2

1.7. Тіло тягнуть за дві нитки 1 і 2 з деякими силами $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ (рис. 1.3). Вектор рівнодійної $\vec{F}$ цих сил показаний на рисунку. Визначити графічно вектори $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$.

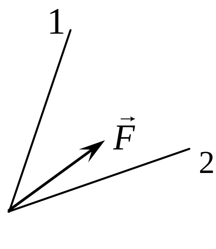


Рис. 1.3

1.8. Графічно (побудовою) визначити вектор рівнодійної $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ двох заданих паралельних сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ (рис. 1.4). *<u>Вказівка</u>. Скористатися розкладанням вектора на складові.*

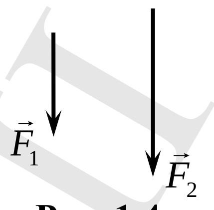


Рис. 1.4

1.9. Кулька рухається по дузі півкола (рис. 1.5). Показати на рисунку в точках 1, 2, 3 вектори швидкості $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, прискорення $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ та сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, що діє на кульку, якщо рух: а) рівномірний, б) рівноприскорений і в) рівносповільнений.

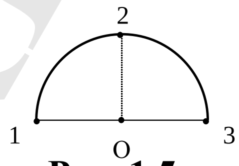


Рис. 1.5

1.10. Тіло кинуто з поверхні землі під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту зі швидкістю $v_0 = 5$ м/с.

– зобразити траєкторію тіла і вказати вектори швидкості та прискорення кульки в початковій, кінцевій та найвищій точках траєкторії.
– знайти вираз вектора зміни швидкості тіла $\Delta\vec{v}$ за весь час руху та обчислити його модуль.

$$\left(\Delta\vec{v} = 2v_0 \sin\alpha \cdot \frac{\vec{g}}{g}, \quad 5\text{ м/с} \right)$$

1.11. Кулька пружно вдаряє в стіну і відскакує з тією самою швидкістю, як показано на рис. 1.6. Визначити модуль зміни вектора швидкості $|\Delta\vec{v}|$ та зміну модуля вектора швидкості Δv унаслідок удару в кожному випадку.

$$\left(\textit{а})\ |\Delta\vec{v}| = 2v,\ \Delta v = 0;\ \textit{б})\ |\Delta\vec{v}| = 2v\cos\alpha,\ \Delta v = 0 \right)$$

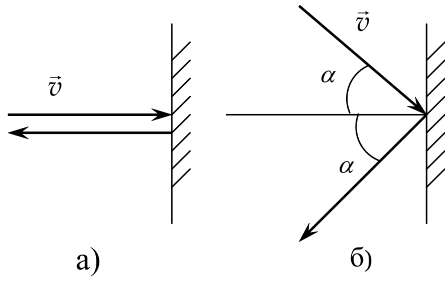


Рис. 1.6

1.12. Виконати завдання попередньої вправи для випадку непружного удару, коли кулька не відскакує.

$$\left(\Delta\vec{v} = -\vec{v},\ \Delta v = -v \quad \textit{в обох випадках.} \right)$$

1.13. Як напрямлені один відносно одного два вектори, якщо їхній скалярний добуток дорівнює добутку модулів із знаком «–»?

1.14. Як напрямлені один відносно одного два вектори, якщо їх скалярний добуток дорівнює половині добутку модулів?

1.15. Знайти скалярний добуток векторів: $\vec{a}(1;\sqrt{3})$ і $\vec{b}(\sqrt{3};1)$.

$$\left(2\sqrt{3}. \right)$$

1.16. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ та $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.

(16,26°)

1.17. На тіло, що рухається у від'ємному напрямку осі OX, діє постійна сила $\vec{F}(5;5)$ (Н). Визначити роботу цієї сили на шляху $L = 10$ см.

(– 0,5 Дж)

1.18. Тіло здійснює переміщення $S(8,66;\,5)$, м. При цьому одна із сил, які діють на нього, $F = 10$ Н виконує роботу $A = 86,6$ Дж. Знайти, під яким кутом до осі OX є спрямована ця сила.

(0° *або* 60°)

Кінематичні характеристики руху точки

1.19. Дати обґрунтовані відповіді на наступні запитання:

1) чи може траєкторія руху точки: а) бути ламаною лінією; б) перетинатися сама із собою?
2) чи є рівномірним рух точки, якщо вона за рівні скінченні проміжки часу: а) здійснює однакові переміщення; б) проходить однакові шляхи?
3) чи може точка мати прискорення при рівномірному русі?
4) чи може змінюватися швидкість точка $\vec{v}$ при рівномірному русі?
5) чи можуть дві точки, що рівномірно рухаються з різними швидкостями, знаходитися на незмінній відстані одна від одної?
6) чи може прискорення точки $\vec{a}$ лишатися незмінним при криволінійному русі?
7) чи може прискорення точки $\vec{a}$ змінюватися при рівноприскореному русі? рівномірному русі?

1.20. Як рухається тіло, якщо його швидкість:

1) $\vec{v} = const$;
2) $v = const,\ \vec{v}/v \neq const$;
3) $v \neq const,\ \vec{v}/v = const$;
4) $v \neq const,\ \vec{v}/v \neq const$.

1.21. Який рух здійснює тіло, якщо кут φ між напрямком його швидкості $\vec{v}$ та прискорення $\vec{a}$ дорівнює: 0°; π; π/2; < π/2; > π/2.

1.22. Із якою середньою швидкістю рухався автомобіль між двома пунктами, якщо:

а) на першій половині шляху його швидкість була 60 км/год, а на другій – 120 км/год;
б) першу половину часу він рухався із швидкістю 60 км/год, а другу – 120 км/год.

(а) 80 км/год; б) 90 км/год)

1.23. Першу половину шляху тіло рухалось прямолінійно із швидкістю 10 м/с, а другу вдвічі швидше і під кутом 60° до початкового напряму. Визначити напрям і модуль вектора середньої швидкості переміщення та середню шляхову швидкість (середнє значення модуля швидкості) тіла.

(30° *до початкового напрямку*, 11,55м/с; 13,3м/с)

1.24. На першій половині шляху тіло рухалося в n разів швидше, ніж на другій. При цьому середня швидкість на всьому шляху склала v. З якими швидкостями v_1 і v_2 рухалося тіло на кожній половині шляху.

$$\left(v_1 = \frac{n+1}{2} v, \quad v_2 = \frac{n+1}{2n} v. \right)$$

1.25. Велосипедист проїхав першу половину шляху між двома населеними пунктами зі швидкістю 12 км/год. На другій половині шляху він половину часу їхав із швидкістю 6 км/год, а потім до кінця йшов пішки зі швидкістю 4 км/год. Визначити середню швидкість руху велосипедиста на всьому шляху.

(7км/год)

1.26. На кваліфікаційних заїздах перед змаганнями мотогонщик протягом п’яти кругів дистанції повинен показати середню швидкість ≥120 км/год. На перших двох кругах його середня швидкість склала 160 км/год. Яку середню швидкість має показати гонщик на наступних трьох кругах?

(≥102,9 км/год)

1.27. Тіло, почавши рух із сталим прискоренням, на першій половині шляху розігналося до швидкості 15 м/с, а другу пройшло рівномірно з набутою швидкістю. З якою середньою швидкістю тіло подолало увесь шлях?

(10 м/с)

1.28. Тіло рухається вздовж осі ОХ так, що його координата змінюється за законом $x = 5 + 6t - t^3$ (м). Знайти:

– координату, швидкість і прискорення тіла через 2 с після початку руху;
– в який момент часу тіло знов опиниться у вихідній точці;
– на якій відстані від початкової точки тіло змінить напрям руху.

$$\left(9\text{ м}, \; -6\text{ м/с}, \; -12\text{ м/с}^2; \quad 1{,}41\text{ с}; \quad 5{,}66\text{ м.} \right)$$

1.29. Один мотоцикліст стартує з прискоренням 18 м/с^2, а другий – із затримкою 0,27 с і прискоренням 20 м/с^2. Через який час після початку руху і на якій відстані від точки старту другий мотоцикліст наздожене першого?

(5с; 250 м)

1.30. Дві матеріальні точки рухаються вздовж осі ОХ згідно з рівняннями: $x_1 = 6t + 2t^2 - t^3$(см), $x_2 = 2t - 4t^2 + 3t^3$(см).

1). Визначити:

– через який час t після початкового моменту одна точка (яка?) наздожене іншу та на якій відстані x від початку координат це станеться;
– проекції швидкостей v_x та прискорень a_x точок на момент зустрічі.

2). Показати приблизний вигляд графіків координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ та швидкостей $v_{1x}(t), v_{2x}(t)$ точок.

$$\left(t = 2\ \text{с},\ x = 12\ \text{см};\quad v_{1x} = 2\ \text{см/с},\ a_{1x} = -8\ \text{см/с}^2;\quad v_{2x} = 22\ \text{см/с},\ a_{2x} = 28\ \text{см/с}^2\right)$$

1.31. Рівняння руху матеріальної точки вздовж осі ОХ має вигляд $x = 5 + 4t - t^2$ (м). Визначити:

– проекцій швидкості $v_x(t)$, прискорення $a_x(t)$ і пройденого шляху $S(t)$; показати їхні графіки;
– середні значення проекції швидкості $\langle v_x \rangle$ та модуля швидкості $\langle v \rangle$ на проміжку часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 6$ с.

$$\left(\langle v_x \rangle = -3{,}0\text{м/с};\quad \langle v \rangle = 3{,}4\text{м/с}\right)$$

1.32. Рівняння руху точки має вигляд $x = 3t - 2t^2$(м). Визначити:

– залежності від часу проекцій швидкості $v_x(t)$ та прискорення $a_x(t)$, а також пройденого шляху $S(t)$ і показати графіки цих залежностей на проміжку часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = 5$ с;
– в який момент часу точка змінює напрям руху та яке прискорення a_x вона має в цей момент?

$$(0{,}75\text{с};\quad -4\text{м/с}^2)$$

1.33. Тіло рухається прямолінійно з початковою швидкістю v_0 та протилежно напрямленим прискоренням $a = \alpha t$. Знайти:

– відношення t_1/t_2 часів руху тіла до точки повороту та повернення у вихідне положення;
– швидкість v точки в момент повернення.

$$(1{,}37;\quad -2v_0)$$

1.34. Від потяга, що рухався рівномірно, відчепили останній вагон, який, рухаючись рівносповільнено, пройшов до зупинки шлях S. Який шлях за цей час пройшов потяг, якщо його швидкість не змінилась? Задачу розв’язати аналітично та за допомогою графіків швидкості.

$$(2S)$$

1.35. В рівноприскореному русі $(v_0 \neq 0)$ тіло за проміжок часу τ від певного моменту пройшло шлях *S*, причому його швидкість зросла в *n* разів. Знайти прискорення тіла.

$$\left(\frac{(n-1)}{(n+1)}\frac{2S}{\tau^2}\right)$$

1.36. Радіус-вектор точки змінюється за законом $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \beta t^2 \vec{j}$ (м), де α, β – задані сталі, а $\vec{i}, \vec{j}$ – орти осей OX, OY. Визначити рівняння траєкторії точки $y(x)$ та залежностей від часу швидкості $\vec{v}(t)$ і прискорення $\vec{a}\,(t)$ та кута $\varphi(t)$ між ними.

$$\left(y = \frac{\beta}{\alpha^2}x^2;\ \vec{v}(t) = \alpha\vec{i} + 2\beta t\vec{j};\ \vec{a} = 2\beta\,\vec{j};\ v(t) = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2};\ a(t) = 2\beta;\ tg\varphi = \frac{\alpha}{2\beta t}\right)$$

1.37. Точка рухається в площині XOY згідно з рівнянням $\vec{r} = A\left(\vec{i}\sin\omega t + \vec{j}(1-\cos\omega t)\right)$, A та ω – додатні сталі, $\vec{i}, \vec{j}$ – орти осей. Визначити:

– рівняння траєкторії точки $y(x)$;
– швидкість v, прискорення a та напрям руху точки по траєкторії;
– кут α між векторами швидкості та прискорення;
– шлях S, який проходить точка за час τ.

$$\left(x^2 + (y-A)^2 = A^2;\ v = A\omega;\ a = A\omega^2;\ \alpha = 90°;\ S = A\omega\tau\right)$$

1.38. Тіло кинуто з поверхні землі під кутом $\alpha = 45°$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 20$ м/с. Отримати числове рівняння траєкторії руху тіла $y = f(x)$ та визначити з нього горизонтальну дальність польоту тіла S і максимальну висоту підйому H. Взяти $g = 10$ м/с^2.

$$\left(y = x(1 - 0{,}025x), \text{м};\quad 20\,\text{м};\ 10\,\text{м}\right)$$

1.39. На рис. 1.7 показані траєкторії двох тіл, які кинуті з однієї точки й рухаються в одній вертикальній площині. Чи можливе зіткнення тіл, якщо вони кинуті одночасно?

(*Ні*)

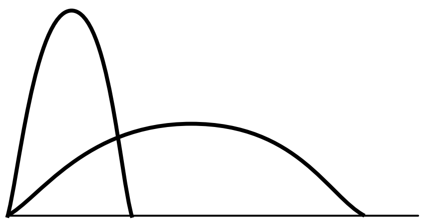


Рис. 1.7

1.40. Під яким кутом до горизонту треба кинути тіло з поверхні землі, щоби його дальність польоту була:

– найбільшою;

– рівною максимальній висоті підйому.

($45°$, $76°$)

1.41. З трьох труб, розташованих на землі, з однаковою швидкістю б'ють струмини води під кутом 30°, 45° і 60° до горизонту, відповідно. Знайти співвідношення між:

– найбільшими висотами підйому H_1: H_2: H_3 струмин; які витікають, відповідно, з кожної труби;

– відстанями S_1: S_2: S_3, на яких струмини падають на землю.

(H_1: H_2: H_3 = 1 : 2 : 3; S_1: S_2: S_3= 1 : 1,155 : 1)

1.42. Тіло, що кинуте зі швидкістю 25 м/с з поверхні землі під кутом до горизонту, перебувало в польоті 3 с. На якій відстані воно впало?

(60 м)

1.43. Під яким кутом α до горизонту було кинуто тіло, якщо його максимальна висота підйому виявилась у $\eta = 2$ рази більша, ніж дальність польоту?

$\left(\alpha = \operatorname{arctg}(4\eta) \approx 83°\right)$

1.44. Камінь, який кинуто горизонтально зі швидкістю 15 м/с, упав на землю під кутом 60° до горизонту. Знайти:

– з якої висоти було кинуто камінь?

– на якій відстані по горизонталі від точки кидання камінь впав на землю?

(34,4 м; 40 м)

1.45. Тіло, яке кинули з певної висоти під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту, впало на землю із швидкістю 10 м/с, перпендикулярною до початкової. Знайти час τ і горизонтальну дальність польоту S, а також висоту H, з якої було кинуто тіло.

$$\left(\tau = \frac{v}{g\cos\alpha} = 1{,}18\ \text{с};\quad S = \frac{v^2}{g}\operatorname{tg}\alpha = 5{,}9\ \text{м};\quad H = \frac{v^2}{2g}\left(1 - \operatorname{tg}^2\alpha\right) = 3{,}4\ \text{м}\right)$$

1.46. На довгу дошку, нахилену під кутом 30° до горизонту, з висоти 2 м над нею вільно падає і без утрати швидкості відлітає кулька. На якій відстані від точки падіння вона знов удариться об площину?

(8м)

Тангенціальне, нормальне та повне прискорення

1.47. Тіло кинуто під кутом 30° до горизонту із швидкістю 15 м/с. Знайти нормальне й тангенціальне прискорення та радіус кривизни траєкторії тіла у точці кидання та в найвищій точці підйому. Опором повітря знехтувати.

($8{,}5\ \text{м/с}^2$, $4{,}9\ \text{м/с}^2$, 26,5 м; $9{,}8\ \text{м/с}^2$, 0, 17,2 м)

1.48. Тіло кинуто горизонтально зі швидкістю v_0 з висоти h над поверхнею землі. Нехтуючи опором повітря, визначити:

– рівняння траєкторії руху тіла $y = f(x)$;
– залежність від часу модуля швидкості $v(t)$;
– залежність від часу нормального $a_n(t)$, тангенціального $a_\tau(t)$ та повного $a(t)$ прискорення;
– залежність від часу радіуса кривизни траєкторії тіла .

$$\left(y = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2; \quad v(t) = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}; \quad a_n = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}; \quad a_\tau = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}; \quad R = \frac{(v_0^2 + g^2t^2)^{\frac{3}{2}}}{gv_0}. \right)$$

1.49. Байкер рухається по колу радіуса $R = 50$ м. Рівняння руху задано дуговою координатою $l(t) = 10 + 10t - 0{,}5t^2$ (м). Визначити швидкість байкера та його тангенціальне, нормальне і повне прискорення на момент t = 5 с.

$$\left(5\text{м/с}; \quad -1\text{м/с}^2; \quad 0{,}5\text{м/с}^2; \quad 1{,}1\text{м/с}^2\right)$$

1.50. Точка починає рухатися по колу з постійним тангенціальним прискоренням. Знайти кут φ між векторами швидкості та повного прискорення точки на моменти часу, коли вона пройшла 0,1, 0,25 і 0,9 довжини кола.

$$\left(51{,}5°; \approx 72{,}5°; \quad 85° \right)$$

1.51. Точка починає рівноприскорено рухатися по колу радіуса R. Який шлях вона пройде на момент, коли її повне прискорення складатиме кут $45°$ із напрямком руху?

$$\left(\frac{R}{2} \right)$$

1.52. Частинка рухається з початковою швидкістю v_0 = 2,0 м/с і постійним тангенціальним прискоренням a_τ = 4,0 м/с^2 по такій плоскій траєкторії, що кут між векторами швидкості та повного прискорення точки залишається незмінним і рівним $\varphi = 60°$. Знайти радіус кривизни траєкторії точки на момент t = 2,0 с від початку руху.

(14,4 м)

1.53. Частинка починає рухатися із сталим тангенціальним прискоренням по плоскій траєкторії такої форми, що її радіус кривизни в будь-якій точці дорівнює пройденому частинкою шляху. Знайти кут φ між векторами швидкості та повного прискорення частинки в довільній точці траєкторії. Який вигляд має траєкторія?

($\varphi = \text{arctg}2 \approx 63{,}4°$)

1.54. Частинка починає рухатися із сталим тангенціальним прискоренням 1,34 м/с^2 по плоскій кривій, радіус кривизни котрої в будь-якій точці дорівнює пройденому шляху. Визначити повне прискорення частинки в довільній точці траєкторії.

(3 м/с^2)

1.55. Кулька рухається по колу радіуса $R = 16$ м так, що залежність пройденого шляху від часу визначається рівнянням $l(t) = 2t^2$ (м). Знайти:

– момент часу, коли нормальне прискорення кульки зрівняється з тангенціальним;
– модуль і напрям її повного прискорення в цей момент.

$\left(2\text{с};\quad 5{,}6\ \text{м/с}^2, 45°\textit{до напрямку руху}\right)$

1.56. Частинка рухається по дузі кола радіуса $R = 1{,}0$ м за законом $l = A\sin\omega t$, де l – дугова координата, A = 0,8 м, ω=2,0 с$^{-1}$. Визначити повне прискорення частинки в точках $l = \pm A$ та $l = 0$.

$(2{,}6\text{м/с}^2;\quad 3{,}2\text{м/с}^2)$

Рух із змінним прискоренням

1.57. Частинка починає рух уздовж осі OX з точки x = 0 так, що її швидкість $v = \alpha\sqrt{x}$, де $\alpha = 2\text{м}^{1/2}\cdot\text{с}^{-1}$. Визначити залежність швидкості та прискорення частинки від часу та її середню швидкість $\langle v\rangle$ на шляху 4 м.

$\left(v = 2t;\quad a = 2\ \text{м/с}^2;\quad \langle v\rangle = 2\text{м/с}\right)$

1.58. Точка рухається, сповільнюючись, по прямій з прискоренням, яке залежить від її швидкості за законом $a = \rho\sqrt{v}$, де $\rho = 2\ \text{м}^{1/2}/\text{с}^{3/2}$.
У момент t = 0 швидкість точки $v_0 = 4\text{м/с}$. Визначити:

– числові рівняння швидкості та прискорення точки;
– на якій відстані від початкового положення та через який час точка зупиниться;
– середню швидкість точки на цьому шляху.

$\left(v(t) = (2-t)^2\text{м/с};\ a(t) = 2(t-2)\text{м/с}^2;\quad 2{,}67\text{м};\ 2\text{с};\ 1{,}33\text{м/с}\right)$

1.59. Точка, що рухається по колу радіуса R із швидкістю v_0, в момент $t = 0$ починає сповільнюватися так, що її миттєві тангенціальне та нормальне прискорення лишаються однаковими. Визначити залежність швидкості та повного прискорення точки від часу t та від пройденого шляху S.

$$\left(v(t) = \frac{v_0 R}{v_0 t + R}, \quad a(t) = \frac{v_0^2 R\sqrt{2}}{(v_0 t + R)^2}; \quad v(s) = v_0 e^{-S/R}, \quad a(s) = \frac{v_0^2 R\sqrt{2}}{R} e^{-2S/R} \right)$$

1.60. Частинка починає рухатися з початку координат із прискоренням $\vec{a} = \alpha t \vec{i} + \beta t^2 \vec{j}$, де $\alpha = 3$ м/с^3, $\beta =$ 2,25 м/с^4, $\vec{i}, \vec{j}$ – орти. Знайти відстань частинки від початку координат на момент t = 2с.

