I. М. Каденко, В. А. Плюйко

ФІЗИКА АТОМНОГО ЯДРА ТА ЧАСТИНОК

Підручник

2-ге видання, перероблене і допоповнене

(ЕЛЕКТРОННА ВЕРСІЯ)

КИЇВ 2019

УДК 539.1(075.8) K13

К13

Рецензенти:

чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. В. Ю. Денисов (Інститут ядерних досліджень НАН України), чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. В. М. Коломієць (Інститут ядерних досліджень НАН України) чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. Ю. О. Ситенко (Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України),

Рекомендовано до друку вченою радою фізичного факультету (протокол № 11 від 21 травня 2018 року)

Ухвалено науково-методичною радою Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 4-17/18 н. р. від 31 травня 2018 року)

Каденко І. М., Плюйко В.А.

Фізика атомного ядра та частинок : підручник. 2-ге вид., переробл. і доповн. Електронна версія. К.-2019, 467 с.

ISBN 978-966-433-022-2

Викладено узагальнені відомості з основних властивостей атомних ядер, ядерної взаємодії та ядерних процесів: розглянуто базові уявлення про одночастинковий і колективний рух нуклонів у ядрах, про властивості електромагнітного випромінювання ядер, радіоактивний розпад з вильотом частинок; механізми ядерних реакцій, спонтанний і вимушений поділ ядер та ланцюгову реакцію поділу. Матеріал підручника відповідає загальному курсу ядерної фізики і дає змогу зацікавленому читачеві зрозуміти та опанувати спеціалізовані видання з окремих питань ядерних досліджень.

Для студентів, аспірантів і викладачів фізичних та фізико-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 539.1(075.8)

ISBN 978-966-433-022-2

© Каденко І. М., Плюйко В. А., 2008 © Каденко І. М., Плюйко В. А., перероблення і доповнення, 2019 © Київський національний університет імені Тараса Шевченка, ВПЦ "Київський університет", 2019

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	6
РОЗДІЛ 1. Основні властивості атомних ядер	10
1.1. Фундаментальна структура матерії.	
Головні задачі фізики атомного ядра	10
1.2. Масштаби фізичних величин у фізиці атомного ядра	12
1.3. Склад і маса ядер. Електричний і баріонний заряди	15
1.4. Енергії зв'язку та стійкість ядер	19
1.5. Розміри ядер	26
1.6. Спін і парність ядра	39
1.7. Статичні електромагнітні моменти ядер	51
Задачі та завдання для самостійної роботи	59
РОЗДІЛ 2. Двонуклонні системи та ядерна взаємодія	62
2.1. Класифікація станів системи двох нуклонів	62
2.2. Дейтрон і його властивості	64
2.3. Загальні властивості ядерних сил	71
2.4. Зарядова незалежність і формалізм ізоспіну	77
2.5. Обмінний характер ядерної взаємодії	84
2.6. Кваркова природа ядерних сил	
та ефективні ядерні сили	91
Задачі та завдання для самостійної роботи	101
РОЗДІЛ З. Одночастинкові та колективні явища в ядрах	x .104
3.1. Необхідність побудови моделей структури ядер	104
3.2. Загальна класифікація ядерних моделей	.105
3.3. Незалежний рух нуклонів	
у моделі ядерного фермі-газу	110
3.4. Формування середнього поля ядра	119
3.5. Одночастинковий рух у моделі оболонок	125
3.6. Парні кореляції. Квазічастинкові стани	146
3.7. Узагальнена модель ядра.	
Колективна енергія рідкої краплини	152
3.8. Одночастинкові стани в деформованих ядрах	168
3.9. Вібраційні стани ядер	180
3.10. Ротаційні стани ядер	.188

3.11. Гігантські резонанси та їхня інтерпретація	200
Задачі та завдання для самостійної роботи	213
РОЗДІЛ 4. Електромагнітне випромінювання ядер	217
4.1. Мультипольний характер γ-випромінювання	217
4.2. Імовірність електромагнітних перехолів	224
4.3. Ізомерні стани. Внутрішня та парна конверсія	
Задачі та завдання для самостійної роботи	241
РОЗЛІЛ 5. Раліоактивний розпал ялер	
з вильотом частинок	244
5.1. Радіоактивність ядер	
5.2. Основні закони радіоактивного розпаду	251
5.3. Одиниці радіоактивності. Активність джерел	
радіоактивного випромінювання	
5.4. α -розпад	262
5.5. Елементарна теорія α -розпаду	
як тунелювання крізь бар'єр	
5.6. β-перетворення.	278
Задачі та завдання для самостійної роботи	295
РОЗДІЛ 6. Загальні закономірності ядерних реакцій	297
6.1. Основні поняття та визначення	297
6.2. Закони збереження в ядерних реакціях	300
6.3. Ефективні перерізи розсіяння та реакцій	310
6.4. Стаціонарний опис пружного розсіяння	
безспінових частинок	319
6.5. Наближення Борна для амплітуд розсіяння	323
6.6. Метод парціальних хвиль у теорії розсіяння.	
Фазові зсуви	328
6.7. Резонанси потенціального розсіяння.	
Час затримки частинки в області взаємодії	335
Задачі та завдання для самостійної роботи	339
РОЗДІЛ 7. Елементи теорії ядерних реакцій	343
7.1. Аналіз парціальних хвиль	
при розсіянні з поглинанням	343
7.2. Оптична модель пружного розсіяння	
7.3. Резонансна структура перерізів розсіяння та реакц	ДЙ.

Формула Брейта–Вігнера для перерізів розсіяння	
та реакцій	356
7.4. Матриця розсіяння	361
7.5. Механізми ядерних реакцій з легкими частинками	372
Задачі та завдання для самостійної роботи	386
РОЗДІЛ 8. Поділ атомних ядер	390
8.1. Механізм поділу важких ядер.	
Модель рідкої краплини	
8.2. Вплив ядерних оболонок на енергію деформації.	
Метод оболонкового доданка Струтинського	406
8.3. Вимушений поділ ядер	423
8.4. Ланцюгова ядерна реакція поділу.	
Принцип дії ядерних реакторів на теплових нейтронах	431
Задачі та завдання для самостійної роботи	444
Список рекомендованої літератури	448
ДОДАТКИ	
Додаток 1. Енергії зв'язку деяких атомних ядер	453
Додаток 2. Деякі фізичні константи	464

ПЕРЕДМОВА (до першого видання)

Фізика атомного ядра – розділ сучасної фізики, у якому вивчаються специфічні форми існування матерії та її рух, а саме, атомні ядра та їхні взаємоперетворення. У дослідженнях із фізики атомного ядра отримано базові знання людства про первинний склад і фізичні властивості матерії. Із розвитком науки вивчення елементарних об'єктів Всесвіту послідовно переходило від хімії до атомної фізики, далі – до ядерної фізики, а на сьогодні й до фізики частинок.

Дослідження з ядерної фізики відіграли визначну роль у формуванні сучасного погляду на перебіг процесів у природі та обов'язкові обмеження - закони збереження, за яких вони можуть відбуватися. Ці дослідження підтвердили висновки теорії відносності та квантової механіки і тим самим зумовили розвиток, сприйняття та довіру до нових уявлень, які значно відрізняються від тверджень класичної механіки. Вироблення енергії атомними станціями і створення атомної та термоядерної зброї макроскопічно наочно підтвердило отримане у спеціальній теорії відносності співвідношення між масою та енергією. Дослідження α -розпаду радіоактивних ядер привели до відкриття нового загального квантово-механічного явища, а саме, можливості проходження частинками зон, рух у яких є забороненим з погляду класичної механіки (ефект тунелювання). Із розвитком теорії ядра виникло багато глибоких і тонких концепцій, наприклад, можливість появи самоузгодженого середнього поля в скінченних системах без виділеного силового центра, тлумачити які з фізичного погляду важче, ніж з математичного.

Ядерна фізика давно вже вийшла на інженерний рівень розвитку. Дослідження у цій галузі суттєво вплинули на розвиток суспільства і викликали як великі сподівання, так і значні побоювання, що пов'язані з використанням ядерної енергії. Фізика атом-

ного ядра є науковою базою атомної енергетики та ядерної техніки. Важливим внеском цієї галузі в інші науки є різноманітне застосування її техніки та методів. Розвиток її власних теоретичних, експериментальних і технологічних розділів істотно впливає на інші дисципліни і сприяє виникненню нових розгалужень науки. Хоча і спостерігається значний прогрес у розвитку ядерних досліджень, проте існує ще багато невирішених проблем, зокрема пов'язаних з поведінкою ядерної речовини в екстремальних умовах, які виникають при зіткненні важких іонів і трапляються в зірках, тому розвиток ядерної фізики ще далекий від свого завершення.

У підручнику розглянуто фізичні уявлення і концепції, що лежать в основі сучасної ядерної фізики. За змістом він є введенням до розгорнутих курсів теоретичної ядерної фізики. Курс фізики атомного ядра зазвичай вивчається студентами одночасно з курсом квантової механіки. Це дає змогу використовувати квантово-механічні поняття і формули, оскільки саме на таких уявленнях і базується ядерна фізика. Водночас у багатьох випадках ядерні явища пояснюються з погляду загальних фізичних уявлень, при цьому деякі деталі теоретичних побудов і математичні розрахунки ми не розглядаємо.

У першому й другому розділах підручника викладено узагальнені відомості з основних властивостей атомних ядер і визначення ядерних характеристик та ядерної взаємодії.

Третій розділ містить найбільш поширені феноменологічні моделі ядра, що описують одночастинковий і колективний рух в ядрах, а також гігантські резонанси та їхню інтерпретацію.

У четвертому розділі викладено особливості електромагнітного випромінювання ядер, у тому числі, мультипольний характер γ -випромінювання, імовірності електромагнітних переходів, утворення ізомерних станів, внутрішню та парну конверсію.

У *п'ятому розділі* розглянуто радіоактивний розпад ядер з вильотом частинок, висвітлено основні закони радіоактивного розпаду та елементарну теорію α -розпаду (як процесу тунелювання скрізь бар'єр) і β -перетворення.

Шостий і сьомий розділи присвячено розгляду загальних закономірностей ядерних реакцій, а також елементам теорії цих реакцій, а саме: визначається роль законів збереження в ядерних реакціях, дається фізичне тлумачення ефективних перерізів роз-

сіяння та реакцій. Розглянуто резонансні явища, що відбуваються під час взаємодії частинок з ядрами, опис стаціонарного процесу розсіяння з поглинанням, загальні уявлення про матрицю розсіяння та механізми взаємодії ядер з легкими частинками.

У восьмому розділі висвітлено спонтанний і вимушений розпад ядер і принцип дії ядерних реакторів на теплових нейтронах. Викладено основи теорії розпаду ядер за моделлю краплі ядерної рідини. Значну увагу приділено розгляду і методам розрахунку впливу ядерних оболонок на енергію деформації ядер.

У кінці кожного розділу наведено вправи, які є невід'ємною частиною даного курсу і допомагають його опанувати.

Запропонований підручник з ядерної фізики – розділу, який є заключною частиною загального курсу фізики, адресовано насамперед широкій студентській аудиторії та викладачам природничих факультетів університетів і технічних вузів України. Він є розширеним і уточненим виданням навчальних посібників одного з авторів (В. А. Плюйка) із фізики атомного ядра. Книга може бути корисною при підготовці фахівців з ядерної фізики, прикладних питань фізики нейтронів та ядерної енергетики. Незважаючи на те, що при написанні цієї книги головну увагу було приділено її відповідності вимогам, які стосуються підручників, ми намагалися зробити її також корисною як посібник для наукових працівників.

Вважаємо за приємний обов'язок висловити подяку академіку НАН України Л. А. Булавіну, який зробив багато важливих критичних зауважень до рукопису книги, а також за його підтримку під час роботи над текстом. В. А. Плюйко щиро вдячний членкореспондентам НАН України В. М. Струтинському і В. М. Коломійцю, а також професорам Г. О. Прокопцю, С. М. Єжову, Г. Ф. Філіппову за численні й корисні обговорення багатьох питань, які викладені в підручнику. Він також дякує співробітникам відділу теорії ядра Київського інституту ядерних досліджень НАН України, зокрема докторам фіз.-мат. наук Ф. О. Іванюку, О. Г. Магнеру, В. І. Абросімову, В. П. Альошину за плідні дискусії.

Дякуємо студенту І. С. Войтешенку та аспірантці Є. В. Куліч Київського національного університету імені Тараса Шевченка за допомогу у вирішенні технічних питань при підготовці рукопису до друку. Заздалегідь будемо вдячні читачам, які вкажуть на можливі неточності та недоліки підручника.

ПЕРЕДМОВА (до другого видання)

Друге видання підручника "Фізика атомного ядра та частинок", як і перше, базується на курсі лекцій з ядерної фізики, який читався протягом понад 15-ти років на фізичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка, і є одним із розділів нормативного курсу загальної фізики, що лежить в основі вивчення всіх природничих наук.

Безперервний розвиток ядерної фізики та викладання цього курсу привели до необхідності внесення в друге видання ряду змін та доповнень. Суттєві зміни були внесені в перший розділ, окрім того, внесені доповнення, які були зумовлені як розвитком застосувань ядерної фізики в останні роки, так і уточненням її термінології. Друге видання, як і попереднє розглядає питання загального курсу ядерної фізики та відомості, що знайшли відображення на сьогодні лише в оригінальних публікаціях. Також розглянуто загальні властивості та структура ядер. Обговорено і проаналізовано ядерну взаємодію між протонами і нейтронами. Описано основні ядерні процеси, що відбуваються при розпаді ядер та їхньому зіткненні, а також їхні характеристики. Наведено базові уявлення про реакцію поділу на теплових нейтронах та її застосування в ядерній енергетиці.

Покращенню даного підручника значною мірою сприяли зауваження наших колег, за що ми їм щиро вдячні, особливо академіку НАН України Л. А. Булавіну, член-кореспондентам НАН України В. М. Струтинському, В. М. Коломійцю, В. Ю. Денисову та професору Г.О. Прокопцю.

Автори також щиро вдячні студентам і аспірантам фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які допомогли усунути описки та інші недоліки першого видання.

Розділ 1

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ АТОМНИХ ЯДЕР

1.1. Головні задачі фізики атомного ядра. Фундаментальна структура матерії

Сучасні уявлення про будову матерії базуються на світогляді, який отримав вназву *Стандартної моделі фізики елементарних частинок*. Такий підхід виділяє з усіх мікрочастинок деякі первинні елементарні частинки – так звані фундаментальні частинки та їхню взаємодію. Фундаментальними частинки вважаються мікрочастинки, які на сучасному рівні знань є неподільними, тобто не складаються з інших мікрочастинок і розглядаються як точкові. Усі інші частинки мікросвіту, зокрема так звані елементарні частинки, складаються з різних об'єднань (кластерів) фундаментальних частинок.

Згідно зі співвідношенням Гейзенберга між невизначеностями відстані та імпульсу в мікросвіті, частинки мікросвіту не мають строго певних границь. Поняття їхнього просторового "розміру" умовне, а значення залежать від способу його визначення. Визначення розміру фундаментальних частинок як точкових є умовним і означає, що їхній "розмір" дуже маленький, і тому ним можна знехтувати в сучасних дослідженнях.

Кожна як фундаментальна, так і елементарна частинка характеризується деяким набором дискретних значень певних фізичних величин (квантовими числами) і масою. Взаємодія між фундаментальними частинками називається фундаментальною, вона базова, оскільки саме з неї формуються всі інші типи взаємодії

між іншими частинками. Фундаментальна взаємодіє має обмінну природу й її носіями є бозони, що входять до складу фундаментальних частинок, і передають взаємодію між фундаментальними частинками. Фундаментальні бозони є квантами відповідних полів, які називаються колибрувальними полями.

