

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В.П. Бригінець, І.М. Репалов, Н.О. Якуніна

Розрахункова робота.
«Магнітне поле струмів у вакуумі»

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний посібник для студентів закладів вищої освіти, які навчаються:
за спеціальністю 123 «Комп'ютерна інженерія»,
освітня програма «Системне програмування та спеціалізовані комп'ютерні системи»;
за спеціальністю 126 «Інформаційні системи та технології»;
освітня програма «Інженерія програмного забезпечення комп'ютерних систем»;
за спеціальністю 153 «Мікро- та наносистемна техніка»,
освітня програма «Мікро- та наноелектроніка»;
за спеціальністю 172 «Телекомунікації та радіотехніка»,
освітні програми «Інтелектуальні технології радіoeлектронної техніки»,
«Інформаційна та комунікаційна радіоінженерія», «Радіотехнічні комп'ютеризовані системи».

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

УДК 537.8

ББК 22.33

Ф 48

Рецензент: В.Й. Котовський завідувач кафедри загальної фізики та моделювання фізичних процесів КПІ ім. Ігоря Сікорського, доктор т.н., професор

Відповідальний редактор: В.М. Локтев В.М. академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 24.06.2022 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 3 від 16.06.2022 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Бригінець Валентин Петрович, к.ф.-м. наук, доцент,

Репалов Ігор Миколайович, доцент кафедри загальної фізики КПІ ім. Ігоря Сікорського, к.ф.-м. наук, доцент,

Якуніна Наталія Олександрівна, доцент кафедри загальної фізики КПІ ім. Ігоря Сікорського, к.ф.-м. наук, доцент.

Ф 48 Розрахункова робота. «Магнітне поле струмів у вакуумі». Навч. посібник / В.П. Бригінець, І.М.Репалов, Н.О. Якуніна – К. : Вид-во «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2022 – 23 с

Наведено методичні вказівки і варіанти завдань до виконання розрахункової роботи на тему "Магнітне поле струмів у вакуумі" курсу загальна фізика. Завдання надаються різних рівнів складності, містяться приклади виконання всіх завдань.

Посібник призначений для студентів, які навчаються у закладах вищої освіти і вивчають нормативну навчальну дисципліну «загальна фізика» з циклу математичної та природничо-наукової підготовки за спеціальностями: 123 «Комп'ютерна інженерія», освітня програма «Системне програмування та спеціалізовані комп'ютерні системи»; за спеціальністю 126 «Інформаційні системи та технології»; освітня програма «Інженерія програмного забезпечення комп'ютерних систем»; за спеціальністю 153 «Мікро- та наносистемна техніка», освітня програма «Мікро- та наноелектроніка»; за спеціальністю 172 «Телекомунікації та радіотехніка», освітні програми «Інтелектуальні технології радіоелектронної техніки», «Інформаційна та комунікаційна радіоінженерія», «Радіотехнічні комп'ютеризовані системи».

Посібник може бути корисним для науково-педагогічних працівників, які викладають курс фізики, під час планування та підготовки завдань до розрахункових робіт та модульного контролю.

© В.П. Бригінець, І.М. Репалов, Н.О. Якуніна , 2022

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

Завдання 1

У координатній площині XOY у вакуумі розміщена прямокутна рамка із сторонами (a, b) та струмом I , рис. 1.

За даними таблиці варіантів Табл.1 розрахувати в заданій точці $P(x; y)$ вектори індукції магнітного поля, що створюється кожною стороною рамки $\vec{B}_i$ та рамкою в цілому $\vec{B}$. Вказати на рисунку напрями всіх векторів.

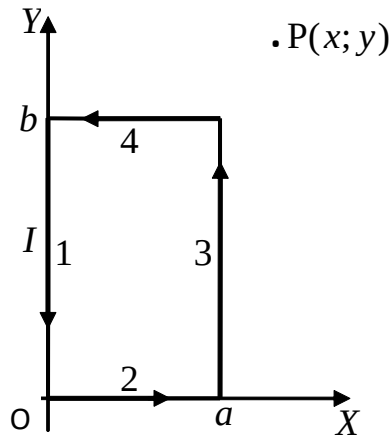


Рис.1

Табл. 1

Варіант	I, A	a, cm	b, cm	$P(x;y), cm.$ Рівень 1	$P(x;y), cm.$ Рівень 2
1	95	2	10	0; -5	-3; 15
2	90	40	35	20; 40	10; 40
3	80	3	9	-1; 9	6; 10
4	70	50	40	-10; 20	60; -10
5	60	4	8	2; 4	-5; -1
6	50	30	45	45; 45	10; 20
7	40	5	7	5; 10	6; 1
8	30	35	50	30; 25	20; -10
9	20	8	4	1; 2	-10; 2
10	10	15	40	15; -10	-1; 8
11	15	9	3	-10; 0	8; 4
12	20	10	35	5; 5	12; 60
13	25	6	10	3; 8	8; -20
14	30	12	8	10; 4	-2; -10
15	35	5	30	10; 0	4; 18
16	40	15	15	-5; -5	17; 14
17	45	30	45	15; -30	2; -20
18	50	14	10	-10; 5	-2; 8
19	55	30	15	20; -15	-15; 20
20	60	8	8	1; 1	2; 15
21	65	20	10	-10; 5	22; 11
22	70	15	40	0; -10	20; -5
23	75	40	40	10; 30	-80; -5
24	80	10	35	15; 35	2; 5
25	85	50	25	-30; 0	40; 30
26	90	4	10	2; -2	3; 2
27	95	45	30	0; 50	-30; 20
28	10	20	45	10; 50	-10; 55
29	80	10	10	9; 1	9; 11
30	60	25	50	25; -25	50; 80

Завдання 2

Магнітне поле створюється струмом, який рівномірно розподілений із лінійною густиною i А/м по поверхні заданого розміру та типу, рис. 2.1 – 2.3. *Примітка.* Лінійна густина i (А/м) дорівнює величині струму, що припадає на одиницю довжини лінії перетину даної поверхні із площиною рисунка.