(l = 5м)

1.61. Частинка рухається з прискоренням $\vec{a} = \alpha(\vec{i}\cos\omega t + \vec{j}\sin\omega t)$, $\vec{i}, \vec{j}$ – орти. У момент t = 0 частинка перебувала в початку координат і мала швидкість $\vec{v}_0 = v_0 \vec{j}$. α, ω, v_0 – задані сталі. Знайти залежність від часу координат частинки $x(t)$, $y(t)$.

$$\left(x = \frac{\alpha}{\omega^2}(1 - \cos\omega t), \quad y = \left(v_0 + \frac{\alpha}{\omega} \right) t - \frac{\alpha}{\omega^2}\sin\omega t \right)$$

1.62. Катер в озері, що мав швидкість v_0, після зупинки двигуна починає уповільнюватися так, що проекція прискорення на напрям руху $a = -v_0 k e^{-kt}$, де k – задана стала. Який шлях пройде катер від початку вільного руху до зупинки?

$$\left(S = \frac{v_0}{k} \right)$$

Кінематика твердого тіла

1.63. Знайти відношення лінійних швидкостей та повних прискорень кінців хвилинної та годинної стрілок годинника, в якому хвилинна стрілка є в 1,5 раза довша за годинну.

(18; 216)

1.64. Визначити лінійну швидкістю екваторіальних точок Землі, прийнявши її радіус рівним 6380 км.

(464 м/с)

1.65. Стержень довжиною 50 см обертається з частотою 30 об/хв навколо перпендикулярної до нього осі, що лежить із стержнем в одній площині. Один з кінців стержня має лінійну швидкість 57 см/с. Чому дорівнює лінійна швидкість другого кінця стержня?

(1 м/с, *або* 2,14 м/с)

1.66. Швидкість точок колеса, що обертається, дорівнює на ободі 6 м/с, а на 15 см ближче до осі – 5,5 м/с. Знайти радіус колеса.

(1,8м)

1.67. Колесо обертається навколо нерухомої осі так, що кут повороту φ змінюється з часом t за законом $\varphi = kt^2$, $k = 0,2$ рад/с^2 . Визначити повне прискорення точки на ободі колеса на момент $t = 2,5$ с, коли її лінійна швидкість складає $v = 0,65$ м/с .

(0,7м/с^2)

1.68. Диск радіуса $R = 50$ см обертається навколо власної нерухомої осі за законом $\varphi = 3 - 2t + 0,01t^3$(рад). Визначити тангенціальне, нормальне та повне прискорення точок на ободі диска на момент $t = 10$ с.

(0,3м/с^2; 0,5м/с^2; 0,58м/с^2)

1.69. Ротор електродвигуна, що обертався з частотою 50 с$^{-1}$, після вимикання струму рівномірно гальмує й зупиняється, здійснивши 1680 обертів. Знайти кутове прискорення ротора.

(4,7 рад/с^2)

1.70. Маховик деякий час розкручують із стану спокою з деяким прискоренням, а після 100 обертів прискорення вдвічі зменшують і розганяють маховик ще такий самий час. Скільки всього обертів зробив маховик?

(350)

1.71. Маховик починає розкручуватись із сталим кутовим прискоренням 0,01 рад/с^2. Через який час кут між векторами повного прискорення та лінійної швидкості точок маховика досягне величини 80°? Скільки обертів зробить маховик на цей момент?

(23,8 с; 0,45)

1.72. Тверде тіло починає обертатися навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням $\beta = \alpha t$, де $\alpha = 2\cdot10^{-2}$ рад/с^3. Через який час τ кут між векторами повного прискорення та швидкості довільної точки тіла складе $\varphi = 60^\circ$?

$$\left(t = \sqrt[3]{\frac{4tg\varphi}{\alpha}} \approx 7 \text{ с} \right)$$

1.73. Маховик, який мав кутову швидкість 10 рад/с, почав гальмувати із прискоренням 0,25 рад/с^2. Знайти, кут повороту φ маховика та кількість здійснених ним обертів N на момент $t = 1{,}5$ хв .

$$\left(\varphi = -112{,}5\ \text{рад}, \quad N \approx 81{,}6\right)$$

1.74. Маховик, який обертається рівносповільнено, за час зменшення кутової швидкості від 300 рад/с до 100 рад/с здійснив 3000 обертів. Чому дорівнює кутове прискорення маховика?

(0,21 рад/с^2)

1.75. Диск обертається навколо власної осі з початковою кутовою швидкістю ω_0 = 10 рад/с і кутовим прискоренням $\beta = a - bt$, де $a = 0{,}5$ рад/с^2, $b = 0{,}1$ рад/с^3. Визначити, через який час t_0 він зупиниться і скільки обертів N здійснить.

(t_0 = 20 с; $N \approx 26$)

1.76. Розкручений маховик починає гальмувати так, що його кутова швидкість змінюється за законом $\omega = 100 - 10t + 0{,}25t^2$ (рад/с). Визначити початкову швидкість маховика ω_0 та швидкість ω на момент $t = 20$ с, а також середню швидкість $\langle\omega\rangle$ за цей проміжок часу.

$$\left(\omega_0 = 100\ \text{рад/с}, \quad \omega = 0, \quad \langle\omega\rangle = 33{,}3\ \text{рад/с}\right)$$

1.77. Тверде тіло обертається сповільнено навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням $\beta = k\sqrt{\omega}$, $k = 2\,\text{рад}^{1/2}\text{с}^{-3/2}$. У момент $t = 0$ кутова швидкість тіла $\omega_0 = 9\,\text{рад/с}$. Визначити середню кутову швидкість та середнє кутове прискорення тіла за весь час обертання.

(3 рад/с; 3 рад/с^2)

1.78. Точка обертається навколо нерухомої осі так, що її кутова швидкість залежить від кута повороту за законом $\omega = \omega_0 - \alpha\varphi$, де α – задана стала. В початковий момент часу кут $\varphi = 0$. Визначити залежність від часу:

– кута повороту $\varphi(t)$;

– кутової швидкості $\omega(t)$;

– кутового прискорення $\beta(t)$ тіла.

$$\left(\varphi(t) = \frac{\omega_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}); \quad \omega(t) = \omega_0 e^{-\alpha t}; \quad \beta = -\omega_0 \alpha e^{-\alpha t}\right)$$

1.79. Обруч (рис. 1.8) котиться горизонтальною площиною без ковзання із швидкістю v. Визначити миттєві швидкості точок A, B, C і D.

$$(2v;\qquad v\sqrt{2};\qquad 0;\qquad v\sqrt{2})$$

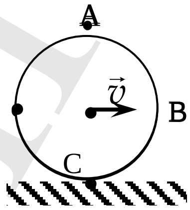


Рис.1.8

1.80. Обруч (рис. 1.9) рухається у власній площині так, що в даний момент швидкості його осі та точки C складають, відповідно, v = 2 м/с і v_1 = 1 м/с. Знайти швидкість верхньої точки (A) обруча .

(3 м/с, *або* 5 м/с)

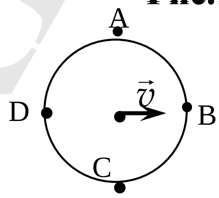


Рис.1.9

1.81. Обруч радіуса $R =$ 20 см рухається в площині рис. 1.9 так, що в даний момент швидкості його осі та точки C збігаються за напрямом і складають, відповідно, v = 1,5 м/с і v_c = 0,5 м/с. Знайти:

– відстань R_M від миттєвої осі до осі диска в цей момент;

– модуль v_A швидкості точки A та її напрям (кут α між векторами $\vec{v}_A$ і $\vec{v}$).

$$\left(R_M = 30\text{ см};\quad v_A = 1{,}58\text{ м/с};\quad \alpha = 33{,}7°\right)$$

1.82. Обруч радіусом $R =$ 30 см рухається в площині рис. 1.9 так, що в даний момент швидкості його осі O та точки C за величиною складають v = 2 м/с та v_c = 1 м/с і мають протилежні напрямки. Знайти:

– відстань R_M від миттєвої осі до осі диска в цей момент;

– модуль вектора $\vec{v}_A$ швидкості точки A і його напрям (кут α із вектором $\vec{v}$).

$$\left(R_M = 20\text{ см};\quad v_A = 3{,}6\text{ м/с};\quad \alpha = 56{,}3°\right)$$

1.83. Трамвайне колесо котиться по рейці без ковзання (рис.1.10). Швидкості точок A і B відомі й дорівнюють v_A і v_B. Знайти швидкість руху осі колеса.

$$\left(\frac{v_B^2 - v_A^2}{2v_B}\right)$$

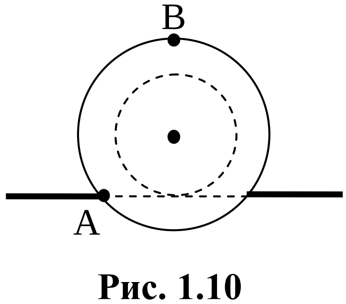


Рис. 1.10

1.84. Обруч радіуса $R = 0{,}50\,\text{м}$ котиться прямолінійно без ковзання по горизонтальній площині зі швидкістю $v = 1{,}0\,\text{м/с}$. Визначити:

– модуль та напрям прискорення довільної точки на поверхні кулі;

– шлях, який проходить ця точка за час між двома послідовними дотиками до площини.

(2 м/с^2, *до центра колеса*; 4 м)

Рух у різних системах відліку

1.85. На передньому краї платформи, що проїжджає повз спостерігача на пероні, на невеликій висоті закріплено пружинний пістолет, з якого роблять "постріл" кулькою проти напрямку руху платформи. Проаналізувати, як буде рухатися кулька після спуску "курка" для стрільця та для спостерігача, якщо швидкість вильоту кульки з пістолета дорівнює швидкості платформи.

1.86. З однієї точки кинуто два тіла із заданими швидкостями $\vec{v}_{01}$ і $\vec{v}_{02}$. Записати у векторній формі рівняння руху $\vec{r}=\vec{r}\left(t\right)$ одного тіла відносно іншого. З яким прискоренням та по якій траєкторії відбувається цей рух?

1.87. Два тіла одночасно кинуто з однаковою початковою швидкістю v_0 = 10 м/с одне під кутом α_1 = 15°, а інше – під кутом α_2 = 75° до горизонту. Знайти відстань S між тілами через τ = 2,5 с після початку руху. Задачу розв'язати в системі відліку пов'язаній: а) із землею і б) з одним із тіл.

$$\left(S = 2v_0 \sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\cdot\tau = 25\text{м} \right)$$

1.88. Відстань між двома причалами моторний човен проходить за течією за 10 хв, а проти течії – за 30 хв. За який час цю відстань пропливе рятувальний круг, який випав із човна при відчалюванні.

$$(30\text{хв})$$

1.89. Між двома пунктами, розташованими на річці на відстані 100 км один від одного курсує катер. Катер проходить цю відстань за течією за 4 год, а проти течії за 10 год. Визначити швидкість течії та швидкість катера відносно води.

$$(7{,}5\,\text{км/год};\quad 17{,}5\,\text{км/год})$$

1.90. При проходженні по річці повз бакен із катера випав рятівний круг. Пропажу виявили через 10 хв. і, повернувши назад, зустріли її на відстані 1,5 км від бакена. Знайти швидкість течії. Розглянути задачу в системі відліку бакена і в системі відліку круга.

(4,5 км/год)

1.91. Два авто рухаються по прямих дорогах під кутом 120° одне до одного із швидкостями 58 км/год і 80 км/год. З якою швидкістю одне авто рухається відносно іншого?

(120 км/год)

1.92. Від бакена одночасно відпливли два моторні човни – один за течією, а інший упоперек. Відійшовши на однакову відстань від бакена, човни повертають назад. Визначити відношення часів руху човнів t_1/t_2 від відплиття до повернення до бакена, якщо швидкість кожного в стоячій воді в η = 1,2 разів більша за швидкість течії.

$$\left(\frac{t_1}{t_2} = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} = 1{,}81\right)$$

1.93. Коли футболіст виконує штрафний удар, то швидкість його бутса лишається сталою й рівною v = 20 м/с. Нехтуючи тертям об газон і вважаючи м'яч абсолютно пружним, знайти, яку швидкість отримає м'яч при ударі. *Вказівка: розглянути задачу в системі відліку бутса.*

(40 м/с.)

Вказівка. *Задачі 1.91 – 1.96 розглянути в системі відліку плити.*

1.94. Кулька, що рухається із швидкістю $\vec{v}_1$, пружно вдаряє по нормалі у масивну плиту, що рухається вздовж тієї самої прямої із швидкістю $\vec{V}$. Знайти швидкість кульки $\vec{v}_2$ після удару.

$$\left(\vec{v}_2 = -\vec{v}_1 + 2\vec{V}\right)$$

1.95. Кулька, котра без тертя рухається по горизонтальній поверхні із швидкістю v, наздоганяє і по нормалі вдаряє в масивну вертикальну плиту, що рухається у тому самому напрямі з незмінною швидкістю V. Удар абсолютно пружний. При якій величині v кулька після удару змінить напрям руху?

$$\left(v > 2V\right)$$

1.96. М'яч, який летить із швидкістю 5 м/с, пружно вдаряє по нормалі в масивну вертикальну плиту, що рухається у тому самому напрямі. Знайти швидкість плити, якщо після удару м'яч відскакує із швидкістю 1 м/с.

(1 м/с)

1.97. М'яч, який летить із швидкістю 5 м/с і пружно вдаряє по нормалі в рухому масивну вертикальну плиту, по тому продовжує рух без зміни напрямку із швидкістю 1 м/с. Знайти швидкість плити.

(3 м/с)

1.98. М’яч, який летить із швидкістю 5 м/с, пружно вдаряє по нормалі в масивну вертикальну плиту, що рухається у тому самому напрямку. Знайти швидкість плити, якщо після удару м’яч зупиняється (падає)?

(2,5 м/с)

1.99. На масивну плиту, що рухається вгору зі сталою швидкістю 1 м/с, падає й пружно відбивається м’яч, який на момент удару мав швидкість 3 м/с. Яку відстань до зупинки пролетить після удару м’яч: а) відносно плити і б) відносно землі. g = 10 м/с^2.

(0,8 м; 1,25 м)

2. Динаміка

2.1. Другий закон Ньютона (основне рівняння динаміки):

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\,,\quad \text{або} \quad m\vec{a}=\vec{F}\quad \left(m=const\right).$$

2.2. Диференціальне рівняння руху матеріальної точки в класичній механіці

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\vec{F}\ .$$

2.3. Рівняння руху матеріальної точки в неінерціальній системі відліку:

$$ma=\vec{F}+\vec{F}_{ін}\,.$$

2.4. Сили інерції:

$$\vec{F}_{пост}=-m\vec{a}_0;\quad \vec{F}_{відц}=m\omega^2\vec{r};\quad \vec{F}_{кор}=2m\left[\vec{v}\,\vec{\omega}\right].$$

2.5. Положення та рівняння руху центра мас системи:

$$\vec{r}_c=\frac{\sum\limits_i m_i\vec{r}_i}{\sum\limits_i m_i};\quad m\vec{a}_c=\vec{F}_{зов}\,.$$

2.6. Зміна імпульсу системи:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}_{зов};\quad \Delta\vec{p}=\int\limits_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{зов}\mathrm{d}t.$$

Закони Ньютона

2.1. Чи можливий рух тіла, коли

– на нього не діють ніякі сили?;
– сили, що діють на нього є компенсованими?

2.2. Укажіть всі ознаки того, що на тіло:

– діють якісь сили;
– не діють ніякі сили.

2.3. Що покаже динамометр, якщо до його кінців прикласти протилежні за напрямом сили F_1 = 10 Н і F_2 = 15 Н?

2.4. Гранична сила натягу, яку витримує нитка, дорівнює 150 Н. Чи розірветься вона, якщо:

– один кінець прикріпити до стіни, а за другий потягти із силою 150 Н?
– розтягати її за кінці із силами по 150 Н?

2.5. Два тягарці з масами m_1 і $m_2 = 2m_1$ з'єднані ниткою та підвішені до стелі на гумовому шнурі прикріпленому до першого тягарця. Визначити силу натягу шнура $\vec{F}$ та прискорення кожного із тягарців одразу після того, як нитку перерізали. Нитку та шнур вважати невагомими.

$$\left(\vec{F} = -3m\vec{g}, \quad \vec{a}_1 = -2\vec{g}, \quad \vec{a}_2 = \vec{g}\right).$$

2.6. Тіло падає з великої висоти й пружно (без утрати швидкості) відбивається від горизонтальної поверхні. Яким є вектор прискорення тіла відразу після відскоку а) без і б) з урахуванням опору повітря?

$\left(а)\, \vec{g}; \quad б)\, 2\vec{g}\right)$

2.7. До гладенької вертикальної стінки на нитці довжиною 4 см підвішено кулю масою 0,3 кг і радіусом 2,4 см, рис. 2.1. Знайти силу тиску кулі на стінку.

(1,25 Н)

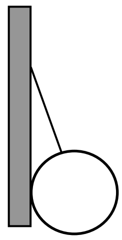


Рис. 2.1

2.8. Брусок маси m, який притиснутий до вертикальної стіни перпендикулярною до неї силою, перебуває в спокої. Потім брусок починають тягти по стіні у вертикальному напрямку. На скільки відрізняються сили, що необхідні для пересування бруска вгору та вниз?

($2mg$)

2.9. До накинутої на нерухомий блок нитяної петлі приєднана така сама нитка (рис. 2.2). Нитку починають тягти за вільний кінець із деякою силою F. Якщо величину F поступовому збільшувати, то що розірветься – нитка чи петля – при заданій величині кута α?

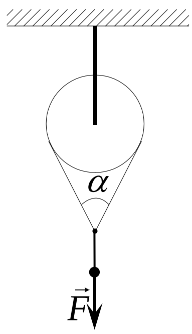


Рис. 2.2

2.10. Два бруски m_1 = 2 кг і m_2 = 4 кг з'єднані невагомою пружиною. Якщо підвісити систему за перший брусок, то довжина пружини складе 10 см, а при підвішуванні за другий брусок вона дорівнює 7,5 см. Знайти довжину вільної пружини.

(5 см)

2.11. Два бруски m_1 = 2 кг і m_2 = 4 кг з'єднані невагомою пружиною. Якщо підвісити систему за перший брусок, то довжина пружини складає 10 см, а якщо систему поставити вертикально першим бруском догори, то довжина пружини дорівнює 2,5 см. Знайти довжину вільної пружини.

(5 см)

2.12. Дві пружини з коефіцієнтами жорсткості k_1 і k_2 з’єднані: а) послідовно, б) паралельно. Знайти жорсткість k однієї пружини, якою можна замінити з’єднання.

$$\left(a)\ k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \quad б)\ k = k_1 + k_2 \right)$$

2.13. Кулька прикріплена до планки двома нитками, як показано на рис. 2.3. Із яким максимальним прискоренням можна підіймати кульку за планку, якщо α = 60° і максимальний допустимий натяг кожної нитки дорівнює вазі кульки?

(≈ 7 м/с)

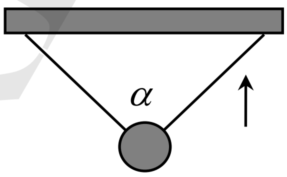


Рис. 2.3

2.14. Людина на баржі відштовхується від причалу за допомогою жердини, до якої прикладає постійне зусилля 400 Н. На яку відстань відійде від причалу баржа за 30 с, якщо її маса становить 300 т?

(0,6 м)

2.15. Брусок маси 5 кг ковзає по гладкій похилій площині з кутом нахилу до горизонту 30°. Знайти:

– з якою силою брусок тисне на площину;
– яку швидкість буде мати брусок через 2 секунди руху.

(≈ 42 Н; 9,8 м/с)

2.16. Два з’єднані ниткою бруски прискорено ковзають по гладкій горизонтальній поверхні під дією горизонтальної сили 30 Н, яка прикладена до одного з них. Яка сила діє на інший брусок, якщо їхні маси відрізняться удвічі?

(10 Н *або* 20 Н)

2.17. Із навантажених платформ різної маси складають потяг. У якій послідовності платформи слід приєднувати до локомотива, щоби потяг можна було розганяти з максимально можливим прискоренням?

2.18. Автомобіль завантажений двома контейнерами рушає з місця із прискоренням 0,5 м/с^2. Маса кожного контейнера дорівнює масі автомобіля, коефіцієнт опору складає 0,1. Яким було би прискоренням автомобіля при завантаженні лише одним контейнером і тій самій силі тяги?

(1,5 м/с^2)

2.19. При масі M_0 повітряна куля зависає в повітрі, а при масі M_1 – рівномірно піднімається вгору. При якій масі M_2 куля буде рівномірно спускатися вниз із такою самою швидкістю?

$(M_2 = 2M_0 - M_1)$

2.20. Повітряна куля масою $M = 420$ кг опускається з певною сталою швидкістю. Яку масу баласту m має скинути аеронавт, аби куля почала підійматися з тією ж швидкістю, якщо сила опору повітря складає $\eta = 5\%$ від підіймальної сили?

$$\left(m = \frac{2\eta}{1+\eta} M = 40 \text{ кг} \right)$$

2.21. Знайти силу тертя, що діє на брусок маси 10 кг, покладений на дошку з коефіцієнтом тертя 0,5, яка розташована:

– горизонтально;
– під кутом 20° до горизонту;
– під кутом 30° до горизонту.

(0; ≈34 Н ≈43 Н)

2.22. До бруска маси 5 кг, який знаходиться на горизонтальній поверхні, прикладена горизонтальна сила 4 Н. Знайти прискорення бруска та силу тертя, що діє на нього при коефіцієнті тертя: а) 0,05 і б) 0,1. $g = 10$ м/с^2.

(а) 0,3 м/с^2, 2,5 Н; б) 0 м/с^2, 4 Н)

2.23. Чому дорівнює найменший час та шлях розгону з місця авто до швидкості 144 км/год при коефіцієнті тертя ковзання між колесами та дорогою 0,25? $g = 10$ м/с^2.

(16 с; 320 м)

2.24. Брусок під дією деякої горизонтальної сили рухається по горизонтальній поверхні з прискоренням 2,0 м/с^2. Потім, не змінюючи сили, на нього кладуть ще один такий самий брусок. З яким прискоренням рухатимуться бруски, якщо ковзання між ними відсутнє, і коефіцієнт тертя з поверхнею дорівнює 0,1? $g = 10$ м/с^2.

(0,5 м/с^2).