У природі існують чотири типи фундаментальних взаємодій – сильна, електромагнітна, слабка і гравітаційна. Стандартна модель елементарних частинок описує електромагнітну, слабку і сильну взаємодії. Вона була створена на основі теорії електрослабкої взаємодії, що об'єднала електромагнетизм і слабку взаємодію (А. Салам, С. Вайнберг, 1967) і теорії сильної взаємодії (квантова хромодинаміка, математичне формулювання – Д. Гросс, Ф. Вільчек, Д. Політцер, 1973).

Згідно зі стандартною моделлю вся речовина складається із 12-ти фундаментальних частинок – ферміонів: шести кварків (u, d, s, c, b, t) і шести лептонів (електрон, мюон, т-лептон і три сорти нейтрино) та відповідної кількісті їхніх фундаментальних античастинок. Усі фундаментальні частинки можна об'єднати в три покоління ферміонів, які різняться масами і взаємодією.

Кварки беруть участь у сильних, слабких та електромагнітних взаємодіях; заряджені лептони (електрон, мюон, т-лептон) – у слабких і електромагнітних; нейтрино – тільки в слабких взаємодіях. Частинками-носіями взаємодій є вісім глюонів для сильної взаємодії, три важкі (калібрувальні) бозони (W⁺, W⁻, Z⁰) для слабкої взаємодії й один фотон для електромагнітної взаємодії.

Маса фундаментальних частинок, якщо вона відмінна від нуля, пояснюється їхньою взаємодією з полем Хіггса, яке наповнює простір, і квантом якого є бозон Хіггса. Одними з головних параметрів стандартної моделі є маси лептонов (три параметри, нейтрино вважаються безмасовими) і кварків (шість параметрів), а також три сталі взаємодії, які визначають відносні інтенсивності электромагнітної, слабкої та сильної взаимодії.

У середені 80-х років XX ст. було відкрито всі елементарні частинки, передбачені Стандартною моделлю, і тому саме її було прийнято за основу у фізиці елементарних частинок. Після цього були відкриті нові явища, які не вдалося описати за її допомогою, зокрема це: осциляції нейтрино, присутність у Всесвіті

так званої темної матерії й темної енергії, які не детектуються за спостереженням електромагнітного випромінювання. Гравітаційна взаємодія також не входить у стандартну модель. Зараз для подальшого об'єднання фундаментальних взаємодій використовуються різні підходи, наприклад: теорії/я струн, петльова квантова гравітація, теорії/я бран, М-теорія.

Створення єдиної теорії взаємодії й вивчення фундаментальної структури матерії є завданням фізики високих енергій, основними експериментальними інструментами якої служать прискорювачі заряджених частинок, детектори і системи аналізу даних. Фізику високих енергій зазвичай називають фізикою елементарних частинок, а також ядерною фізикою релятивістських енергій.

1.2. Масштаби фізичних величин у фізиці атомного ядра

У фізиці атомного ядра вивчаються явища, які відбуваються на малих відстанях і за великих енергій, що припадають на одну частинку. Верхньою границею відстаней, на яких відбуваються події, що вивчає фізика ядра, можна вважати розмір атома водню, який приблизно дорівнює одному *ангстрему* (1 Å = 10^{-10} м). У фізиці ядра зазвичай використовують позасистемну одиницю довжини – *фермі* (фм):

$$h \phi M = 10^{-15} M = 10^{-5} Å$$

Ця одиниця досить зручна, оскільки за порядком величини вона близька до розміру атомного ядра. Наприклад, протони і нейтрони мають розміри близько 1 фм, а на відстанях (1÷10) фм розміщуються радіуси стабільних атомних ядер. Таким чином, з погляду атомних масштабів ядра надзвичайно малі й розмір атомів перевищує розмір ядер більше ніж на п'ять порядків.

Для визначення енергії у фізиці ядра використовують позасистемну одиницю – *електрон-вольт* (eB). Значенню 1 еВ відповідає енергія, яку отримує чи втрачає електрон при проходженні ним різниці потенціалів один вольт (1 Вт):

1 eB
$$\cong$$
 1,6022 ·10⁻¹² epr($\Gamma \cdot cm^2/c^2$) \cong 1,6022 ·10⁻¹⁹Дж(к $\Gamma \cdot m^2/c^2$),
1 Дж = 1 BT ·1 c = 10⁷ epr.

Якщо для атомної фізики характерною енергією є 1 еВ, то для ядерної фізики такі значення дуже малі, тому використовуються похідні одиниці, а саме: кеВ, MeB, ГеВ (старе позначення БеВ), TeB;

$$1 \text{ keB} = 10^3 \text{ eB}, 1 \text{ MeB} = 10^3 \text{ keB} = 10^6 \text{ eB},$$

 $1 \Gamma eB = 15eB = 10^{3} MeB = 10^{9} eB, 1 TeB = 10^{3} \Gamma eB.$

Для атомних ядер найбільш характерні енергії мають значення порядку 1 MeB. Наприклад, енергія в декілька мегаелектронвольтів (близько 8) потрібна для того, щоб вирвати з ядра один протон або нейтрон. В окремих випадках у ядерній фізиці доводиться мати справу з більш низькими енергіями. Наприклад, у кванти, що вилітають з ядра, мають енергію порядку сотень і десятків кілоелектрон-вольтів, а іноді й нижче. За енергій зіткнення до 150 МеВ відбувається руйнування атомних ядер, але частинки, що їх утворюють, залишаються незмінними. За енергій зіткнення понад 150 МеВ починається народження нових частинок, спочатку досить легких (піонів), а потім дедалі більш і більш важких. На сучасних експериментальних установках частинкам можна надати значно більшої енергії. Наприклад, на прискорювачі SPS (ЦЕРН, Женева) протони для експериментів із фіксованою мішенню можна прискорювати до енергії $450 \, \Gamma eB \cong 0,7 \, epr$. Це, звичайно, мало для макроскопічного тіла, але дуже багато для однієї елементарної частинки. Для порівняння: у супутнику, що летить зі швидкістю 1 км/с, на один протон припадає енергія ~ $0.8 \cdot 10^{-14}$ ерг ~ $0.5 \cdot 10^{-3}$ eB.

Фізика ядра в існуючому вигляді охоплює величезні інтервали масштабів, а саме – сім порядків за відстанями та дев'ять порядків за енергіями. Кожний атом має електронну оболонку з від'ємним зарядом і атомне ядро з додатним зарядом. У ядрі зосереджена майже вся (~99,92 %) маса атома. Порівняно з атомом ядро надзвичайно стійке. Наприклад, для відриву двох електронів від атома гелію достатньо енергії 79 еВ, а для розриву ядра

цього атома на складові частини необхідно витратити енергію більшу, ніж у 300 000 разів, а саме – 28 МеВ.

Велика різниця масштабів енергій і відстаней в атомній та ядерній фізиці є причиною суттєвих відмінностей явищ у атомних і ядерних системах. В атомній фізиці відстані порівняно з розміром ядра настільки великі, що ядро майже завжди можна розглядати як заряджену матеріальну точку. В ядерній фізиці енергія ядерної взаємодії настільки велика, що майже завжди можна знехтувати впливом процесів, які відбуваються в електронних оболонках, на структуру ядра та ядерні реакції.

Зі шкалою відстаней тісно пов'язана шкала часу. Найважливішим масштабним поняттям при дослідженні перебігу процесів в ядерній фізиці є характерний час, який називають *часом прольоту*. Це час, який необхідний для прольоту частинки із заданою енергією відстані, що відповідає розміру іншої частинки, або якогось об'єкта. Наприклад, якщо за характерний ядерний розмір *R* взяти відстань 1 фм = 10^{-14} м, а за швидкість *v* – значення 10^9 см/с (1/30 швидкості світла), що відповідає швидкостям протонів і нейтронів у ядрах, то для ядерного часу прольоту маємо значення

$$\tau_{g\pi} = R / v \simeq 10^{-21} c$$

Тому для ядерних процесів час $t >> 10^{-21}$ с великий, $t < 10^{-21}$ с – малий. При зіткненнях частинок дуже високих енергій їхні швидкості наближаються до максимально можливого значення, а саме, до швидкості світла у вакуумі $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с. У цьому випадку час прольоту можна оцінити як

$$\tau_{eiiem} \cong 3 \cdot 10^{-24} \text{ c},$$

це значення визначає масштаб часу більшості процесів фізики елементарних частинок. Зазначимо, що безпосередньо радіотехнічними методами на сьогодні вимірюють час до значень 10^{-11} с.

1.3. Склад і маса ядер. Електричний та баріонний заряди

Відповідно до уявлень нерелятивістської ядерної фізики атомні ядра складаються з елементарних частинок – протонів і нейтронів (Д. Д. Іваненко, В. Гейзенберг, 1932). Маси протона m_p і нейтрона m_n близькі одна до одної та майже в 2000 разів перевищують масу електрона m_p :

 $m_{\rm p} = 1,672 \cdot 10^{-24} \ \Gamma \cong 1836 \ m_e$, $m_{\rm n} = 1,675 \cdot 10^{-24} \ \Gamma \cong 1838 \ m_e$.

У фізиці ядра масу зазвичай вимірюють в атомних одиницях маси (а.о.м.). Атомну одиницю маси обрано так, що атом вуглецю ¹²С має масу 12 а.о.м.: M_{12} = 12 а.о.м. = m_u .

Зазвичай прийнято наводити не маси атомних ядер, а маси атомів з урахуванням електронної оболонки, тому для визначення маси ядра необхідно від значення маси атома відняти значення маси електронів, які утворюють його оболонку. Взаємодією електронів з ядром зазвичай можна знехтувати. У подібних розрахунках користуються значенням маси спокою електрона в

а.о.м., яке дорівнює $m_e = 0,5486 \cdot 10^{-3} m_u$.

У фізиці ядра маси вимірюють здебільшого в енергетичних одиницях, при цьому використовують відоме співвідношення Ейнштейна

$$E = mc^2 , \qquad (1.1)$$

яке пов'язує повну енергію E ізольованої системи, що перебуває у стані спокою (елементарні частинки, ядро, атом тощо) з її масою m і швидкістю світла у вакуумі c. Співвідношення (1.1) відображає еквівалентність маси та енергії й є одним із найголовніших у застосуванні висновком теорії відносності. Воно може бути застосовано до будь-якої ізольованої фізичної системи, і тому універсальне. В енергетичних одиницях одиниця атомної маси дорівнює¹

¹ Зауважимо, що в ядерній фізиці зазвичай використовують одиниці із c = 1 і вважають, що маса вимірюється в одиницях MeB.

¹⁵

$$m_u c^2 = M_{12} / 12 = 931,47 \pm 0,05 \text{ MeB},$$
 (1.2)

а маси електрона, протона та нейтрона відповідно дорівнюють

$$m_e c^2 = 0.511 \text{ MeB};$$

 $m_p c^2 = 938.3 \text{ MeB};$ (1.3)
 $m_n c^2 = 939.6 \text{ MeB}.$

Протон є зарядженою частинкою. Його заряд додатний і за абсолютною величиною дорівнює заряду електрона *e*:

$$e_{\rm p} = -e = 1,60218 \cdot 10^{-19}$$
 Кулон (Кл). (1.4)

Електричний заряд нейтрона дорівнює нулю, що й відображено в його назві.

На відміну від електронів, протони і нейтрони перебувають під впливом специфічних ядерних сил. Ядерні сили належать до найбільш інтенсивних у природі сильних взаємодій. Завдяки їм протони та нейтрони можуть з'єднуватися один з одним, утворюючи різні атомні ядра. Властивості протона та нейтрона щодо сильних взаємодій абсолютно однакові, чим і пояснюється близькість їхніх мас. У фізиці ядра зазвичай використовують термін *нуклон*, що позначає або протон, або нейтрон. Можна сказати, що протон і нейтрон – це два стани однієї й тієї ж самої частинки – нуклона (див. підрозд. 2.4).

Оскільки в природному середовищі атом електрично нейтральний, то кількість протонів у ядрі має дорівнювати кількості електронів в атомній оболонці, тобто атомному номеру Z. Загальну кількість нуклонів (протонів і нейтронів) в ядрі позначають через A і називають *масовим числом*. Числа Z і A повністю характеризують склад ядра. Для позначення кількості нейтронів у ядрі використовують літеру N: N = A - Z. Для позначення різних ядер зазвичай використовують запис вигляду $\frac{A}{Z}X$, де X– хімічний символ, що відповідає атому з даним зарядом Z.

Наприклад, вираз ${}_{6}^{12}$ С визначає ядро атома вуглецю з Z = 6 і A = 12, що має шість протонів і шість нейтронів. Лівий нижній індекс Z не обов'язковий, оскільки атомний номер Z однозначно відповідає назві елемента, і тому зазвичай пишуть ${}_{6}^{12}$ С. Протон

р і нейтрон n у цих позначеннях можна записати відповідно як ${}^{1}_{1}$ р та ${}^{0}_{0}$ n. Протон є ядром атома водню, тому його можна також позначити як ${}^{1}_{1}$ H, тобто p = ${}^{1}_{1}$ p = ${}^{1}_{1}$ H.

Ядра з одним і тим самим значенням Z і різними A (тобто з різною кількістю нейтронів) називають ізотопами. Наприклад, у природному урані (Z = 92) є ізотопи ${}^{235}_{92}$ U і ${}^{238}_{92}$ U, ядра яких мають відповідно 143 і 146 нейтронів. Ядра з однаковими А, але різними Z називають ізобарами, а ядра з однаковими N, але різними Z – ізотонами. У переважній більшості атоми різних ізотопів мають однакові хімічні властивості. Оскільки такі властивості визначаються електронною оболонкою, а кількість електронів в атомі задається зарядом ядра, то на структуру електронної оболонки атома ядро впливає головним чином тільки своїм електричним зарядом. За своїми суто ядерними властивостями різні ізотопи мають зазвичай мало спільного. Ізотопи водню ${}^{1}_{1}H$, ${}^{2}_{1}H$ та ${}^{3}_{1}H$ дуже відрізняються за своєю масою, а тому їхні атоми помітно (щодо ізотопів інших елементів) відрізняються за фізичними і навіть хімічними властивостями. Тому важким ізотопам водню виявилось навіть корисно надавати різні назви. Ізотоп ${}^{2}_{1}$ Н (вміст якого в природній суміші становить 0,015 %) називають дейтерієм і позначають через D (використовується також термін важкий водень). Ядро дейтерію називають дейтроном і позначають через d. Наприклад, якщо молекулу води, до складу якої входить звичайний ("легкий") водень, позначають як H₂O, то молекулу "важкої води", до складу якої входить ізотоп $^{2}_{1}$ H = D, позначають через D₂O. Важка вода має густину 1,108 г/см³, замерзає за температури +3,82 °С і кипить за +101,42 °C, тобто помітно відрізняється від звичайної води.

Ядро нестабільного ізотоп у ${}_{1}^{3}$ Н називають *тритоном* (використовують також термін *надважкий водень*) і позначають через t. Відповідний елемент називають *тритієм* і позначають через T. Ядро атома гелію ${}_{2}^{4}$ Не називають α -частинкою.

