

6. Що називається добротністю контуру? Отримати зв'язок між добротністю контуру та часом релаксації коливальних.
7. Знайти вираз добротності через параметри контура  $R, L, C$  при великому та при малому загасанні.
8. Що таке критичний опір контуру й від чого та як він залежить?
9. Який вигляд має залежність напруги на конденсаторі контуру від часу, якщо активний опір контуру дорівнює критичному?
10. Які коливання будуть аперіодичними?
11. Знайти зв'язок між добротністю та критичним опором контуру при слабкому загасанні.
12. Доказати, що логарифмічний декремент загасання можна визначати як за формулою  $\lambda = \frac{1}{5} \ln \frac{A_i}{A_{i+5}}$ .

### Література

1. Кучерук І.М., Горбачук І.І., Загальний курс фізики, т. 2, § 12.2, Техніка, К., 2001.
2. Иродов И.Е., Электромагнетизм. Основные законы, § 11.2, Физ-мат. лит., М., 2002.
3. Вивчення вільних коливальних в електричному коливальному контурі: Метод. вказівки до виконання лабораторної роботи з курсу „Загальна фізика”, В.П.Бригинець, О.О.Гусева, І.В. Лінчевський, Н.О.Якуніна. - К.: НТУУ”КПІ”, 2008.- 12 с.

### Лабораторна робота №3-17

#### Дослідження характеристик вимушених коливальних в послідовному коливальному контурі

**Мета роботи:** експериментальне дослідження частотної залежності напруги на конденсаторі при вимушених коливаннях у послідовному коливальному контурі. Визначення резонансної частоти, смуги пропускання та добротності контуру.

**Обладнання:** макет, генератор НЧ, частотомір (цифровий вольтметр).

#### Теоретичні відомості

**Вимушені коливання в послідовному контурі.** Коливання, що відбуваються внаслідок періодичного зовнішнього впливу на будь-яку фізичну систему, називаються *вимушеними*. Особливий інтерес являють вимушені коливання осциляторів, тобто, систем, у яких можливі вільні коливання. Прикладом електромагнітного осцилятора є послідовний коливальний контур, – електричне коло, що складається з котушки індуктивності  $L$ , конденсатора ємності  $C$  і резистора з опором  $R$ . Для створення вимушених коливальних у контур включають джерело (генератор) змінної ЕРС  $E(t)$ .

У даній роботі досліджується послідовний контур, схема якого показана на рис. 1.

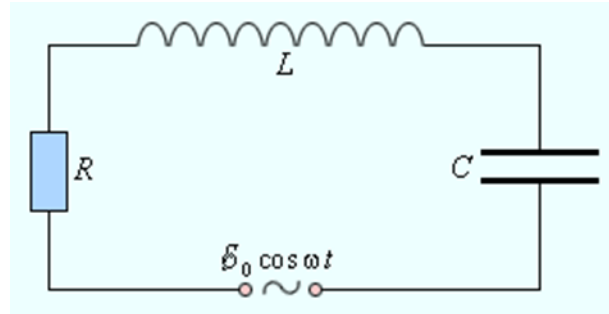


Рис. 1.

Під дією генератора в контурі виникають і підтримуються вимушені електромагнітні коливання, тобто, періодичні зміни напруги на елементах контуру та струму в ньому.

Найпростішим і найважливішим у теорії видом коливань є гармонічні вимушені коливання, що створюються генератором з ЕРС:

$$E(t) = E_0 \cos \omega t \quad (1)$$

За законом Ома для ділянки кола квазістаціонарного електричного струму (струму, величина якого в даний момент однакова у всіх елементах кола) можна записати:

$$U_R + U_C = E + E_S$$

або

$$IR + \varphi_1 - \varphi_2 = -L \frac{dI}{dt} + E(t) \quad (2)$$

де  $U_C = \varphi_1 - \varphi_2 = q/C$  – різниця потенціалів (напруга) на обкладках конденсатора,  $U_R = IR$  – напруга на опорі  $R$ ,  $E_S = -L \frac{dI}{dt}$  – ЕРС самоіндукції в котушці,  $E(t)$  – ЕРС генератора (1), внутрішній опір якого вважається малим у порівнянні з  $R$ .