За даними таблиці варіантів Табл. 2 визначити величину та напрям вектора $\vec{B}$ індукції магнітного поля цього струму на осі O (тип 2) або $O_1(x;y)$ (типи 1,3); за результатами розрахунку побудувати вектор $\vec{B}$ на рисунку.

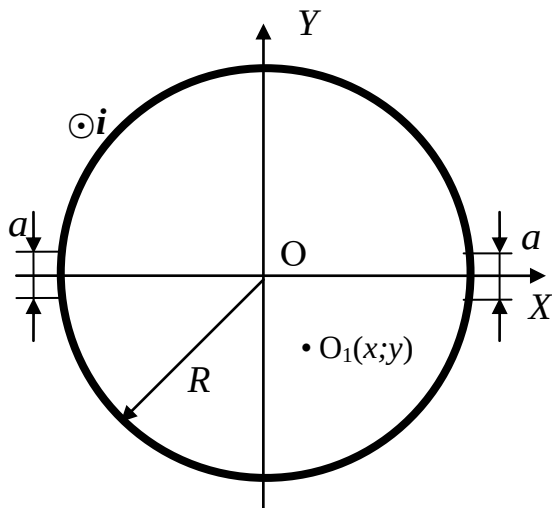


Рис. 2.1. Тип 1: Нескінченна циліндрична поверхня радіуса R . Струм напрямлений паралельно до осі O «до нас» у двох вузьких смугах шириною a («щілинах») струм відсутній.

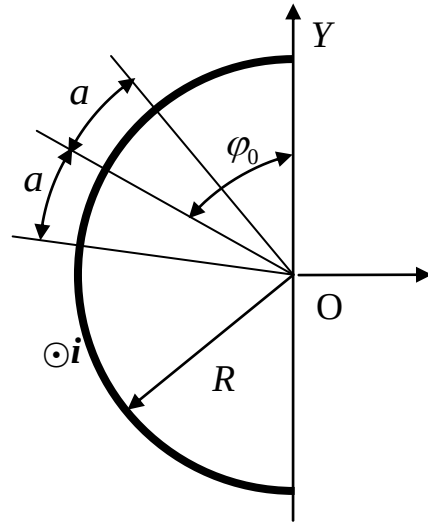


Рис. 2.2. Тип 2: Половина нескінченної циліндричної поверхні радіуса R . Струм скрізь напрямлений перпендикулярно до площини рисунка «до нас». У смугі, що обмежена дугою довжини $2a$, струм відсутній.

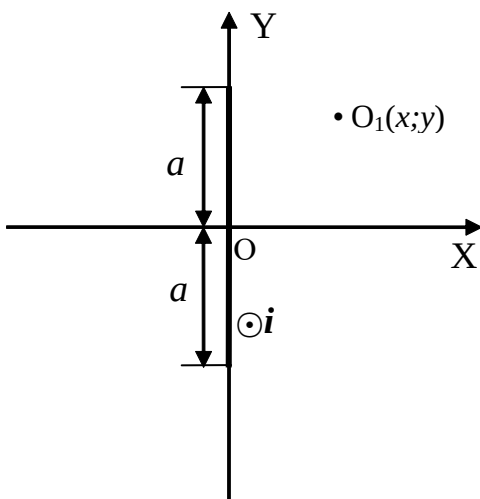


Рис. 2.3. Тип 3: нескінченна плоска стрічка шириною $2a$. Струм напрямлений уздовж осі OZ «до нас».

Табл. 2.

Вар.	Тип	i , А/см	R , см	a , см	φ_0°	$O_1(x;y)$, см
1	2	25	10	1,5	20	
2	1	50	10	0,5		3; 4
3	3	25		5,0		1; 5
4	2	100	15	0,25	30	
5	1	75	5	0,2		4; 2
6	2	20	15	3,0	60	
7	3	10		10		5; 4
8	2	15	20	5	45	
9	3	30		15		10; -5
10	1	15	5	0,1		-4; 1
11	3	20		15		-15; -15
12	2	20	10	1,5	60	
13	1	100	15	0,5		8; 6
14	3	80		20		1; -1
15	1	20	4	0,1		2; -3
16	2	25	15	2,5	90	
17	1	40	25	1,0		10; 10
18	3	60		20		-10; 2
19	2	80	10	2,5	120	
20	1	20	30	0,2		-10; -10
21	2	100	25	5	30	
22	3	120		15		-6; 6
23	2	150	25	5	135	
24	3	75		20		-5; -20
25	1	10	15	0,5		-2; 10
26	3	200		20		8; -10
27	2	50	10	2	150	
28	1	80	25	0,6		12; 16
29	3	100		25		0; -10
30	1	120	30	1,0		-15; -10

Завдання 3

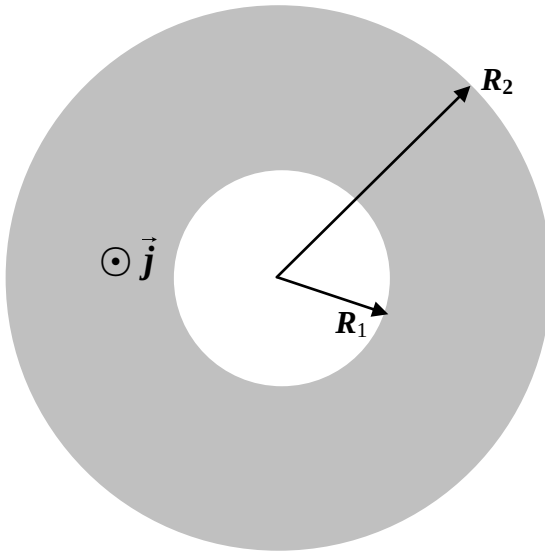


Рис. 3

Уздовж нескінченного порожнистого циліндра ($\mu = 1$) з внутрішнім радіусом R та зовнішнім $R_1 = 3R$ (рис. 3) йде струм, що розподілений по площі перерізу циліндра рівномірно з постійною густиною $\vec{j} = \vec{j}_0$ (рівень 1) або аксіально симетрично з густиною $\vec{j} = \vec{j}(r)$ (рівень 2).