2.25. До бруска маси m, розташованого на дошці маси $M = \eta m$, що лежить на підлозі, прикладають горизонтальну силу F, рис. 2.4. Величини m, η і коефіцієнти тертя між бруском і дошкою k_1 та дошкою і поверхнею k_2 задано. Визначити, за яких умов брусок

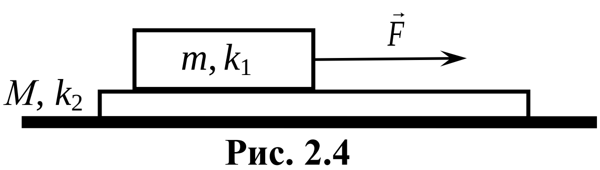


Рис. 2.4

буде ковзати по дошці, а дошка – по підлозі.

$$\left(\frac{F}{mg} > (k_1 - k_2)\left(1 + \frac{1}{\eta}\right)\ при\ \frac{k_1}{k_2} > 1 + \eta\right)$$

2.26. Тіло тягнуть за нитку по горизонтальній площині, прикладаючи однакову силу один раз горизонтально, а другий − під кутом α = 23° до горизонту. Знайти коефіцієнт тертя між тілом і площиною, якщо прискорення тіла в обох випадках однакове.

$$\left(k = tg\frac{\alpha}{2} = 0,2\right)$$

2.27. Брусок маси m лежить на горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя k. Яку мінімальну силу треба прикласти до бруска, щоб він почав рухатись?

$$\left(\frac{kmg}{\sqrt{1+k^2}}\right)$$

2.28. Брусок хочуть пересунути по горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя k, штовхаючи його під кутом α до горизонту. При яких значеннях α цього буде неможливо зробити?

$$\left(\alpha > \mathrm{arc\,tg}(1/k)\right)$$

2.29. Рівномірно пересувати завантажений ящик, штовхаючи його під кутом 30° до горизонту, вдвічі важче, ніж тягти за мотузку під таким самим кутом. Чому дорівнює коефіцієнт тертя між ящиком і підлогою?

$$\left(1/\sqrt{3}\right)$$

2.30. Коефіцієнт тертя між бруском маси m та похилою площиною, на якій він знаходиться, дорівнює k. Визначити та показати на графіку залежність $F(\alpha)$ сили тертя, що діє на брусок, від кута нахилу площини до горизонту.

2.31. Брусок масою 1 кг знаходиться на похилій площині з коефіцієнтом тертя 0,6. Чому дорівнює рівнодійна сил, які діють на брусок, при куті нахилу площини до горизонту: а) 45^o і б) 30^o? g = 10 м/с^2.

(а) 2,8 Н;   б) 0)

2.32. Аби оцінити коефіцієнт тертя k дерева по дереву, дошку з покладеним на неї дерев’яним бруском підіймають за один кінець і визначають її кут нахилу α, при якому брусок починає ковзати. Чому дорівнює k при α = 14°?

(k = tgα = 0,25)

2.33. На клині, що рухається по горизонтальній поверхні праворуч з прискоренням a, знаходиться брусок маси m (рис. 2.5). При якій величині a брусок не буде ковзати

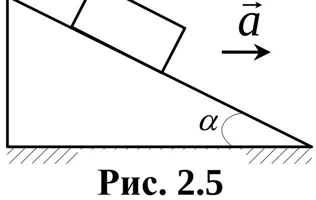


Рис. 2.5

по клину та з якою силою F він при цьому буде тиснути на клин? Тертя немає.

$$\left(a = g\,\mathrm{tg}\,\alpha; \quad F = \frac{mg}{\cos\alpha} \right)$$

2.34. Через нерухомий блок установлений на вершині площини з кутом нахилу α до горизонту перекинуто нитку з двома брусками однакової маси $m_1 = m_2 = m$, один з яких лежить на площині, а другий звисає і спирається на підставку. Визначити,

– при якому найменшому коефіцієнті тертя k між першим бруском і площиною система залишиться зрівноваженою, якщо підставку прибрати;
– яка сила тертя F діє в такому випадку на перший брусок.

$$\left(k = \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad F = mg\left(1 - \sin\alpha\right) \right)$$

2.35. Через нерухомий блок установлений на вершині площини з кутом нахилу α = 30°до горизонту перекинуто нитку з двома брусками так, що перший лежить на дошці, а другий звисає. Коефіцієнт тертя між першим бруском і дошкою складає 0,23, тертя в осі блока відсутнє. В якому напрямку та з яким прискоренням рухатимуться бруски, якщо їхні маси відносяться як а) $m_1 : m_2 = 6:5$ і б) $m_1 : m_2 = 5:1$?

$$\left(\text{а) } 0{,}7; \ \text{б) } 0{,}8 \text{ м/с}^2 \right)$$

2.36. Тіло, яке спрямували вгору по похилій площині з кутом нахилу до горизонту α = 45°, досягло найвищої точки підйому за час t_1 = 1,3 с. За який час t_2 тіло повернеться у вихідну точку при коефіцієнті тертя k = 0,4?

$$\left(t_2 = t_1\sqrt{\frac{\mathrm{tg}\,\alpha + k}{\mathrm{tg}\,\alpha - k}} \approx 2\,\text{c} \right)$$

2.37. Тіло пустили із початковою швидкістю v угору по похилій площині з кутом нахилу α до горизонту. Через який час t швидкість тіла знову буде рівна v, при коефіцієнті тертя k (< tgα)?

$$\left(t = \frac{2v}{g} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha - k^2\cos^2\alpha} \right)$$

2.38. Тіло масою m = 50 кг притискають до похилої площини горизонтальною силою F = 300 Н. З яким прискорення і в якому напрямку рухається тіло та з якою силою воно діє на площину при куті її нахилу до горизонту α = 30°. Тертя відсутнє, g = 10 м/с^2.

(0,2 м/с^2 *вгору*; 583 Н)

2.39. На тіло маси m, яке знаходиться на похилій площині з кутом нахилу до горизонту α, діє горизонтальна сила F, що притискає його до площини.

При яких значеннях F тіло буде перебувати в спокої, якщо коефіцієнт тертя $k < \mathrm{tg}\alpha$?

$$\left(\frac{\mathrm{tg}\alpha - k}{1 + k\,\mathrm{tg}\alpha} mg \le F \le \frac{\mathrm{tg}\alpha + k}{1 - k\,\mathrm{tg}\alpha} mg\right)$$

2.40. На клині з кутом α, що закріплений на горизонтальній поверхні, лежить брусок маси m (рис. 2.6). Коефіцієнт тертя між бруском і клином k ($k > \mathrm{tg}\alpha$). Яку найменшу силу, паралельну до ребра клина, треба прикласти до бруска, щоб він почав рухатись? В якому напрямі почне рухатися брусок?

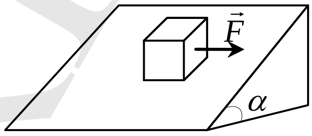


Рис. 2.6

$$\left(F = mg\sqrt{k^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}; \quad \textit{під кутом } \beta = \arcsin\left(\frac{\mathrm{tg}\alpha}{k}\right) \textit{ до } \vec{F}\right)$$

2.41. Тіло рухається по горизонтальній площині під дією сили F, що напрямлена вгору під кутом α до горизонту. Знайти прискорення тіла, якщо коефіцієнт тертя між ним і площиною дорівнює k. За яких умов рух тіла буде рівномірним?

$$\left(a = \frac{F}{m}(\cos\alpha + k\sin\alpha) - kg\ ; \quad k = \frac{F\cos\alpha}{mg - F\sin\alpha}\right)$$

2.42. На краю горизонтальної платформи радіуса R = 4,85 м лежить маленька шайба. Платформа починає рівноприскорено обертатися навколо своєї осі так, що через t_0 = 2 хв набуває кутової швидкості ω_0 = 1,2 рад/с. Через який час τ шайба зісковзне з платформи, якщо коефіцієнт тертя між тілами k= 0,02?

$$\left(\tau = \sqrt{\frac{t_0}{\omega_0}\sqrt[4]{\left(\frac{kgt_0}{\omega_0 R}\right)^2 - 1}} = 20\,\text{с}\right)$$

2.43. Кулька, котра підвішена до стелі на нитці довжиною l = 4 м, обертається по колу в горизонтальній площині так, що нитка складає кут $\alpha = 30°$ із вертикаллю. З якою швидкістю υ рухається кулька? g = 10 м/с^2.

$$\left(\upsilon = \sqrt{\frac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha}} = 3{,}4\ \text{м/с}\right)$$

2.44. Із якою максимальною швидкістю може обертатися по колу в горизонтальній площині тягарець підвішений на нерозтяжній нитці довжиною l = 1,7 м, яка витримує подвоєну вагу тягарця?

$$\left(\sqrt{\frac{3gl}{2}} = 5\ \text{м/с}\right)$$

2.45. Кулька маси m = 200 г, яка підвішена до стелі на нитці довжиною l = 3,0 м, обертається в горизонтальній площині по колу радіуса r = 1,0 м. Знайти частоту обертання кульки та натяг нитки.

$$\left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)\sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2-r^2}}}=17{,}8\,\text{об/хв};\quad \frac{mg}{\sqrt{1-\left(r/l\right)^2}}=2{,}1\,\text{Н}\right)$$

2.46. Зрівноважена кулька на гумовій нитці довжиною $l_0 = 1{,}25$ м розтягає її вдвічі. При якій швидкості v колового руху кульки в горизонтальній площині нитка буде відхилена від вертикалі на кут $\alpha = 45°$? g = 10 м/с^2.

$$\left(v = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\left(\alpha/2\right)\sqrt{2gl_0} = 4{,}6\ \text{м/с}\right)$$

2.47. На трасі кросу мотоцикліст натрапляє на пагорб із радіусом кривизни поверхні у вершині $R = 40$ м. При якій найменшій швидкості мотоцикліст, проходячи пагорб, відірветься від землі? g = 10 м/с^2.

$$\left(v = \sqrt{gR} = 72\ \text{км/год}\right)$$

2.48. При якій швидкості мотоцикліст зможе рухатися, не падаючи, по вертикальній циліндричній стіні радіуса $R = 10$ м при коефіцієнті тертя $k = 0{,}25$?

$$\left(v \geq \sqrt{\frac{gR}{k}} = 72\ \text{км/год}\right)$$

2.49. Літак робить “ мертву петлю ” радіуса R = 500 м із сталою швидкістю v = 360 км/год. Знайти, з якою силою пілот масою m = 70 кг тисне на сидіння в нижній, верхній та середніх точках петлі. g = 10 м/с^2.

(2,1 кН; 0,7 кН; ≈1,6 кН)

2.50. Координати тіла маси m, яке рухається в площині XOY, визначаються як $x = A\sin\omega t$ і $y = A\cos\omega t$, де A, ω – сталі. Знайти:

- траєкторію руху тіла;
- силу, що діє на тіло, та величину і напрям його прискорення;
- величину швидкості тіла та напрям руху по траєкторії.

Рух під дією змінної сили $F = F(t)$

2.51. Тіло маси 1 кг рухається уздовж осі OX згідно з рівнянням $x = 5 + 10t - 0{,}1t^3$, всі величини в основних одиницях СІ. Знайти величину сили, що діє на тіло в момент повернення у вихідне (t = 0) положення.

(6 Н)

2.52. Радіус-вектор точки маси m = 1,0 кг змінюється з часом за законом $\vec{r}(t)=a_1(t+\tau)^2\vec{i}+a_2(t-\tau)^3\vec{j}$, де a_1 = 30 м/с^2, a_2 = 1,0 м/с^3, τ = 10 с, $\vec{i}, \vec{j}$ – орти. Визначити:

– вектор діючої на точку сили $\vec{F}(t)$, його модуль F_0 і кут α_0, який він складає з віссю OX у початковий момент часу;
– проміжок часу, за який напрям сили зміниться на 90°.

$$\left(\vec{F}(t)=2m\left(a_1\vec{i}+3a_2(t-\tau)\vec{j}\right),\ F_0\approx 85\,\text{Н},\ \alpha_0=45^\circ;\quad 20\text{ с.}\right)$$

2.53. Тіло маси m починає рухатися під дією сили, що залежить від часу, як $\vec{F}(t)=\alpha_1 t\vec{i}+\alpha_2 t^2\vec{j}$, де α_1 і α_2 задані сталі, $\vec{i}, \vec{j}$ – орти. Визначити залежності від часу швидкості $\vec{v}(t)$ та переміщення $\vec{S}(t)$ тіла.

$$\left(\vec{v}=\frac{1}{6m}\left(3\alpha_1 t^2\vec{i}+2\alpha_2 t^3\vec{j}\right);\quad \vec{S}=\frac{1}{12m}\left(2\alpha_1 t^3\vec{i}+\alpha_2 t^4\vec{j}\right)\right)$$

2.54. Тіло маси m = 1 кг починає рух під дією сили $\vec{F}=\vec{F}_0 t\left(1-(t/2\tau)\right)$, де $F_0=5\,\text{Н}$, $\tau=10\text{ с}$. Знайти швидкість тіла через t = 10 с після початку руху.

$$\left(\vec{v}=\frac{\vec{F}}{m}\left(t-\frac{t^2}{2\tau}\right);\quad v=25\,\text{м/с}\right)$$

2.55. До тіла маси m, яке лежить на горизонтальній поверхні, прикладена вертикальна сила $F = \alpha t$, де α – задана стала. Знайти рівняння руху тіла $y = y(t)$.

$$\left(\begin{array}{l} t\le t_0:\quad y=0;\quad t_0=\dfrac{mg}{\alpha};\\ t\ge t_0:\quad y=\dfrac{\left(\alpha(t-t_0)-mg\right)(t-t_0)^2}{2m}.\end{array}\right)$$

2.56. Частинка масою m почала рухатись під дією сили $F = F_0\cdot\sin\omega t$, де F_0 та ω – сталі. Знайти та показати на графіку залежність від часу пройденого частинкою шляху $S(t)$.

$$\left(S(t)=\frac{F_0}{m\omega^2}(\omega t-\sin\omega t)\right)$$

2.57. Після встановлення рівномірного руху парашутист спускається із швидкістю 4 м/с. Яким було прискорення парашутиста на момент, коли швидкість спуску становила 3 м/с? Силу опору повітря вважати прямо пропорційною швидкості парашутиста.

$$\left(\frac{g}{4}\right)$$

2.58. Катер масою m рухається по озеру зі швидкістю v_0. В момент $t = 0$ його двигун вимкнули. Приймаючи, що сила опору є пропорційною швидкості катера $\vec{F} = -r\vec{v}$, знайти швидкість катера в залежності від часу $v(t)$ та від пройденого шляху $v(s)$, а також повний шлях до зупинки S_{max}.

$$\left(v(t) = v_0 e^{-\frac{r}{m}t}; \quad v(s) = v_0 - \frac{r}{m}s; \quad S_{\max} = \frac{mv_0}{r} \right)$$

2.59. Куля, що має швидкість v_0, пробиває дошку товщини h і вилітає з неї зі швидкістю v. Знайти час руху кулі в дошці, вважаючи силу опору пропорційною квадратові швидкості.

$$\left(t = \frac{h(v_0 - v)}{v_0 v \ln(v_0/v)} \right)$$

2.60. Тягарець, що висить на пружині, розтягує її на величину X_0. Потім тягарець підіймають до положення, в якому пружина не розтягнена, й без поштовху відпускають. Знайти максимальне видовження пружини та максимальну швидкість тягарця.

$$\left(2X_0; \quad \sqrt{gX_0} \right)$$

2.61. Маленька шайба починає зісковзувати вниз по площині, що нахилена під кутом $\alpha = 45°$ до горизонту й має змінний коефіцієнт тертя $k = \eta x$, де $\eta = 0{,}5$ 1/м, а x – відстань, яку пройшла шайба. Знайти максимальну швидкість шайби v_m та шлях S_m, який вона пройде до зупинки.

$$\left(v_m = \sin\alpha\sqrt{\frac{g}{\eta\cos\alpha}} \approx 3{,}7\text{м/с}; \quad S_m = \frac{2\text{tg}\alpha}{\eta} = 4{,}0\text{м} \right)$$

Неінерціальні системи відліку

2.62. З яким горизонтальним прискоренням повинна рухатися вертикальна стінка, щоб прикладена до неї гумова шайба не падала при коефіцієнті тертя між шайбою та стінкою $k = 0{,}5$. Задачу розглянути в системі відліку стінки.

$$(2g)$$

2.63. На гладкій горизонтальній поверхні лежить дошка маси M, а на ній – шайба маси m. Яку мінімальну горизонтальну силу треба прикласти до дошки, щоби шайба почала ковзати по ній при коефіцієнті тертя k? Задачу розглянути в системі відліку дошки.

$$\left(k(M+m)g \right)$$

2.64. На похилій площині із заданими кутом нахилу до горизонту α і коефіцієнтом тертя $k > \mathrm{tg}\,\alpha$ лежить брусок. Із якими значеннями прискорення a слід горизонтально рухати площину, аби брусок після вивільнення не ковзав по ній?

$$\left(a \le \frac{k - \mathrm{tg}\,\alpha}{1 + k\,\mathrm{tg}\,\alpha} \right)$$

2.65. На похилій площині із заданими кутом нахилу до горизонту α і коефіцієнтом тертя $k < \mathrm{tg}\,\alpha$ утримують у рівновазі брусок. Із якими значеннями прискорення a слід горизонтально рухати площину, аби брусок після вивільнення не ковзав по ній?

$$\left(\frac{\mathrm{tg}\,\alpha - k}{1 + k\,\mathrm{tg}\,\alpha} g \le a \le \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + k}{1 - k\,\mathrm{tg}\,\alpha} g \right)$$

2.66. Людина маси m = 60 кг іде рівномірно по краю горизонтальної круглої платформи радіуса R = 3,0 м, яку обертають із кутовою швидкістю ω = 1 рад/с навколо її власної вертикальної осі. Знайти горизонтальну складову сили, що діє на людину з боку платформи, якщо результуюча сил інерції, прикладених до неї у системі відліку платформи, дорівнює нулю.

$$\left(F = \frac{m\omega^2 R}{4} = 45\,\mathrm{Н} \right)$$

2.67. По горизонтальному диску, що обертається навколо власної вертикальної осі з кутовою швидкістю $\omega = 6$ рад/с, рівномірно рухається тіло масою m = 0,5 кг із швидкістю v' = 50 см/с відносно диска. Знайти горизонтальну силу, з якою диск діє на тіло в момент, коли воно знаходиться на відстані r = 30 см від осі й рухається відносно диска:

а) вздовж діаметра;
б) по прямій перпендикулярно до діаметра.

(а) 6,2 Н; б) 8,4 Н, або 5,5 Н)

2.68. Тіло маси m = 1кг рухається уздовж меридіана зі швидкістю v' = 30 м/с. Визначити величину відцентрової $F_{вц}$ і коріолісової $F_к$ сил інерції, що діють на тіло внаслідок добового обертання Землі у випадку, коли воно знаходиться: а) на широті $\varphi = 60°$ і б) на екваторі. Показати на рисунку вектори цих сил.

(а) $F_{вц}$ =1,7 $\cdot 10^{-2}$ Н; $F_к$ = 3,8$\cdot 10^{-3}$ Н; б) $F_{вц}$ =3,4 $\cdot 10^{-2}$ Н; $F_к$ = 0)

2.69. Поїзд маси m = 2000 т рухається на північній широті φ = 60°. Знайти:
– модуль і напрям сили бічного тиску поїзда на рейки, якщо він рухається уздовж меридіана зі швидкістю v = 54 км/год;

– у якому напрямі і з якою швидкістю мав був би рухатися поїзд, аби результуюча сил інерції, що діють на потяг в системі відліку «Земля», дорівнювала нулю.

$$\left(F = 3780\,\text{Н},\ \textit{праворуч по ходу};\quad v \approx 420\ \text{км/год},\ \textit{на захід} \right)$$

2.70. Гладкий горизонтальний диск обертають із кутовою швидкістю ω = 5,0 рад/с навколо власної вертикальної осі. В центрі диска помістили невелику шайбу масою m = 60 г і надали їй поштовхом горизонтальну швидкість v_0 = 2,6 м/с. Знайти модуль сили Коріоліса, що діє на шайбу в системі відліку диска через t = 0,5 с після початку її руху.

$$\left(F = 2m\omega v_0\sqrt{1+(\omega t)^2} = 4{,}2\ \text{Н} \right)$$

2.71. Горизонтально розташований гладкий стержень обертають із кутовою швидкістю ω =2,0 рад/с навколо вертикальної осі, що проходить через його кінець. По стержню ковзає муфта маси m = 0,5 кг, швидкість якої при проходженні указаної осі має величину v_0 = 1 м/с. Знайти силу Коріоліса (у системі відліку стержня) що буде діяти на муфту, коли вона опиниться на відстані r = 50 см від осі.

$$\left(F = 2mr\omega^2\sqrt{1+\left(\frac{v_0}{\omega r}\right)^2} = 2{,}8\ \text{Н} \right)$$

2.72. Рушницю навели на вертикальну лінію мішені, що знаходиться точно в північному напрямі, й вистрелили. Нехтуючи опором повітря, знайти, на яку відстань h і в який бік відхилиться куля від указаної лінії при влучанні в мішень. Постріл зроблено в горизонтальному напрямі на широті φ = 60°, швидкість кулі v = 900 м/с, відстань до мішені S = 1,0 км.

$$\left(h \approx \frac{2\pi S^2 \sin\varphi}{vT} = 7\,\text{см},\quad T - \textit{тривалість доби} \right)$$

2.73. На екваторі з висоти h = 500 м на поверхню Землі вільно падає тіло. Нехтуючи опором повітря, знайти, на яку відстань S і в який бік відхилиться тіло від вертикалі при падінні.

$$\left(\textit{на схід},\quad S \approx \frac{4\pi h}{3T}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 24\,\text{см},\quad T - \textit{тривалість доби} \right)$$

2.74. Знайти, який кут α із горизонтом складає поверхня води в річці на широті φ через дію сили Коріоліса, якщо річка тече з півночі на південь зі швидкістю v.

$$\left(\text{tg}\alpha = \frac{2v\omega\sin\varphi}{g},\ \textit{де}\ \ \omega = \frac{2\pi}{T}\ \ (T - \textit{тривалість доби}) \right)$$

2.75. Знайти відносне зменшення ваги тіла на екваторі $\varepsilon = \Delta P / P_0$ (P_0 – вага на полюсі), зумовлене добовим обертанням Землі. Радіус Землі R = 6380 км, маса $M = 6{\cdot}10^{24}$ кг, гравітаційна стала .

$$\left(\varepsilon = \frac{4\pi^2 R^3}{\gamma M T^2} \approx 0{,}34\%, \quad T - \textit{тривалість доби} \right)$$

2.76. Знайти, на скільки відсотків η сила тиску тіла на горизонтальну опору на широті $\varphi = 60°$ менша, ніж на полюсі, через добове обертання Землі. Радіус Землі R = 6380 км, маса $M = 6{\cdot}10^{24}$кг, гравітаційна стала.

$$\left(\varepsilon = \frac{4\pi^2 R^3 \cos^2\varphi}{\gamma M T^2} \approx 0{,}1\%, \quad T - \textit{тривалістьдоби} \right)$$

Імпульс і сила

2.77. Тіло масою m = 2 кг рухається за законом $x(t) = 5–8t+4t^2$ (м). Визначити модулі і напрямки імпульсу тіла та діючої на нього сили на моменти часу 2 с і 4 с.