Електричний заряд ядра, що визначає атомний номер Z, є величиною, яка зберігається при будь-яких (у т. ч. і неелектромагнітних) взаємодіях. Сукупність експериментальних даних про взаємні перетворення атомних ядер і елементарних частинок показує, що крім закону збереження електричного заряду існує закон збереження ще однієї величини, так званого баріонного заряду, а саме: кожній частинці можна приписати деяке значення баріонного заряду, причому алгебраїчна сума баріонних зарядів усіх частинок залишається незмінною при будь-яких процесах. Баріонні заряди всіх частинок є цілими числами. Баріонні заряди протона і нейтрона дорівнюють одиниці, а електрона і у кванта (фотона високих енергій) – нулю, тому масове число ядра А одночасно й є значенням його баріонного заряду. Баріонний заряд зазвичай позначають літерою В. Закон збереження баріонного заряду приводить до заборони деяких процесів, наприклад, цим законом заборонено перетворення двох нейтронів на пару у -квантів:

$$n+n \neq \gamma + \gamma
\downarrow \qquad \downarrow \qquad , \qquad (1.5)$$

$$B=2 \qquad B=0$$

що енергетично вигідно і дозволено всіма іншими законами збереження. Існують такі емпіричні факти та закономірності стосовно величин *A* і *Z*:

1) відомі ядра зі значеннями Z від 0 до $Z \approx 114$ (ядро з Z = 0, N = 1 є нейтроном). Не існує стабільних ядер, тобто таких, що не розпадаються спонтанно, при Z = 0, 43, 61 і $Z \ge 84$;

2) спостерігалися ядра зі значеннями Z від 1 до $A \approx 290$; не існує стабільних ядер з A = 5, 8 та $A \ge 210$;

3) властивості ядер істотно залежать від парності чисел Z і N. Це випливає вже з того, що серед стабільних ізотопів найбільше парно-парних (парні Z та N і найменше непарно-непарних, яких відомо чотири: ${}^{2}_{1}$ D, ${}^{6}_{3}$ Li, ${}^{10}_{7}$ B, ${}^{14}_{7}$ N;

4) за малих *A* стабільні ядра містять приблизно однакову кількість протонів і нейтронів, а при збільшенні *A* відсотковий вміст нейтронів зростає;

5) більшість хімічних елементів мають декілька стабільних ізотопів, серед яких переважає олово $_{50}$ Sn, яке має 10 стабільних ізотопів з $A = 112 \div 124$ ($N = 62 \div 74$). З іншого боку, значна кількість елементів, наприклад, Be, Na, A1, має тільки один стабільний ізотоп.

1.4. Енергії зв'язку та стійкість ядер

Існують різні методи вимірювання мас ядер, наприклад, за допомогою дослідження проходження заряджених частинок крізь магнітні та/або електричні поля. У цьому випадку потік частинок розділяється на окремі пучки із фіксованим значенням питомого заряду q/m, де q = Ze (e/m - для однократно заряджених іонів). Сукупність пучків, що складається із частинок різних мас (різних значень q/m), які розділені електричним і магнітним полями, називають *мас-спектром*. Реєстрацію розділених пучків частинок зазвичай виконують електричним способом (мас-спектрометрами) або фотографічним (мас-спектрографами).

Сам факт існування ядер як стабільних ядерних систем і точні вимірювання мас ядра свідчать про те, що маса ядра M(Z, A)завжди дещо менша від суми мас вільних нуклонів, які входять до складу ядра, тому й енергія $E = M(Z, A)c^2$, яка відповідає масі ядра, менша від суми енергій вільних нуклонів, що входять до його складу. Різницю енергій, що відповідають масі спокою вільних нуклонів і масі спокою ядра, називають *енергією зв'язку* ядра B(Z, A):

$$B(Z, A) = -\Delta M c^{2} \equiv [Zm_{\rm p} + Nm_{\rm n} - M(Z, A)]c^{2}, \qquad (1.6)$$

де

$$\Delta M \equiv M(Z,A) - [Zm_{\rm p} + (A - Z)m_{\rm p}]. \tag{1.7}$$

Енергія зв'язку B(Z, A), що є надлишком сумарної енергії вільних нуклонів порівняно з енергією нуклонів у ядрі, є одним із найважливіших параметрів, який характеризує стійкість ядра; чим більше значення B, тим більш стійким є ядро. Знання енергій зв'язку ядер дозволяє розраховувати енергетичний баланс

будь-якого процесу розпаду та взаємного перетворення ядер. Наприклад, енергії відокремлення¹ нейтрона S_n і протона S_p , які необхідні для їх вибивання з ядра ${}^{A}_{Z}X$, дорівнюють різниці енергії зв'язку материнського ядра ${}^{A}_{Z}X$ і відповідних дочірніх ядер ${}^{A-1}_{Z}X$, ${}^{A-1}_{Z-1}X$:

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-1}_{Z}X + \mathbf{n} \Rightarrow$$

$$S_{\mathbf{n}} = [M(Z, A-1) + m_{\mathbf{n}} - M(Z, A)]c^{2} = B(Z, A) - B(Z, A-1);$$

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-1}_{Z-1}X + \mathbf{p} \Rightarrow$$

$$S_{\mathbf{p}} = [M(Z-1, A-1) + m_{\mathbf{p}} - M(Z, A)]c^{2} = B(Z, A) - B(Z-1, A-1).$$

$$(1.8)$$

Енергія відокремлення від материнського ядра α -частинки дорівнює

$${}^{A}_{Z}X \to {}^{A-4}_{Z-2}X + \alpha \Longrightarrow$$

$$S_{\alpha} = [M(Z-2, A-4) + M_{\alpha} - M(Z, A)]c^{2} =$$

$$= B(Z, A) - B(Z-2, A-4) - B(\alpha),$$
(1.9)

де M_{α} і $B(\alpha)$ – маса та енергія зв'язку α -частинки. Замість енергії зв'язку інколи доцільно розглядати енергію зв'язку на нуклон $\overline{B} = B(Z, A) / A$, яку також називають питомою енергією зв'язку.

Згідно з (1.6) маса ядра на величину $B(Z, A) / c^2$ менша від суми мас нуклонів, що складають ядро. Значення ядерних енергій зв'язку настільки великі, що їх можна знайти з малою похибкою шляхом прецизійних вимірювань мас ядер. Наприклад, маса α -частинки (ядра гелію $\frac{4}{2}$ He) в а.о.м. дорівнює $M_{\alpha} = 4,001523 m_u$, а отже, для енергії зв'язку α -частинки маємо

$$B(\alpha) = (2m_{\rm p} + 2m_{\rm n} - M_{\alpha})c^2 =$$

¹ Іноді енергії відокремлення частинок також називають енергіями їхнього зв'язку.

= $(2 \cdot 1,007276 + 2 \cdot 1,008665 - 4,001523)m_uc^2 \approx 28,3$ MeB. (1.10) Таким чином, α -частинка з енергією зв'язку $B(\alpha) \approx 28,3$ MeB легша від двох розділених протонів і двох нейтронів на значення

$$\Delta M \approx 4 \cdot 10^{-26} \,\,\mathrm{r} \,, \tag{1.11}$$

що становить приблизно 0,7 % від повної маси а -частинки.

Різницю Δ між масою ядра та його масовим числом в атомних одиницях маси називають надлишком, або дефектом маси ядра (від. англ. *mass excess*):

$$\Delta(Z,A) = M(Z,A)c^2 - Am_u c^2, \quad m_u = M_{12} / 12. \quad (1.12)$$

Очевидно, що дефект маси ядра 12 С дорівнює нулю за означенням, але протон і нейтрон мають ненульові значення дефектів мас:

$$\Delta_{\rm p} = 0,007276 \, m_u = 7,288 \, \text{MeB} \,,$$

$$\Delta_{\rm p} = 0,008665 \, m_u = 8,071 \, \text{MeB} \,. \tag{1.13}$$

Із порівняння формул (1.6) і (1.12) випливає, що надлишок мас однозначно визначає енергію зв'язку й відрізняється від неї лише знаком, вибором системи одиниць і зміщенням початку відліку енергії:

$$B(Z, A) \equiv [Zm_{\rm p} + Nm_{\rm n} - M(Z, A)]c^{2} =$$

= $Z \cdot \Delta_{\rm p} + (A - Z) \cdot \Delta_{\rm n} - \Delta(Z, A).$ (1.14)

У таблицях замість величини B(Z, A) зазвичай наводиться значення Δ у мегаелектрон-вольтах. При цьому слід брати до уваги, що табличні значення мас і дефектів мас зазвичай наводять не для ядер, а для відповідних нейтральних атомів. Це еквівалентно у формулі (1.6) заміні величини m_p на масу водню M_H

і M(Z, A) на масу $M_{\rm ar}(Z, A)$ нейтрального атома. Іншими словами, табличні значення енергій зв'язку зазвичай визначені як

$$B_{\text{табл}}(Z,A) = [ZM_{\text{H}} + (A-Z)m_{\text{n}} - M_{\text{at}}(Z,A)]c^{2}.$$
(1.15)

Аналіз експериментальних енергій зв'язку дає можливість отримати інформацію про властивості ядер. Для аналізу такої інформації розглянемо наведену на рис. 1.1 усереднену залеж-

ність питомої енергії зв'язку від масового числа для найбільш поширених ізотопів стабільних ядер.



найбільш стабільних ядер від масового числа

В експериментальній залежності B(Z, A) / A від A можна відокремити такі закономірності:

1) якщо не враховувати легкі ядра з $A \le 14$, то в нульовому наближенні енергія зв'язку на нуклон майже стала і дорівнює ≈ 8 MeB. Така приблизна незалежність питомої енергії зв'язку від кількості нуклонів свідчить про насичення ядерних сил. Ця властивість ядерних сил полягає в тому, що кожний нуклон може взаємодіяти тільки з кількома сусідніми нуклонами. Якщо б насичення не було, тобто нуклон міг би взаємодіяти водночас з усіма нуклонами, то енергія зв'язку зростала б зі зростанням Aне лінійно, а принаймні квадратично. Дійсно, згідно з комбінаторною алгеброю кількість пар, які можна утворити в системі з A частинками, дорівнює A(A-1)/2, і тому, якби всі нуклони були об'єднані в пари зі сталою парною взаємодією, то й енергія зв'язку була б пропорційною величині A(A-1)/2;

2) енергія зв'язку на нуклон не є сталою, а має максимум в області ядер заліза ($A \cong 56$, $\overline{B} \approx 8,8$ MeB) і спадає з обох боків. Максимум кривої відповідає найбільш стабільним ядрам. Найлегшим ядрам енергетично вигідно зливатися з утворенням більш важких ядер з виділенням (термоядерної) енергії (т. зв. процес синтезу).

Для найбільш важких ядер навпаки, вигідніше розщеплюватися на уламки з виділенням енергії. Такий процес називають *поділом ядер*, а відповідну енергію, що виділяється, *атомною*.

Спадання кривої питомої енергії зв'язку за малих A можна пояснити поверхневими ефектами. Нуклони, що містяться на поверхні ядра, не повністю використовують свої зв'язки, і це зменшує значення B. Роль поверхневих ефектів зростає зі збільшенням відношення площі поверхні до об'єму. В об'єктах сферичної форми радіуса R відношення площі поверхні до об'єму

обернено пропорційне радіусу ядра $\left(\frac{S}{V} \sim \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}\right)$, тому можна

очікувати, що з переходом до більш легких ядер вплив поверхневих ефектів буде зростати.

Зменшення питомої енергії зв'язку при переході до важких ядер пояснюється електростатичним відштовхуванням протонів. Кулонівська енергія додатна і пропорційна квадрату кількості протонів (кулонівські сили не мають властивості насиченості), тому вона зменшує енергію зв'язку при переході до більш важких ядер;

3) якщо розглядати питому енергію зв'язку як функцію Z при фіксованому A, то матимемо криві з максимумом, що спостерігається при $Z \sim A/2$ для легких ядер і зміщений у бік більшої кількості нейтронів для важких ядер (рис. 1.2). Для стабільних ядер виконується таке феноменологічне співвідношення:

$$Z \cong \frac{A}{1,98+0,015A^{2/3}},\tag{1.16}$$

яке називають *лінією* (доріжкою) β*-стабільності* розташування ядер у системі координат *Z*, *A*.



Рис. 1.2. Залежність питомої енергії зв'язку в ізобарах

Досвід показує, що для всіх ядер при нехтуванні кулонівськими силами максимум питомої енергії зв'язку ізобарів має спостерігатися при Z = A/2, тобто ядерні сили діють інтенсивніше за однакової кількості протонів і нейтронів. Цей ефект обумовлений загальною властивістю ядерних сил, що називається зарядовою незалежністю;

4) завдяки детальному вивченню величини *B* як функції змінних *Z* і *N* встановлено, що у двовимірному просторі функція $B(Z, A) \equiv B(Z, A = Z + N)$ розщеплюється на три гілки. Найвищою є гілка, на якій містяться парно-парні ядра (парні *Z*, *N*); посередині розташована гілка, що містить ядра з непарним *A* (парне *Z* непарне *N*, або навпаки); найнижче розташовані непарнонепарні ядра (непарні *Z*, *N*). Відстань між сусідніми значеннями гілок $\approx (1 \div 4)$ МеВ. Цей факт безперечно вказує на існування явища "спарювання" (тобто поєднання в пари¹) однакових нуклонів в ядрах, причому при спарюванні енергія зв'язку атомного ядра зростає приблизно на $(1 \div 4)$ МеВ. Цю додаткову енергію називають *енергією спарювання*. Наприклад, якщо б такого явища не існувало, то енергія зв'язку ізотопу брому ⁸⁰₃₅Br мала б проміжне значення між енергіями ядер ⁸⁰₃₅Br менша від енергії зв'язку

¹ Іноді це явище називається двійкуванням.

 $^{80}_{36}$ Кг на 2,501 MeB за рахунок того, що в $^{80}_{35}$ Br є неспарені протон і нейтрон.

Наближено енергію зв'язку можна апроксимувати виразом

$$B(Z,A) = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 Z^2 A^{-1/3} - a_4 \frac{(A - 2Z)^2}{A} - a_5 \frac{\delta}{A^{3/4}}, \quad (1.17)$$

де сталі *a*₁,...,*a*₅ підібрані за експериментальними даними і мають такі значення:

$$a_1 = 15,75 \text{ MeB};$$
 $a_2 = 17,8 \text{ MeB};$ $a_3 = 0,710 \text{ MeB};$
 $a_4 = 23,7 \text{ MeB};$ $a_5 = 34 \text{ MeB}.$ (1.18)

Величина б описує ефект парності кількості нуклонів кожного типу:

$$\delta = \begin{cases} +1, \, \text{для непарно-непарних ядер,} \\ 0, \, \text{для ядер 3 непарним } A, \\ -1, \, \text{для парно-парних ядер.} \end{cases}$$
(1.19)

Емпірична формула (1.17) називається *формулою Вейцезекера* (К. фон Вейцзекер, 1935).

Зауважимо, що існує особливість в залежності $\overline{B} = B / A$ від змінних Z, N, яка полягає в тому, що за деяких так званих магічних значень Z, N енергія зв'язку має помітно виражені максимуми. Ці магічні значення дорівнюють 2, 8, 20 (28), 50, 82 та 126. Як з'ясувалось, такий ефект є виявом так званої оболонкової структури ядра. Магічні значення чисел Z і N відповідають замкненим оболонкам, тобто структурам, подібним до електронних оболонок інертних газів. Відповідні магічні ядра мають більші питомі енергії зв'язку, ніж їхні найближчі сусіди. Більша енергія зв'язку на нуклон у магічних ядрах означає їхню більш високу стійкість. Особливо великою стійкістю відзначаються двічі магічні ядра: $\frac{4}{2}$ He, $\frac{16}{8}$ O, $\frac{40}{20}$ Ca, $\frac{48}{20}$ Ca, $\frac{208}{82}$ Pb;

5) питома енергія зв'язку різко зменшується при переході до ядер з мінімальною кількістю нуклонів; наприклад, для ядра ${}_{2}^{3}$ Не $\overline{B} = 2,6$ MeB, а для дейтрона $\overline{B} = 1,1$ MeB. Як з'ясувалось, цей ефект має специфічне квантове походження і свідчить про досить малий радіус дії ядерних сил.