Виразимо величини  $U_C$  та  $I$  через заряд конденсатора  $q$ :  $U_C = q/C$ ,  $I = \frac{dq}{dt}$ , тоді  $E_S = -L \frac{d^2q}{dt^2}$ . Зробивши такі підстановки в (2), і, поділивши на  $L$ , одержимо **диференціальне рівняння вимушених електричних коливань** у контурі:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{E_0}{L} \cos \omega t,$$

або

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_0}{L} \cos \omega t, \quad (3)$$

де  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  – власна частота контуру, тобто, частота вільних коливань у цьому контурі за умови  $R = 0$ , і  $\beta = R/2L$  – коефіцієнт загасання контуру.

Рівняння (3) являє собою неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. З математики відомо, що його загальний розв'язок складається із загального розв'язку  $q^o(t)$  відповідного однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку  $q(t)$  повного рівняння. Однорідна частина (3) має вигляд

$$\frac{d^2 q^0}{dt^2} + 2\beta \frac{dq^0}{dt} + \omega_0^2 q^0 = 0$$

і відповідає вільним загасаючим коливанням у контурі, амплітуда яких змінюється за законом  $A(t) = q_0 e^{-\beta t}$  ([1], § 12.2, або [2], § 11.2.). Такі коливання виникають у момент включення генератора й відіграють суттєву роль тільки протягом невеликого проміжку часу  $\sim 1/\beta$ , після якого в контурі встановлюються стаціонарні гармонічні коливання з частотою генератора  $\omega$  і сталою амплітудою. Тому частинний розв'язок рівняння (3), що відповідає незагасаючим вимушеним коливанням заряду конденсатора контуру можна подати у вигляді:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t - \varphi_0) \quad (4)$$

де  $q_0$  – амплітуда, а  $\varphi_0$  – зсув фаз між коливаннями заряду конденсатора та ЕРС генератора.

Після підстановки (4) у (3) можна отримати ([1], § 12.3, або [2], § 11.3.) такі вирази  $q_0$  і  $\varphi_0$ :

$$q_0 = \frac{E_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (5)$$

$$\varphi_0 = -\arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} . \quad (6)$$

На практиці режим контуру визначають не зарядом конденсатора, а напругою на різних елементах і силою струму в контурі. Зокрема, з урахуванням (4), рівняння вимушених коливань напруги на конденсаторі  $U_C = q/C$  має вигляд:

$$U_{c0} \cos(\omega t - \varphi_0) ,$$

де амплітуда напруги

$$U_{c0} = \frac{E_0}{LC \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{E_0 \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} . \quad (7)$$

Продиференціювавши (4) по  $t$ , знайдемо рівняння вимушених коливань сили струму  $I = dq/dt$  у контурі:

$$I = -\omega q_0 \sin(\omega t - \varphi_0) = I_0 \cos(\omega t - \varphi) , \quad (8)$$

де амплітуда струму  $I_0$  і зсув фаз  $\varphi$  між вимушеними коливаннями струму та ЕРС генератора визначаються виразами:

$$I_0 = \frac{E_0 \omega}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} , \quad (9)$$

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\pi}{2} . \quad (10)$$

**Амплітудні характеристики контуру. Резонанс.** Характерною особливістю вимушених коливань є залежність (причому не монотонна) їх амплітуди від частоти, що впливає з виразів (7) і (9), які називаються амплітудними характеристиками контуру. Справді, якщо частоту  $\omega$  поступово збільшувати, починаючи з нуля, то величина  $\omega_0^2 - \omega^2$  у

знаменнику цих виразів спочатку зменшується, потім проходить через 0 і далі необмежено зростає. Відповідно, амплітуда вимушених коливань спочатку зростає, потім сягає максимуму, й далі асимптотично прямує до нуля. Отже, в коливальному контурі можливий **резонанс** – зростання амплітуди вимушених коливань до максимальної величини при наближенні частоти коливань до певного значення  $\omega_{рез}$ , яке називають **резонансною частотою**.

Резонансну частоту напруги на конденсаторі  $\omega_u$  можна знайти, дослідивши вираз (7) на екстремум. Для цього в (7) треба продиференціювати по  $\omega$  підкорінний вираз і прирівняти похідну до нуля. Результат виходить такий:

$$\omega_u = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (11)$$

Отже, резонансна частота напруги на конденсаторі менша, ніж власна частота

контру, причому, тим менша, чим більше загасання  $\beta$ . Аналогічно, диференціюванням по  $\omega$  виразу (9), знаходиться резонансна частота сили струму  $\omega_i$ , яка виявляється рівною власній частоті контру:

$$\omega_i = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (12)$$

З огляду на явище резонансу, амплітудні характеристики, зокрема,  $U_{c0} = U_{c0}(\omega)$  та  $I_0 = I_0(\omega)$ , інакше називають резонансними характеристиками, а їх графіки – резонансними кривими.