(16 кг·м/с; 48 кг·м/с; 16 Н)

2.78. Тіло маси m кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Визначити зміну вектора імпульсу тіла $\Delta\vec{p}$ за проміжок часу τ під час польоту.

$$\left(\Delta\vec{p} = m\vec{g}\tau \right)$$

2.79. Тіло, маса якого m, кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Визначити модуль зміни вектора імпульсу та зміну його модуля за час польоту тіла.

($2mv_0 \sin\alpha$; 0)

2.80. Кулька маси 100 г, яка вільно падає на горизонтальну поверхню, безпосередньо перед ударом має швидкість 20 м/с. Знайти модуль зміни імпульсу $|\Delta\vec{p}|$ та зміну модуля імпульсу Δp кульки внаслідок удару, якщо він є:

а) абсолютно пружним (кулька не втрачає швидкості);
б) абсолютно непружним (кулька прилипає до поверхні).

(а) $|\Delta\vec{p}|$ = 4 кг·м/с, $\Delta p = 0$; б) $|\Delta\vec{p}|$ = 2 кг·м/с, Δp = – 2 кг·м/с)

2.81. Кулька для гри в пінг-понг, яка має масу 20 г та швидкість 20 м/с, ударяє перпендикулярно у вертикальну сталеву стінку й відскакує без зміни швидкості. Знайти середню силу, з якою кулька вдаряє в стінку, якщо тривалість удару 0,1 с.

(8 Н)

2.82. Металева кулька масою 10 г вільно падає на горизонтальну плиту з висоти 45 см і пружно (без утрати швидкості) відбивається від неї. Знайти середню силу, з якою кулька діє на плиту під час удару, якщо його тривалість 0,2 с. $g = 10$ м/с^2.

(0,3 Н)

2.83. Кинутий угору м’яч масою 100 г підлітає до стелі зі швидкістю 1 м/с і пружно (без утрати швидкості) відбивається вниз. З якою середньою силою м’яч діяв на стелю під час удару, якщо він тривав 0,1 с? $g = 10$ м/с^2.

(1 Н)

2.84. Знайти середню силу віддачі при стрільбі з автомата, якщо маса кулі 10 г, швидкість вильоту із ствола 400 м/с і щільність вогню 300 пострілів за хвилину.

(20 Н)

2.85. На тіло, що лежить на гладкій горизонтальній поверхні, починає діяти горизонтальна сила $\vec{F} = \vec{F}_0\left(1-(t/\tau)\right)$, де $F_0 = 10$ Н, $\tau = 5$ с$^{-1}$. Знайти імпульс тіла через час 3τ після початку дії сили.

$$\left(\vec{p} = -\vec{F}_0\tau; \quad p = 150 \text{ кг} \cdot \text{м/с}\right)$$

2.86. Канат маси m і довжини l утримують за один кінець так, що інший торкається горизонтальної поверхні. В момент $t = 0$ канат відпускають. Знайти силу тиску каната на поверхню при падінні в залежності від часу $F(t)$ та повний імпульс p, який канат передасть поверхні за час падіння.

$$\left(F(t) = \frac{3mg^2}{2l}t^2; \quad p = \frac{2m}{3}\sqrt{2gl}\right)$$

Динаміка системи точок. Закон збереження імпульсу

2.87. Чотири кульки з масами 1, 2, 3, і 4 г закріплені в указаній послідовності на невагомому стержні на відстані 30 см одна від одної. Визначити положення центра мас системи.

(*Співпадає з центом кульки* 3 г)

2.88. Чотири кулі, маси яких 2 кг, 4 кг, 6 кг і 8 кг, розміщені у вершинах квадрата зі стороною 2 м. Знайти відстань між центром мас системи та центром найлегшої кулі.

(1,72 м)

2.89. Довести, що центр мас однорідної пластини у формі довільного трикутника знаходиться на перетині медіан.

.

2.90. Визначити, на якій відстані від основи знаходиться центр мас однорідного прямого конуса висотою H.

$$\left(\frac{H}{4}\right)$$

2.91. Три рухомі кулі масами 2 кг, 4 кг і 6 кг у певний момент часу знаходяться у вершинах правильного трикутника зі стороною 1 м і рухаються із швидкостями, відповідно, 6 м/с, 3 м/с і 2 м/с, які напрямлені вздовж сторін трикутника в один бік. Знайти швидкість центра мас системи в цей момент

(0)

2.92. Три кулі масами m_1 = 1 кг, m_2 = 3 кг і m_3 = 6 кг у певний момент часу знаходяться у вершинах правильного трикутника і розлітаються від його центра із швидкостями υ_1 = 6 м/с, υ_2 = 3 м/с і υ_3 = 1 м/с. Із якою швидкістю рухається центр мас системи в цей момент?

(0,3 м/с)

2.93. Однорідний диск маси m = 5 кг і радіуса 20 см обертається з кутовою швидкістю 2,5 рад/с навколо перпендикулярної до його площини осі, котра проходить: а) через центр диска; б) через його край. Знайти імпульс диска в обох випадках.

(а) 0; б) 2,5 кг·м/с)

2.94. Через невагомий блок, який прикріплений до стелі, перекинута невагома нерозтяжна нитка з тягарцями маси m_1 та m_2 на кінцях. Знайти прискорення центра мас системи.

$$\left(\vec{a} = \vec{g}\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2\right)$$

2.95. Через невагомий блок прикріплений до стелі перекинута невагома нерозтяжна нитка з двома тягарцями на кінцях. Знайти відношення мас тягарців, якщо центр мас системи рухається з прискоренням $a = g/4$.

(3)

2.96. Система, що складається з двох з’єднаних між собою невагомою пружинкою кульок масами m_1 і m_2, знаходиться в однорідному полі сил тяжіння і в початковий момент часу має імпульс $\vec{P}_0$. Нехтуючи опором повітря, знайти залежності від часу імпульсу цієї системи $\vec{P}(t)$ та радіуса-вектора її центра мас $\vec{r}_c$ відносно його початкового положення.

$$\left(\vec{P} = \vec{P}_0 + (m_1 + m_2)\vec{g}t; \quad \vec{r}_c = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}, \text{ де } \vec{v}_0 = \frac{\vec{P}_0}{m_1 + m_2}\right)$$

2.97. Нерухома граната маси m розірвалася на два осколки, що розлетілися зі швидкостями v та $3v$. Знайти маси осколків і їхню кінетичну енергію K та імпульс $\vec{P}$.

$$(m_1 = 3m/4, \quad m_2 = m/4; \quad K = 3mv^2/2; \quad \vec{P} = 0)$$

2.98. У момент, коли швидкість гранати дорівнювала 10 м/с і була напрямлена під кутом 60° до горизонту, вона розірвалася на два осколки однакової маси, один із яких відлетів вертикально вгору, а другий – під кутом 45° до горизонту. Знайти швидкості осколків одразу після розриву.

(v_1 = 27,3 м/с або 7,3 м/с; v_2 = 14,1 м/с)

2.99. Частинка маси m_1, налітає із швидкістю v на нерухоме вільне тіло маси m_2 і відскакує під прямим кутом із швидкістю u. З якою швидкістю V почне рухатися друге тіло?

$$\left(V = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{v^2 + u^2}\right)$$

2.100. Кулька, що вільно рухається по гладкій горизонтальній поверхні, налітає ні іншу, нерухому кульку й відскакує під прямим кутом із удвічі меншою швидкістю. Під яким кутом до початкового напрямку руху першої кульки відлетить друга?

(26,6°)

2.101. Два човни рухаються по інерції паралельними курсами назустріч один одному. Коли човни порівнялися, з першого в другий переклали вантаж масою 25 кг. Відтак другий човен зупинився, а перший продовжив рух із швидкістю 8 м/с. З якими швидкостями рухалися човни до зустрічі, якщо маса другого човна 100 кг?

(8 м/с; 2 м/с)

2.102. Рибалка маси m знаходиться на кормі не заякореного човна масою M і довжиною L, який стоїть у ставку. На яку відстань S переміститься човен, якщо рибалка перейде на ніс?

$$\left(S = \frac{m}{M + m}L\right)$$

2.103. В човні, маса якого M, стоїть людина маси m. Човен пливе із швидкістю v. Людина стрибає з човна в горизонтальному напрямку зі швидкістю u відносно човна. Знайти швидкість човна після стрибка, якщо людина стрибає:

а) по ходу руху човна;

б) у протилежному напрямку.

$$\left(a)\,\frac{(m+M)v-mu}{m+M};\quad б)\,\frac{(m+M)v-mu}{m-M} \right)$$

2.104. Людина масою $m=60$ кг стоїть на передньому краю візка маси $M = 120$ кг, який горизонтально котиться по прямій із швидкістю $v_0 = 1$ м/с. Людина стрибає вперед під кутом $\alpha = 60°$ до площини візка із швидкістю $u = 5$ м/с відносно візка.

– Чи зберігається імпульс системи під час стрибка? Чому?

– З якою швидкістю v і в якому напрямку стане рухатися візок після стрибка?

$$\left(Ні;\quad v = v_0 - \frac{m}{M+m}u\cos\alpha = -0{,}44 \text{ м/с} \right)$$

2.105. Із гармати роблять постріл під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту. При закріпленій гарматі швидкість вильоту снаряда $v_0 = 180$ м/с. Знайти, з якою швидкістю u почне відкочуватись після пострілу не закріплена гармата, якщо її маса в $\eta = 50$ разів більша за масу снаряда. Тертям знехтувати.

$$\left(u = \frac{v_0\cos\alpha}{\eta+1} \approx \frac{v_0\cos\alpha}{\eta} = 1{,}8 \text{ м/с} \right)$$

2.106. Куля, що летить із швидкістю v вниз під кутом α до вертикалі, влучає та майже миттєво застряє в бруску, котрий лежить на горизонтальній поверхні. Маса бруска в η разів більша за масу кулі, коефіцієнт тертя між бруском і поверхнею k. Знайти:

– через який час t брусок зупиниться, якщо внаслідок удару він почне ковзати по поверхні;

– при яких значеннях кута α брусок не почне ковзати за будь-якої швидкості кулі.

$$\left(t = \frac{v\sin\alpha}{(1+\eta)kg};\quad \alpha \le \operatorname{arctg} k \right)$$

Рух у гравітаційному полі

2.107. Визначити масу Землі за її радіусом R = 6380 км та прискоренням вільного падіння на полюсі g = 9,83 м/с^2.

(6·10^{24} кг)

2.108. Визначити масу Землі за періодом обертання навколо неї Місяця (27,32 діб) та радіусом його орбіти (384,4 тис. км).

(5,98·10^{24} кг)

2.109. Визначити масу Сонця, знаючи середню відстань від Землі до Сонця (149,50 млн. км) і період обертання Землі навколо нього – 365,26 діб.

(1,99·10^{30} кг)

2.110. Знайти першу космічну швидкість v_1 для Землі, тобто – мінімальну швидкість, яку треба надати тілу, щоби вивести його на навколоземну орбіту.

$$\left(v_1 = \sqrt{gR} \approx 7{,}9 \text{ км/с}\right)$$

2.111. Знайти другу космічну швидкість v_2 для Землі, тобто – мінімальну швидкість, якої треба надати тілу, аби воно подолало земне тяжіння й почало рухатися по навколосонячній орбіті.

$$\left(v_2 = \sqrt{2gR} \approx 11{,}2 \text{ км/с}\right)$$

2.112. Визначити приблизну величину третьої космічної швидкості v_3 – найменшої швидкості тіла відносно Землі, необхідної для того, щоби воно змогло покинути Сонячну систему. Обертанням Землі навколо осі знехтувати. Маса і радіус Землі $M_З$ = 6·10^{24} кг, $R_З$ = 6380 км; маса Сонця M_C = 2·10^{30} кг; радіус земної орбіти R_0 = 1,5 млн. км; гравітаційна стала .

$$\left(v_3 \approx \sqrt{2v_1^2 + (\sqrt{2}-1)^2 V_1^2} \approx 17 \text{км/с}, \quad v_1^2 = \frac{\gamma M_з}{R_з}, \quad V_1^2 = \frac{\gamma M_c}{R_0}\right)$$

2.113. Порівняти сили, з якими Сонце та Земля діють на Місяць. Як пояснити той факт, що Місяць є супутником Землі?

$$\left(\frac{F_c}{F_з} = 2{,}1\right)$$

2.114. Знайти відстань від Венери до Сонця в астрономічних одиницях, якщо тривалість року на Венері 227,70 діб, а на Землі 365,26 діб.

(1,08·10^8 км = 0,63 астр. од.)

2.115. На якій висоті h на планеті з радіусом R прискорення вільного падіння є вдвічі меншим, аніж біля поверхні?

$$\left(h=\left(\sqrt{2}-1\right)R\right)$$

2.116. Уважаючи планету однорідною кулею, знайти, при якій тривалості доби тіла на її екваторі перебували б у невагомості. Розрахунок зробити для Землі, прийнявши її масу і радіус $M = 6\cdot10^{24}$ кг і $R = 6380$ км. Гравітаційна стала $\gamma = 6{,}67\cdot10^{-11}\,\text{м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2)$.

$$\left(T=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}}=1\text{ год }25\text{ хв}\right)$$

2.117. Комета, захоплена Сонцем на орбіту, має лінійну швидкість в афелії (точка максимального віддалення від Сонця) $V_1 = 0{,}8$ км/с. Її відстань від Сонця при цьому дорівнює $r_1 = 6\cdot10^{12}$ м. У перигелії (точка максимального наближення до Сонця) $V_2 = 50$ км/с. Знайти відстань r_2 комети від Сонця в перигелії. Маса Сонця $M = 2\cdot10^{30}$ кг; гравітаційна стала $\gamma = 6{,}67\cdot10^{-11}\,\text{м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2)$.

$$\left(r_2=\left(\frac{V_2^2-V_1^2}{2\gamma M}+\frac{1}{r_1}\right)^{-1}\approx 100\text{ млн. км}\right)$$

2.118. Тіло починає вільно падати в наскрізну шахту, пробурену по діаметру одного із супутників Юпітера. Якої максимальної швидкості набуде тіло, якщо радіус супутника R і прискорення вільного падіння на його поверхні g? Супутник вважати однорідною кулею.

$$\left(v_{\max}=\sqrt{gR}\right)$$

2.119. Деяка планета маси M рухається навколо Сонця по еліпсу так, що мінімальна відстань між нею і Сонцем дорівнює r_1, а максимальна – r_2. Знайти період обертання планети навколо Сонця. Маса Сонця $M = 2\cdot10^{30}$ кг; гравітаційна стала .

$$\left(T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}},\quad \text{де}\quad a=\frac{(r_1+r_2)}{2}\right)$$

2.120. Матеріальна точка маси m розташована на осі тонкого кільця радіуса R і маси M. Визначити:

1) силу притягання $F(z)$ точки до кільця в залежності від відстані z до його центра;
2) наближені вирази $F_1(z)$ і $F_2(z)$, відповідно, при малих та при великих відстанях z і показати якісно графік $F(z)$;

3) відстань z_m, на якій сила F є максимальною.

$$\left(1)\quad F = \frac{\gamma m M z}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}.\quad 2)\quad F_1 \approx \frac{\gamma m M z}{R^3};\quad F_2 \approx \frac{\gamma m M}{z^2}.\quad 3)\quad z_m = \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$$

2.121. Усередині однорідної кулі з густиною речовини ρ є сферична порожнина, положення центра котрої відносно центра кулі задається радіусом-вектором $\vec{a}$. Знайти напруженість поля тяжіння $\vec{G}$ в порожнині.

$$\left(\vec{G} = -\frac{4\pi\rho\gamma}{3}\vec{a}\right)$$

2.122. На полюсі планети з радіусом R вертикально запускають ракету зі швидкістю $v = \eta V_1$, де V_1 – перша космічна швидкість. Визначити:
- максимальну висоту h підйому ракети та її значення h_1 при $\eta = 1$;
- орбітальну швидкість v_0, яку треба надати ракеті у найвищій точці підйому, аби вона стала штучним супутником планети;
- відношення другої та першої космічних швидкостей $\varkappa = \left(V_2/V_1\right)$.

$$\left(h = \frac{R}{\left(2/\eta^2\right) - 1},\ h_1 = R;\quad v_0 = \frac{V_1}{\sqrt{2}};\quad \varkappa = \sqrt{2}\right)$$

2.122. Знайти період обертання супутника, який рухається навколо планети поблизу її поверхні, якщо середня густина планети ρ = 3,3 г/см^3. Гравітаційна стала $\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2)$.

$$\left(T = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho\gamma}} = 1{,}8\ \text{год}\right)\left(T = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho\gamma}} = 1{,}8\ \text{год}\right)$$

2.123. Супутник вивели на колову орбіту навколо планети радіусом R. Знайти висоту h орбіти супутника, якщо його швидкість дорівнює V.

$$\left(h = R\left(\frac{V^2}{gR} - 1\right)\right)$$

2.124. Обчислити радіус R колової орбіти стаціонарного супутника Землі, який залишається нерухомим відносно її поверхні. Яка його швидкість в інерціальній системі відліку, пов'язаній з центром Землі? Маса Землі $M_З$ = 6·10^{24} кг; тривалість доби T = 24 год. Гравітаційна стала $\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2)$.

$$\left(R = \sqrt[3]{\gamma M_З\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = 4{,}2\cdot 10^4\,\text{км};\quad v = 3{,}1\,\text{км/с}\right)$$

2.125. Знайти початкову швидкість, яку треба надати ракеті, щоб вона змогла вийти за межі сонячної системи. Ракета стартує так, що напрям її швидкості утворює кут $\varphi = 45°$ з напрямом орбітального руху Землі навколо Сонця. Маса і радіус Землі $M_З = 6 \cdot 10^{24}$ кг, $R_З = 6380$ км; маса Сонця $M_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг; радіус земної орбіти $R_0 = 1{,}5$ млн. км. Гравітаційна стала $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$.

$$\left(v = \sqrt{\frac{\gamma M_\text{C}}{R_0}} \left(\sqrt{2\left(1 + \frac{M_З R_0}{M_\text{C} R_З}\right)} - \sin^2\varphi - \cos\varphi \approx 17 \text{км/с} \right) \right)$$

3. Робота та енергія

3.1. Робота та потужність сили:

$$A_{12}=\int_1^2 \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r};\quad \langle P\rangle=\frac{A}{t};\quad P=\frac{\delta A}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\vec{v}.$$

3.2. Зміна повної механічної енергії системи:

$$\Delta E=\Delta K+\Delta U=A_{дис}+A_{зов}$$

3.3. Зв’язок між консервативною силою та потенціальною енергією:

$$\vec{F}=-\mathrm{grad}U;\quad \Delta U=U_2-U_1=-\int_1^2 \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}=-\int_1^2 F_l\,\mathrm{d}l$$

Робота і потужність сили

3.1. Тіло рухається по прямій за законом $x = 10 + 2t + t^2$ під дією сили 10 Н, що напрямлена під кутом 60° до напрямку руху. Обчислити роботу і середню потужність сили за перші 10 с руху, а також миттєву потужність укінці цього проміжку часу.

(600 Дж, 60 Вт; 110 Вт)

3.2. На частинку, що по якійсь траєкторії здійснила переміщення з точки $\vec{r}_1=\vec{i}+2\vec{j}$ в точку $\vec{r}_2=2\vec{i}-3\vec{j}$, серед інших, діяла сила $\vec{F}=3\vec{i}+4\vec{j}$ (Н). Знайти роботу цієї сили на вказаному переміщенні. Показати на рисунку радіуси-вектори точок і вектор переміщення частинки, а також вектор сили $\vec{F}$.

($A=\vec{F}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=-17$ Дж)

3.3. На точку, що рухається по ділянці траєкторії у формі півкола радіуса 5 м із сталою швидкістю 1 м/с, серед інших діє постійна сила 2 Н, спрямована вздовж діаметра півкола. Знайти:

– роботу цієї сили на всьому шляху;
– миттєву потужність сили в початковій, середній та кінцевій точках траєкторії;
– середню потужність сили на всьому шляху.

(20 Дж; 0; 2 Вт; 0; 1,27 Вт)

3.4. На кінці вигнутої в горизонтальній площині спиці у формі третини кола радіуса 50 см, розташовано нанизану на неї кульку масою 50 г. На кульку починає діяти горизонтальна сила 0,8 Н незмінного напрямку, що збігається з дотичною до спиці у початковій точці. Нехтуючи тертям, знайти:

– роботу сили на всьому шляху та швидкість кульки на кінці спиці;
– миттєву потужність сили на початку, посередні та на кінці спиці;
– середню потужність сили на всьому шляху.