1.5. Розміри ядер

У першому наближенні атомні ядра можна вважати сферичними і ввести поняття радіуса ядра R як радіуса сфери, що обмежує ядерну речовину. Разом з тим, при інтерпретації понять "радіус" і "форма ядра" виникають труднощі, оскільки ці характеристики не слід ототожнювати з подібними величинами в макроскопічних твердих тілах, де межа поділу середовищ різка. Річ у тім, що ядро є системою частинок, які перебувають у постійному русі та описуються законами квантової механіки, тому поверхня ядра є, строго кажучи, "розмитою", а поняття радіуса досить умовним. Дійсно, якби поверхня ядра була ідеально різкою з нескінченно малою невизначеністю в розмірі $\Delta x \rightarrow 0$, то згідно з нерівністю Гейзенберга $\Delta p \Delta x \ge \hbar/2$ невизначеність p в імпульсі на ній була б нескінченно великою:

 $\Delta p \ge \hbar / \Delta x / 2 \rightarrow \infty$, при $\Delta x \rightarrow 0$,

тобто нуклони завжди мали б енергію, достатню для їхнього вильоту, і стабільні ядра в природі не існували б. Таким чином, про поверхню ядра можна казати лише умовно, як про область, розмір "розмитості" якої значно менший від розміру внутрішньої області. Фактично під розмірами (радіусом) ядра розуміють розміри тієї області, в якій виявляється усереднена дія ядерних сил.

Уперше ядерні сили, як і саме існування ядра, були відкриті в дослідах Е. Резерфорда (1911) з розсіяння заряджених частинок атомами. Із цих дослідів, зокрема, випливає, що при зближенні зарядженої α -частинки з атомом спочатку між ними діють сили кулонівської взаємодії, але потім при наближенні до центра атома деякі значно інтенсивніші сили. Розглянемо експерименти Резерфорда детальніше. Для цього проаналізуємо енергію взаємодії між частинками, припустивши, що в центрі атома існує ядро із зарядом Ze, яке взаємодіє з налітаючою частинкою. Вважатимемо, що електричне поле навколо ядра має сферичну симетрію, і його потенціальна енергія V(r) залежить тільки від координат. Тоді зовні ядра потенціал частинки із зарядом Ze, що налітає на ядро з кулонівським зарядом Ze, дорівнює

$$V(r) = \frac{ZZ_1 e^2}{r} = \frac{e^2}{\hbar c} \hbar c \frac{ZZ_1}{r} = \alpha(\hbar c) \frac{ZZ_1}{r} = 1,44 \frac{ZZ_1}{r(\phi M)} (MeB), (1.20)$$

де для спрощення запису використано абсолютну гауссову систему одиниць, у якій безрозмірна стала тонкої структури у вакуумі α дорівнює

 $\alpha = e^2 / \hbar c = 0,00729735 = 1/137,036; \ \hbar c = 197,327 \text{ MeB} \cdot \phi M.$

Потенціальна крива V(r) зовні ядра радіусом R має вигляд гіперболи, що розміщена над віссю абсцис (рис. 1.3). На близькій відстані $r \leq R$ від ядра діють сили притягання; потенціальна енергія V(r) має бути від'ємною (оскільки ядро існує як компактна система). Зі зменшенням відстані ядерні сили притягання так швидко зростають, що кулонівські сили відштовхування стають незначними відносно них; потенціал змінює знак і крива різко спадає, утворюючи потенціальну яму. Нижня частина потенціалу розміщена в області від'ємних значень і на рис. 1.3 апроксимується прямокутною ямою.



Рис. 1.3. Потенціальний (кулонівський) бар'єр атомного ядра при його взаємодії з точковою частинкою, яка має заряд **Z**₁

Отже, навколо атомного ядра існує кулонівський потенціальний бар'єр з висотою

$$B_k = \frac{ZZ_1 e^2}{R} = 1,44 \frac{ZZ_1}{R(\phi M)}$$
(MeB)

тобто існує область з підвищеним значенням потенціальної енергії. З погляду класичної фізики частинки з кінетичною енергією $E_{\alpha} \leq B_k$ не можуть проникати за цей бар'єр і взаємодіяти з ядром. За межами ядра діють кулонівські сили, а в ядрі ($r \leq R$) діють ще й ядерні сили. Тому, аналізуючи дані з розсіяння заряджених частинок (протонів, α -частинок) на атомних ядрах, можна визначити радіус ядра як відстань R, на якій починають виявлятися ядерні сили. Перші дані про розміри атомного ядра були отримані Резерфордом саме з аналізу результатів досліду з вивчення розсіяння α -частинок на атомах як наслідок спостереженого ним ефекту аномального розсіяння α -частинок.

Як відомо, у кулонівському полі розсіяння α -частинок відбувається згідно із формулою Резерфорда, а ймовірність розсіяння на кут θ пропорційна величині

$$\frac{dW}{d\Omega} \sim \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$
 (1.21)

Дійсно, в експериментах Резерфорда розсіяння α -частинок до певної енергії описувалося даною формулою. Далі зі збільшенням енергії спостерігалася "аномалія" – спостерігалося відхилення від формули (1.21), тобто аномалія щодо виразу, отриманому при взаємодії за законом Кулона. Із фізичного погляду ці результати легко пояснити існуванням специфічної ядерної взаємодії. Коли енергія α -частинки мала ($E_{\alpha} \leq B_k$), то вона не може подолати силу кулонівського відштовхування й досягти області дії ядерних сил, тому розсіяння описується формулою (1.21). За енергій $E_{\alpha} > B_k$ частинка досягає області дії ядерних сил і тоді характеристики розсіяння помітно відрізняються від кулонівських, оскільки вони вже визначаються ядерною, а не кулонівською взаємодією. Якщо експериментально знайти значення енергії $E_{\alpha,max}$, при якій розсіяння переходить в аномальне, то з умови

$$E_{\alpha,\max} = B_k \equiv \frac{2Ze^2}{R} \cong \frac{2,88Z}{R(\phi M)} (MeB)$$
(1.22)

можна зайти радіус ядра

$$R = \frac{2Ze^2}{E_{\alpha,\max}} = \frac{2,88Z}{E_{\alpha,\max} \text{ (MeB)}} (\phi_M).$$
(1.23)

Наприклад, для ядра золота Z = 79, $E_{\alpha, \max} = 5$ MeB, тоді отримуємо оцінку $R \cong 46 \text{ фм}$. Хоча цей метод і досить грубий, але він дає правильну оцінку радіуса ядра як об'єкта, що має розміри, які набагато порядків менші від розмірів атома.

У подальшому розміри ядер визначалися різними методами, а саме:

• використовували аналіз напівемпіричної формули для мас і енергій зв'язку ядер;

 радіуси α -радіоактивних ядер досліджувалися за значенням імовірності α -розпаду;

• радіуси ядер знаходили з досліджень розсіяння швидких нейтронів ядрами;

• вимірювали ймовірність розсіяння електронів ядрами.

Розглянемо метод визначення радіуса R з аналізу напівемпіричної масової формули. Серед ізобарних пар (тобто ядер з однаковим A) зустрічаються пари "дзеркальних" ядер, наприклад:

$^{3}_{1}H$	$-\frac{3}{2}$ He	⁷ ₃ Li	$- \frac{7}{4}Be$
\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow
Z = 1,	Z = 2,	Z = 3,	Z = 4,
N = 2	N = 1	N = 4	N = 3

Енергії ядер, що утворюють пару дзеркальних ядер, різні. Енергія зв'язку ядра, у складі якого більше протонів, ніж нейтронів, менша від енергії зв'язку ядра, яке містить більше нейтронів, оскільки кулонівська взаємодія приводить до розштовхування протонів, і тим самим – до зменшення потенціальної енергії. Наприклад, для ядра ³₁Н енергія зв'язку B = 8,484 MeB, а для ³₂He B = 7,117 MeB. Якщо знехтувати різницею мас протона й нейтрона, зважаючи на те, що протони й нейтрони поводять себе однаково стосовно ядерних сил (зарядова незалежність ядерних сил), то відмінність між енергіями зв'язку двох дзеркальних ядер буде обумовлена лише кулонівським відштовхуванням між протонами. Різниця енергій зв'язку цих ядер буде

дорівнювати електростатичній енергії E_C одного протона, який перебуває в полі Z інших протонів

$$B(Z, A) - B(Z+1, A) = E_C$$
. (1.24)

Енергія E_C залежить від розподілу заряду всередині ядра та його розмірів. Припустимо, що ядро є сферою радіуса R з рівномірно розподіленим за об'ємом протонним зарядом, і обчислимо E_C . Густина заряду ρ_q , зумовлена присутністю одного протона в ядрі, дорівнює

$$\rho_q = e / V_N$$
, де $V_N = (4/3)\pi R^3$ – об'єм ядра. (1.25)

Знайдемо вираз для кулонівського потенціалу $V_C(r)$ усередині ядра, що обумовлений зарядом *e*, рівномірно розподіленим за об'ємом ядра (рис. 1.4). Із класичної електродинаміки відомо, що потенціал $V_{\xi}(r)d\xi$, від сферичного шару радіусом ξ , товщиною $d\xi \ll 1$, що діє на одиничний заряд *e* на відстані *r* від його центра, дорівнює

$$V_{\xi}(r)d\xi = \begin{cases} e(\rho_q / \xi)S_{\xi}d\xi \equiv V_{\xi > r}(r)d\xi = \text{const}, & r < \xi; \\ e(\rho_q / r)S_{\xi}d\xi \equiv V_{\xi \le r}(r)d\xi, & S_{\xi} = 4\pi\xi^2, & r \ge \xi. \end{cases}$$
(1.26)

Тоді повний кулонівський потенціал у будь-якій точці на відстані *r* усередині ядра має вигляд

$$V_C(r) = \int_0^r V_{\xi \le r}(r) d\xi + \int_r^R V_{\xi > r}(r) d\xi, \qquad (1.27)$$

де перший і другий доданки – внески від внутрішніх і зовнішніх шарів, відповідно. Виконуючи інтегрування, маємо

$$V_{C}(r) = \int_{0}^{r} \frac{e^{2}}{V_{N}} \frac{1}{r} 4\pi\xi^{2} d\xi + \int_{r}^{R} \frac{e^{2}}{V_{N}} \frac{1}{\xi} 4\pi\xi^{2} d\xi =$$

$$= \frac{3e^{2}}{4\pi R^{3}} \left[\frac{4\pi\xi^{3}}{3r} \right|_{0}^{r} + 2\pi\xi^{2} \Big|_{r}^{R} = \frac{3e^{2}}{R^{3}} \left[\frac{r^{2}}{3} + \frac{R^{2}}{2} - \frac{r^{2}}{2} \right] = (1.28)$$

$$= \frac{3e^{2}}{R^{3}} \left[\frac{R^{2}}{2} - \frac{r^{2}}{6} \right] = \frac{3}{2} \frac{e^{2}}{R^{3}} \left[R^{2} - \frac{r^{2}}{3} \right],$$

тобто



Рис. 1.4. Кулонівський потенціал усередині ядра

Якщо врахувати, що в ядрі з додатковим протоном є Z+1 протонів, заряд яких вважається рівномірно розподіленим за об'ємом ядра, то енергія E_C взаємодії одного протона, що створює поле з потенціалом $V_C(r)$, з іншими Z протонами буде дорівнювати

$$E_C = 4\pi \cdot Z \int_0^R \frac{\rho_q}{e} V_C(r) r^2 dr = \frac{6}{5} \frac{Ze^2}{R} = B(Z, A) - B(Z+1, A) \quad (1.30)$$

За допомогою цього виразу були визначені радіуси ядер. Виявилося, що значення *R* апроксимуються формулою

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 \cong 1,4 \, \text{фM} \,.$$
 (1.31)

Цей метод визначення радіусів ядер використовували досить довго. Разом з тим подальші дослідження довели, що він надто грубий. Інші методи дають значення $r_0 \cong 1, 2 \div 1, 3 \, \text{фм}$. Зокрема, виявилось, що наближення рівномірно зарядженої сфери досить спрощене.

Найбільш інтенсивно форма ядра вивчалася в експериментах з розсіяння швидких електронів. Цей метод є одним із найбільш точних для визначення радіуса ядра. Взаємодія електронів з яд-

рами задається електромагнітним потенціалом, і тому вона чутлива до розподілу електричного заряду в ядрі. Дійсно, електрони взаємодіють з нуклонами за допомогою електромагнітного потенціалу та потенціалу слабкої взаємодії, але інтенсивність потенціалу слабкої взаємодії приблизно на вісім порядків менша, ніж електромагнітна, тому слабку взаємодію можна не враховувати.

Разом з тим, дослідження розподілу заряду ядер слід виконувати за допомогою електронів досить високих енергій, що обумовлено однією з основних властивостей квантового світу, а саме – нерозривним зв'язком між хвилями та частинками. Цей взаємозв'язок полягає в тому, що будь-якій частинці, що рухається з імпульсом *p*, відповідає хвиля де Бройля довжиною $\lambda = 2\pi \cdot \hbar / p$. Очевидно, частинка ефективно "відчуватиме" розмір ядра, якщо її зведена довжина $\lambda \equiv \lambda / (2\pi)$ буде меншою або порядку цього розміру:

$$\lambda \equiv 1/k \le R \le 10 \, \text{фM} \,, \tag{1.32}$$

де k – хвильове число, що визначається модулем імпульсу частинки $p = \hbar k$, тому імпульс p та λ пов'язані співвідношенням

$$p = \frac{\hbar}{\lambda}.$$
 (1.33)

Для нерелятивістської частинки масою *m* кінетична енергія дорівнює $E_{\text{кін}} = p^2 / 2m$, тому

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \left(\frac{\hbar^2}{2mE_{\text{kiH}}}\right)^{1/2}.$$
(1.34)

Енергія спокою електрона $m = m_e = 0,511$ МеВ мала, тому й умова (1.32), якщо користуватися формулою (1.34), виконуватиметься в ультрарелятивістській області $E_{\rm kih} >> mc^2 \sim 0,5$ МеВ, де нерелятивістський вираз для енергії несправедливий. Тобто, щоб отримати реалістичні оцінки енергій електронів, треба використовувати релятивістське співвідношення між енергією та імпульсом

$$E_{\rm kiH} = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2} - m c^2 , \qquad (1.35)$$

зокрема в ультрарелятивістській області $p \gg mc$, тому $E_{\rm kih} \approx pc$. Звідки, ураховуючи (1.33), отримуємо

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{E_{\text{kiH}}} \approx \frac{200}{E_{\text{kiH}}(\text{MeB})}(\phi_{\text{M}}), \qquad (1.36)$$

для енергії $E_{\text{кін}} = 20 \text{ MeB}$ маємо $\lambda \approx 10 \text{ фм}$, тому в експериментах з розсіяння електронів вже за таких енергій можна вивчати розміри ядер.