1. Отримати аналітичні вирази індукції магнітного поля циліндра $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ у всьому просторі.

2. За даними таблиці варіантів Табл. 3 розрахувати таблицю значень та побудувати графік $B(\vec{r})$ в інтервалі $0 \leq r \leq 6R$.

Табл. 3

Варіант	$j(r)$	$j_0, \text{A/мм}^2$	$R, \text{см}$
1	$j_0 R^4 \sqrt{r^2 + R^2} / r^5$	0,1	5
2	$j_0 R^2 \ln(r / R) / r^2$	0,2	10
3	$j_0 (R / r) (1 + r / R)^{-1/2}$	0,3	15
4	$j_0 (R / r) \cos(\pi r / 2R) $	0,4	20
5	$j_0 (1 - R / r)$	0,5	25
6	$j_0 (R / r) (1 + \exp(r / R))^{-1}$	0,6	20
7	$j_0 R / \sqrt{r^2 + R^2}$	0,7	15
8	$j_0 (R / r) (\sin(\pi r / 2R))^{-2}$	0,8	10
9	$j_0 (R / r) (1 - (R / r))$	0,9	5
10	$j_0 \exp(-r^2 / R^2)$	1,0	4
11	$j_0 R^3 / r^2 \sqrt{r^2 - R^2}$	1,0	6
12	$j_0 (R / r) \sin(\pi r / 2R) $	0,9	8
13	$j_0 (R / r)^2 (r^3 / R^3 - 1)$	0,8	10
14	$j_0 (1 - \exp(-r^2 / R^2))$	0,7	12
15	$j_0 R^2 / r \sqrt{r^2 - R^2}$	0,6	14
16	$j_0 R / r (1 - \sin(\pi r / 8R))$	0,5	16
17	$j_0 \sqrt{1 + r / R} / r$	0,4	18
18	$j_0 R^2 / r \sqrt{r^2 - R^2}$	0,3	20
19	$j_0 (R / r) (r^2 + R^2)^{-1/2}$	0,2	22
20	$j_0 (R / r) / \cos(\pi r / 3R)$	0,1	24
21	$j_0 (1 + R / r)^{-2} \exp(r / R)$	0,2	25
22	$j_0 (R^2 / r^2 + r / R)$	0,3	20
23	$j_0 R r^2 / (r^2 - R^2)^{3/2}$	0,4	15
24	$j_0 (R / r) (1 + \cos(\pi r / 4R))^{-1}$	0,5	10
25	$j_0 R / r (1 + (r / R))$	0,4	15
26	$j_0 (R / r) (1 + \exp(-r / R))$	0,7	10
27	$j_0 (R / r)^3 (1 + r^2 / R^2)$	0,8	15
28	$j_0 (R / r) \operatorname{tg}(\pi r / 9R)$	0,9	20
29	$j_0 (R / r) \ln(r / R)$	1,0	25
30	$j_0 \exp(r / R)$	1,5	25

Примітка: Для завдання 1-го рівня прийняти $j = j_0$ (колонку $j(r)$ ігнорувати).

Завдання 4

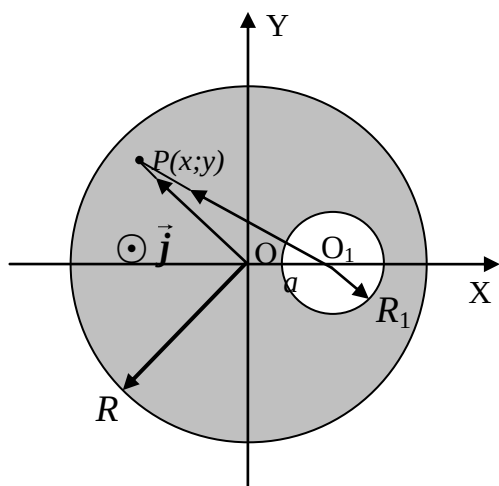


Рис.4

Уздовж нескінченного циліндра ($\mu = 1$) радіуса R з поздовжньою циліндричною порожниною радіуса R_1 в напрямку «до нас» іде струм, що розподілений по площі перерізу із заданою поверхневою густиною $\vec{j} = \text{const}$, рис. 4. Положення осі порожнини O_1 визначається відстанню a .

1. Згідно з даними Табл. 4, визначити в координатній формі (через орти $\vec{e}_x, \vec{e}_y$) вектори індукції магнітного поля $\vec{B}_{01}, \vec{B}_{02}, \vec{B}_{03}$ на трьох осях, що паралельні

до осі циліндра й проходять через точки $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$. Обчислити модулі цих векторів та їхні кути із віссю OX.

2. Побудувати вектори $\vec{B}_{01}, \vec{B}_{02}, \vec{B}_{03}$ на окремих рисунках для кожної осі.

Табл. 4

Вар.	j , А/мм ²	R , см	R_1 , см	a , см	$P_1(x_1; y_1)$, см	$P_2(x_2; y_2)$, см	$P_3(x_3; y_3)$, см
1	0,1	20	6	12	22; 0	7; -4	-8; 12
2	0,2	18	8	7	15; 5	10; -4	-11; -7
3	0,3	16	10	6	27; 12	6; -6	-12; 3
4	0,4	14	2	2	28; 20	2; -	5; -8
5	0,5	12	5	3	13; 15	3; -2	10; 0
6	0,6	10	8	1	10; 17	-2; -4	0; -9
7	0,7	8	3	4	16; 19	5; 1	-6; -3
8	0,8	6	2	1	1; 8	0; 0	3; -3
9	0,9	4	2	2	-1; 5	2; 1	-2; -3
10	1,0	5	2	3	-3; 10	4; 1	-3; -2
11	1,1	6	2	1	-4; 7	1; -1	2; -4
12	1,2	7	4	2	-10; 11	5; -1	1; -5
13	1,3	8	2	2	-16; 12	3; 1	6; -2
14	1,4	9	3	1	-1; 1	-9; 4	2; -8
15	1,5	10	8	2	-29; 6	5; 6	0; -8
16	1,6	9	3	5	-20; 0	4; 6	0; 8
17	1,7	10	4	3	-20; 4	4; -2	4; 8
18	1,8	11	6	5	-10; -5	8; 3	-2; 8
19	1,9	12	6	6	-20; -15	2; 2	0; 10
20	2,0	13	5	1	-10; -11	3; -1	-7; 8
21	2,2	14	12	2	-15; -26	2; 4	-1 0; 10
22	2,4	15	6	8	3; -30	10; -5	-15; 4
23	2,6	16	4	9	-2; -20	1; 1	-10; 5
24	2,8	17	9	8	3; -30	10; -5	-15; 4
25	3	18	8	9	6; -19	4; 4	-16; -6
26	3,2	19	9	8	20; -35	0; 0	18; 0
27	3,4	20	12	2	17; -19	2; 8	-15; -10
28	3,6	15	5	5	24; -18	7; 4	-10; 3
29	3,8	10	4	1	10; -5	0; 2	0; -8
30	4,0	5	3	2	10; -2	2; 2	-4; 0