(0,4 Дж, 4 м/с; 0, 2,98 Вт, –1,6 Вт; 0,8 Вт)

3.5. Тіло маси m = 1 кг кинуто під кутом α = 30° до горизонту зі швидкістю v_0 = 20 м/с. Визначити та показати на графіку з дотриманням масштабу залежність $p(t)$ потужності сили тяжіння, що діяла на тіло, від часу. g = 10 м/с^2.

3.6. Тіло на мотузці довжиною 1 м рівномірно обертається по колу радіуса 20 см при силі натягу мотузки 10 Н. Знайти потужність сили натягу і її роботу за один оберт.

3.7. Людина маси 60 кг долає один марш сходів висотою 3,5 м за 2,8 с. Визначити середню потужність у кінських силах (1 к.с. = 735 Вт), яку розвиває людина при цьому.

(1 к.с.)

Задачі 3.8 – 3.11 розв'язати аналітично та за допомогою графіка сили

3.8. На тіло в напрямку руху діє сила $F = kx$, де x – відстань, пройдена уздовж траєкторії, k = 0,1 Н/м. Знайти роботу сили на шляху 10 м.

(5 Дж)

3.9. Хлопець маси 45 кг на санках масою 5 кг і довжиною 1 м виїжджає на шорстку горизонтальну ділянку з коефіцієнтом тертя 0,9 і зупиняється, проїхавши відстань 5 м. Яку роботу виконала сила тертя? $g = 10$ м/с^2.

(–2475 Дж)

3.10. На горизонтальному столі, що складається з двох половин із різного матеріалу, лежить дошка довжини l і маси m, яка одним кінцем торкається лінії розмежування тих половин. Яку роботу треба виконати, аби перетягти дошку за кінець із однієї половини стола на іншу, якщо коефіцієнти тертя на половинах стола складають k_1 і k_2, відповідно.

$$\left(A = \frac{1}{2} mgl\left(k_1 + k_2\right) \right)$$

3.11. Тіло рухається під дією сили, проекція F_S котрої на переміщення в залежності від пройденого шляху S на графіку має вигляд дуги кола радіуса R, рис. 3.1.

– записати рівняння цього кола;
– визначити роботу заданої сили на шляху $S = R$, якщо її початкова величина дорівнює F_0.

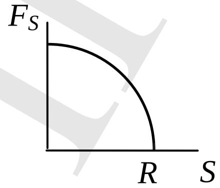


Рис. 3.1.

$$A = \pi F_0 R/4$$

3.12. На тіло маси m = 1 кг, яке знаходиться на гладкій горизонтальній поверхні, починає діяти горизонтальна сила $F = kt$ незмінного напрямку, де t – час, k = 0,1 Н/с. Знайти роботу сили за перші $\tau = 10$ с дії.

$$\left(A = \frac{k^2\tau^4}{8m} = 12{,}5 \text{ Дж} \right)$$

3.13. Яку роботу треба виконати, аби невеликий брусок маси m повільно витягти на вершину гірки не плоского профілю, прикладаючи силу весь час у напрямку руху? Довжина основи гірки l, висота h, коефіцієнт тертя між бруском і гіркою на всьому шляху k.

$$\left(A = mg(h + kl) \right)$$

Робота і кінетична енергія

3.14. На платформі, що проїжджає зі швидкістю v повз спостерігача на пероні, роблять "постріл" з пружинного пістолета проти напрямку руху платформи так, що швидкість вильоту кульки масою m дорівнює швидкості платформи. Яку швидкість для спостерігача має кулька після пострілу та "куди дівається" її кінетична енергія? Тертя відсутнє.

3.15. Брусок m = 500 г починають тягти за нитку по гладкій горизонтальній поверхні, прикладаючи сталу за величиною й напрямом силу F = 3,6 Н. Який кут α із горизонтом складає нитка, якщо на шляху l = 5 м брусок набрав швидкість v = 6 м/с?

$$\left(\cos\alpha = \frac{mv^2}{2Fl} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^\circ \right)$$

3.16. Авто при сталій ефективній силі тяги двигуна на заданій горизонтальній ділянці шляху розганяється з місця до швидкості 100 км/год. До якої швидкості розженеться авто на цій ділянці при вдвічі більшій силі тяги?

(141,4 км/год)

3.17. При розгоні з місця до швидкості v на горизонтальній ділянці шляху двигун автомобіля виконує роботу A. Яку додаткову роботу A' має виконати двигун, аби подвоїти швидкість авто без зміни сили тяги?

$$\left(A' = 3A\right)$$

3.18. Авто, що рухається зі швидкістю v, після вимикання двигуна проходить до зупинки відстань S. Яку відстань S_1 пройде авто до зупинки при початковій швидкості $v_1 = 2v$? Силу опору в обох випадках вважати однаковою.

$$(S_1 = 4S)$$

3.19. В одного автомобіля маса вдвічі більша, а кінетична енергія вдвічі менша, ніж у другого. А коли кожен з автомобілів збільшив швидкість на 30 км/год, їхні кінетичні енергії зрівнялися. Знайти початкові швидкості автомобілів.

(21,2 км/год; 42,4 км/год)

3.20. Куля налітає перпендикулярно на стос покладених одна на одну однакових дощок. У якій за ліком дошці N застрягне куля, якщо в першій вона втрачає $\eta = 10\%$ швидкості. Силу тертя в дошках вважати незалежною від швидкості кулі.

$$\left(n = \frac{1}{1-(1-\eta)^2} = 5{,}26 \quad \Rightarrow \quad N = 6\right)$$

3.21. На невеличка муфточку m = 100 г, нанизану на горизонтальне гладке дротяне кільце радіуса R = 50 см, починає діяти в площині кільця стала за величиною й напрямком сила F = 22,5 Н. Якої максимальної швидкості набуде муфточка, якщо в початковому положенні сила напрямлена по дотичній до кільця?

$$\left(v = \sqrt{\frac{2FR}{m}} = 15\text{ м/с}\right)$$

3.22. Частинка рухається по колу радіуса R так, що її кінетична енергія залежить від пройденого шляху за законом $K = \alpha S^2$, де α – задана стала. Визначити залежність від шляху сили, що діє на частинку $F(S)$.

$$\left(F(S) = 2\alpha S\sqrt{1+\left(\frac{S}{R}\right)^2}\right)$$

Робота і потенціальна енергія

3.23. Довести (вивести формулу), що в полі сил тяжіння потенціальна енергія тіла довільної форми і розмірів визначається формулою $U = mgh_c$, де m – маса тіла і h_c – висота його центра мас над нульовим рівнем.

3.24. Канат довжини l і маси m лежить на підлозі. Яку мінімальну роботу треба виконати, аби перевести канат у вертикальне положення, підіймаючи його: а) за кінець; б) за середину.

$$\left(a)\ \frac{1}{2}mgl; \quad б)\ \frac{1}{4}mgl \right)$$

3.25. Яку роботу треба виконати, аби поставити вертикально стовп, який лежить на землі. Маса стовпа m = 200 кг, висота h = 5 м. Прийняти g = 10 м/с^2.

(A = 5 кДж)

3.26. Довгу еластичну трубку довжиною l із закріпленим кінцем, зігнуту, як на рис. 3.2, наполовину заповнили ідеальною рідиною маси m і утримують за інший кінець. Нехтуючи масою трубки та радіусом закруглення, визначити роботу необхідну, аби вилити з трубки всю рідину через закріплений кінець.

$$\left(A = \frac{3}{8}mgl \right)$$

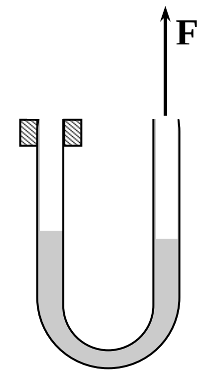


Рис. 3.2

3.27. Горизонтальна посудина у формі прямокутного паралелепіпеда заповнена до рівня H водою маси m (рис. 3.3). Посудина розділена рухомою тонкою перегородкою розташованою посередині посудини. Яку роботу треба виконати, не враховуючи тертя, аби перегородку повільно пересунути на чверть відстані між стінками?

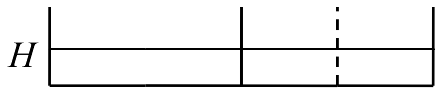


Рис. 3.3

$$\left(A = \frac{1}{6}mgH \right)$$

3.28. Розгорнуте горизонтальне жалюзі масою 1 кг і довжиною 2 м збирають у тонку смужку над вікном. Яку роботу при цьому виконують. Тертям знехтувати, g = 10 м/с^2.

(10 Дж)

3.29. Знайти роботу необхідну для стискання пружини на 10 см, якщо для її стискання на 1 см потрібна сила 100 Н.

(50 Дж)

3.30. Для розтягу гумового шнура на 1 см потрібна робота 5 Дж. Яку роботу треба виконати, щоби розтягти цей шнур ще на 1 см?

(15 Дж)

3.31. Брусок маси m = 1 кг, який з'єднаний з гумовою ниткою жорсткості k = 20 Н/м, лежить на шорсткій горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя

$\mu = 0{,}2$. Яку роботу треба виконати, аби зрушити брусок, горизонтально тягнучи за нитку?

$$\left(A = \frac{(\mu mg)^2}{2k} = 0{,}1\ \text{Дж} \right)$$

3.32. Чому дорівнює потенціальна енергія невагомої пружини, до якої підвішене тіло маси 10 кг, якщо розтяг пружини становить 5 см? $g = 10$ м/с^2.

(2,5 Дж)

3.33. До центра диска маси 1 кг, який лежить на горизонтальній поверхні прикріплена невагома пружина жорсткості 0,1 Н/см. Яку роботу треба виконати, аби за вільний кінець пружини підняти диск на висоту 50 см над поверхнею? $g = 10$ м/с^2.

(10 Дж)

Повна механічна енергія

3.34. Тіло кинуто вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0 = 20$ м/с. Знайти максимальну висоту підйому тіла та його швидкість на середині підйому. Опором повітря знехтувати. $g = 10$ м/с^2.

$$\left(20\ \text{м};\ \approx 14\ \text{м/с}\right)$$

3.35. З якою початковою швидкістю було кинуто вертикально вгору тіло, якщо, на висоті підйому $h = 40$ м його швидкість дорівнювала половині початкової. Опором повітря знехтувати.

$$\left(v = \sqrt{\frac{8gh}{3}} \approx 32\ \text{м/с} \right)$$

3.36. Підвішений на невагомій пружині жорсткості k тягарець маси m утримують в положенні не деформованої пружини. Потім тягарець повільно опускають аж поки він повисне. Тертя відсутнє. Знайти зміну потенціальної енергії пружини $\Delta U_{\text{пр}}$, тягарця $\Delta U_{\text{т}}$ та системи в цілому ΔU. Пояснити причину зміни механічної енергії системи пружина-тягарець?

3.37. Тіло маси $m = 5$ кг, що вільно падає з висоти $h = 20$ м, досягає землі при швидкості 16 м/с. Яка середня сила опору повітря діяла на тіло?

(18 Н)

3.38. М'яч, який вільно падає на горизонтальну поверхню з висоти H, після абсолютно пружного (без утрати швидкості) відскоку підіймається на висоту $h = \eta H$ ($\eta < 1$). Знайти, яку частку ε від ваги м'яча складає сила опору повітря, вважаючи її сталою.

$$\left(\varepsilon = \frac{(1-\eta)}{(1+\eta)}\right)$$

3.39. М'яч маси 0,5 кг кинуто вниз з висоти 2,25 м із швидкістю 3 м/с. Знайти середню силу опору повітря, якщо після пружного (без утрати швидкості) відскоку від землі м'яч піднявся до точки кидання.

(0,5 Н)

3.40. Частинка маси m = 20 г перебуває в спокої в точці О(0;0) потенціального поля $U = \alpha(x^2 + xy + y^2)$, де α = 0,1 Дж/м^2. Потім під дією деякої сторонньої сили частинка перемістилась у точку Р(5;10) (м). Знайти швидкість частинки в точці Р, якщо стороння сила виконала роботу A = 26,5 Дж.

(30 м/с)

3.41. Вагон маси m = 20 т, який рухається на сортувальній гірці зі швидкістю 1 м/с, стрічає упор. Знайти максимальне стиснення двох буферних пружин вагона, кожна з яких має жорсткість k = 10 кН/см.

(10 см)

3.42. Шайба зісковзує без тертя з вершини похилої площини довжиною l = 3,6 м і кутом нахилу до горизонту 30°. Знайти швидкість шайби біля основи площини, g = 10 м/с^2.

$$\left(v = \sqrt{gl} = 6 \text{ м/с}\right)$$

3.43. Перекинутий через горизонтальний штир канат довжини l, який висів нерухомо, внаслідок незначного поштовху починає зісковзувати. Нехтуючи тертям, визначити швидкість каната в момент сходу зі штиря.

$$\left(v = \sqrt{\frac{gl}{2}}\right)$$

3.44. Невелика шайба починає зісковзувати без тертя з вершини гірки висотою H, яка має горизонтальний трамплін (рис. 3.4). Знайти висоту трампліна h, при якій шайба пролетить максимальну відстань S_m, і величину S_m.

$$\left(h = \frac{1}{2}H; \quad S_m = H\right)$$

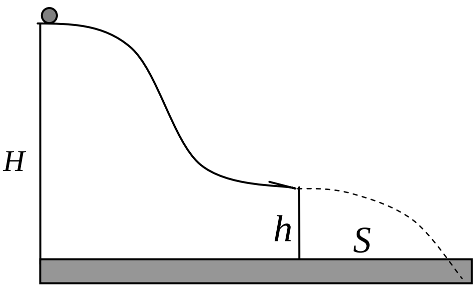


Рис. 3.4

3.45. Розв'язати задачу **2.60**, використовуючи зв'язок між енергією та роботою.

3.46. Розпрямлену мотузку довжини l = 1,35 м, яка лежить скраю на шорсткому столі, починають повільно стягати за кінець. З якою швидкістю мотузка зійде зі стола, якщо вона починає зісковзувати самостійно, коли звисає η = 1/3 її довжини?

$$\left(v = \sqrt{(1-\eta)gl} = 3\,\text{м/с}\right)$$

3.47. На дошці, поставленій під кутом 30° до горизонту, лежить вантаж масою m = 30 кг. Аби протягти вантаж по дошці на відстань l = 3 м униз, виконали роботу A = 100 Дж. Яку роботу доведеться виконати, щоби повернути вантаж у вихідне положення? g = 10 м/с^2.

(1000 Дж)

3.48. Шайба зісковзує без початкової швидкості з вершини похилої площини на горизонтальну поверхню, і проходить по ній до зупинки відстань, рівну довжині площини. Знайти кут нахилу площини до горизонту, якщо коефіцієнт тертя на всьому шляху дорівнює k.

(α = 2arctg k)

3.49. Брусок маси m зісковзує з вершини гірки довільного (не плоского) профілю висотою h і, пройшовши певний шлях по горизонталі, зупиняється. Яку роботу треба виконати, щоби повільно витягти брусок на вершину по шляху спуску, прикладаючи силу вздовж напрямку руху?

(A = 2mgh)

3.50. Розв’язати задачу **2.61**, використовуючи зв’язок між енергією та роботою.

3.51. При падінні торби з піском маси m = 10 кг на горизонтальну чашку пружинних терезів із висоти h = 40 см максимальне стиснення пружини X_m = 10 см. Яким було би стиснення пружини X_0, коли б торбу поклали на чашку терезів обережно? Масою чашки з пружиною та тертям знехтувати.

$$\left(X_0 = \frac{X_\text{m}^2}{2(h + X_\text{m})} = 1\,\text{см}\right)$$

3.52. Дві однакові пластини маси m кожна скріплені між собою пружиною жорсткості k і поставлені на горизонтальну опору так, що одна пластина знаходиться над іншою. Стискаючи пружину, верхню пластину переміщують униз на відстань X і відпускають. Нехтуючи тертям і масою пружини, знайти, при якій величині X нижня пластина відірветься від опори.

$$\left(X > \frac{2mg}{k}\right)$$

3.53. Невелика шайба розміщена на кінці дошки довжиною l = 7 м, яка лежить на гладкій горизонтальній поверхні. Коефіцієнт тертя між шайбою та дошкою k = 0,1. Унаслідок горизонтального поштовху шайба починає ковзати по дошці й зупиняється на її протилежному кінці.

Знайти швидкість дошки v на момент припинення ковзання шайби, якщо маса дошки в $\eta = 7$ разів більша за масу шайби. Прийняти $g = 10$ м/с^2.

$$\left(v = \sqrt{\frac{2kgl}{\eta(\eta+1)}} = 0{,}5\ \text{м/с} \right)$$

Взаємодія двох тіл. Зіткнення

3.54. Дві частинки масами m_1 і m_2, що рухаються зі швидкостями $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$, непружно стикаються. Знайти зміну кінетичної енергії системи ΔK. Проаналізувати залежність величини ΔK від напрямків руху частинок.

$$\left(\Delta K = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \right)$$

3.55. Дві кулі масами m_1 = 4 кг і m_2 = 10 кг, які рухаються зі швидкостями v_1 = 12 м/с і v_2 = 4 м/с, непружно стикаються. Знайти кількість тепла Q, що виділяється при зіткненні, якщо:

– кулі рухаються назустріч одна одній;
– перша куля наздоганяє другу.

(365,7 Дж; 91,7 Дж)

3.56. Тіло маси m_1 = 4 кг абсолютно непружно стикається з нерухомим тілом маси m_2 = 2 кг. Кінетична енергія системи після зіткнення K = 6 Дж. Знайти кінетичну енергію першого тіла до зіткнення K_1.

$$\left(K_1 = K \frac{m_1 + m_2}{m_1} = 9\ \text{Дж} \right)$$

3.57. Нерухома граната масою 900 г розривається на два осколки, які розлітаються в горизонтальній площині із сумарною кінетичною енергією 9 кДж. Чому дорівнюють швидкості осколків, якщо їхні маси відрізняються в 2 рази

(100 м/с і 200 м/с)

3.58. Два тіла, що рухаються назустріч одне одному зі швидкостями v_1 = 2 м/с і v_2 = 4 м/с, непружно стикаються. Знайти відношення кінетичних енергій тіл до зіткнення K_1/K_2, якщо після нього тіла рухаються із швидкістю v = 1 м/с у напрямку початкового руху першого тіла.

$$\left(\frac{K_1}{K_2} = \frac{5}{4} \right)$$

3.59. Дві кулі масами m_1 і m_2 рухаються назустріч одна одній і непружно стикаються. При якому відношенні мас куль перша після зіткнення змінить напрям руху, якщо до зіткнення її кінетична енергія була в η разів більшою, ніж у другої?

$$\left(\frac{m_2}{m_1} > \eta \right)$$

3.60. Дві маленькі кульки масами m_1 і $m_2 = 1{,}5\ m_1$ підвішені на нитках довжиною $l = 1$ м так, що дотикаються. Першу кульку відхилили на кут $\alpha = 60°$ і відпустили.

Визначити, на яку висоту h піднімуться обидві кульки після непружного удару.

$$\left(h = \frac{l(1-\cos\alpha)}{(1+m_2/m_1)^2} = 8\ \text{см} \right)$$

3.61. Довести, що відносна швидкість двох частинок після абсолютно пружного зіткнення є завжди рівною за модулем і протилежною за напрямком їхній відносній швидкості до зіткнення.

3.62. Більярдна куля, що рухається зі швидкістю v, влучає в нерухому кулю. Знайти швидкості куль після зіткнення? Удар пружний, лобовий.

$$(v_1 = 0, \quad v_2 = v)$$

3.63. Частинка маси m_1 стикається з нерухомою частинкою. Після пружного лобового удару частинки розлітаються в протилежних напрямах з однаковими швидкостями. Знайти масу другої частинки m_2.

$$(m_2 = 3m_1)$$

3.64. Куля маси m_1 відбуває пружне лобове зіткнення з нерухомою кулею маси m_2. При якому співвідношенні мас перша куля після удару полетить у зворотний бік?

$$(m_2 > m_1)$$

3.65. Куля масою m_1 рухається із швидкістю $v_1 = 3$ м/с і наздоганяє іншу кулю масою m_2, що рухається уздовж тієї ж прямої із швидкістю $v_2 = 1$ м/с. Унаслідок пружного лобового зіткнення між кулями перша з них зупиняється. Знайти відношення мас куль m_1/m_2.

$$\left(\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_1 - 2v_2}{v_1} = \frac{1}{3} \right)$$

3.66. Тіло масою $m_1 = 2$ кг відбуває пружний лобовий удар із нерухомим тілом масою $m_2 = 6$ кг. Знайти, яку частку K_2/K_0 кінетичної енергії перше тіло передає при ударі другому.

$$\left(\frac{K_2}{K_0} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} = \frac{3}{4} \right)$$

3.67. Тіло масою m_1 стикається з нерухомим тілом масою m_2. Удар пружний лобовий. Знайти відношення мас тіл m_1/m_2, якщо швидкість першого тіла зменшилася в $\eta = 3$ рази: а) без зміни напрямку руху і б) із зміною напрямку руху.

$$\left(a)\ \frac{m_1}{m_2} = \frac{\eta+1}{\eta-1} = 2; \quad б)\ \frac{m_1}{m_2} = \frac{\eta-1}{\eta+1} = \frac{1}{2} \right)$$

3.68. Тіло масою $m_1 = 5$ кг стикається з нерухомим тілом масою $m_2 = 2{,}5$ кг. Удар пружний лобовий. Знайти кінетичну енергію першого тіла до удару K_0 і після удару K_1, якщо кінетична енергія другого тіла після удару $K_2 = 5$ Дж.

($K_0 = 5{,}62$ Дж, $K_1 = 0{,}62$ Дж)

3.69. Між двома кулями масами $m_1 = 1$ кг і $m_2 = 2$ кг, які лежать на гладкій горизонтальній поверхні, вставили зв’язану ниткою стиснену невагому пружину, що має потенціальну енергію $U = 3$ Дж. З якими швидкостями розлетяться кулі, якщо нитку перепалити?

$$\left(v_1 = \sqrt{\frac{2m_2U}{m_1(m_1+m_2)}} = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad v_2 = \sqrt{\frac{2m_1U}{m_2(m_1+m_2)}} = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$$

3.70. Граната масою 900 г, яка лежить на гладкій горизонтальній поверхні, розривається на два осколки з масами, що відрізняються в 2 рази. Чому дорівнюють швидкості та загальний імпульс осколків, якщо їхня сумарна кінетична енергія дорівнює 9 кДж?