У результаті досліджень було встановлено, що експериментальні дані узгоджуються з неперервним розподілом заряду в ядрі й наближено описуються формулою (Р. Хофстедтер, Нобелевська премія із фізики, 1961)

$$\rho(\vec{r}) \equiv \rho(r) = \rho_0 / \left[1 + \exp((r - R_0) / a) \right].$$
(1.37)

Такий розподіл називають *розподілом Фермі*, а вираз (1.37) – *формулою Фермі*. Вигляд кривої (1.37) показано на рис. 1.5.



Рис. 1.5. Густина розподілу заряду ядра у вигляді функції Фермі

Формула (1.37) має три параметри ρ , R_0 і a. Параметр $R_0 \in$ відстанню від центра до точки, де густина стає вдвічі меншою, ніж у центрі. Параметр a має розмірність довжини і характеризує товщину поверхневого шару, тобто швидкість зменшення густини заряду при віддаленні від центра ядра; його називають *дифузністю ядра*. Параметр ρ_0 визначає густину заряду в

центрі ядра (при $R_0 \gg a$). Якщо товщину поверхневого шару t визначити як відстань, на якій густина спадає з $0,9\rho_0$ до $0,1\rho_0$, то для розподілу Фермі (1.37) маємо

$$t = 4, 4a$$
. (1.38)

Для ядер зі значеннями A від 40 до 208 товщина і має одне й те саме значення — близько 2,4 фм, тобто a=0,55 фм.

Оскільки густина заряду в ядрах змінюється з відстанню від центра, то як характеристику розміру ядра, окрім R_0 , обирають також і середньоквадратичний радіус

$$\langle r^2 \rangle = \int r^2 w(\vec{r}) d\vec{r} = \frac{\int r^2 \rho(\vec{r}) d\vec{r}}{\int \rho(\vec{r}) d\vec{r}}, \qquad (1.39)$$

де символом $\langle ... \rangle$ позначено усереднення за ймовірністю $w(\vec{r})$:

$$w(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\int \rho(\vec{r}) d\vec{r}}$$

перебування нуклона в точці \vec{r} .

Для заряду, рівномірно розподіленому в ядрі з радіусом R і густиною

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 \theta(R - r) , \qquad (1.40)$$

маємо

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2 \,. \tag{1.41}$$

Величину

$$R = \left[\frac{5}{3} \langle r^2 \rangle\right]^{1/2} \cong 1,291 \left[\langle r^2 \rangle\right]^{1/2}$$
(1.42)

називають середньоквадратичним радіусом еквівалентного сферичного ядра з однорідним розподілом. А сам однорідний розподіл вигляду (1.40) називають еквівалентним, якщо його радіус R визначається за допомогою (1.42) з величиною $\langle r^2 \rangle$, обчисленою за формулою (1.39) з реальним розподілом $\rho(\vec{r})$.

Зауважимо, коли йдеться про радіус ядра, то зазвичай мають на увазі величину R_0 у формулі (1.37). Досліди з вивчення роз-

сіяння швидких електронів дають таке значення для "електромагнітного" радіуса ядра:

$$R_0 = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 \cong 1, 2 \div 1, 3 \, \text{фM} \,.$$
 (1.43)

Якщо немає спеціальних збурень, наприклад, зовнішніх електромагнітних полів, у стабільних ядрах розподіл протонів мало відрізняється від розподілу нейтронів, тому радіус розподілу ядерної речовини також відповідає (1.43), а розміри ядра з достатньо високою точністю визначаються розподілом густини заряду. У цілому всі існуючі методи визначення та оцінки радіуса ядра показують, що достатньо точно радіус ядра можна виразити емпіричною формулою

$$R_0 = r_0 A^{1/3}, (1.44)$$

де A – масове число, а величина r_0 – стала, значення якої за ядерними методами дослідження дорівнює ~1,4 фм і ~1,2 фм – за електромагнітними методами. Різні значення r_0 , отримані з різних дослідів, відображають різні властивості ядра: з одного боку, це радіус дії ядерних взаємодій і розподіл ядерної речовини, а з іншого, – радіус розподілу електричного заряду. У подальшому для оцінок будемо використовувати значення

$$r_0 = 1,25 \, \text{фM} \,.$$
 (1.45)

Вираз (1.44) приводить до важливого висновку, а саме: об'єм середніх і важких ядер пропорційний кількості частинок. Дійсно,

$$V_N = \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A, \quad (R_0 \gg a).$$
 (1.46)

Це означає, що густина ядерної речовини (М – маса ядра)

$$\rho = \frac{M}{V_N} \equiv \frac{m_u A}{V_N} = \frac{3m_u}{4\pi r_0^3} \cong 2 \cdot 10^{14} \text{ r/cm}^3 = 2 \cdot 10^8 \text{ r/cm}^3$$
(1.47)

однакова для всіх ядер і її значення надзвичайно велике. Наприклад, для води $\rho_{H_2O} = 1 \, r/cm^3$, а для золота $\rho_{Au} = 13 \, r/cm^3$. Проте нуклони як геометричні об'єкти займають приблизно лише 1/5 від об'єму ядра.

Із дослідів з розсіяння заряджених частинок відомо, що радіус одного нуклона $r_{0,n} \approx 0,75 \, \text{фm}$, тому для відносного об'єму, який займають нуклони, маємо

$$\delta = \frac{AV_n}{V_N} = \frac{r_{0,n}^3}{r_0^3} \cong 0,216 \cong \frac{1}{5}, \qquad (1.48)$$

де V_n – об'єм, який займає один нуклон.

Опис нейтронної та протонної густини розподілом Фермі (1.37) відповідає моделі сферичного ядра з розмитим краєм. Слід зазначити, що ця модель не описує всі деталі розподілу ядерної речовини та її параметри, R_0 та *а* визначають лише середні характеристики розподілу. Сучасні експерименти показують, що в нейтронно-надлишкових ядрах радіус розподілу нейтронної густини може значно перевищувати радіус розподілу протонної густини. Таке перевищення радіусів називають явищем існування "нейтронної шкіри". У багатьох легких ядрах нейтронний розподіл більш дифузний, ніж протонний. Такий ефект називають *нейтронним гало*.

Відхилення форми поверхні ядра від сферично-симетричної описують, припускаючи, що радіальний параметр $R(\theta, \phi)$ залежить від кутових змінних. За малих відхилень від сферичної симетрії у внутрішній системі координат, що жорстко пов'язана з ядром, здебільшого використовують розклад $R(\theta, \phi)$ за сферичними гармоніками $Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$ (див. підрозд. 3.5):

$$R(\theta, \phi) = R'_0 \left[1 + \sum_{\lambda=\lambda_0}^{\lambda_m} \sum_{\mu=-\lambda}^{+\lambda} \beta_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right], \qquad (1.49)$$

де θ, ϕ – полярний і азимутальний кути; R'_0 – середній радіус ядра; $\beta_{\lambda\mu}$ – коефіцієнти, які називають параметрами деформації ядра. Радіус R'_0 залежить від параметрів деформації й визначається з вимоги рівності об'ємів даного ядра з деформованою поверхнею радіуса $R(\theta, \phi)$ та еквівалентного сферичного ядра радіуса R_0 :
$$V_N \equiv \int d\vec{r} \equiv \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^2 dr = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \,, \qquad (1.50)$$

де згідно з експериментальними дослідженнями радіус ядра з A нуклонами із формою рівновеликої (за об'ємом) сфери дорівнює $R_0 = r_0 A^{1/3}$.

Сферичні гармоніки $Y_{\lambda\mu}$ утворюють повну систему функцій, тому за допомогою (1.49) можна описати неперервну гладку поверхню з будь-якою складною формою. У частковому випадку аксіально-симетричних ядер, тобто, коли $\beta_{\lambda\mu} = 0$ при $\mu \neq 0$, радіус *R* не залежить від азимутального кута, і його подають у вигляді розкладу за поліномами Лежандра $P_{\lambda}(\cos \theta)$ порядку λ :

$$R(\theta) = R'_0 \left[1 + \sum_{\lambda=\lambda_0}^{\lambda_m} a_\lambda P_\lambda(\cos\theta) \right], \ \lambda_m \gg 1,$$
(1.51)

де

$$P_{\lambda}(x) = \frac{1}{2^{\lambda} \lambda!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{\lambda} (x^{2} - 1),$$

$$P_{0} = 1, \quad P_{1} = x, \quad P_{2} = \frac{1}{2} (3x^{2} - 1). \quad (1.52)$$

Оскільки $Y_{\lambda 0}(\theta, \phi) = P_{\lambda}(\cos \theta) \sqrt{(2\lambda + 1)/4\pi}$, то параметри деформації α_{λ} пов'язані з $\beta_{\lambda 0}$ співвідношенням

$$\alpha_{\lambda} = \sqrt{\frac{2\lambda + 1}{4\pi}} \beta_{\lambda 0} \,. \tag{1.53}$$

Відповідно до загальноприйнятої термінології деформацію, що відповідає $\lambda = 0$, називають *монопольною*, $\lambda = 1$ – дипольною, $\lambda = 2$ – квадрупольною, $\lambda = 3$ – октупольною, $\lambda = 4$ – гексадекапольною і т. д. Аксіально-деформовані ядра за наявності лише квадрупольної деформації мають форму еліпсоїда обертання (рис. 1.6 і 1.9) і називаються *сфероїдальними ядрами*, У випадку, коли квадрупольна та октупольна деформації аксіально-симетричного ядра відмінні від нуля, ядро має грушоподібну

форму. Ядра з параметрами $\beta_{\lambda\mu} \neq 0$ при $\mu \neq 0$ називають *неаксіально-деформованими*.

Коливання з $\lambda = 1$ у першому наближенні за $\beta_{\lambda\mu}$ відповідають зміщенню ядра як цілого й не мають бути врахованими при малих деформаціях, тому за $\beta_{\lambda\mu} <<1$ у розклади (1.50) і (1.51) будуть входити тільки доданки з $\lambda_0 \ge 2$. Оскільки кількість нуклонів у ядрі скінченна, то значення λ обмежені зверху. Це зумовлено тим, що кількість максимумів поверхні, яка описується формулою (1.51) зі скінченним, але великим значенням λ_m , пропорційна λ_m^3 . Отже, щоб кожний максимум поверхні міг містити хоча б один нуклон, необхідно виконання умови

$$\lambda_m^3 \le A, \text{ тобто } \lambda_m \le A^{1/3}. \tag{1.54}$$

Ядра, у яких значення параметрів $\beta_{\lambda\mu}$, α_{λ} не залежать від часу, називають жорстко деформованими. Кажуть, що такі ядра мають статичну деформацію. Найбільш істотний внесок у опис форми поверхні статично деформованих ядер дають квадрупольна та гексадекапольна деформованих ядер дають квадрупольна та гексадекапольна деформації, тобто доданки в (1.49) і (1.51) з $\lambda = 2$ і 4. Ядра вважаються дуже деформованими вже при $\alpha_2 \sim 0,2$. Приклад впливу параметра гексадекапольної деформації α_4 на форму аксіально-деформованого ядра показано на рис. 1.6.



Рис. 1.6. Вплив гексадекапольної деформації на форму аксіально-деформованого ядра 3: $\alpha_2 = 0,47$ та з $\alpha_4 = 0$ (1), $\alpha_4 = +0,24$ (2) і $\alpha_4 = -0,24$ (3)



1.6. Спін та парність ядра

Атомне ядро, як і будь-яка інша ізольована система, зазвичай характеризується повним моментом кількості руху, який в ядерній фізиці називається спіном ядра, який зберігається в часі. Цей закон збереження є проявом інваріантності простору відносно поворотів. Наявність відмінного від нуля спіну означає, що частинка нагадує дзиґу, яка обертається. Проте до такої наочної аналогії необхідно підходити з обережністю, оскільки квантові властивості мікрооб'єктів істотно змінюють інтерпретацію моменту кількості руху при переході до мікросвіту. Оскільки ядро є мікрооб'єктом, то збереження моменту кількості руху треба розглядати методами квантової механіки. У цьому випадку частинка (або система частинок) характеризується деяким гамільтоніаном \hat{H} , а її стан описується хвильовою функцією ψ . Наявність у системі фіксованого повного кутового моменту означає, що хвильова функція також є і власною функцією квадрата векторного оператора \vec{I} повного моменту кількості руху (а саме, оператора $\vec{\hat{I}}^2$):

$$\vec{\hat{I}}^{2} \equiv (\vec{\hat{I}} \cdot \vec{\hat{I}}) = \hat{I}_{x}^{2} + \hat{I}_{y}^{2} + \hat{I}_{z}^{2} , \quad \vec{\hat{I}} = \vec{e}_{x}\hat{I}_{x} + \vec{e}_{y}\hat{I}_{y} + \vec{e}_{z}\hat{I}_{z} , \quad (1.55)$$

де $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – одиничні вектори відповідно вздовж осей *X*, *Y*, *Z*, а величини $\hat{I}_x, \hat{I}_y, \hat{I}_z$ – оператори проекцій повного моменту по осях, що вказані індексами. Кожен із цих операторів складається з суми операторів проекцій орбітального моменту ($\hat{\ell}_j$) і спіну (\hat{s}_j) окремих нуклонів. Наприклад, для оператора проекцій на вісь *Z* маємо

$$\hat{I}_{z} = \sum_{i=1}^{A} [\hat{\ell}_{z}(i) + \hat{s}_{z}(i)].$$
(1.56)

Оператор $\vec{\hat{I}}^2$ комутує з операторами проекцій

$$\left[\vec{\hat{I}}^2, \hat{I}_j\right] = 0, \quad j = x, y, z; \quad \left[\hat{a}, \hat{b}\right] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a},$$

а оператори проекцій на різні осі не комутують між собою

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_x, \hat{I}_y \end{bmatrix} = i\hbar \hat{I}_z, \quad \begin{bmatrix} \hat{I}_y, \hat{I}_z \end{bmatrix} = i\hbar \hat{I}_x, \quad \begin{bmatrix} \hat{I}_z, \hat{I}_x \end{bmatrix} = i\hbar \hat{I}_y. \tag{1.57}$$

Це означає, що одночасно з квадратом моменту може бути виміряна тільки одна проекція, тому кожний стан характеризується власним значенням квадрата оператора повного кутового моменту та проекцією $\hbar M$ кутового моменту, зазвичай на вісь Z, а хви-

льова функція стану є власною функцією операторів \hat{I}^2 та \hat{I}_z :

$$\hat{I}^{2} \Psi_{M}^{J} = \hbar^{2} I (I+1) \Psi_{M}^{I}, \quad \hat{I}_{z} \Psi_{M}^{I} = \hbar M \Psi_{M}^{I}.$$
 (1.58)

Із квантової механіки відомо, що квантові числа *I*, які визначають власні значення квадрата оператора повного моменту, можуть набувати тільки цілих або півцілих значень:

$$I = (n+1)/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
 (1.59)

Власні значення $\hbar M$ оператора проекції кутового моменту (проекція моменту) є також дискретними і за заданого I можуть мати лише 2I + 1 значень:

$$-\hbar I, -\hbar (I-1), -\hbar (I-2), \dots, \hbar (I-2), \hbar (I-1), \hbar I.$$
(1.60)

Коли вказують значення спіну ядра, то мають на увазі квантове число I, яке згідно з (1.58) визначає власне значення оператора квадрата повного кутового моменту. Якщо користуватися квазікласичною інтерпретацією й розглядати кутовий момент як деякий вектор \vec{I} у координатному просторі, то при I >> 1 модуль цього вектора дорівнюватиме

$$|\vec{I}| = \hbar \sqrt{I(I+1)}$$
. (1.61)

У ядерній фізиці кутові моменти та спіни мікрооб'єктів вимірюють у одиницях сталої Планка:

 $\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-27} \text{ epr} \cdot \text{c} = 6,582 \cdot 10^{-22} \text{ MeB} \cdot \text{c}.$

Розглянемо більш детально оператори орбітального і спінового моментів окремого нуклона. У класичній механіці орбітальний момент $\vec{\ell}$ точкової частинки є векторним добутком її радіусавектора \vec{r} та імпульсу \vec{p} :

$$\vec{\ell} = \begin{bmatrix} \vec{r} \times \vec{p} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}.$$
(1.62)

Перехід до квантової механіки здійснюється заміною класичного імпульсу оператором імпульсу $\vec{\hat{p}}$:

$$\vec{\hat{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}, \quad \vec{\nabla} \equiv \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$
 (1.63)

Оператори проекцій орбітального моменту мають досить простий вигляд у сферичній системі координат (r, θ, φ) з модулем r радіуса-вектора \vec{r} , полярним кутом θ та азимутальним кутом φ (рис. 1.7):



Рис. 1.7. Сферична система координат

Ураховуючи формули (1.63) – (1.65), маємо, що оператори кутового моменту залежать тільки від кутів:

$$\hat{\ell}_{x} = y\hat{p}_{z} - z\hat{p}_{y} = i\hbar \left[\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right],$$
$$\hat{\ell}_{y} = z\hat{p}_{x} - x\hat{p}_{z} = i\hbar \left[-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right], \quad (1.65)$$

$$\hat{\ell}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x = -i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\right],$$
$$\vec{\ell}^2 = \hat{\ell}_x^2 + \hat{\ell}_y^2 + \hat{\ell}_z^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right],$$

де $\vec{\ell}^2 = (\vec{\ell} \cdot \vec{\ell})$ – оператор квадрата орбітального моменту;

$$\hat{\ell} = \vec{e}_x \hat{\ell}_x + \vec{e}_y \hat{\ell}_y + \vec{e}_z \hat{\ell}_z$$

Якщо частинки рухаються у вільному просторі або в центрально-симетричному полі з потенціалом взаємодії V(r), то

оператори $\vec{\ell}^2(\theta, \phi)$ і $\hat{\ell}_z(\theta, \phi)$ комутують з гамільтоніаном \hat{H} :

$$\hat{H} = \begin{cases} \frac{\vec{p}^2}{2m} & -\text{вільна частинка,} \\ \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) & -\text{центрально-симетричне поле,} \\ \begin{bmatrix} \hat{H}, \hat{\ell}^2 \end{bmatrix} \equiv \hat{H} \hat{\ell}^2 - \hat{\ell}^2 \hat{H} = 0, \quad \begin{bmatrix} \hat{H}, \hat{\ell}_z \end{bmatrix} \equiv \hat{H} \hat{\ell}_z - \hat{\ell}_z \hat{H} = 0, \quad (1.66) \end{cases}$$

і тому будуть зберігатися власне значення оператора $\hat{\ell}^2$ і проекція m_{ℓ} кутового моменту на вісь Z, а хвильові функції будуть власними функціями операторів квадрата кутового моменту та проекції $\hat{\ell}_z$:

$$\hat{\ell}^{2} \Psi^{\ell}_{m_{\ell}} = \hbar^{2} \ell (\ell+1) \Psi^{\ell}_{m_{\ell}}, \quad \hat{\ell}_{z} \Psi^{\ell}_{m_{\ell}} = \hbar m_{\ell} \Psi^{\ell}_{m_{\ell}}.$$
(1.67)

Тут ℓ – ціле квантове число, що визначає власне значення квадрата оператора кутового моменту. Саме ця величина й називається кутовим моментом. Проекція квантового моменту $\hbar m_{\ell}$ набуває $2\ell + 1$ цілих значень: $-\hbar\ell$, $-\hbar(\ell-1)$,..., $\hbar(\ell-1)$, $\hbar\ell$. Широко використовують таку термінологію для позначення станів з різними значеннями орбітального кутового моменту: якщо $\ell = 0$, то кажуть, що частинка перебуває в *s* (*sharp*) стані, якщо $\ell = 1$, то в *p* (*principial*) стані, якщо $\ell = 2$ і 3 - y d (*diffuse*)

і f (fundamental) станах, а якщо $\ell = 4, 5, 6, ...,$ то – у станах g, h, i,... (позначення в порядку появи літер латинського алфавіту): Значення $\ell : 0123456$

Символ стану: s p d f g h i.

Зазначимо, що у таких двочастинкових системах, як атом водню або ядро дейтрона, замість орбітального моменту кожної частинки зазвичай розглядають орбітальний момент відносного руху частинок.

Тепер розглянемо спіновий момент окремої частинки. Внутрішній (спіновий) момент частинки, не позв'язаний з орбітальним рухом, уперше був відкритий в електроні. Зокрема, досліди Штерна–Герлаха з вивчення проходження пучків атомів водню і срібла через магнітне поле продемонстрували існування двох орієнтацій магнітного моменту електрона, не пов'язаних з його орбітальним рухом, і дали можливість явно визначити додатковий власний момент кількості руху електрона, який отримав назву спін. Його прийнято позначати літерою *s*. У дослідах Штерна–Герлаха було показано, що електрон має спін 1/2 (в одиницях \hbar). Експерименти з визначення спінів протона та нейтрона також показують, що обидві ці частинки, подібно до електрона мають спін 1/2. Аналогічно, як і у випадку орбітального моменту, власне значення оператора квадрата спінового моменту

$$\vec{\hat{s}}^2 = \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2 \tag{1.68}$$

має вигляд

$$\lambda_{s^2} = \hbar^2 s(s+1), \tag{1.69}$$

де *s* – спінове число, яке й називається спіном.

Проекція $\hbar m_s$ на виділений напрямок Z може набувати (2s+1) значення. Для електрона та нуклонів s = 1/2, тому $\hbar m_s$ набуває двох можливих значень:

$$\hbar m_s = \pm \frac{1}{2}\hbar. \tag{1.70}$$

Спін не має аналогу в класичній фізиці і його не можна виразити ні через класичні значення координат та імпульсів, ні через

квантові оператори цих величин. Оскільки ймовірність того чи іншого значення проекції спіну не залежить від координат частинки, що рухається вільно, то хвильову функцію такої частинки зі спіном *s* і проекцією m_s можна записати у вигляді

$$\Psi(\vec{r},t,s) = \varphi(\vec{r},t)\chi_{sm_s}, \qquad (1.71)$$

де $\varphi(\vec{r},t)$ – координатний компонент хвильової функції; χ_{sm_s} – спінова хвильова функція.

Розглянемо випадок, коли оператор спіну \vec{s} відповідає спіну 1/2. Тоді в представленні, у якому оператор $\hat{s}_z \in$ діагональним, оператори всіх інших проекцій спіну мають вигляд двовимірних матриць:

$$\hat{s}_{x} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_{x}, \quad \hat{s}_{y} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_{y},$$

$$\hat{s}_{z} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_{z}, \qquad \qquad \vec{\hat{s}} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}.$$
(1.72)

Матриці $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ називаються *спіновими матрицями Паулі*. Вони задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1, \quad \sigma_i \sigma_k = -\sigma_k \sigma_i = i\sigma_l, \quad (1.73)$$

де індекси *i*, *k*, *l* пробігають значення *x*, *y*, *z* у циклічному порядку. Власні функції операторів $\vec{s}^2 \equiv \hbar^2 \vec{\sigma}^2 / 4$ і $\hat{s}_z = \hbar \sigma_z / 2$ є розв'язками рівнянь:

$$\vec{s}^{\,2}\chi_{\frac{1}{2},m_s} = \hbar^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) \chi_{\frac{1}{2},m_s}, \quad \hat{s}_z \chi_{\frac{1}{2},m_s} = \hbar m_s \chi_{\frac{1}{2},m_s}.$$
(1.74)

Згідно з виразами (1.72) – (1.74) спінові функції можна записати в такій матричній формі:

$$\chi_{\frac{1}{2},m_s=\frac{1}{2}} \equiv \chi_{\frac{1}{2},m_s=\frac{1}{2}}(s_z) = \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\frac{1}{2},m_s=-\frac{1}{2}} \equiv \chi_{\frac{1}{2},m_s=-\frac{1}{2}}(s_z) = \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}. (1.75)$$

Спінові функції ортонормовані й умова ортонормованості в матричних позначеннях має вигляд

$$\chi_{\frac{1}{2},m_s}^+\chi_{\frac{1}{2},m_s'} = \delta_{m_sm_s'}, \qquad (1.76)$$

де символ "+" – знак ермітового спряження. У середньому полі, що діє у сферичних ядрах, зберігається повний момент окремого нуклона $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$ з власними функціями $\psi_{m_i}^j$:

$$\vec{\hat{j}}^2 \Psi^j_{m_j} = \hbar^2 j (j+1) \Psi^j_{m_j}, \quad \hat{j}_z \Psi^j_{m_j} = \hbar m_j \Psi^j_{m_j}.$$
(1.77)

Оператор повного кутового моменту є векторною сумою операторів орбітального та спінового моментів, тому для частинок зі спіном 1/2 він набуває тільки півцілих значень $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ при $\ell > 0$ та j = 1/2 при $\ell = 0$. У випадку, коли зберігаються моменти окремих нуклонів, оператор повного кутового моменту ядра є векторною сумою їхніх операторів.

Для експериментального визначення спінів атомних ядер було запропоновано цілу низку методів. Найбільш ранні з них пов'язані з вивченням надтонкої структури оптичних спектрів, більш сучасні використовують радіоспектроскопічну техніку й пов'язані з дослідженям поведінки ядер у магнітному полі. Усі ці методи ґрунтуються на зв'язку спіну з магнітним моментом і появі у частинки з магнітним моментом додаткової енергії при її русі в магнітному полі. Спіни короткоживучих ізотопів і ядер у збуджених станах визначають методами ядерної спектроскопії, а також з ядерних реакцій на підставі закону збереження повного моменту кількості руху, який виконується як у класичній, так і квантовій системах.

Аналіз спінів різних ядер дозволив установити такі закономірності:

• при парному значенні масового числа *A* спін основного стану ядра завжди цілий, а при непарному – півцілий. Історично цей факт відіграв вирішальну роль при переході від протонноелектронної моделі ядра до протонно-нейтронної. Дійсно, з правил векторного додавання операторів кутових моментів випливає: якщо в системі частинок зі спіном 1/2 їхня кількість парна, то спін набуває цілого значення, а якщо непарна – то півцілого.

Тому, якщо б, наприклад, дейтрон складався з двох протонів і електрона, то значення його спіну було б півцілим, у той час як експеримент дає ціле значення, а саме, одиницю;

• спіни всіх парно-парних ядер в основних станах дорівнюють нулю. Цей факт указує на те, що в явищі спарювання нуклонів, про яке йшлося при розгляді масової формули, беруть участь два нуклони з протилежно орієнтованими моментами кількості руху, тому сумарний момент пари дорівнює нулю. Іншими словами, існує особлива енергетична вигідність групування нуклонів у пари з сумарним нульовим моментом;

• спіни основних станів стабільних ядер, навіть за дуже великих значень масових чисел A, не перевищують 9/2, тобто малі відносно суми значень спінів та орбітальних моментів усіх частинок, що входять до складу ядра. Це вказує на те, що спін ядра формує відносно невелика кількість нуклонів, а основна частина нуклонів об'єднується в групи, які мають нульовий сумарний момент (пов'язана в замкнених оболонках).

Окрім спіну, його проєкції та енергії, ядерні стани можуть характеризуватися також іншими квантовими числами, що пов'язані з інваріантністю системи щодо деяких операцій симетрії. Згідно з нерелятивістською квантовою механікою поведінка системи визначається гамільтоніаном \hat{H} . Якщо гамільтоніан інваріантний щодо деяких перетворень, тобто не змінюється при таких перетвореннях, то в системі існують і зберігаються додаткові квантові числа, які пов'язані з інваріантністю щодо даної операції симетрії. У нерелятивістському наближенні гамільтоніан системи A нуклонів має вигляд, у якому для простоти спінові індекси не вказані, і підсумовування виконується за всіма нуклонами:

$$\hat{H}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{i < j} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|).$$
(1.78)

Вираз (1.78) не змінюється при інверсії координат, тобто при зміні знака всіх декартових координат вектора \vec{r} на протилежні $-\vec{r}$. Наявність такої симетрії приводить до того, що хвильові функції $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_A; t)$, які описують рух частинок за допомогою рівняння Шредінгера

$$+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi, \qquad (1.79)$$

поділяються на два класи парних і непарних функцій:

$$\Psi_{\text{парн}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = \Psi_{\text{парн}}(-\vec{r}_1, -\vec{r}_2, \dots, -\vec{r}_A),$$

$$\Psi_{\text{непарн}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = -\Psi_{\text{непарн}}(-\vec{r}_1, -\vec{r}_2, \dots, -\vec{r}_A).$$
(1.80)

Парні функції $\psi_{парн}$ не залежать від зміни знаків декартових координат усіх частинок, а непарні змінюють знак. Парність хвильових функцій зберігається із часом і визначається почат-ковими умовами. Парність і поведінка системи при інверсії безпосередньо пов'язані з інваріантністю системи стосовно дзер-кальної симетрії. В одновимірному випадку перетворення інверсії та дзеркальної симетрії тотожні.

Проаналізуємо парність хвильової функції детальніше. Інваріантність системи відносно інверсії означає, що ймовірність її знаходження в будь-якій точці багатовимірного простору не змінюється при операції інверсії. Оскільки густину цієї ймовірності визначає квадрат хвильової функції $|\psi|^2$, то умова інваріантності щодо інверсії має вигляд

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A)|^2 = |\Psi(-\vec{r}_1, -\vec{r}_2, \dots, -\vec{r}_A)|^2, \qquad (1.81)$$

де координати $\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_A}$ задано в системі центра інерції.

Введемо оператор інверсії \hat{P}_r , що змінює знаки всіх просторових декартових координат у хвильовій функції

$$\hat{P}_{r}\psi(\vec{r}_{1},\vec{r}_{2},\ldots,\vec{r}_{A}) = \psi(-\vec{r}_{1},-\vec{r}_{2},\ldots,-\vec{r}_{A}).$$
(1.82)

Власні значення цього оператора, як і будь-якого іншого, визначаються рівнянням

$$\hat{P}_r \Psi = \pi_r \Psi. \tag{1.83}$$

Величину π_r можна знайти, ураховуючи, що дворазове застосування оператора \hat{P}_r не змінює початкової функції

$$\begin{split} \hat{P}_{r}^{2}\psi(\vec{r}_{1},\vec{r}_{2},\ldots,\vec{r}_{A}) &= \hat{P}_{r}\left(\hat{P}_{r}\psi(\vec{r}_{1},\vec{r}_{2},\ldots,\vec{r}_{A})\right) = \\ &= \hat{P}_{r}\psi(-\vec{r}_{1},-\vec{r}_{2},\ldots,-\vec{r}_{A}) = \psi(\vec{r}_{1},\vec{r}_{2},\ldots,\vec{r}_{A}) \equiv \pi_{r}^{2}\psi(\vec{r}_{1},\vec{r}_{2},\ldots,\vec{r}_{A}). \end{split}$$
(1.84)
Звідки маємо $\pi_{r}^{2} = 1$ і

 $\hat{P}_r \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_A) = \pi_r \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_A), \quad \pi_r = \pm 1.$ (1.85) Таким чином, хвильові функції систем, інваріантних щодо операції інверсії, поділяються на два класи: парні ($\pi_r = +1$) і непарні ($\pi_r = -1$).