Вимоги до виконання розрахункової роботи

1. Кожен студент виконує роботу відповідного рівня складності, який призначається викладачем.
2. Завдання оформлюється на окремих аркушах формату А-4 з одного боку і включає:
 - титульну сторінку (див. Додаток);
 - першу сторінку з умовою завдання *свого варіанту* і параметрами задачі та рисунком, у масштабі згідно з таблицею варіантів;
 - виконання завдання по суті.
 - перелік використаної літератури;
 - оригінальні висновки щодо виконаної роботи.
3. Об'єм завдань за рівнями складності:
 - рівень 1 – виконати завдання 1 та 3 ($j = j_0$);
 - рівень 2 – виконати завдання 2 та 3 ($j = j_0$);
 - рівень 3 – виконати завдання 2, 3 ($j = j_0(r)$) та 4.

Вказівки з виконання.

Завдання виконуються за принципом суперпозиції та законом Біо-Савара (завдання 1, 2) або теоремою про циркуляцію магнітного поля (завдання 3, 4).

Завдання 1

Використовується формула індукції магнітного поля прямого відрізка струму:

$$B = \frac{k_m I}{R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \text{ де } k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}. \quad (1.1)$$

Порядок розрахунку

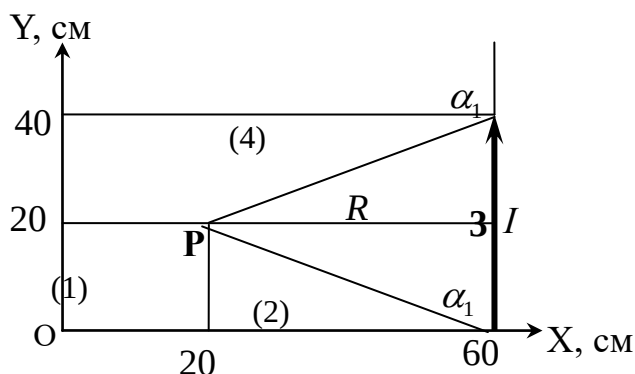
1. Для виконання завдання зробити робочий рисунок 1-1, на якому окремо зобразити кожен із сторін рамки і позначити:
 - напрям струму I ;
 - координати кінців даної сторони і точки P , та відстань R ;
 - кути α_1 і α_2 , звернувши увагу на те, що вони відраховуються від напрямку струму до напрямку на точку P .
2. Обчислити відстань R .
3. Через відповідні відрізки обчислити значення $\cos \alpha_1$ і $\cos \alpha_2$.
4. Через отримані числа та величину струму за формулою (1.1) обчислити величину індукції поля B_i , створюваного даною стороною рамки:
5. За правилом правого гвинта визначити напрям вектора $\vec{B}_i$
6. Знайти числове значення індукції результуючого поля $B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$ (при цьому поля B_i , що напрямлені «до нас» беруться із знаком «+», а при протилежному напрямі – із знаком «-»). За знаком результату визначити напрям вектора $\vec{B}$ і показати його на вихідному рис. 1 кружечком з крапкою («до нас») або з косим хрестиком («від нас»).

Приклад розрахунку

(сторона 3, $I=100$ А, $a = 60$ см, $b = 40$ см, $x = 20$ см, $y = 20$ см)

1. Рисунок для сторони 3

2.



$$R = b - y = 20 \text{ см.}$$

3.

$$\cos \alpha_1 = \frac{a - x}{\sqrt{(a - x)^2 + R^2}} = \frac{40}{\sqrt{40^2 + 20^2}} = 0,894;$$

$$\cos \alpha_2 = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} = -\frac{20}{\sqrt{20^2 + 60^2}} = -0,707.$$

$$4. B_3 = \frac{10^{-7} \cdot 100}{0,2} (0,894 + 0,707) = 8,00 \cdot 10^{-4} \text{ Тл} = 0,8 \text{ мТл.}$$

5. Поле $\vec{B}_3$ напрямлене «до нас», тому в обчисленнях завершального п.6 приймається $B_3 > 0$.

Завдання 2

Використовується формула індукції поля нескінченно прямого струму:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (2.1)$$

Шуканий вектор індукції $\vec{B}$ подається через проекції та через модуль B і кут α з віссю ОХ.

Тут 1. «Щілину» без струму можна розглядати як смужку ширини a , по якій протікають два протилежних струми однакової величини $I = ia$. Тоді, згідно з принципом суперпозиції, поле в будь-якій точці $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, де $\vec{B}_0$ – вектор поля, що створюється суцільним циліндром із струмом, а $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ – вектори полів, що створюються двома смужками, по яких у напрямку «від нас» течуть струми $I_1 = I_2 = ia$.

Згідно з табл. 2, для всіх варіантів $(x^2 + y^2) < R^2$. Але всередині суцільної циліндричної поверхні, вздовж якої йде однорідний струм, магнітного поля

немає (довести за допомогою теореми про циркуляцію!). Тому $\vec{B}_0 = 0$, і

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad (2.2)$$

Так само за даними табл. 2 для всіх варіантів ширина щілин $a \ll 2\pi R$. Тому смужки слід розглядати як довгі тонкі струми, і визначати модулі векторів за формулою (2.1) а напрямки – через напрям струму за правилом правого гвинта.