(100 м/с; 200 м/с; 0)

3.71. Дві частинки з однаковими масами пружно стикаються. Модулі швидкостей частинок до удару v_1 і v_2, кут між їх напрямками α. Після удару модулі швидкостей часток v_1' і v_2'. Знайти кут β, під яким розлетяться частинки після удару.

$$\left(\beta = \arccos\left(\frac{v_1 v_2}{v_1' v_2'} \cos\alpha \right) \right)$$

3.72. Рухома куля стикається з такою самою нерухомою. Під яким кутом α розлетяться кулі, якщо зіткнення є пружним і не центральним?

$$\left(\alpha = \frac{\pi}{2} \right)$$

3.73. Частинка маси m_1 зіткнулася пружно з нерухомою частинкою маси m_2 і відскочила під кутом $\alpha = 90°$ до початкового напряму руху. Знайти, яку частку кінетичної енергії втратила перша куля при ударі.

$$\left(\frac{K_0 - K_1}{K_0} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right)$$

3.74. Після пружного зіткнення частинки 1 із нерухомою частинкою 2 вони розлітаються під кутом $\alpha = 60°$ симетрично до початкового напрямку руху першої частинки. Знайти відношення мас частинок.

$$\left(\frac{m_1}{m_2} = 1 + 2\cos\alpha = 2\right)$$

3.75. Куля, що рухається із швидкістю $v_0 = 2$ м/с, пружно стикається з нерухомою кулею такої ж маси й відлітає під кутом $\alpha = 30°$ до початкового напрямку руху. Знайти модулі швидкостей куль після удару v_1 і v_2 і кут β між векторами швидкостей $\vec{v}_0$ и $\vec{v}_2$.

$$\left(v_1 \approx 1{,}73 \text{ м/с},\ v_2 = 1 \text{ м/с},\ \beta = 60°\right)$$

3.76. Між рухомою кулею маси $m_1 = 2$ кг із кінетичною енергією $K_1 = 100$ Дж і нерухомою кулею маси $m_2 = 3$ кг відбувається пружне не центральне зіткнення. Знайти кут α, на який відхилилася перша куля при зіткненні, якщо друга отримала кінетичну енергію $K_2 = 50$ Дж.

$$\left(\cos\alpha = \frac{2m_1K_1 - (m_1 + m_2)K_2}{2m_1\sqrt{K_1(K_1 - K_2)}} = 0{,}53 \Rightarrow \alpha = 58°\right)$$

3.77. Дві шайбочки масами m_1 і m_2 одночасно починають зісковзувати назустріч одна одній з двох однакових гладких гірок висоти H. Швидкості шайбочок біля основи гірок напрямлені горизонтально уздовж однієї прямої. Зісковзнувши на гладку горизонтальну поверхню, шайбочки непружно стикаються. На яку висоту h й на яку гірку шайбочки піднімуться після зіткнення?

$$\left(h = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 H\right)$$

3.78. З вершини нерухомого не плоского клина масою M, який може без тертя ковзати по горизонтальній поверхні, починає зісковзувати без тертя невеликий брусок маси m. Кут нахилу клина плавно зменшується й біля основи складає 0°. Знайти висоту клина h, якщо швидкість бруска біля його основи дорівнює v.

$$\left(h = \frac{v^2}{2g}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\right)$$

3.79. На гладкій горизонтальній поверхні перебувають у спокої невелика шайба маси m та гладка гірка маси M і висоти h, що може вільно ковзати по поверхні. Яку мінімальну швидкість v необхідно надати шайбі, аби вона змогла подолати цю гірку?

$$\left(v = \sqrt{2gh\left(1 + \frac{m}{M}\right)}\right)$$

3.80. Тілу масою m = 10 кг, що лежить на нерухомій горизонтальній платформі маси M = 100 кг, поштовхом надають горизонтальної швидкості v = 5 м/с. Коефіцієнт тертя між тілом і платформою k = 0,2. Тертя ковзання між колесами платформи й рейками відсутнє. Знайти роботу сил тертя A на момент, коли тіло перестане ковзати по платформі.
Визначити шлях S, який пройде платформа на цей момент.

$$\left(A = -\frac{mMv^2}{2(M+m)} = -114\,Дж; \quad S = \frac{Mmv^2}{2kg(M+m)^2} \approx 0{,}53\text{м} \right)$$

3.81. На горизонтальних рейках стоїть нерухома платформа маси M_1, а на ній – не закріплена гармата маси M_2. Тертя ковзання між колесами платформи й рейками відсутнє. З гармати в горизонтальному напрямі вздовж рейок вилітає снаряд маси m із швидкістю v відносно землі. Унаслідок цього гармата зміщується на певну відстань відносно платформи й зупиняється. Знайти роботу сил тертя A за час руху гармати по платформі.

$$\left(A = -\frac{M_1 m^2}{2M_2(M_1+M_2)} v^2 \right)$$

3.82. Кулька маси m, що горизонтально летить із швидкістю v_1, потрапляє в дерев'яну кулю маси M, яка лежить на гладкій горизонтальній підлозі. Кулька пробиває дерев'яну кулю, пройшовши крізь її центр, і вилітає із швидкістю v_2. Знайти кількість тепла Q, що виділяється при цьому.

$$\left(Q = \frac{m}{2M}\left(M\left(v_1^2 - v_2^2\right) - m\left(v_1 - v_2\right)^2 \right) \right)$$

3.83. На гладкій горизонтальній площині лежать дві однакові пластикові кулі маси m = 100 г. Маленька металева кулька тієї ж маси, що горизонтально летить із початковою швидкістю v = 100 м/с, пробиває першу кулю і застряє в другій. Знайти кількість теплоти Q_1, що виділилася в першій кулі, якщо в другій виділилася кількість теплоти Q_2 = 90 Дж.

$$\left(Q_1 = 2v\sqrt{mQ_2} - 4Q_2 = 240 \text{ Дж} \right)$$

4. Динаміка твердого тіла

4.1. Рівняння моментів відносно осі:

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z .$$

4.2. Рівняння динаміки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

$$I\beta_z = M_z$$

4.3. Момент інерції протяжного тіла:

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = \int_V r^2 \rho \mathrm{d}V .$$

4.4. Теорема Гюйгенса – Штайнера:

$$I = I_c + ma^2$$

4.5. Моменти інерції I_c деяких однорідних тіл:

Тіло	Вісь	Момент інерції I_c
Тонкий стержень довжини l	Проходить перпендикулярно через середину стержня	$ml^2/12$
Суцільний циліндр (диск) радіуса R	Співпадає з віссю циліндра (диска)	$mR^2/2$
Суцільна куля радіуса R	Проходить через центр кулі	$2mR^2/5$

4.6. Робота моменту сил при обертанні тіла навколо фіксованої осі:

$$A = \int M_z \mathrm{d}\varphi .$$

4.7. Кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

$$K = \frac{I\omega^2}{2} .$$

4.8. Кінетична енергія твердого тіла при плоскому русі:

$$K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2} .$$

4.9. Закон збереження моменту імпульсу відносно осі Z:

$$\sum I_i \omega_{iz} = const .$$

Моменти імпульсу та сили. Рівняння моментів

4.1. Частинка має імпульс $\vec{p}$ і момент імпульсу $\vec{L}_0$ відносно певної точки O. Знайти вираз моменту імпульсу $\vec{L}$ цієї частинки відносно іншої точки O′, положення котрої відносно O визначається радіусом-вектором $\vec{r}_0$.

$$\left(\vec{L} = \vec{L}_0 - [\vec{r}_0, \vec{p}]\right)$$

4.2. Маленька кулька маси *m* рівномірно рухається зі швидкістю v в площині XOY по колу радіуса *R* із центром O в початку координат. Визначити:

- модуль моменту імпульсу кульки L_0 відносно початку координат та $L_{0'}$ відносно точки O′ на осі OZ на відстані *h* від початку координат.
- чи можна на основі отриманих результатів сказати, що в обох випадках рух кульки відбувається із сталим моментом імпульсу $\vec{L}$.
- момент імпульсу кульки L_z відносно вказаної осі OZ.

$$\left(L = mv\sqrt{h^2 + R^2}; \quad ні; \quad L_z = mvR.\right)$$

4.3. На частинку, що розташована в точці з координатами (4, 3, 0) см, діє сила $\vec{F} = (3\vec{i} - 6\vec{j})$ Н. Знайти вектор $\vec{M}$ моменту цієї сили та її плече *d* відносно початку координат.

$$\left(\vec{M} = -0{,}33\vec{k}\ \text{Н}\cdot\text{м}; \quad d = 4{,}91\,\text{см}\right)$$

4.4. Дві антипаралельні сили однакової величини $F_1 = F_2 = F$ називаються *парою сил*, а відстань d між лініями їхньої дії – *плечем пари*. Довести (вивести формулу), що момент $\vec{M}$ пари не залежить від положення початку відліку та точок прикладання сил, і його модуль у всіх випадках визначається формулою $M = Fd$.

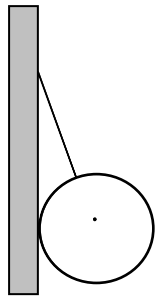


Рис. 4.1

4.5. До гладенької вертикальної стінки на нитці довжиною 4 см підвісили кулю масою 0,3 кг і радіусом 2,5 см.

– довести, що при рівновазі напрям нитки буде обов'язково проходити через центр кулі, як показано на рис 4.1;
– знайти силу, з якою куля тисне на стінку.

(1,225 Н)

4.6. Куля масою *m* = 0,5 кг підвішена на нитці до вертикальної шорсткої стінки так, що нитка є дотичною до кулі (рис. 4.2), і перебуває в рівновазі. Знайти найменшу можливу величину коефіцієнта тертя *k* між стінкою і кулею та силу натягу нитки *T*, якщо кут

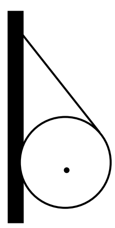


Рис.4.2

між ниткою та стінкою $\alpha = 45°$.

$$\left(k = \frac{1}{\sin\alpha} \approx 1{,}4; \quad T = \frac{mg}{1+\cos\alpha} \approx 2{,}9\ \text{Н} \right)$$

4.7. На горизонтальній підлозі лежить куб масою m.

1) якою найменшою силою F його можна кантувати (переміщувати, перекидаючи через ребро)?
2) при якому коефіцієнті тертя k між кубом і підлогою кантування є неможливим?

$$\left(F = \frac{mg}{2\sqrt{2}}; \quad k \le \frac{1}{3} \right)$$

4.8. В якому випадку для переміщення важкого куба по горизонтальній підлозі його легше кантувати (перекидати через ребро), аніж перетягати, прикладаючи горизонтальну силу?

у мене виходить $k > \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ $\left(\textit{при коефіцієнті тертя } k > \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \right)$

4.9. Тонкий однорідний стержень маси $m = 1$ кг знаходиться на гладкій горизонтальній поверхні. До кінця стержня перпендикулярно прикладена деяка горизонтальна сила $\vec{F}_1$, а на відстані $l = 20$ см від цього кінця – антипаралельна до $\vec{F}_1$ сила $\vec{F}_2$ величиною 5 Н. Знайти довжину стержня L, якщо він рухається поступально з прискоренням $a = 2$ м/с^2.

$$\left(L = \frac{2F_2}{ma} l = 1\ \text{м} \right)$$

4.10. На бобіну у вигляді двох закріплених на стержні дисків радіуса R, яка лежить на шорсткій горизонтальній поверхні (рис. 4.3), намотано $m = 1$ кг м'якого тонкого дроту із радіусом шару $r = \eta R$. Із яким прискоренням почне котитися бобіна при $\eta = 0{,}6$, якщо за кінець дротини потягнути із силою $F = 1{,}5$ Н під кутом α до поверхні? Маса котушки є неістотна, ковзання відсутнє. Розглянути випадки: 1) $\alpha = 30°$; 2) $\alpha = 60°$; 3) $\alpha = \arccos\eta$.

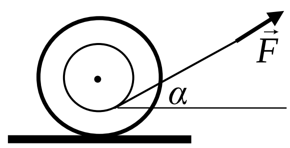


Рис. 4. 3

$$\left(a = \frac{2(\cos\alpha - \eta)}{2+\eta^2}\frac{F}{m}. \quad 1) \approx -6{,}4\ \text{см/с}^2; \quad 2) \approx 17\ \text{см/с}^2; \quad 3) 0 \right)$$

4.11. При якій величині сили F і кута α котушка з попередньої задачі буде перебувати в спокої, якщо її маса m і коефіцієнт тертя об поверхню k?

$$\left(\alpha = \alpha_0,\ F < \frac{kmg}{\cos\alpha_0 + k\sin\alpha_0},\ \text{де}\ \alpha_0 = \arccos\frac{1}{\eta} \right)$$

Момент інерції

4.12. Знайти вираз моменту інерції тонкого однорідного стержня довжини l і маси m відносно перпендикулярної осі, що проходить:

а) через центр мас стержня;

б) через його кінець.

$$\left(а)\ \frac{1}{12}ml^2; \qquad б)\ \frac{1}{3}ml^2 \right)$$

4.13. Квадратна рамка з тонкого дроту має масу m і сторону a. Визначити момент інерції рамки відносно осі, що проходить:

а) через її центр перпендикулярно до площини;

б) через її вершину перпендикулярно до площини;

в) через середини її протилежних сторін;

г) через суміжні вершини.

$$\left(а)\ \frac{1}{3}ma^2; \quad б)\frac{5}{6}ma^2; \quad в)\ \frac{1}{6}ma^2; \quad г)\ \frac{5}{12}ma^2 \right)$$

4.14. Знайти вираз моменту інерції тонкої квадратної пластинки із масою m і стороною a відносно осі, що проходить:

а) через її центр перпендикулярно до площини;

б) через вершину перпендикулярно до площини;

в) через середини протилежних сторін;

г) через суміжні вершини.

$$\left(а)\frac{1}{6}ma^2; \quad б)\frac{2}{3}ma^2 \quad в)\frac{1}{12}ma^2; \quad г)\frac{1}{3}ma^2 \right)$$

4.15. Знайти вираз моменту інерції тонкого однорідного кільця маси m і радіуса R відносно осі, що:

а) проходить через центр кільця перпендикулярно до його площини;

б) співпадає з діаметром;

в) дотикається до кільця і є перпендикулярною до його площини;

г) є дотичною до кільця і лежить у його площині.

$$\left(a) mR^2; \quad б) \frac{1}{2} mR^2; \quad в) 2mR^2 \quad г) \frac{3}{2} mR^2 \right)$$

4.16. Знайти вираз моменту інерції тонкого однорідного диска маси m і радіуса R відносно осі, що:

а) проходить через центр диска перпендикулярно до його площини;

б) співпадає з діаметром диска;

в) перпендикулярна до площини диска дотикається до нього;

г) є дотичною до диска і лежить у його площині.

$$\left(a) \frac{1}{2} mR^2; \quad б) \frac{1}{4} mR^2; \quad в) \frac{3}{2} mR^2; \quad г) \frac{5}{4} mR^2 \right)$$

4.17. Знайти вираз моменту інерції тонкого сферичного шару радіуса R і маси m відносно осі, котра:

а) проходить через центр шару;

б) дотикається до нього.

$$\left(a) \frac{2}{3} mR^2; \quad б) \frac{5}{3} mR^2 \right)$$

4.18. Знайти вираз моменту інерції однорідної кулі радіуса R і маси m відносно осі, що:

а) проходить через центр кулі;

б) дотикається до неї.

$$\left(a) \frac{2}{5} mR^2; \quad б) \frac{7}{5} mR^2 \right)$$

4.19. Тонка пластинка у формі диска радіуса R із концентричним отвором радіуса r має масу m. Визначити момент інерції пластинки I відносно її осі, перпендикулярної до площини.

$$\left(I = \frac{1}{2} m(R^2 + r^2) \right)$$

4.20. Тонка пластинка у формі трьох четвертинок квадрата зі стороною a (рис. 4.4) має масу m. Визначити момент інерції пластинки I відносно перпендикулярної до неї осі O. *<u>Вказівка</u>. Скористатися результатами задачі 4.14.*

$$\left(\frac{1}{6} ma^2 \right)$$

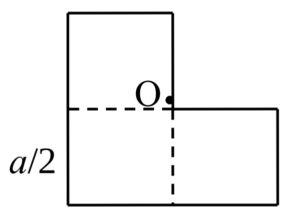


Рис. 4.4

4.21. Тонкий стержень має масу 1,4 кг. Відносно перпендикулярної осі, що перетинає його лінію на відстані у чверть довжини від кінця, момент інерції стержня дорівнює 0,9 кгм^2. Знайти довжину стержня.

(1,0 м *або* 2,1 м)

4.22. Фізичний маятник являє собою диск маси 5 кг і радіуса 20 см з'єднаний із тонким стержнем довжини 1 м і маси l кг орієнтованим уздовж діаметра диска. Обчислити момент інерції маятника відносно осі, що проходить через вільний кінець стержня перпендикулярно до площини диска.

(7,6 кг·м^2)

Обертання навколо нерухомої осі

4.23. Циліндр маси m_1 = 10 кг може обертатися без тертя навколо нерухомої горизонтальної власної осі. На циліндр намотано тонкий шнур із підвішеною до нього гирею маси m_2 = 2 кг. З яким прискоренням a буде опускатися гиря, якщо її відпустити?

$$\left(a = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} g = 2{,}8\ \text{м/с}^2\right)$$

4.24. Через нерухомий блок маси m = 200 г перекинута тонка нитка, до кінців якої підвішено тягарці масами m_1 = 150 г та m_2 = 250 г. З яким прискоренням будуть рухатися тягарці, якщо їх відпустити? Блок уважати однорідним диском, тертям знехтувати.

$$\left(a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + m/2} g = 1{,}96\ \text{м/с}^2\right)$$

4.25. Два бруски масами m_1 = 1,0 кг і m_2 = 0,5 кг з'єднані ниткою, перекинутою через закріплений на краю горизонтального стола блок, як показано на рис. 4.5. Знайти прискорення a тіл та сили натягу нитки T_1 і T_2 по обидва боки блока. Коефіцієнт тертя бруска m_1 об стіл k = 0,2. Блок вважати однорідним диском маси m = 3,0 кг, тертям в осі знехтувати.

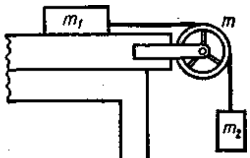


Рис. 4.5

$$\left(a = \frac{m_2 - km_1}{m/2 + m_1 + m_2} g = 0{,}98\ \text{м/с}^2;\quad T_1 = 2{,}94\ \text{Н};\quad T_2 = 4{,}41\ \text{Н}\right)$$

4.26. Маховик із радіусом R = 1,0 м розкручують протягом певного часу τ за допомогою двигуна, що створює на валу маховика момент сил M = 400 Н·м. Потім двигун вимикають, і притискають до обода маховика дві гальмівні колодки з однаковою силою F. Знайти величину F, якщо маховик зупинився через час $\tau_1 = 2\tau$, і коефіцієнті тертя між маховиком і колодками k = 0,5. Тертям у підшипниках знехтувати.

(F = 200 Н)

4.27. Маховик у вигляді диска маси m = 50 кг із радіусом R = 20 см обертається навколо нерухомої осі з частотою n = 480 об/хв. Який гальмівний момент сил M треба створити, щоби маховик:

– зупинився через t = 50 с;
– зробив до повної зупинки N = 200 обертів.

(M = 1,0 Н·м *в обох випадках*)

4.28. На невагомий циліндр, який може обертатися без тертя навколо власної нерухомої горизонтальної осі, намотано в один шар тонкий трос довжини l і маси m. Унаслідок незначного поштовху трос починає розкручуватися під дією сили тяжіння. Знайти залежність $a(x)$ прискорення частини троса, що звисає, від її довжини x.

$$\left(a = \frac{x}{l} g\right)$$

4.29. На циліндр маси M, який може обертатися без тертя навколо власної нерухомої осі, намотано в один шар не закріплений тонкий трос довжини l і маси m. Унаслідок незначного поштовху трос починає розмотуватися без ковзання під дією сили тяжіння. Знайти:

– залежність прискорення a троса від довжини x його частини, що звисає;
– величину прискорення троса a_1 за мить до та a_2 після відриву троса від циліндра;
– пояснити причину раптової зміни прискорення в момент відриву троса.

$$\left(a = g\frac{2m}{M+2m}\cdot\frac{x}{l}\right)$$

4.30. Змотана в щільний рулон тонка поліетиленова стрічка довжини l насаджена на горизонтальну вісь, яка може обертатися без тертя. Внаслідок незначного поштовху рулон починає розкручуватися під дією сили тяжіння. Визначити прискорення звисаючого кінця плівки a як функцію його довжини x.

$$\left(a = \frac{2x}{x+l} g\right)$$

4.31. Однорідний диск маси m і радіуса R розкрутили до кутової швидкості ω і обережно поклали на шорстку горизонтальну поверхню. Визначити момент сил тертя M, що діють на диск, та час руху диска до зупинки τ. Коефіцієнт тертя між диском та поверхнею дорівнює k.

$$\left(M = \frac{2kmgR}{3};\quad \tau = \frac{3\omega R}{4kg}\right)$$

4.32. Однорідний циліндр маси m і радіуса R, що обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω, поклали бічною поверхнею на горизонтальну площину і надали самому собі. Через який час по тому циліндр почне рухатися без ковзання, якщо коефіцієнт тертя між ним і площиною дорівнює k? Чому дорівнює повна робота сил тертя?

$$\left(t=\frac{\omega R}{3kg};\quad A=-\frac{m\omega^2R^2}{6}\right)$$

Кочення

4.33. Довести, що при коченні без ковзання циліндра чи кулі по довільній поверхні лінійні швидкість $v(t)$ та прискорення $a(t)$ точок на поверхні тіл в будь-яку мить збігаються із швидкістю та прискоренням їхніх осей $v_0(t)$ і $a_0(t)$, відповідно.