Покажемо, що для нерелятивістського гамільтоніана вигляду (1.78) парність системи є інтегралом руху, тобто тип парності хвильової функції не змінюється із часом. Нехай $\psi^{\pi_r}(\vec{r_1},\vec{r_2},...,\vec{r_A};t)$ – хвильова функція даної парності в момент часу t. Знайдемо її в момент часу $t + \tau$. Для цього розкладемо її за степенями τ , вважаючи τ настільки малим, що квадратичним членом можна знехтувати

$$\psi^{\pi_r}(t+\tau) = \psi^{\pi_r}(t) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^{\pi_r}\right)\tau.$$
(1.86)

Оскільки з рівняння Шредінгера (1.79) випливає, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi^{\pi_r} = \frac{1}{i\hbar}H\psi^{\pi_r} = -\frac{i}{\hbar}H\psi^{\pi_r}, \qquad (1.87)$$

де гамільтоніан інваріантний щодо інверсій $H(-\vec{r}) = H(\vec{r})$, то похідна $\frac{\partial}{\partial t} \psi^{\pi_r}$ є функцією тієї ж парності, що й ψ^{π_r} . Таким чином, при переході від моменту t до наступного $t + \tau$ парність хвильової функції не змінилася. Послідовно зсуваючись у часі на нескінченно малі проміжки τ , переконуємося, що парність хвильової функції ψ не змінюється при будь-якому зсуві у часі, тобто вона є інтегралом руху

$$\hat{P}_r \psi^{\pi_r} \left(t + \tau \right) = \pi_r \psi^{\pi_r} \left(t + \tau \right).$$

Тепер розглянемо парність стану окремої частинки, рух якої характеризується орбітальним моментом ℓ , і знайдемо, від яких квантових чисел вона може залежати. Очевидно, що парність визначається кутовою частиною хвильової функції, оскільки модуль вектора не змінюється при інверсії просторових координат. Хвильова функція із фіксованим значенням ℓ має найпростіший вигляд у сферичній системі координат, де як функція

кутів вона пропорційна сферичній гармоніці (див. підрозд. 3.5.) і має вигляд

$$y_{\ell,m_{\ell}}(\vec{e}_r) = C_{\ell,m_{\ell}}Y_{\ell,m_{\ell}}(\theta,\phi) \equiv C_{\ell,m_{\ell}}P_{\ell}^{m_{\ell}}(\cos\theta)e^{im_{\ell}\phi}, \quad (1.88)$$

де $\vec{e}_r = \vec{r} / r$ – одиничний вектор уздовж радіального напрямку; m_ℓ – проекція орбітального моменту на вісь *Z*; C_{ℓ,m_ℓ} – залежна лише від ℓ і m_ℓ стала; $P_\ell^{m_\ell}$ – приєднана функція Лежандра:

$$P_{\ell}^{m_{\ell}}(\chi) = (-1)^{m_{\ell}} (1-\chi^{2})^{m_{\ell}/2} \frac{d^{m_{\ell}}}{d\chi^{m_{\ell}}} P_{\ell}(\chi),$$
$$P_{\ell}^{m_{\ell}}(-\chi) = (-1)^{\ell+m_{\ell}} P_{\ell}^{m_{\ell}}(\chi), \qquad (1.89)$$

 $P_{\ell}(\chi)$ – поліноми Лежандра (1.52).

Розглянемо перетворення інверсії у сферичній системі координат (рис. 1.8). Математично таке перетворення відповідає переходу від точки A(x, y, z) до точки B(-x, -y, -z), яка розміщена на прямій, що проходить через початок координат і лежить на тій самій відстані від початку координат. Із рис. 1.8 видно, що у сферичних координатах цей перехід означає таку заміну змінних:

$$\rightarrow r, \quad \varphi \rightarrow \varphi + \pi, \quad \theta \rightarrow \pi - \theta.$$
 (1.90)

При цих замінах кутова хвильова функція набуває вигляду

$$y_{\ell,m_{\ell}}(-\hat{r}) = (-1)^{\ell} y_{\ell,m_{\ell}}(\hat{r}), \quad \hat{r} \equiv \vec{r} / r,$$
(1.91)

оскільки $e^{im_{\ell}(\phi+\pi)} = (-1)^{m_{\ell}} e^{im_{\ell}\phi}$ та

$$P_{\ell}^{m_{\ell}}(\cos[\pi - \theta]) = P_{\ell}^{m_{\ell}}(-\cos\theta) = (-1)^{\ell + m_{\ell}} P_{\ell}^{m_{\ell}}(\cos\theta).$$
(1.92)



Рис. 1.8. Зміна кутів при інверсії декартових координат зроб. грец. прямо

Оскільки при інверсії координат хвильова функція лише множиться на коефіцієнт $(-1)^{\ell}$, то і власне значення парності стану частинки з орбітальним моментом ℓ буде дорівнювати

$$\pi_r = (-1)^{\ell} \,. \tag{1.93}$$

Маємо

$$\hat{P}_r \, y_{\ell, m_\ell}(\hat{r}) \equiv y_{\ell, m_\ell}(-\hat{r}) = (-1)^\ell \, y_{\ell, m_\ell}(\hat{r}) \equiv \pi_r \, y_{\ell, m_\ell}(\hat{r}) \,.$$

Дослідження ядерних перетворень показали, що для формулювання закону збереження парності в загальному випадку необхідно модифікувати поняття парності. Зокрема, кожній частинці з ненульовою масою спокою треба поставити у відповідність деяку внутрішню парність П. Значення парності П є числом, що дорівнює + 1 або – 1. Частинки, для яких $\Pi = +1$ називаються парними, а з $\Pi = -1$ – непарними. У загальному випадку парність системи визначається добутком внутрішньої парності частинок і парності хвильової функції їхнього руху. Стан називається парним, якщо повна парність додатна:

 $\Pi_1 \dots \Pi_A \Psi_{\text{парн}} (-\vec{r}_1, -\vec{r}_2, \dots, -\vec{r}_A) = \Psi_{\text{парн}} (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A)$ (1.94)

і непарним, якщо повна парність від'ємна

$$\Pi_1 \dots \Pi_A \Psi_{\text{henaph}} (-\vec{r_1}, -\vec{r_2}, \dots, -\vec{r_A}) = -\Psi_{\text{henaph}} (\vec{r_1}, \vec{r_2}, \dots, \vec{r_A}). \quad (1.96)$$

Звідси випливають такі прості правила, за якими можна отримувати правила відбору в ядерних реакціях, а також експериментально визначати внутрішні парності елементарних частинок і атомних ядер, а саме:

1) парність π_r частинки з орбітальним моментом ℓ і внутрішньою парністю П є добутком $\pi_r = (-1)^{\ell} \Pi$;

2) внутрішня парність Π_{12} системи з двох частинок з внутрішніми значеннями парності Π_1 та Π_2 і з відносним орбітальним моментом L дорівнює $(-1)^L \Pi_1 \Pi_2$. Звідки маємо, що внутрішня парність системи частинок з нульовим значенням кутового моменту збігається з її повною парністю.

За експериментальними дослідженнями внутрішні парності протона, нейтрона та електрона є однаковими і додатними. Згід-

но з вищенаведеними правилами отримуємо важливе для теорії ядер і атомів співвідношення, а саме: парність системи з *n* нуклонів (або електронів) з орбітальними моментами $\ell_1, ..., \ell_n$ дорівнює $(-1)^{\ell_1 + ... + \ell_n}$.

Парність основних станів парно-парних ядер припускають додатною й такою, що дорівнює одиниці. Парність основних станів інших ядер може бути як додатною так і від'ємною. Наприклад, основні стани ізотопів кисню ${}^{17}_{8}$ O та азоту ${}^{14}_{7}$ N мають додатну парність, а парності основних станів ізотопів ${}^{15}_{8}$ O та ${}^{15}_{7}$ N – від'ємні.

Ядра у збудженому та основному станах можуть мати різну парність. Наприклад, основний стан в ядрі свинцю $^{208}_{82}$ Pb має спін 0 і додатну парність (0⁺), а його перший збуджений стан – непарний зі спіном 3 (3⁻). На схемах ядерних рівнів зазвичай вказують як спін, так і парність кожного рівня. Спін вказують числом, а парність – знаками "+" та "-" у випадках відповідно додатних і від'ємних значень парності. Ці знаки ставлять зверху значення спіну. Сукупність значень спіну, парності та енергії називається *характеристикою ядерного рівня*.

1.7. Статичні електромагнітні моменти ядер

Електромагнітні моменти ядра визначають енергію його взаємодії із зовнішніми електромагнітними полями, і тому характеризують рух ядра в таких полях. Як відомо з класичної теорії електромагнетизму, реакцію будь-якої системи заряджених частинок на зовнішній електромагнітний вплив можна знайти за допомогою розкладу потенціальної енергії V_{elect} її взаємодії з зовнішнім електромагнітним полем у ряд за мультипольними моментами. Якщо ρ_e , \vec{j}_e – густини розподілу зарядів і струмів у системі, а $\bar{\varphi}$, \vec{A} – скалярний і векторний потенціали електромагнітного поля, то маємо

$$V_{\text{elect}} = \int d\vec{r} \left\{ \rho_e(\vec{r}) \overline{\varphi}(\vec{r}) - \vec{j}_e(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r}) \right\} =$$

= $q \overline{\varphi}_0 - \vec{D} \vec{E}_0 - \vec{\mu} \vec{H}_0 - \sum_{i,j} Q_{ij} \left[\frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right]_0 + \dots,$ (1.96)

де індекс "0" означає, що потенціали зовнішнього поля були розкладені в ряд Тейлора в початку координат (тобто в центрі ядра); $q = \sum_{a}^{A} e_{a}$ – повний заряд системи з A частинок, кожна з яких має заряд e_{a} ; x_{j} – декартові координати: $x_{1} \equiv x$, $x_{2} \equiv y$, $x_{3} \equiv z$; \vec{E}_{0} , \vec{H}_{0} – напруженості електричного ($\vec{E} = -\nabla \bar{\phi}$) і магнітного ($\vec{H} = \nabla \vec{A}$) полів у центрі ядра. Вектор \vec{D} у виразі (1.96) є електричним дипольним моментом

$$\vec{D} = \int \vec{r} \, \rho_e(\vec{r}) \, d\vec{r} = \sum_a e_a \vec{r}_a \,.$$
 (1.97)

Дипольний момент має зручний для аналізу вигляд у циклічній системі координат

$$\vec{D} = \sum_{m=0,\pm 1} D_m \vec{e}^m$$
, (1.98)

де

$$\vec{e}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + i\vec{e}_y), \quad \vec{e}^0 = \vec{e}_z, \quad \vec{e}^{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x - i\vec{e}_y),$$

– циклічні контраваріантні одиничні вектори з ортами $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ у декартовій системі координат, а циклічні компоненти дипольного моменту мають вигляд

$$D = \int r \rho_e(\vec{r}) d\vec{r} , \quad r = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_1(\theta, \phi).$$
 (1.99)

Тут Y₁ – сферічні гармоніки першого порядку (див. вираз (3.55)).

Величину Q_{ij} у формулі (1.96) називають *тензором квадрупольного моменту* (її підінтегральні функції визначені в декартових координатах):

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \rho_e(\vec{r}) d\vec{r} = \sum_a e_a (3x_i^{(a)} x_j^{(a)} - \delta_{ij} r_i^2), \quad (1.100)$$

де $x_1^{(a)} \equiv x^{(a)}, x_2^{(a)} \equiv y^{(a)}, x_3^{(a)} \equiv z^{(a)}$ – декартові координати частинки *а* вздовж осей *X*, *Y*, і *Z*, відповідно; $r_a^2 = x^{(a)2} + y^{(a)2} + z^{(a)2}$; δ_{ii} – символ Кронекера.

Тензори *Q_{ij}* можна записати у вигляді лінійних комбінацій квадрупольних моментів вигляду

$$q_{2m} = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \int r^2 Y_{2m}(\theta, \phi) \rho_e d\vec{r} , \quad q_{2-m} = (-1)^m q_{2m}^* , \quad (1.101)$$

де функції Y_{2m} є сферичними функціями другого порядку. Використовуючи це співвідношення, маємо, що компоненти тензора квадрупольного моменту визначаються величинами q_{2m} за допомогою формул:

$$Q_{xx} = -\frac{1}{2}q_{20} + \frac{\sqrt{6}}{4}(q_{22} + q_{2-2}), \quad Q_{yy} = -\frac{1}{2}q_{20} - \frac{\sqrt{6}}{4}(q_{22} + q_{2-2}),$$

$$Q_{zz} = q_{20}, \quad Q_{xy} = i\frac{\sqrt{6}}{4}(q_{22} - q_{2-2}), \quad (1.102)$$

$$Q_{xz} = i\frac{\sqrt{6}}{4}(q_{2-1} - q_{21}), \quad Q_{yz} = -i\frac{\sqrt{6}}{4}(q_{2-1} + q_{21}).$$

З умови ортонормовності сферичних функцій (див. вираз (3.53)) маємо, що в системі зі сферичним розподілом зарядів $q_{2m} = 0$, тобто всі компоненти тензора квадрупольного моменту дорівнюють нулю, $Q_{ij} = 0$. У випадку аксіально-симетричного розподілу заряду інтегрування за азимутальним кутом φ у виразі (1.101) приводить до рівності нулю лише значень квадрупольних моментів q_{2m} з $m \neq 0$. Зі співвідношень (1.102) маємо, що в системі з аксіально-симетричним розподілом зарядів усі недіагональні компоненти тензора квадрупольного моменту дорівнюють нулю, а діагональні – визначаються квадрупольним моментом $q_{20} = Q_{zz}$. Величина $Q_{zz} / e = q_{20} / e = Q_0$ називається власним, або внутрішнім квадрупольним моментом

$$Q_0 = \frac{1}{e}Q_{zz} = \frac{1}{e}\int (3z^2 - r^2)\rho_e d\vec{r} = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\int r^2 Y_{20}(\theta, \phi)\rho_e d\vec{r}.$$
 (1.103)

Внутрішній квадрупольний момент має розмірність площі.

Величина $\vec{\mu}$ у розкладі (1.96) є дипольним магнітним моментом. Він характеризує енергію взаємодії системи із зовнішнім магнітним полем напруженості \vec{H} . У класичній механіці магнітний момент визначається тільки орбітальними моментами частинок і має вигляд

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int [\vec{r} \times \vec{v}] \rho_e d\vec{r} = \frac{\mu_N}{e\hbar} \int g_l \vec{l} (\vec{r}) \rho_e d\vec{r} =$$
$$= \frac{1}{2c} \sum_a e_a \Big[\vec{r}^{(a)} \times \vec{v}^{(a)} \Big] = \sum_a \frac{\mu_N}{\hbar} g_l(a) \vec{l}_a, \quad \mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p c}, \quad (1.104)$$

де μ_N – ядерний магнетон; $g_l(a)\mu_N / \hbar$ – орбітальне гіромагнітне відношення; g_l – фактор Ланде орбітального руху: $g_l \equiv g_l(p) = 1$ для протонів і $g_l \equiv g_l(n) = 0$ для нейтронів; $\vec{l}_a = \left[\vec{r}^{(a)} \times \vec{v}^{(a)}\right]$ – орбітальний момент частинки *a*, що рухається зі швидкістю $\vec{v}^{(a)}$; *c* – швидкість світла. У квантовій механіці $\vec{\mu}$ є оператором, який будується з проекції магнітного моменту (1.104) заміною проекції орбітального моменту на оператор проекції орбітального моменту та додаванням внеску від спіну частинок.