Приклад розрахунку

($i = 75$ А/см, $R = 10$ см, $a = 0,5$ см, $O_1(5; -6)$ см)

1. Для розрахунку вектора $\vec{B}_1$ робимо рис. 2.1-1, на якому показуємо струм I_1 (кружечок із хрестиком), координати точки Р, відстань r_1 і кут α_1 . Також за правилом правого гвинта перпендикулярно до відрізка r_1 показуємо вектор $\vec{B}_1$ та його проекції:

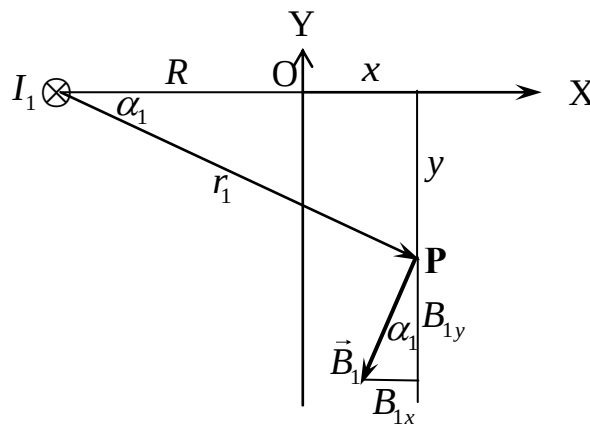


Рис. 2.1-1

2. Обчислюємо відстань r_1 і величину B_1 :

$$r_1 = \sqrt{(R+x)^2 + y^2} = 16,2 \text{ см},$$

і за формулою (2.1) визначаємо модуль вектора $\vec{B}_1$:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i a}{2\pi r_1} = 46 \text{ мкТл.}$$

3. Обраховуємо величини $\sin \alpha_1$ і $\cos \alpha_1$ і відтак – проекції B_{1x} і B_{1y} :

$$\sin \alpha_1 = \frac{|y|}{r} = 0,371, \quad \cos \alpha_1 = \frac{R+x}{r} = 0,926$$

$$B_{1x} = -B_1 \sin \alpha_1 = -17 \text{ мкТл}, \quad B_{1y} = -B_1 \cos \alpha_1 = -43 \text{ мкТл.}$$

4. За знайденими проекціями будуємо вектор $\vec{B}_1$ на вихідному рис. 2.1.
5. Для розрахунку вектора $\vec{B}_2$ робиться рис. 2.1-2 (зробити) аналогічний до рис. 2.1-1.
6. Виконуються обчислення п.п. 2 – 4 для вектора $\vec{B}_2$:

$$B_{2x} = -74 \text{ мкТл}, \quad B_{2y} = -61,5 \text{ мкТл.}$$

7. Будується вектор $\vec{B}_2$ на рис. 2.1.

8. Обчислюються проекції результуючого вектора $\vec{B}$:

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} = -91 \text{ мкТл},$$

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} = 19 \text{ мкТл.}$$

його модуль:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 93 \text{ мкТл}$$

і кут між вектором $\vec{B}$ і віссю OX:

$$\alpha = \arctg(B_y/B_x) \approx 168^\circ.$$

9. Відмічається положення кінця вектора $\vec{B}$ на рис. 2.1: 1) через проекції B_x і B_y і 2) графічним додаванням векторів $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$; при збігу точок зображується вектор $\vec{B}$.

Тун 2. Поверхня із струмом подумки розбивається на елементарні паралельні до осі O смужки ширини dl , за допомогою формули поля прямого струму записується вираз поля $d\vec{B}$, яке створюється на осі O однією смужкою, і після цього визначається результуюче поле $\vec{B} = \int d\vec{B}$. Обчислення проводяться через проекції векторів на осі координат.

Порядок розрахунку

$$(i = 30 \text{ А/см}, R = 20 \text{ см}, a = 5 \text{ см}, \varphi_0 = 120^\circ).$$

1. Робимо рис. 2.2-1, на якому вказуємо довільну смужку dl , її положення (кут φ) та кутову ширину $d\varphi$, а також положення (кут φ_0) і ширину ділянки без струму (дуги a , кути δ):

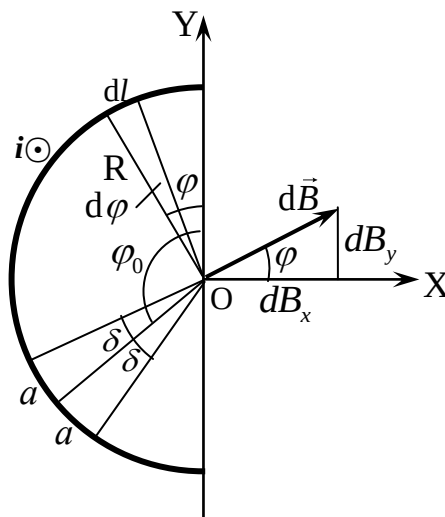


Рис. 2.2-1

2. За правилом правого гвинта визначаємо напрям вектора $d\vec{B}$ поля, що створюється смужкою dl на осі O, та показуємо його на рисунку.

3. За допомогою формули індукції поля прямого струму виражаємо модуль dB та проекції dB_x і dB_y через кут φ , ($dl = R d\varphi$):

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 i dl}{2\pi R} = \frac{\mu_0 i d\varphi}{2\pi};$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 i \cos \varphi \cdot d\varphi}{2\pi}; \quad dB_y = \frac{\mu_0 i \sin \varphi \cdot d\varphi}{2\pi}. \quad (2.3)$$

4. Інтегруванням величини dB_x від 0 до $\varphi_1 = \varphi_0 - \delta$ ($\delta = a/R$), визначаємо проекцію результуючого вектора:

$$B_x = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\int_0^{\varphi_1} \cos \varphi \cdot d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\pi} \cos \varphi \cdot d\varphi \right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2).$$

5. Обчислюємо B_x :

$$B_x = 15 \text{ мкТл.}$$

6. Аналогічно після інтегрування виразу dB_y (2.3) від $\varphi_2 = \varphi_0 + \delta$ до π отримуємо

$$B_y = 26 \text{ мкТл.}$$

7. Обчислюємо модуль вектора $\vec{B}$:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 30 \text{ мкТл}$$

та його кут із віссю ОХ:

$$\alpha = \arctg(B_y/B_x) = 60^\circ.$$

8. За визначеними проекціями B_x і B_y на вихідному рис. 2.1 будуємо вектор $\vec{B}$.