4.34. З вершини півсфери радіуса R скочується без ковзання однорідна кулька, що має масу m і радіус r. Знайти:

– висоту h від основи, на якій кулька відірветься від півсфери;
– кутову швидкість кульки ω на момент відриву.

$$\left(h=\frac{10}{17}(R+r);\quad \omega=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{10g(R+r)}{17}}\right)$$

4.35. Обруч скочується без ковзання з вершини похилої площини. Визначити:

– час скочування τ обруча до основи площини, якщо її висота h = 10 см і довжина $l=2$ м;
– мінімальний коефіцієнт тертя k між площиною та обручем, при якому не буде ковзання.

$$\left(\tau=\frac{2l}{\sqrt{gh}}\approx 4\text{ с};\quad k=\frac{h}{2\sqrt{l^2-h^2}}\approx\frac{h}{2l}=0{,}025\right)$$

4.36. Однорідний циліндр скочується без ковзання з вершини похилої площини. Визначити:

– час скочування τ циліндра до основи площини, якщо її висота h = 1,25 м і кут нахилу до горизонту α = 30°;
– мінімальний коефіцієнт тертя k між площиною та циліндром, при якому не буде ковзання.

$$\left(\tau=\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{3h}{g}}=1{,}24\text{ с},\quad k=\frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha=0{,}19.\right)$$

4.37. Однорідна куля скочується без ковзання з вершини похилої площини. Визначити:

– час τ, за який куля скотиться до основи площини, якщо її висота h = 1,75 м і кут нахилу до горизонту α = 30°;

– мінімальний коефіцієнт тертя k між площиною та кулею, при якому вона не буде ковзати.

$$\left(\tau = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{14h}{5g}} = 1{,}41\,\text{с}, \quad k = \frac{2}{7}\,\text{tg}\,\alpha = 0{,}165\right)$$

4.38. По похилій площині з кутом нахилу до горизонту α скочується без ковзання обруч, однорідний циліндр або куля. Знайти прискорення a кожного з указаних тіл.

$$\left(a = \frac{g\sin\alpha}{1+\gamma}, \quad \textit{де}\ \ \gamma = 1\ \textit{для обруча},\ \ \gamma = \frac{1}{2}\ \textit{для циліндра}\ \ \textit{і}\ \ \gamma = \frac{2}{5}\ \textit{для кулі}\right)$$

4.39. По похилій площині з кутом нахилу до горизонту α скочується обруч, однорідний циліндр або куля. Визначити, при якій величині коефіцієнта тертя k тіла не будуть ковзати.

$$\left(k \ge \frac{\gamma}{1+\gamma}\,\text{tg}\,\alpha, \quad \textit{де}\ \ \gamma = 1\ \textit{для обруча},\ \ \gamma = \frac{1}{2}\ \textit{для циліндра}\ \ \textit{і}\ \ \gamma = \frac{2}{5}\ \textit{для кулі}\right)$$

4.40. Суцільний та закритий тонкостінний циліндри мають однакові розміри і масу. Пояснити, як можна розпізнати циліндри?

4.41. Суцільний і тонкостінний порожнистий циліндри однакового розміру та маси одночасно починають скочуватися без ковзання з вершини похилої площини. Знайти співвідношення швидкостей суцільного v_1 та порожнистого v_2 циліндрів біля основи площини. Пояснити причину відміни у швидкостях.

$$\left(v_1 = 1{,}225 v_2\right)$$

4.42. Котушка ниток маси m = 60 г лежить на горизонтальній шорсткій поверхні з коефіцієнтом тертя k = 1,0. Відношення зовнішнього радіуса котушки R до радіуса r шару ниток η = 2, момент інерції відносно власної осі $I = \gamma m R^2$, де γ = 0,7. Котушка починає рухатися без ковзання під дією сили F = 0,3 Н, прикладеної до вільного кінця нитки під кутом α = 45° до горизонту (див. рис. 4.3, задача 4.10). Знайти прискорення a осі та кутове прискорення β котушки, якщо радіус шару ниток r = 1,5 см.

$$\left(a = \frac{F(\eta\cos\alpha - 1)}{\eta(1+\gamma)m} \approx 0{,}6\ \text{м/с}^2, \quad \beta = \frac{a}{R} \approx 20\ \text{рад/с}^2\right)$$

Енергія обертального руху та робота моменту сил. Кінетична енергія плоского руху

4.43. Маховик, який обертається навколо власної осі з кінетичною енергією 1,0 кДж починає гальмувати й, зробивши 80 обертів, зупиняється. Знайти момент гальмівних сил, вважаючи його сталим.

(2,0 Нм)

4.44. Ротор двигуна робить 1500 об/хв. Визначити обертовий момент, який діє на ротор, якщо потужність на валу дорівнює 500 Вт.

(3,18 Нм)

4.45. Маховик із моментом інерції I = 50 кгм^2 обертається за законом $\varphi = \alpha - \beta t + \gamma t^2$, де α = 2 рад, β = 16 рад/с, γ = 2 рад/с^2. Знайти залежність від часу потужності $P(t)$ на валу маховика та її величину на моменти t_1 = 0, t_2 = 4 с, і t_3 = 8 с.

$\left(P(t) = 2I\gamma(2\gamma t - \beta), \quad P_1 = -3{,}2 \text{ кВт}, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 3{,}2 \text{ кВт} \right)$

4.46. На маховик із власним моментом інерції 40 кгм^2 починає діяти обертовий момент 20 Нм. Обчислити кінетичну енергію маховика через 10 с по тому.

(500 Дж)

4.47. Маховик у вигляді диска з масою 80 кг і радіусом 30 см розкручують із стану спокою до частоти n = 10 об/с. Уважаючи маховик однорідним диском, знайти:

– роботу розкручування;
– величину цієї роботи за умови, що радіус маховика удвічі більший при тій самій масі.

(7,1 кДж; 28,4 кДж)

4.48. Куля маси m = 10 г летить із швидкістю v = 800 м/с, обертаючись навколо своєї поздовжньої осі з частотою n = 3000 об/с. Приймаючи кулю за циліндрик із діаметром d = 8 мм, знайти кінетичну енергію K кулі.

$\left(K = (m/4)(2v^2 + \pi^2 n^2 d^2) = 3{,}21 \text{кДж} \right)$

4.49. Обчислити кінетичну енергію циліндра маси m = 4 кг, який котиться без ковзання по горизонтальній поверхні із швидкістю v = 1 м/с.

(3 Дж)

4.50. Однорідна куля маси 800 г, яка котиться без ковзання по горизонтальній поверхні, має кінетичну енергію 14 Дж. Знайти швидкість руху центра кулі.

(5 м/с)

4.51. Визначити кінетичну енергію K візка, що котиться без ковзання по горизонтальній площині зі швидкістю v. Маса візка без коліс m. Візок має чотири колеса у вигляді дисків однакової маси m_0.

$$\left(K = \frac{1}{2} v^2 (m + 6m_0) = 12 \text{ Дж} \right)$$

4.52. Куля маси m починає скочуватися без ковзання по площині, яка утворює кут α з горизонтом. Знайти кінетичну енергію кулі як функцію часу.

$$\left(K = \frac{5}{14} m g^2 \sin^2 \alpha \cdot t^2 \right)$$

4.53. Тонкостінний порожнистий циліндр в першому випадку зісковзує без кочення, а в другому – скочується без ковзання з вершини похилої площини висотою h = 1 м. Визначити швидкість циліндра в кінці спуску в обох випадках. Чому в другому випадку швидкість менша?

$$\left(v_1 = \sqrt{2gh} = 4{,}43 \text{ м/с}; \quad v_2 = \sqrt{gh} = 3{,}13 \text{ м/с} \right)$$

4.54. Однорідний циліндр в першому випадку зісковзує без кочення, а в другому – скочується без ковзання з вершини похилої площини висотою h = 1 м. Визначити швидкість циліндра в кінці спуску в обох випадках. Чому в другому випадку швидкість менша?

$$\left(v_1 = \sqrt{2gh} = 4{,}43 \text{ м/с}; \quad v_2 = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} = 3{,}61 \text{ м/с} \right)$$

4.55. Однорідна куля в першому випадку зісковзує без кочення, а в другому – скочується без ковзання з вершини похилої площини висотою h = 1 м. Визначити швидкість кулі в кінці спуску в обох випадках. Чому в другому випадку швидкість менша?

$$\left(v_1 = \sqrt{2gh} = 4{,}43 \text{ м/с}; \quad v_2 = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = 3{,}74 \text{ м/с} \right)$$

4.56. Циліндр починає котитися без ковзання вгору по похилій площині з кутом нахилу до горизонту α. Знайти:

– висоту, на яку підніметься циліндр при початковій швидкості v_0;
– умову руху циліндра без ковзання.

$$\left(H = \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{g}; \ \textit{коефіцієнт тертя } k > \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha \right)$$

Збереження моменту імпульсу відносно осі

4.57. Олівець довжини l = 15 см, поставлений вертикально, падає на стіл. Уважаючи що нижній кінець олівця не ковзає, знайти кутову ω та лінійну v швидкості на момент падіння для:

– середини олівця;
– його верхнього кінця.

(14 рад/с, 1,05 м/с; 14 рад/с, 2,1 м/с**)**

4.58. Легкий стержень довжини $2R$ радіально прикріплений до масивної кулі радіуса R шарнірно підвішено за вільний кінець до горизонтальної осі (фізичний маятник). Стержень відхиляють на кут 60° від вертикалі й відпускають. Визначити максимальну швидкість центра кулі. Тертя відсутнє.

$$\left(v = 3\sqrt{\frac{15gR}{47}} \approx \sqrt{3gR} \right)$$

4.59. Горизонтальний диск радіуса r, який обертається навколо власної вертикальної осі, розташований над нерухомим диском радіуса $R = 2r$, який може обертатися навколо власної осі. Матеріал і товщина дисків однакові, осі співпадають. Верхній диск падає на нижній, відтак диски згодом починають обертатися як одне ціле. Знайти відношення ω_1/ω початкової кутової швидкості верхнього диска до спільної кінцевої швидкості та відношення початкової і кінцевої кінетичної енергії системи K_1/K.

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{K_1}{K} = 1 + \frac{R^4}{r^4} \right)$$

4.60. Платформа маси M = 480 кг у вигляді однорідного диска обертається навколо своєї осі з частотою n_1 = 1 об/хв. На краю платформи стоїть людина масою m = 60 кг. З якою частотою n_2 стане обертатися платформа, коли людина перейде в її центр? Людину прийняти за матеріальну точку, тертя в осі платформи не враховувати.

$$\left(n_2 = \left(1 + \frac{2m}{M} \right) n_1 = 1{,}25 \text{ об/хв} \right)$$

4.61. Платформа у вигляді однорідного диска радіуса R = 1,5 м і маси M = 180 кг обертається без тертя навколо власної вертикальної осі з частотою n = 10 об/хв. У центрі платформи стоїть людина маси m = 60 кг. З якою швидкістю v буде обертатися людина відносно підлоги, якщо вона перейде на край платформи? Людину вважати матеріальною точкою.

$$\left(v = \frac{2\pi nMR}{M + 2m} = 0{,}94 \text{ м/с} \right)$$

4.62. На краю горизонтальної платформи маси m_2 = 240 кг у формі однорідного диска радіуса R = 2 м стоїть людина маси m_1 = 80 кг. Платформа може обертатися без тертя навколо своєї вертикальної осі. Знайти, з якою кутовою швидкістю ω почне обертатися платформа, якщо людина піде по краю зі швидкістю v = 2 м/с відносно платформи. Людину вважати матеріальною точкою. Тертя в осі немає.

$$\left(\omega = \frac{2m_2 v}{(2m_1 + m_2)R} = 0,4 \text{ рад/с}\right)$$

4.63. Людина починає йти по краю круглої горизонтальної платформи, що може без тертя обертатися навколо власної вертикальної осі. Маса людини в η = 4 рази менша за масу платформи. На який кут φ повернеться платформа, коли людина повністю обійде її? Платформу вважати однорідним диском, людину – матеріальною точкою. Тертя в осі немає.

$$\left(\varphi = \frac{4\pi}{\eta + 2} = 120°\right)$$

4.64. У нижній кінець стержня маси M і довжини l, що підвішений шарнірно за верхній кінець, влучає та застряє куля маси $m \ll M$, яка летіла горизонтально. Визначити швидкість кулі, якщо після удару стержень відхилився від вертикалі на кут α.

$$\left(v = \frac{M}{m}\sqrt{\frac{2gl}{3}}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

4.65. У середину стержня довжини l = 1,5 м і маси M = 10 кг, що підвішений шарнірно за верхній кінець, влучає та застряє куля маси m = 10 г, яка летіла горизонтально зі швидкістю v_0 = 500 м/с. На який кут φ від вертикалі відхилиться стержень після удару

$$\left(\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{mv_0}{2M}\sqrt{\frac{3}{2gl}};\quad \varphi = 9,16°\right)$$

4.66. Тонка однорідна квадратна пластинка M може вільно обертатися навколо нерухомої вертикальної осі, що співпадає з однією з її сторін. У центр пластинки по нормалі пружно вдаряє кулька маси m, що летіла із швидкістю v. Знайти:

– швидкість кульки $\vec{u}$ та швидкість центра мас пластинки $\vec{V}$ після удару, якщо $(M/m) = \eta$;

– при якому значенні η напрям руху кульки після зіткнення не зміниться?

$$\left(а)\ \vec{u} = \frac{3 - 4\eta}{3 + 4\eta}\vec{v},\ \vec{V} = \frac{6}{3 + 4\eta}\vec{v};\quad б)\ \eta < \frac{3}{4}\right)$$

4.67. Знайти вектори $\vec{u}$ і $\vec{V}$ в умовах попередньої задачі при абсолютно непружному зіткнення кульки з пластинкою.

$$\left(\vec{u} = \vec{V} = \frac{3\vec{v}}{3 + 4\eta}\right)$$

5. Спеціальна теорія відносності

5.1. Перетворення Лоренца:

$$x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}};\quad y'=y;\quad z'=z;\quad t'=\frac{t-\left(Vx/c^2\right)}{\sqrt{1-(V/c)^2}}.$$

5.2. Скорочення довжин й уповільнення часу:

$$l=l_0\sqrt{1-(v/c)^2};\quad \Delta t=\frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

5.3. Релятивістський закон перетворення швидкостей:

$$v'_x=\frac{v_x-V}{1-\left(Vv_x/c^2\right)};\quad v'_y=\frac{v_y\sqrt{1-(V/c)^2}}{1-\left(Vv_x/c^2\right)}.$$

5.4. Релятивістський інтервал:

$$s^2=c^2\tau^2-l^2=inv$$

5.5. Імпульс релятивістської частинки з масою спокою (власною масою) m_0:

$$\vec{p}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}=m\vec{v},\quad m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}-\text{релятивістська маса}.$$

5.6. Рівняння динаміки релятивістської частинки:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}\right)=\vec{F}$$

5.7. Повна енергія та енергія спокою релятивістської частинки:

$$E=mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}};\quad E_0=m_0c^2.$$

5.8. Кінетична енергія релятивістської частинки:

$$K=E-E_0=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}-1\right).$$

5.9. Зв'язок між енергією та імпульсом релятивістської частинки:

$$E^2-p^2c^2=E_0^2;\quad p^2c^2=K(K+2E_0).$$

Перетворення Лоренца

5.1. Стрижень власної довжини l_0 рухається в поздовжньому напрямі зі швидкістю v, рівною: 0,1c; 0,5c; 0,9c. Знайти відносну зміну (%) довжини стрижня $\Delta l / l_0$.

(0,5%; 13%; 56%)

5.2. При якій мінімальній швидкості поздовжнього руху можна виявити релятивістське скорочення довжини стержня при точності вимірювання 0,1 мкм і власній довжині стержня 1 м?

($1{,}35\cdot10^5$ м/с)

5.3. Нерухомий стержень довжини l_0 = 1 м розташований в площині XOY під кутом $\alpha_0 = 45°$ до осі X K-системи відліку. Знайти довжину стержня l і кут α, який він складає з віссю X′ K′-системи, що рухається відносно K із швидкістю $v = 0{,}6c$.

$\left(0{,}9 \text{ м}; \quad 51{,}34°\right)$

5.4. Стержень власної довжини l_0 = 1 м рухається із швидкістю v = 0,5c відносно лабораторної системи відліку, в якій кут між стрижнем і напрямом його руху $\alpha = 45°$. Знайти довжину стержня в лабораторній системі відліку l і кут β між стержнем і напрямом руху у власній системі відліку, тобто системі відліку, відносно якої тіло не рухається.

$$\left(l = l_0\sqrt{\frac{2(1 - v^2/c^2)}{2 - v^2/c^2}} = 0{,}925 \text{ м}; \quad \beta = \text{arctg}\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 41° \right)$$

5.5. Власна довжина катетів рівнобедреного прямокутного трикутника складає 1 м. Знайти площу трикутника в системі відліку, де він рухається уздовж одного з катетів із швидкістю 0,8c.

(0,3 м^2)

5.6. Рівнобедрений прямокутний трикутник починає рухатись уздовж одного з катетів. При якій швидкості руху протилежний кут становитиме 30°?

($\approx 0{,}82c$)

5.7. Деякий трикутник у лабораторній системі відліку є рівнобедреним прямокутним, а у власній системі відліку – правильним. Чому дорівнює відносна швидкість v систем відліку?

$$\left(v = c\sqrt{2/3} = 2{,}45\cdot10^8 \text{ м/с} \right)$$

5.8. Дві системи відліку рухаються з різними швидкостями уздовж стрижня. Швидкість першої системи відліку відносно стрижня v_1 = 0,1c, а довжина стрижня в ній l_1 = 1,1 м. Знайти швидкість v_2 руху другої системи від ліку відносно стрижня, якщо довжина стрижня в ній l_2 = 1 м.

$$\left(v_2 = c\sqrt{1 - (l_2/l_1)^2(1 - v_1^2/c^2)} = 0{,}43c \right)$$

5.9. Нерухоме тіло довільної форми має власний об'єм V_0. Знайти його об'єм V в системі відліку, відносно якої воно рухається із швидкістю $v = 0{,}9c$.

$(V = 0{,}436\ V_0)$

5.10. Стержень рухається вздовж лінійки. Коли в системі відліку лінійки одночасно відмітили положення кінців стержня то отримали відстань між мітками $l_1 = 1{,}00$ м. А коли положення кінців стержня відмітили на ті самій лінійці одночасно в системі відліку стержня, то вийшло $l_2 = 1{,}44$ м. Знайти власну довжину стержня l_0 і швидкість його руху v відносно лінійки

$$\left(l_0 = \sqrt{l_1 l_2} = 1{,}2 \text{ м}; \quad v = \left(\sqrt{1-(l_1/l_2)}\right)c \approx 0{,}55c\right)$$

5.11. У лабораторній системі відліку нестабільна частинка при швидкості руху $0{,}99c$ за час життя проходить відстань 3 км. Знайти власний час життя частки .

$(\tau_0 \approx 1{,}4 \text{ мкс})$

5.12. Власний час життя мюона τ_0 = 2 мкс. Знайти швидкість мюона в лабораторної системи відліку, в якій за час життя він пролітає відстань 6 км.

$(0{,}995c)$

5.13. Система відліку K' рухається відносно системи K із швидкістю v уздовж осі X. Два спостерігачі K - системи, що знаходяться відповідно в точках $x_1 = 0$ і $x_2 = l$, в момент $t_1 = t_2 = 0$ за своїми годинниками фіксують покази годинників K' – системи, що саме пролітають повз них. Яке значення t_2' зафіксував другий спостерігач, якщо перший отримав $t_1' = 0$?

$$\left(t_2' = -\frac{vl}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

5.14. Фантастичний експрес, який складається із $N = 100$ вагонів однакової довжини $l_0 = 20$ м, рухається зі швидкістю $v = 0{,}5c$. Коли перший вагон порівнявся із світлофором, у ньому ввімкнули імпульсний лазер. А коли повз світлофор саме пройшов останній вагон, лазер випустив другий імпульс. Яку частоту ν_0 повторення лазерних імпульсів зафіксує пасажир першого вагона?

$$\left(\nu_0 = \frac{v}{Nl_0\left(1-(v/c)^2\right)} = 10^5\ \frac{1}{c}\right)$$

5.15. Спортсмен на стрільбищі робить постріл (подія 1) у горизонтальному напрямку. Відтак куля через заданий час Δt влучає в мішень (подія 2) розміщену на заданій відстані l. Визначити:

– на якій відстані одна від одної та з яким інтервалом часу відбуваються ці події для спостерігача, що рухається із швидкістю V паралельно до

лінії пострілу?
– в якій системі відліку ці події відбуваються в одній точці?
– чи існує система відліку, в якій ці події відбуваються одночасно?

5.16. У певній інерціальній системі відліку в момент часу, для якого $ct_1 = 1$ м (c – гранична швидкість) в точці $\{2;0;0\}$(м) сталася подія A, а в момент часу $ct_2 = 4$ м в точці $\{7;0;0\}$(м) відбулася подія B.

а) знайти відстань $\Delta l'$ між точками, в яких відбулися ці події у системі відліку, де вони були одночасними.
б) чи існує система відліку, в якій указані події відбулися в одній точці?

(а) $\Delta l' = 4$ м; б) *ні*)

5.17. На осі ОХ інерціальної K-системи відліку в момент часу, для якого $ct_1 = 3\cdot10^5$ м (c – гранична швидкість) в точці $x_1 = 2\cdot10^5$ м сталася подія 1, а в момент часу $ct_2 = 8\cdot10^5$ м в точці $x_2 = 6\cdot10^5$ м – подія 2.

а) знайти проміжок часу $\Delta t'$ між цими подіями в системі відліку, де вони відбулися в одній точці.
б) чи існує система відліку, в якій указані події відбулися одночасно?