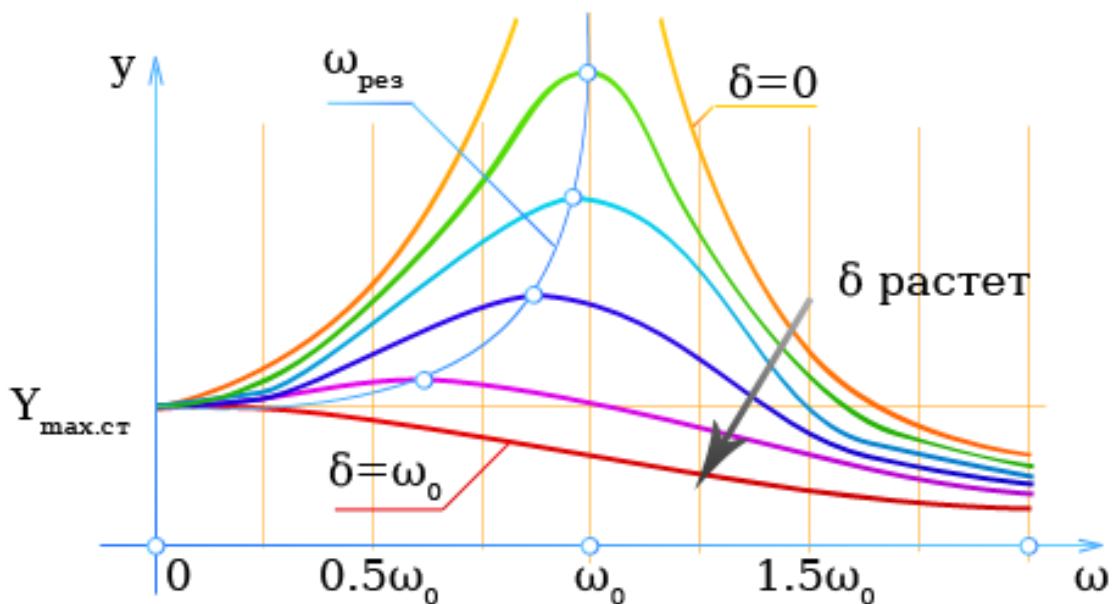


Рис.2

На рис.2 показано вид резонансних кривих напруги на конденсаторі контру для трьох різних значень загасання, а на рис.3 – аналогічні резонансні криві сили струму в послідовному контурі.

Характерно, що резонансні криві тим вужчі й вищі (тим гостріший резонанс), чим менше загасання контру. Це цілком природньо, оскільки при

зменшенні загасання зменшуються втрати енергії коливань.

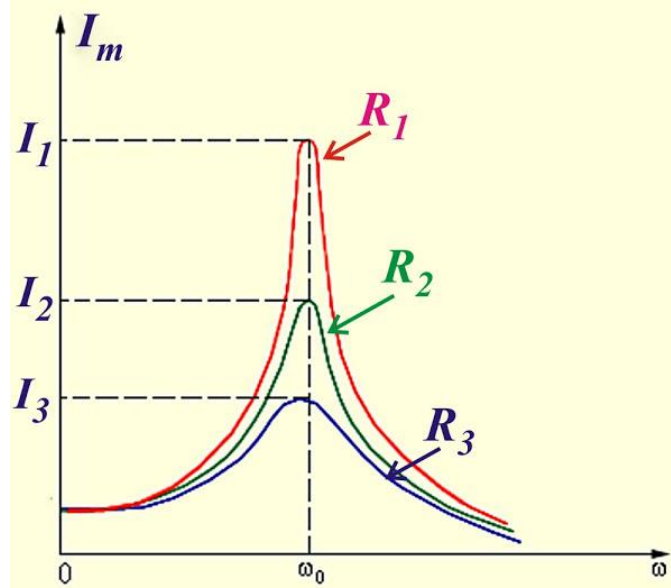


Рис.3

Існує зв'язок між резонансними кривими й іншою характеристикою контуру – його добротністю  $Q$  (про добротність див. [1], § 11.2.). При слабкому загасанні ( $\beta \ll \omega_0$ ) добротність виражається через параметри контуру формулою

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (13)$$

Якщо в (7) замість  $\omega$  підставити значення (11), то вийде такий вираз для резонансної амплітуди напруги  $U_m$  на конденсаторі:

$$U_p = \frac{E_0 \omega_0^2}{\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

При слабкому загасанні величиню  $\beta^2$  під коренем можна знехтувати, і тоді

$$U_p = E_0 \frac{\omega_0}{2\beta} = E_0 Q. \text{ Отже, добротність контуру}$$

$$Q = \frac{U_m}{E_0} \quad (13a)$$

Таким чином, на конденсаторі послідовного контуру відбувається підсилення напруги, а добротність виступає в якості коефіцієнта підсилення.