Тут 3. Поверхню із струмом подумки розбиваємо на елементарні паралельні до осі О смужки ширини dl , за допомогою формули поля прямого струму визначаємо поле $d\vec{B}$, яке створюється на осі О однією смужкою, і знаходимо результуюче поле $\vec{B} = \int d\vec{B}$.

Обчислення проводимо через проекції векторів на осі координат

Приклад розрахунку

$$(i = 50 \text{ А/см, } a = 20 \text{ см, } x = 5 \text{ см, } y = 10 \text{ см.})$$

1. Робимо робочий рис. 2.3-1а, на якому показуємо довільну смужку dl , відстань r , кут φ і вектор $d\vec{B}$:

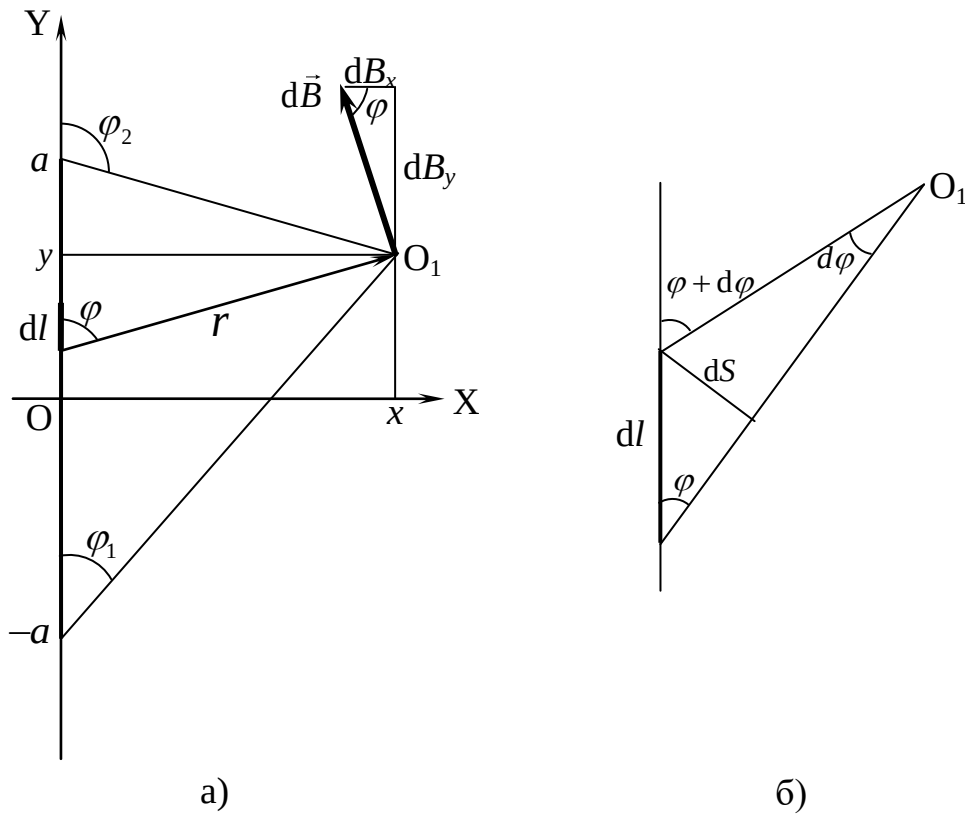


Рис. 2.3-1

2. За допомогою формули індукції поля прямого струму виражаємо модуль dB та проекції dB_x і dB_y через кут φ :

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 i dl}{2\pi r} \Rightarrow dB_x = -\frac{\mu_0 i dl}{2\pi r} \cos \varphi, \quad dB_y = \frac{\mu_0 i dl}{2\pi r} \sin \varphi \quad (2.4)$$

Відтак інтегруванням цих виразів знайдемо проекції B_x і B_y . Для цього виразимо dl через кут φ . Із збільшеного рис. 2.3-1б видно, що, враховуючи малість кута $d\varphi$, можна записати:

$$dl = \frac{ds}{\sin \varphi}, \quad ds = r d\varphi \Rightarrow dl = \frac{r d\varphi}{\sin \varphi}.$$

3. Підставляємо вираз dl в (2.4) і отримуємо:

$$dB_x = -\frac{\mu_0 i \cos \varphi \cdot d\varphi}{2\pi \sin \varphi} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{d(\sin \varphi)}{\sin \varphi}, \quad dB_y = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\varphi$$

4. Інтегруємо ці вирази в границях $\varphi_1 \hat{=} \varphi_2$ (див. рис. 2.3-1а), визначаємо проекції результуючого вектора індукції:

$$B_x = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d(\sin \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \left| \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} \right|, \quad (2.5)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} (\varphi_2 - \varphi_1).$$

5. Обчислюємо значення $\sin \varphi$ і φ у виразах (2.5):

$$\sin \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (a \pm y)^2}} \Rightarrow \begin{aligned} \sin \varphi_1 &= 0,164, & \varphi_1 &= 0,165 \text{ рад;} \\ \sin \varphi_2 &= 0,447, & \varphi_2 &= 2,678 \text{ рад.} \end{aligned}$$

Примітка. Не забувати, що величина y – алгебраїчна.

6. Обчислюємо проекції:

$$B_x = -1,00 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}, \quad B_y = 1,26 \cdot 10^{-5} \text{ Тл},$$

модуль:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 16 \text{ мкТл}$$

і кут β між вектором $\vec{B}$ і віссю OY :

$$\beta = \arctg |B_x/B_y| = 38,4^\circ.$$

7. За проекціями B_x і B_y на вихідному рис. 2.3 будуємо вектор $\vec{B}$.