(а) $\Delta t' = 1$ мс; б) *ні*)

5.18. У лабораторній системі відліку нестабільна частинка за час життя $\tau = 2\cdot10^{-6}$ с перемістилася з точки $\{100;100;300\}$ (м) у точку $\{300;400;100\}$(м). Знайти власний час життя частинки τ_0.

($\tau_0 = 1{,}45\cdot10^{-6}$ с)

Перетворення швидкостей

5.19. Фотон рухається уздовж осі ОХ системи відліку K. Використовуючи формули перетворення швидкостей, обчислити швидкість фотона відносно системи відліку K', що рухається із швидкістю $v = c/2$ у від'ємному напрямі осі ОХ K-системи відліку.

5.20. Частинка рухається із швидкістю v_1 в напрямку осі ОХ K-системи відліку. Знайти швидкість частинки $\vec{v}'$ в K'-системі відліку, що рухається відносно K назустріч частинці з такою самою швидкістю .

$$\left(\vec{v}' = \frac{2c^2}{c^2 + v_1^2}\cdot\vec{v}_1\right)$$

5.21. У нерухомій K-системі відліку частинка має швидкість $v = 0{,}8c$ спрямовану під кутом 30° до осі ОХ. Який кут складає швидкість частинки $\vec{v}'$ із віссю ОХ$'$ системи відліку, що рухається відносно K у додатному напрямку осі ОХ із швидкістю $V = 0{,}6c$?

(73,8°)

5.22. Дві частинки рухаються назустріч одна одній із швидкостями $v_1 = 0{,}5c$ і $v_2 = 0{,}75c$ уздовж осі OX деякої K-системи відліку. Знайти, з якою швидкістю:

– рухаються частинки одна відносно іншої;
– змінюється відстань між ними в K-системі відліку.

(0,91c; 1,25c)

5.23. Дві частинки рухаються з однаковою швидкістю v у взаємно перпендикулярних напрямках. Знайти модуль відносної швидкості частинок $v_в$.

$$\left(v_в = v\sqrt{2-(v/c)^2}\right)$$

Релятивістський імпульс. Кінетична і повна енергія релятивістської частинки

5.24. Знайти різницю $\Delta v = c - v$ між граничною швидкістю і швидкістю руху частинки, релятивістська маса котрої в 40000 разів перевищує її власну масу (масу спокою).

(Δv = 9,4 см/с)

5.25. Швидкість релятивістської частинки v_0. У скільки разів $\eta = v/v_0$ треба збільшити швидкість частинки, аби її релятивістська маса збільшилась удвічі?

$$\left(\eta = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{3c^2}{v_0^2}}\right)$$

5.26. Швидкість релятивістської частинки v_0. У скільки разів $\eta = v/v_0$ треба збільшити швидкість частинки, аби її імпульс збільшився в 2 рази?

$$\left(\eta = \frac{2}{\sqrt{1+\left(3v_0^2/c^2\right)}}\right)$$

5.27. Знайти швидкість руху частинки, імпульс якої складає $p = mc$.

$$\left(v = \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$$

5.28. Частинка з масою спокою m_0 у момент $t = 0$ починає рухатися під дією сталої сили $\vec{F}$.

– знайти залежність $v(t)$ швидкості частки від часу;

– отримати наближені вирази $v(t)$ при малих $(v \ll c)$ та великих $(v \sim c)$ швидкостях і показати приблизний графік залежності $v(t)$.

$$\left(v = \frac{c}{\sqrt{1+\left(m_0 c/Ft\right)^2}} \right)$$

5.29. Релятивістська частинка з масою спокою m_0 рухається уздовж осі x згідно із законом $x = \alpha t^2/2$, де $\alpha = const$. Визначити залежність від часу $F(t)$ сили, що діє на частинку.

$$\left(F = \frac{\alpha m_0}{\left(1-(\alpha^2 t^2 / c^2)\right)^{3/2}} \right)$$

5.30. Частинка з масою спокою m_0 рухається уздовж осі OX згідно із законом $x = \sqrt{a^2 + c^2 t^2}$, де a – стала. Знайти силу F, що діє на частинку.

$$\left(F = \frac{m_0 c^2}{a} \right)$$

5.31. На нерухому частинку маси m_0 у момент $t = 0$ починає діяти незмінна за напрямком сила $F = F_0 v_0 / v$, де v – швидкість частинки, F_0 і $v_0 \ll c$ – задані сталі.

1) визначити залежність швидкості частинки від часу $v(t)$;
2) отримати наближені вирази $v(t)$ при малих та великих швидкостях;
3) показати приблизний графік $v(t)$.

Порада. Для зручності викладок перейти до величини $\beta = (v / c)$.

$$\left(1)\ v = c\frac{\sqrt{\alpha t(2+\alpha t)}}{1+\alpha t};\quad 2а)\ v = c\sqrt{2\alpha t};\quad 2б)\ v = c\sqrt{\frac{1+(2/\alpha t)}{1+(2/\alpha t)+(1/\alpha t)^2}};\quad \alpha = \frac{F_0 v_0}{m_0 c^2} \right)$$

5.32. При якій швидкості частинки v її повна енергія в два рази перевищує енергію спокою?

$$\left(v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 0{,}867c \right)$$

5.33. З якою швидкістю рухається частинка із власною масою m_0, якщо її кінетична енергія $K = (m_0 c^2/2)$?

$$\left(v = \frac{\sqrt{5}}{3} c \approx 2{,}24 \cdot 10^8 \text{ м/с} \right)$$

5.34. З якою швидкістю рухається частинка, якщо її кінетична енергія $K=(mc^2/2)$, де m – релятивістська маса?

$$\left(v=\frac{c}{2}\right)$$

5.35. При якій швидкості частинки v її кінетична енергія в два рази перевищує енергію спокою?

$$\left(v=\frac{2\sqrt{2}}{3}c=0{,}94c\right)$$

5.36. При якій швидкості частинки v її кінетична енергія складає 25% від повної енергії?

$$\left(v=0{,}6c\right)$$

5.37. Знайти прискорюючу напругу U, яку має пройти електрон, аби розігнатися із стану спокою до швидкості $0{,}95c$?

($U = 1{,}1\cdot10^6$ В)

5.38. Яку роботу A потрібно виконати, щоби збільшити швидкість частинки з масою спокою m_0 від $v_1 = 0{,}6c$ до $v_2 = 0{,}8c$? На скільки відсотків $\eta=\left(A-A'\right)/A$ величина A відрізняється від значення A' обчисленого за класичною (нерелятивістською) формулою?

($A = 0{,}42\ m_0c^2$; $\eta = 67\%$)

5.39. Вивести формулу, що виражає імпульс p релятивістської частинки з масою спокою m_0, через кінетичну енергією K.

$$\left(p=\frac{1}{c}\sqrt{K\left(K+2m_0c^2\right)}\right)$$

5.40. Дві не взаємодіючі частинки з масою спокою m_0 і імпульсом p рухаються назустріч одна одній і після непружного зіткнення утворюють складену частинку. Чому дорівнює маса спокою M_0 створеної частинки?

$$\left(M_0=\frac{2\sqrt{p^2+m_0{}^2c^2}}{c}\right)$$

5.41. Частинка з масою спокою m_0, що рухається зі швидкістю $v = (4/5)c$, непружно стикається з нерухомою часткою тієї ж маси. Знайти масу спокою M_0 складеної частки, що утворилася.

$$\left(M_0=\frac{4m_0}{\sqrt{3}}\right)$$

5.42. Частинка з масою спокою m_0 і кінетичною енергією K непружно стикається із нерухомою частинкою такої самої маси. Знайти масу спокою M_0 і швидкість v складеної частинки, що утворилася.

$$\left(M_0 = \frac{1}{c}\sqrt{2m_0(K + 2m_0c^2)}\,, \qquad v = c\sqrt{\frac{K}{2m_0c^2 + K}} \right)$$

5.43. На нагрівання тіла витрачена енергія Q = 1 Дж. На скільки збільшилася маса тіла?

($\Delta m_0 = 1{,}1\cdot 10^{-17}$ кг)

5.44. Густина потоку енергії електромагнітного випромінювання Сонця поблизу Землі складає 1,4 кВт/м^2. Яку масу Δm через це втрачає Сонце за 1 с і за який час τ воно втратить 1% маси. Прийняти відстань між Сонцем і Землею $R = 1{,}5\cdot 10^{11}$ м і масу Сонця $m = 2\cdot 10^{30}$ кг

(Δm = 4,4 млн. т; τ = 1,43 млрд. років)

5.45. При поділі ядер урану та деяких інших елементів сумарна маса спокою «дочірніх» ядер виявляється меншою за масу «материнських» ядер, тож виділяється енергія. На цьому ґрунтується робота АЕС. Оцінити, скільки мазуту треба спалити на тепловій електростанції, аби отримати стільки ж енергії, як і при “згорянні” 1 г урану, якщо при поділі одного ядра в середньому виділяється біля $1{,}6\cdot 10^{-13}$ Дж енергії. Прийняти масу ядра урану $4\cdot 10^{-25}$ кг і теплотворність мазуту 40 кДж/кг.

(10 т)

6. Механічні коливання

6.1. Зв'язок між параметрами гармонічних коливань:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

6.2. Частота коливань матеріальної точки маси m під дією сили $F = -kx$:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

6.3. Період гармонічних коливань і власна частота фізичного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}.$$

6.4. Зведена довжина фізичного маятника:

$$l_{зв} = \frac{I}{ml}.$$

6.5. Частота вільних загасаючих коливань за наявності гальмівної сили $\vec{F} = -r\vec{v}$:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \beta = \frac{r}{2m} - \text{коефіцієнт загасання.}$$

6.6. Амплітуда загасаючих коливань:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}.$$

6.7. Характеристики загасання:

час релаксації $\tau = \frac{1}{\beta};$

логарифмічний декремент загасання $\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T;$

добротність коливальної системи $Q = \frac{\pi}{\lambda}.$

6.8. Енергія загасаючих коливань при слабкому загасанні $(\beta << \omega_0)$:

$$W = W_0 e^{-2\beta t}.$$

6.9. Відносна втрата енергії коливань за один період при слабкому загасанні:

$$\frac{\delta W}{W} = \frac{2\pi}{Q}.$$

Характеристики гармонічних коливань

6.1. Матеріальна точка масою m = 0,2 кг здійснює коливання вздовж осі OX за законом $x = 0{,}08\cos(20\pi t + \pi/4)$ м. Знайти залежності від часу швидкості, прискорення та сили, що діє на точку, а також амплітудні значення цих величин.

316 і 63? $$\left(\begin{array}{l} v_x = -5{,}03\sin(20\pi t + \pi/4);\ a_x = 315{,}83\cos(20\pi t + \pi/4);\ F_x = ma_x; \\ v_m = 5 \text{ м/с};\ a_m = 316 \text{ м/с}^2;\ F_m = 63 \text{ Н}. \end{array}\right)$$

6.2. За умовою попередньої задачі визначити кінетичну, потенціальну та повну енергію точки

$$\left(K = 2{,}5\cos^2(20\pi t + 3\pi/4)\text{Дж};\ \ U = 2{,}5\cos^2(20\pi t + 5\pi/4)\text{Дж};\ \ W = 2{,}5\text{Дж}\right)$$

6.3. За умовою попередньої задачі визначити лінійну частоту та період зміни кінетичної енергії.

(20 Гц; 50 мс)

6.4. Частинка здійснює гармонічні коливання з амплітудою A і періодом T. Знайти:

– час t_1, за який зміщення частинки змінюється від 0 до $A/2$;
– час t_2, за який зміщення змінюється від $A/2$ до A.

$$\left(t_1 = \frac{1}{12}T;\quad t_2 = \frac{1}{6}T\right)$$

6.5. Коливання матеріальної точки відбуваються за законом $x = 4\cdot\cos^2(0{,}5t)\cdot\sin(1000\cdot t)$. Розкласти коливання на гармоніки й зобразити їхній спектр.

$$(x = 2\sin 1000t + \sin 1001t + \sin 999t)$$

Динаміка гармонічних коливань

6.6. Точка здійснює гармонічні коливання з амплітудою X під дією пружної сили $F = -kx$. Знайти роботу цієї сили за один період коливань.

(0)

6.7. Вантаж масою m, що підвішений на пружині, розтягає її на Δl. З якою частотою почне коливатися вантаж, якщо його трохи відтягнути вниз і відпустити?

$$\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}\right)$$

6.8. Знайти період малих власних коливань стовпчика рідини довжини l в U – подібній трубці. В'язкістю знехтувати.

$$\left(T = \pi\sqrt{\frac{2l}{g}} \right)$$

6.9. Визначити період малих вільних вертикальних коливань вміщеної в рідину тонкостінної сферичної оболонки радіуса R, якщо у стані рівноваги вона є зануреною рівно наполовину.

$$\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{3g}} \right)$$

6.10. Знайти період малих вільних вертикальних коливань зануреного у воду циліндричного поплавця довжини l = 10 см, густина матеріалу якого ρ = 0,8 г/см^3.

$$\left(T = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}\frac{l}{g}} \approx 0{,}5\,\text{с} \right)$$

6.11. Вивести формулу періоду коливань пружинного маятника (кулі маси m, що підвішена на невагомій пружині жорсткістю k).

$$\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \right)$$

6.12. Вивести формулу періоду T малих коливань математичного маятника довжиною l у повітрі, нехтуючи тертям у підвісі та дією середовища.

$$\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \right)$$

6.13. Знайти період малих коливань математичного маятника довжиною l = 20 см, що занурений у рідину з густиною в η = 3,0 рази меншою за густину речовини маятника. Опором рухові в рідині знехтувати.

$$\left(T = T_0\sqrt{\frac{\eta}{\eta - 1}} = 1{,}1\text{с}, \quad \text{де } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \right)$$

6.14. Знайти залежність від часу сили натягу нитки $F(t)$ математичного маятника масою m і довжиною l при максимальному куті відхилення нитки від вертикалі φ_0. Коливання вважати гармонічними.

$$\left(F = mg(3\cos\varphi(t) - 2\cos\varphi_0),\ \text{де}\ \ \varphi(t) = t\sqrt{\frac{g}{l}} \right)$$

у мене: $F(t) = mg(\varphi_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + \cos\varphi(t))$, $де\ \varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$.

6.15. Тонкий поршень масою m і площею S ділить закритий горизонтальний циліндр із газом навпіл. Уважаючи процес ізотермічним, визначити частоту малих вільних коливань поршня. Довжина циліндра l, тиск газу P, тертя відсутнє.

$$\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{4PS}{ml}}\right)$$

6.16. Фізичний маятник у вигляді однорідного стрижня довжиною l, що підвішений за кінець, здійснює малі вільні коливання. Знайти період коливань T і зведену довжину $l_{зв}$ маятника за відсутності сил тертя та опору.

$$\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}};\quad l_{зв} = \frac{2}{3}l\right)$$

6.17. На якій відстані x_m від центра мас потрібно закріпити на горизонтальній осі тонкий стрижень заданої довжини l, аби він мав максимальну можливу частоту ω_m малих вільних коливань? Знайти величину ω_m.

$$\left(x_m = \frac{l}{2\sqrt{3}},\quad \omega_m = \sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{l}}\right)$$

6.18. Фізичний маятник, який має власну частоту ω_0, відхилили до положення нестійкої рівноваги й відпустили з незначним поштовхом. Знайти максимальну кутову швидкість маятника. Тертя відсутнє.

$$(\omega = 2\omega_0)$$

6.19. Тонка однорідна пластинка у формі правильного трикутника з висотою h здійснює малі коливання навколо горизонтальної осі, що співпадає з однією зі сторін трикутника. Знайти період коливань і зведену довжину такого маятника.

$$\left(T = \pi\sqrt{\frac{2h}{g}},\qquad l_{зв} = \frac{1}{2}h\right)$$

6.20. Горизонтальна дошка, на якій лежить брусок, здійснює поздовжні гармонічні коливання з амплітудою $A = 10$ см. Знайти коефіцієнт тертя між дошкою й бруском, якщо він починає ковзати при періоді коливань дошки меншому за $T_0 = 1{,}0$ с.

$$\left(k = \frac{4\pi^2 A}{gT_0^2} = 0{,}4\right)$$

6.21. Горизонтальну дошку довжини l кладуть на два котки (роли) так, що її центр мас є трохи зміщений в бік одного з котків, рис. 6.1. Показати, що при обертанні котків у зустрічних напрямах дошка буде здійснювати поздовжні гармонічні коливання, та визначити їхній період.

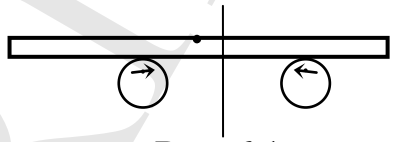


Рис. 6.1.

$$\left(T = \pi\sqrt{\frac{2l}{g}}\right)$$

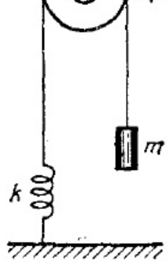
6.22. Маленьку муфту маси m, яка може рухатися з невеликим тертям по довгому горизонтальному стержню, з'єднали з прикріпленою до стержня невагомою пружиною довжини l_0 і жорсткості k, що навита з нерозтяжної дротини довжини L. Стержень починають обертати з кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, що проходить через точку кріплення пружини. Визначити характер і параметри руху муфти відносно стержня в процесі встановлення руху.

$$\left(\begin{array}{l} \text{При } k > \omega^2 m - \text{загасаючі коливання з частотою } \Omega \approx \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} \text{ і початковою амплітудою} \\ A_0 = (\omega/\omega_0)\,l_0 \text{ навколо точки на відстані } l = l_0 \Big/ \left(1 - (\omega_0/\omega)^2\right) \text{ від осі; } \omega_0 = \sqrt{k/m}. \\ \text{При } k \le \omega^2 m - \text{монотонне віддалення від осі на відстань } l = L \text{ (до повного розтягу пружини).} \end{array}\right)$$

6.23. Горизонтальна платформа здійснює вертикальні коливання за законом $x = A\cdot\cos\omega t$. На платформі лежить шайба з непружного матеріалу. За якої умови шайба відриватиметься від платформи?

$$(A\omega^2 \ge g)$$

6.24. Знайти частоту ω_0 малих крутильних коливань суцільного однорідного циліндра масою M, до якого підвішено на шнурі з пружиною тягарець маси m, як показано на рис. 6.2. Жорсткість пружини k, ковзання шнура по циліндру відсутнє. Масою пружини й шнура, а також тертям в осі знехтувати.



$$\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + (M/2)}}\right)$$

Рис. 6.2.

6.25. До не розтягненої вертикальної пружини із закріпленим верхнім кінцем підвісили і без поштовху відпустили тіло масою m. Жорсткість пружини дорівнює k. Нехтуючи масою пружини та тертям і опором, знайти:

– закон руху тіла $y(t)$, де y – його зміщення із початкового положення.
– максимальний і мінімальний розтяг пружини.

$$\left(y = \frac{mg}{k}(1-\cos\omega_0 t),\ \text{де}\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};\quad \frac{2mg}{k},\ 0 \right)$$

6.26. Кулька маси m = 50 г і радіуса r = 1,0 см, що підвішена на невагомій пружині жорсткості k = 2,0 Н/м і занурена в рідину із в'язкістю η = 10 Н/(м·с), здійснює вільні коливання. Визначити власну частоту ν_0, час релаксації τ і добротність Q такого механічного осцилятора.

$$\left(\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1{,}0\ \text{Гц};\quad \tau = \frac{1}{3\pi r\eta} = 1{,}1\ \text{с};\quad Q = \pi\nu_0\tau \approx 3{,}5 \right)$$

ДОДАТОК. Деякі відомості з диференціювання та інтегрування

1. Скалярну a або векторну $\vec{k}$ сталу можна виносити з-під знаку похідної та інтеграла:

$$f(x)=a\vec{k}\varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df(x)}{dx}=a\vec{k}\,\frac{d\varphi(x)}{dx}; \qquad \int f(x)dx = a\vec{k}\int \varphi(x)dx .$$

2. Похідна (інтеграл) від суми функцій дорівнює сумі похідних (інтегралів) цих функцій:

$$f(x)=\varphi(x)+\phi(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx}=\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\phi}{dx}; \qquad \int f(x)dx=\int \varphi(x)dx+\int \phi(x)dx .$$

3. Невизначений інтеграл функції $f(x)$

$$\int f(x)dx = F(x)+C ,$$

де C – довільної стала і $F(x)$ – первісна, тобто функція, для якої $f(x)$ є похідною:

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x).$$

4. Визначений інтеграл функції $f(x)$ на заданому інтервалі $[x_1, x_2]$ дорівнює різниці значень первісної $F(x)$ на його межах (формула Ньютона-Лейбніца):

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2)-F(x_1).$$

5. Визначений інтеграл геометрично відображається площею криволінійної трапеції, що утворена ділянкою графіка функції $f(x)$ на відрізку $[x_1, x_2]$.

6. Похідна функції $f(x)=\varphi(x)\cdot\phi(x)$:

$$\frac{df}{dx}=\frac{d\varphi}{dx}\cdot\phi+\varphi\cdot\frac{d\phi}{dx}$$

7. Похідна функції $f(x)=\varphi(x)/\phi(x)$

$$\frac{df}{dx}=\frac{1}{\phi^2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\cdot\phi-\varphi\cdot\frac{d\phi}{dx}\right)$$

8. Похідна складної функції (функції від функції) $f = f\left(\varphi(x)\right)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$$

9. Середнє значення функції $\left\langle f(x) \right\rangle$ на відрізку $X = x_2 - x_1$:

$$\left\langle f(x) \right\rangle = \frac{1}{X} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

10. Похідні та первісні (інтеграли) деяких функцій

$f(x)$	(df/dx)	$\int f(x)\,dx$
$a = const$	0	ax
$x^n \ (n \neq -1)$	nx^{n-1}	$x^{n+1}/(n+1)$
$1/x$	$-1/x^2$	$\ln\lvert x\rvert$
e^{ax}	$a\,e^{x}$	e^{ax}/a
$\ln x$	$1/x$	$x\ln x - x$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\mathrm{tg}\,x$	$1/\cos^2 x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\mathrm{ctg}\,x$	$-1/\sin^2 x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$