На цьому базується вся техніка приймання радіосигналів. У кожному радіоприймачі є входні контури, в яких можна на свій розсуд установлювати резонансну частоту і, тим самим, різко підсилювати сигнал тільки від обраної станції (налаштовуватися на дану станцію).

Якщо в (9) замість  $\omega$  підставити вираз (12), отримаємо резонансну амплітуду струму  $I_m$ :

$$I_p = \frac{E_0}{2\beta L} = \frac{E_0}{R} \quad (14)$$

З параметрів резонансної кривої струму теж можна визначити добротність контуру  $Q$  при слабкому загасанні. Можна показати, що в цьому випадку вона визначається, як

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (15)$$

Величина  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  називається шириною резонансної кривої або **смугою пропускання контуру**.

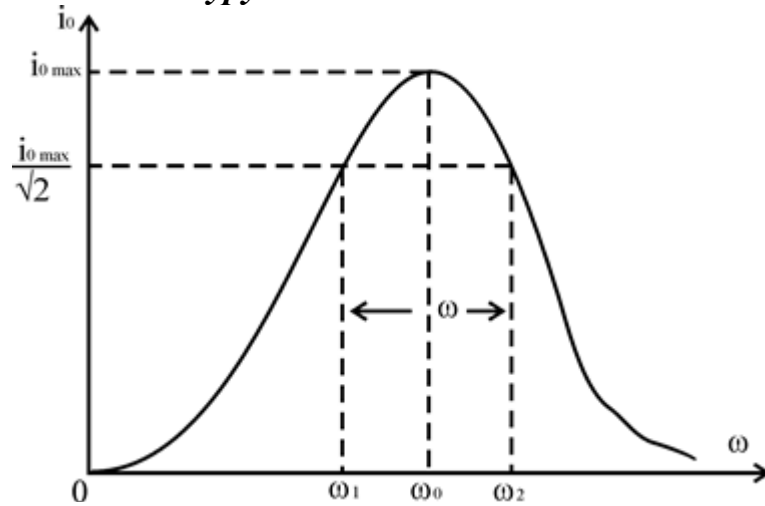


Рис.4

На рисунку 4 частоти  $\omega_1$  і  $\omega_2$  відповідають амплітуді струму  $I_0 = I_p/\sqrt{2}$ .

На резонансній кривій відзначений рівень  $I_p/\sqrt{2}$  і частоти  $\omega_1$  і  $\omega_2$ .

При такій амплітуді струму на опорі  $R$  виділяється половина резонансної потужності.

### Опис лабораторної установки

Для вивчення вимушених коливань у контурі використовується установка, зображена на рис.5.



Рис. 5

За допомогою цієї установки можна вивчити залежність напруги на конденсаторі  $C$  (перемикач  $K1$  у положенні 2) або на опорах  $R1 - R3$  (перемикач  $K1$  у положенні 1) від частоти  $\omega$  зовнішнього генератора (рис.6).



Рис.6

Вимірювання діючої напруги здійснюється за допомогою цифрового вольтметра  $V$  (рис.7).



Рис.7

Активний опір контуру можна змінювати за допомогою резисторів  $R1 - R3$  та перемикачів  $K2 - K4$ .

### Порядок виконання роботи

1. Увімкнути звуковий генератор в мережу. Встановити на виході генератора напругу 10 В.
2. Установити перемикач  $K1$  в положення 2,  $K2$  у положення 1,  $K3$  у положення 2 і  $K4$  у положення 2. (При цьому в контур буде увімкнений опір  $R1$ ). Змінюючи частоту генератора  $f$ , знайти резонансну частоту  $f_u$ , при якій напруга на конденсаторі буде максимальною  $U_{c0} = U_{cm}$ . Значення  $f_u$  та  $U_{cm}$  занести до табл. 1.
3. Зменшуючи й збільшуючи частоту генератора в обидва боки від резонансної частоти (узяти 8-10 значень), виміряти амплітуди напруги  $U_{c0}$ . Значення  $f$  і  $U_{c0}$  занести до табл. 1.