Завдання 3

Оскільки струм у циліндрі розподілений аксіально-симетрично, лінії магнітного поля мають форму кіл із центрами на осі циліндра. При цьому в усіх точках такого кола поле напрямлене по дотичній, і величина індукції $B = \text{const}$. Тому розрахунок поля доцільно проводити за допомогою теореми про циркуляцію вектора $\vec{B}$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I, \quad (2.6)$$

де I – величина струму, що охоплюється контуром інтегрування L .

З урахуванням осової симетрії поля контур інтегрування L вибираємо у формі кола з центром на осі системи. Тоді

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B \oint_L dl = B \cdot 2\pi r,$$

і

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I. \quad (2.7)$$

Порядок розрахунку

1. Обчислюємо величину струму I в рівнянні (2.6), як

$$I = \int_S j \, ds, \quad (2.8)$$

де інтегрування ведеться по поверхні круга, обмеженого контуром L .

В завданні I рівня складності ($j = j_0$) записувати вираз (2.8) немає потреби, бо очевидно, що

$$I = j_0 S', \quad (2.8a)$$

де S' – площа частини перерізу циліндра охопленої контуром L .

Примітка. Оскільки струм проходить не в усьому просторі, обчислення I треба проводити окремо в кожній із трьох областей:

I. Область $0 \leq r < R_1$ – внутрішня порожнина;

II. Область $R_1 \leq r \leq R_2$ – циліндр із струмом.

III. Область $r > R_2$ – зовнішній простір.

2. Підставляємо знайдене значення I у вираз (2.7) і визначаємо індукцію поля $B = B(r)$ в кожній області.

Примітка. Слід пересвідчитися, що отримані формули на межах сусідніх областей дають однаковий результат. Якщо ні, то слід перевірити правильність викладок.

3. За отриманими виразами $B = B(r)$ розраховуємо таблиці значень і на міліметровому папері (А-5) будуємо графік $B(r)$ в інтервалі $0 \leq r \leq 5R$.

Примітки. 1). На таблиці та графіку повинна бути відображена вся необхідна інформація: позначення величин та одиниць вимірювання в таблиці та осях координат, показані координатні мітки, тощо.

2). Контур графіка має бути наведений під лекало.

Приклад розрахунку (рівень I)

1. Область I ($0 \leq r < R_1$). В цій області

$$j = 0 \Rightarrow I = 0.$$

Область II ($R_1 \leq r \leq R_2$). В цій області контур інтегрування (коло радіуса r) охоплює циліндричний шар із внутрішнім радіусом $R_1 = R$ і зовнішнім радіусом r . Отже, $I = j_0 \cdot \pi (r^2 - R_1^2)$.

Область III. ($r > R_2$). У цьому випадку незалежно від r всередині контуру інтегрування опиняється весь циліндр. Тому у формулі (2.8a) $S = \pi (R_2^2 - R_1^2) = 8\pi R^2$ (враховано, що $R_1 = R$ і $R_2 = 3R$). Відповідно, $I = 8\pi j_0 R^2$.

2. Підставляємо отримані вирази I у формулу (2.7) і знаходимо індукцію поля $B(r)$:

$$r < R: \quad B(r) = 0;$$

$$R \leq r \leq 3R: \quad B(r) = \frac{\mu_0 j_0 (r^2 - R^2)}{2r} = \frac{B_0}{2} \left(\frac{r}{R} - \frac{R}{r} \right), \quad \text{ää } B_0 = \mu_0 j_0 R;$$

$$r > 3R: \quad B(r) = \frac{4\mu_0 j_0 R^2}{r} = 4B_0 \frac{R}{r}.$$

Приклад розрахунку (рівень II, $j(r) = j_0 (R/r)^2$)

1. Область I ($0 \leq r < R_1$):

$$j = 0 \Rightarrow I = 0,$$

Область II ($R_1 \leq r \leq R_2$). Струм I визначаємо інтегруванням виразу (2.8). Для цього елементарні області dS вибираємо у вигляді кілець радіуса r' і ширини dr' , $R_1 \leq r' \leq r$, для яких $dS = 2\pi r' dr'$. Тоді з урахуванням умови $R_1 = R$ та заданого виразу $j(r)$ маємо:

$$I = 2\pi \int_R^r j(r) r dr = 2\pi j_0 R^2 \int_R^r \frac{dr}{r} \Rightarrow I = 2\pi j_0 R^2 \ln \frac{r}{R} \quad (2.9)$$

Область III ($r > R_2$). При будь-якому значенні $r > R_2$ контур інтегрування охоплює весь струм. В такому разі верхня границя в інтегралі (2.9) завжди дорівнює $R_2 = 3R$, а величина I дорівнює

$$I = 2\pi j_0 R^2 \ln 3.$$

2. Відповідно до отриманих виразів I , за формулою (2.7) визначаємо $B(r)$:

$$r < R: \quad B(r) = 0;$$

$$R \leq r \leq 3R: \quad B(r) = \mu_0 j_0 R^2 \frac{1}{r} \ln \frac{r}{R} = B(r) = B_0 \frac{R}{r} \ln \frac{r}{R}, \quad \text{ää } B_0 = \mu_0 j_0 R;$$

$$r > 3R: \quad B(r) = \frac{\mu_0 j_0 R^2 \ln 3}{r} = B_0 \ln 3 \cdot \frac{R}{r}.$$

Завдання 4

Завдання виконується за принципом суперпозиції та теоремою про циркуляцію магнітного поля струмів у вакуумі.

Циліндрична порожнина як така не створює магнітного поля. Тому шукане поле порожнистого циліндра $\vec{B}_0$ можна трактувати як різницю поля $\vec{B}$ суцільного циліндра радіуса R та поля $\vec{B}_1$ відняти поле циліндра радіуса R_1 :

$$\vec{B}_0 = \vec{B} - \vec{B}_1. \quad (2.10)$$

Поля $\vec{B}$ і $\vec{B}_1$ мають осьову симетрію і легко визначаються за теоремою

про циркуляцію:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I,$$

де інтегрування ведеться по довільному контуру L , а I – сумарний струм, який проходить крізь контур інтегрування.

При інтегруванні вздовж лінії $\vec{B}$ у напрямку поля вектори $\vec{B}$ і $d\vec{l}$ напрямлені однаково, тож:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B dl. \quad (2.11)$$

За умовою густина струму $j = \text{const}$. Тому поле суцільного циліндра є осесиметричним: лінії магнітного поля мають форму кіл із центрами на осі, і величина B на лінії поля однакова. Тому для кола з довільним радіусом r

$$\oint_L B dl = B \oint_L dl = B \cdot 2\pi r.$$

Так само при $j = \text{const}$ $I = jS$, де S – частина площі перерізу циліндра, яка охоплюється контуром інтегрування.

За таких умов з рівняння (2.11) випливає наступна розрахункова формула:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 jS \Rightarrow B = \frac{\mu_0 jS}{2\pi r}. \quad (2.12)$$

Тим самим задача зводиться до визначення величини S .

Порядок розрахунку

1. Для кожної точки P_1, P_2, P_3 :

1.1. За формулою (2.12) знайти вирази для модулів B і B_1 індукції магнітного полів, створених суцільними циліндрами з радіусами R і R_1 ; проаналізувати їхні напрямки та записати вирази векторів $\vec{B}$ і $\vec{B}_1$ у векторній та в координатній формі через проекції та орти $\vec{e}_x, \vec{e}_y$.

1.2. Зробити робочий рисунок, на якому показати осі координат, точки O, O_1 і P , а також вектори $\vec{r}$ і $\vec{r}_1$. За проекціями побудувати вектори $\vec{B}, \vec{B}_1$.

1.3. За виразом (2.10) і результатами п. 1 визначити вектор $\vec{B}_0$ в координатній формі через проекції B_{0x} і B_{0y} та орти $\vec{e}_x, \vec{e}_y$; обчислити модуль B_0 і кут α між вектором $\vec{B}_0$ і віссю OX .

2. На робочому рисунку через проекції побудувати вектор $\vec{B}_0$ і пересвідчитися, що виконується умова (2.10).

Приклад розрахунку

$$(j = 4 \text{ А/мм}^2, R = 5 \text{ см}, R_1 = 3 \text{ см}, a = 2 \text{ см}, P_1(-2; 3) \text{ см})$$

1. Визначення векторів.

1.1. Визначаємо вектори $\vec{B}$ і $\vec{B}_1$. При вибраних для прикладу величинах R, R_1 і a задана точка P розташована всередині великого, але зовні малого

циліндра. Тому для великого циліндра у формулі (2.12) $S = \pi r^2$, а для малого – $S_1 = \pi R_1^2$. Відповідно,

$$B = \frac{\mu_0 j r}{2}, \quad (2.13)$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 j R_1^2}{2 r_1}. \quad (2.14)$$

Напрямки векторів $\vec{B}$ і $\vec{B}_1$ визначаються правилом правого гвинта і збігаються з напрямками векторних добутоків векторів $\vec{j}$ і $\vec{r}$ та $\vec{r}_1$. Отже, :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} [\vec{j} \vec{r}], \quad (2.15)$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 j R_1^2}{2 r_1} = \frac{\mu_0 R_1^2 j r_1}{2 r_1^2} \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 R_1^2}{2 r_1^2} [\vec{j} \vec{r}_1] \quad (2.16)$$

Тепер за правилом визначника записуємо вектор $\vec{B}$ в координатній формі, поклавши $z = 0$ і врахувавши, що $j_x = j_y = 0$, $j_z = j$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & j \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\mu_0 j}{2} (y \vec{e}_x - x \vec{e}_y).$$

Аналогічно

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 j R_1^2}{2 r_1^2} (y \vec{e}_x - (x + a) \vec{e}_y).$$

У числовому вигляді з достатньою точністю виходить:

$$\vec{B} = -(75 \vec{e}_x + 50 \vec{e}_y), \text{ мТл.} \quad (2.15)$$

$$\vec{B}_1 = -(27 \vec{e}_x + 36 \vec{e}_y), \text{ мТл.} \quad (2.16)$$

1.2. Виконуємо робочий рисунок 4-1. Відповідно до виразів (2.15) і (2.16) через проекції будуюмо в т. P_1 вектори $\vec{B}$ і $\vec{B}_1$.

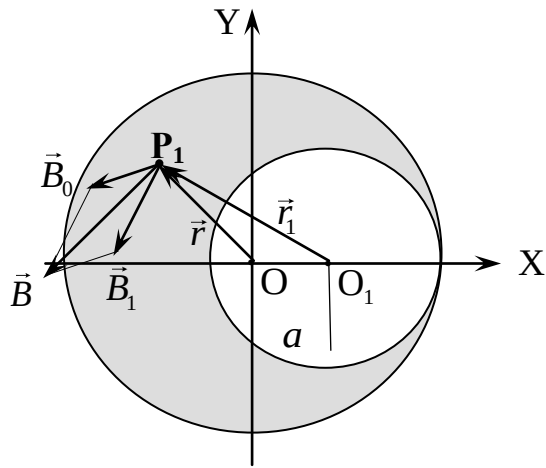


Рис. 4-1

1.3. Записуємо вектор $\vec{B}_0$ в координатній формі та обчислюємо його модуль B_0 і кут α із віссю OX:

$$\vec{B}_0 = (B_x - B_{1x})\vec{e}_x + (B_y - B_{1y})\vec{e}_y \Rightarrow \vec{B}_0 = -(48\vec{e}_x + 14\vec{e}_y), \text{ мТл}$$

$$B_0 = \sqrt{48^2 + 14^2} = 50 \text{ мТл}, \quad \alpha = \arctg\left(\frac{-14}{-48}\right) \approx 196^\circ$$

2. Будуємо вектор $\vec{B}_0$ на рис. 4.1 і показуємо паралелограм, який ілюструє, що $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$, тобто що виконується умова (2.10).

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Факультет _____

Кафедра _____

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

з дисципліни «*Фізика*»

на тему «**Магнітне поле струму**»

студента _____ курсу, групи _____

(прізвище, ім'я та по батькові повністю)

Залікова книжка № _____

Київ – 2022