Таблиця 1

R1	$f_u$									
	$U_{C_0}$									
R2	$f_u$									
	$U_{C_0}$									
R3	$f_u$									
	$U_{C_0}$									

4. Перевести перемикач  $K1$  у положення 1. (При цьому вольтметр  $V$  буде показувати напругу на опорі контуру). Змінюючи частоту генератора, знайти резонансну частоту  $f_i$ , при якій напруга на резисторі  $R1$  буде максимальною. Обчислити амплітуду напруги  $U_{Rm}$  на резисторі  $R1$  при резонансній частоті  $f_i$ . Значення  $R1$ ,  $f_i$  та  $U_{Rm}$  занести до табл. 2.

5. Зменшуючи і збільшуючи частоту генератора в обидва боки від резонансної частоти (взяти 8-10 значень частоти), обчислити амплітуди напруги  $U_{R0}$

Значення  $f_i$  та  $U_{R0}$  занести до табл. 2.

Для кожного значення  $U_{R0}$  знайти амплітуду струму  $I_0 = U_{R0}/R$  і занести результат у табл. 2.

Таблиця 2

R1	$f_i$									
	$U_{R0}$									
	$I_0$									
R2	$f_i$									
	$U_{R0}$									
	$I_0$									
R3	$f_i$									
	$U_{R0}$									
	$I_0$									

6. Виміри п.п. 2 – 5 повторити при опорі контуру  $R2$  та  $R3$ . Вибір опорів здійснити за допомогою перемикачів  $K2 – K4$ .

### Обробка результатів вимірювань

1. За даними табл. 1 побудувати резонансні криві  $U_{C_0} = U(f)$  для різних значень опору  $R$ .

2. Визначити добротність контуру за формулою (13а) для різних значень  $R$ . За отриманими даними побудувати графік  $Q = Q(1/R)$ , відкладаючи по осі ординат добротність  $Q$ , а по осі абсцис – обернений опір контура  $1/R$ .

3. За даними табл. 2 побудувати резонансні криві  $I_0 = I(f)$  для різних значень опору  $R$ .

4. Із графіків п. 3 визначити ширини  $\Delta\omega$  резонансних кривих струму та обчислити добротність контуру  $Q$  для різних значень  $R$  за формулою (15).

5. Отримані значення  $Q$  нанести на графік п. 2 і порівняти результати, отримані в п. 2 і п. 3.



### Контрольні запитання

1. Записати диференціальне рівняння вимушених коливань у послідовному контурі. Який вигляд має загальний розв'язок цього рівняння?
2. Що таке стаціонарні вимушені коливання та який вигляд має їх рівняння?
3. Записати формули для амплітудної характеристики напруги на конденсаторі контура та резонансної частоти напруги.
4. Вивести формулу (11).
5. Записати формули для амплітудної характеристики струму в контурі та резонансної частоти струму.
6. Вивести формулу (12).
7. Який вигляд мають резонансні криві напруги на конденсаторі та струму в контурі при різних значеннях опору  $R$ ?
8. Що таке добротність контура? Отримати формулу (13).
9. Як змінюються параметри резонансних кривих із зміною добротності?
10. Як можна визначити добротність за параметрами резонансної кривої напруги на конденсаторі? Отримати формулу (13а).
11. Як можна визначити добротність за параметрами резонансної кривої струму в контурі? Що таке ширина резонансної кривої?
12. Довести вираз (15)
13. Який вигляд має векторна діаграма напруг при вимушених коливаннях у контурі?
14. Як відрізняються векторні діаграми напруг на елементах контуру в залежності від частоти генератора?

### Література

1. Кучерук І.М., Горбачук І.І., Загальний курс фізики, т.2, § 12.3, Техніка, К.2001;
2. Иродов И.Е., Электромагнетизм. Основные законы., Физ-мат лит, М, 2002, §§ 11.2, 11.3.
3. Вивчення вимушених коливань в електричному коливальному контурі: Метод. вказівки до виконання лабораторної роботи з курсу „Загальна фізика”, В.П.Бригинець, О.О.Гусева, І.В. Лінчевський, Н.О.Якуніна. - К.: НТУУ”КПІ”, 2008.- 12 с.