Дослідимо дипольні та квадрупольні моменти багаточастинкової системи від її симетрії. Спочатку розглянемо електричний дипольний момент в основному стані ядра, тобто статичний електричний дипольний момент. Нехай основний стан ядра описується хвильовою функцію $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_A)$. Тоді густину розподілу заряду в ядрі $\rho_e(\vec{r})$ можна записати у вигляді

$$\rho_e(\vec{r}) = e \rho_p(\vec{r}), \quad \rho_p(\vec{r}) = \sum_{i=1}^Z w_i(\vec{r}), \quad (1.105)$$

де $\rho_p(\vec{r})$ – густина розподілу протонів; $w_i(\vec{r})$ – густина ймовірності знайти *i*-протон у точці \vec{r} :

$$w_i(\vec{r}) = \int |\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A)|^2 \prod_{k \neq i}^A d\vec{r}_k , \qquad (1.106)$$

де інтегрування ведеться за всіма координатами, окрім $\vec{r}_i \equiv \vec{r}$. Вираз для густини розподілу протонів можна переписати в більш зручному вигляді

$$\rho_{\rm p}(\vec{r}) = \int |\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A)|^2 \sum_{i=1}^Z \delta(\vec{r}_i - \vec{r}) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_A, \qquad (1.107)$$

де $\delta(\vec{r_i} - \vec{r})$ – узагальнена тривимірна δ -функція Дірака, яка в декартовій системі координат є добутком трьох одновимірних δ -функцій: $\delta(\vec{r_i} - \vec{r}) = \delta(x_i - x)\delta(y_i - y)\delta(z_i - z)$, що

$$\int_{a}^{b} dx \,\delta(x_{i} - x) f(x) = \begin{cases} f(x_{i}), & x_{i} \in (a, b), \\ 0, & x_{i} \notin (a, b). \end{cases}$$
(1.108)

Ураховуючи (1.107) і (1.108), формулу (1.97) для дипольного моменту можна переписати у вигляді

$$\vec{D} = \sum_{i=1}^{Z} e \int \vec{r_i} |\psi(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \dots, \vec{r_A})|^2 d\vec{r_1} \dots d\vec{r_A}, \qquad (1.109)$$

де інтегрування виконується за всіма координатам $\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_A}$.

Зробимо в інтегралі (1.109) заміну змінних $\vec{r_i} \rightarrow -\vec{r_i}$, тоді за законом збереження парності квадрат модуля хвильової функції

$$|\psi(-\vec{r_1},-\vec{r_2},\ldots,-\vec{r_A})|^2 = |\psi(\vec{r_1},\vec{r_2},\ldots,\vec{r_A})|^2$$

не змінює свій знак, а компоненти \vec{r} змінюють свій знак на протилежний, тому після врахування зміни знаків меж інтегрування маємо

$$(\vec{D})_i \rightarrow -(\vec{D})_i \Rightarrow (\vec{D})_i = 0.$$
 (1.110)

Таким чином, дипольні моменти ядер у стаціонарних станах дорівнюють нулю. Зрозуміло також, що дипольний момент дорівнює нулю в усіх системах, у яких густина розподілу заряду ρ_e пропорційна густині розподілу речовини $\rho: \rho_e = \text{const} \cdot \rho$. Справді, у цьому випадку дипольний момент \vec{D} пропорційний вектору центра тяжіння системи

$$\vec{D} = \operatorname{const} \cdot \vec{R}, \quad \vec{R} = \int \vec{r} \,\rho \,d\vec{r} \,, \tag{1.111}$$

значення якого для розкладу (1.96) за визначенням дорівнює нулю.

Тепер розглянемо квадрупольний момент (1.103). При сферичному розподілі густини заряду, тобто для сферичного ядра зі сталою густиною заряду, квадрупольний момент дорівнює нулю. Як було вже зазначено, це випливає з виразів (1.101), (1.102) та ортонормованості сферичних функцій Y_{lm} . Розглянемо внутрішній квадрупольний момент для аксіально-деформованого ядра зі сталою густиною заряду. Припустимо, що ядро має форму еліпсоїда обертання (рис. 1.9). Нехай *а* та *b* – довжини півосей еліпсоїда і піввісь *а* має напрямок уздовж осі *Z*:

$$\begin{cases} a = R(\theta = 0), \\ b = R(\theta = \pi/2), \end{cases}$$
(1.112)

де $R(\theta, \phi)$ — радіус еліпсоїда у сферичній системі координат. Якщо густина електричного заряду стала, то отримуємо для ядра з атомним номером *Z*:

$$Q_0 = \frac{2}{5}Z(a^2 - b^2) = \frac{2}{5}Z(a - b)(a + b).$$
(1.113)

За малих деформацій, урахувавши співвідношення $R(\theta, \phi) = R'_0 (1 + \beta_2 Y_{20}(\theta, \phi))$ (формула (1.49) з $\beta_2 \equiv \beta_{20}$) і значення $Y_{20}(\theta = 0, \phi = 0) = \sqrt{5/4\pi}$, $Y_{20}(\theta = \pi/2, \phi = 0) = -\sqrt{5/16\pi}$, формула (1.113) набуває вигляду

$$Q_0 \cong \frac{3}{5} Z \cdot R_0^2 \frac{\Delta R_0}{R_0} \sim Z R_0^2 \beta_2 , \qquad (1.114)$$

де $\Delta R_0 = a - R_0 = 2(R_0 - b)$ – різниця півосі R_a відносно величини R_0 ; R_0 – радіус сферичного ядра еквівалентного об'єму: $R_0^3 = a \cdot b^2$.



Рис. 1.9. Перетин витягнутого (а) і сплюснутого (б) сфероїдальних ядер уздовж осі симетрії Z

Таким чином, якщо відомі значення власних електричних квадрупольних моментів, то можна знайти зміну радіуса в деформованих ядрах, і тим самим абсолютне значення і знак параметра деформації ядра. Зокрема, із рівняння (1.114) випливає, що $Q_0 > 0$ для витягнутого еліпсоїда і $Q_0 < 0$ для сплюснутого еліпсоїда. У дослідах вимірюють квадрупольні моменти Q у лабораторній системі координат з віссю ординат уздовж напрямку зовнішнього поля. Внутрішні квадрупольні моменти Q₀ характеризують розподіл заряду та обчислюються у власній системі відліку, яка жорстко пов'язана з ядром. Її вісь ординат збігається з віссю симетрії ядра, але не збігається з віссю ординат (Z') лабораторної системи координат. Тому спостережуваний ("спектроскопічний") квадрупольний момент *Q* не збігається з власним Q₀, а є середнім значенням власного моменту відносно напрямку, що задається зовнішнім електричним полем. Орієнтація ядра відносно довільної осі Z визначається орієнтацією його спіну \vec{I} щодо цієї осі та значенням K проекції спіну на вісь симетрії ядра (див. рис. 3.13), і тому різниця між Q і Q_0 залежить від величин I, K. Згідно з квантово-механічними обчисленнями власний і спостережуваний квадрупольні моменти незбуджених аксіальних ядер (K = 0) пов'язані співвідношенням

$$Q = \frac{I(2I-1)}{(I+1)(2I+3)}Q_0.$$
(1.115)

Загалом будь-яке ядро може мати ненульовий внутрішній квадрупольний момент. Проте, як видно з цієї формули, спостережуваний квадрупольний момент ядер з I = 0, I = 1/2 завжди дорівнює нулю незалежно від значення Q_0 . На рис. 1.10 показано усереднену експериментальну криву залежності власного квадрупольного моменту ядра від кількості протонів або нейтронів.



Рис. 1.10. Усереднена залежність власного квадрупольного моменту від кількості протонів або нейтронів

Аналіз експериментальних даних показує, що квадрупольні моменти ядер мають такі властивості:

1) дейтрон має власний квадрупольний момент, який відрізняється від нуля, хоча й має невелике значення: $Q_0 = 0,27 \text{ фm}^2$, $Q_0 / R_0^2 = 1,18$, де R_0 – радіус дейтрона;

2) квадрупольні моменти більшості ядер додатні, а їхні значення мають певну періодичність. Величина Q_0 / R_0^2 коливається між досить великими додатними значеннями, нулем і набуває порівняно малих від'ємних значень. Для магічних значень Z або N власний квадрупольний момент має дуже маленьке значення;

3) квадрупольні моменти деяких ядер на порядок перевищують їхні квадрати радіусів, тобто значення, які можна очікувати (відповідно до п. 1), якщо квадрупольні моменти формуються рухом окремих нуклонів. Наприклад, для танталу ₇₃Та маємо $Q_0 / R_0^2 = 27,9$. Ця особливість вказує на колективне походження квадрупольних моментів і є свідченням різкої несферичної форми деяких ядер. У цілому дослідження квадрупольних моментів відіграло вирішальну роль у створенні узагальненої (колективної) моделі ядра.

Задачі та завдання для самостійної роботи

1.1. Порівняти питому енергію зв'язку \overline{B} з енергією відокремлення нейтрона S_n для ядер ${}^{11}_5$ B, ${}^{92}_{41}$ Nb та ${}^{239}_{92}$ U. Показати, що в наближені неперервної залежності енергії зв'язку від масового числа \overline{B} і S_n збігаються в області атомних ядер зі сталими питомими енергіями зв'язку.

Розв'язання:Користуючись таблицями енергій зв'язку B(Z, A), знаходимо такі значення (в одиницях MeB) для $\overline{B}(Z, A) = B(Z, A) / A$ та енергії відокремлення нейтрона $S_n(Z, A) = B(Z, A) - B(Z, A - 1)$:

¹¹₅
$$B - \overline{B} = 6,93;$$
 $S_n = 11,46;$ ⁹²₄₁Nb $-\overline{B} = 8,66;$
 $S_n = 7,9;$ ²³⁹₉₂U $-\overline{B} = 7,56;$ $S_n = 4,8.$

Видно, що питома енергія зв'язку може суттєво відрізнятися від енергії відокремлення нейтрона. У наближенні неперервної залежності енергії зв'язку від масового числа, знаходимо

 $S_n(Z, A) = B(Z, A) - B(Z, A-1) \cong \partial B(Z, A) / \partial A|_{Z=\text{const}}$. Звідки отримуємо, що при сталих питомих енергіях зв'язку значення S_n і \overline{B} будуть майже однаковими:

 $S_{n}(Z,A) \cong \partial [A \cdot \overline{B}(Z,A)] / \partial A|_{Z=\text{const}} \cong \overline{B}(Z,A).$

Зазначимо, що енергія відокремлення нейтрона визначається енергіями зв'язку ядер з масовими числами різної парності, тому

при обчисленні S_n за формулою Вейцзекера (1.17) значення \overline{B} і S_n завжди будуть відрізнятися на енергію спарювання.

1.2. Середній радіус Землі $R_g \cong 6,4 \cdot 10^3$ км, а її маса $m_g \cong 6,0 \cdot 10^{21}$ т. Яким мав би бути радіус Землі, якби її густина збігалася з густиною ядерної речовини?

Розв'язання:Використовуючи значення для густини ядерної речовини, із виразу (1.47) $\rho \cong 2 \cdot 10^{14}$ г/см³ = $2 \cdot 10^8$ т/см³ знаходимо для радіуса кулі з густиною ядерної матерії

$$R_k = \left(\frac{3 \cdot m_g}{4\pi \cdot \rho}\right)^{1/3} \cong 200 \,\mathrm{M} \qquad \mathrm{i} \quad \frac{R_k}{R_g} \cong 3 \cdot 10^{-5} \,\mathrm{.}$$

1.3. Користуючись моделлю рідкої краплини з урахуванням енергії асиметрії атомного ядра, отримати загальне співвідношення, що пов'язує заряд Z найбільш стабільного ядра серед усіх ізобар з масовим числом A.

Розв'язання: Енергія спокою (маса атомного ядра) дорівнює

$$M(Z,A)c^{2} = Zm_{\rm p}c^{2} + (A-Z)m_{\rm n}c^{2} - B(Z,A),$$

де B(A,Z) – енергія зв'язку ядра, яка в моделі рідкої краплини описується неперервною частиною виразу Вейцзекера (1.17):

$$B(Z, A) = a_1 A + a_2 Z A^{2/3} + a_3 Z^2 A^{-1/3} + a_4 (A - 2Z)^2 / A.$$

Найбільш стабільне ядро для даного ланцюжка ізобарів з A = const визначається з умови мінімуму маси ядра, тобто з умови рівності нулю похідної за зарядом Z від функції $M(Z, A)c^2$, тоді при фіксованому числі A, знаходимо

$$Z = \frac{A(1 - \Delta m_{\rm p} / (4a_4))}{2 + (a_3 / a_4)A^{2/3} / 2} \quad 3 \quad \Delta m_{\rm p} \equiv (m_{\rm p} - m_{\rm n})c^2 = -1,294 \text{ MeB}.$$

Після підстановки числових значень сталих із виразу (1.18) отримуємо $Z = \frac{A}{1,97 + 0,015 A^{2/3}}$. Без урахування різниці мас нуклонів Δm_p значення заряду найбільш стабільного ізобару

буде визначатися співвідношенням такого ж вигляду, але з коефіцієнтом 2,0 замість 1,97.

Зауважимо, що для легких ядер з $A \le 20$, де внесок кулонівської взаємодії в енергію зв'язку малий, маємо $Z \cong N \cong 0, 5A$, у важких ядрах $A \sim 200$ і $Z \cong A/2, 5$, тобто $N \cong 1, 5Z$.

1.4. До якої температури треба нагріти дейтерій, для того, щоб уможливити проходження реакції синтезу? Відстань, на якій долається кулонівський бар'єр, становить 10 фм. Стала

Больцмана
$$k_B = 8,617 \cdot 10^{-5} \frac{\text{св}}{\text{K}}$$
.

1.5. Знайти зв'язок між дифузністю та товщиною поверхневого прошарку, якщо вважати, що густина розподілу нуклонів в ядрі є функцією Фермі.

1.6. Проаналізувати можливість збереження парності системи частинок, що рухаються, у таких потенціалах:

a)
$$V(\vec{r}) = m\omega^2 r^2 \cdot \frac{(1+\beta\cos\theta)}{2};$$

b) $V(\vec{r}) = m\omega^2 r^2 \cdot \frac{(1+\beta\sin\theta)}{2};$
b) $V(\vec{r}) = m\omega^2 r^2 \cdot \frac{(1+\beta\cos^2\theta)}{2}.$

Розділ 2

ДВОНУКЛОННІ СИСТЕМИ ТА ЯДЕРНА ВЗАЄМОДІЯ

2.1. Класифікація станів системи двох нуклонів

Властивості ядерної взаємодії краще починати вивчати з систем, які складаються з двох нуклонів. Попередня класифікація станів двонуклонних систем значно спрощує такі дослідження. Розглянемо квантові числа двонуклонних станів, ураховуючи закон збереження кутового моменту. У загальному випадку спіновий і орбітальний моменти нейтрона й протона не зберігаються, а зберігається повний кутовий момент системи I (див. підрозд. 1.6), який відповідає квадрату векторного оператора $\vec{I} = \vec{L} + \vec{S}$ повного моменту кількості руху, де \vec{L} і \vec{S} ($\vec{S} = \vec{s}_p + \vec{s}_n$) – векторні оператори орбітального моменту та сумарного спіну протона й нейтрона. Оскільки власні значення квадрата повного орбітального моменту задовольняють нерівність $|I - S| \le L \le |I + S|$, то за фіксованого значення L.

Відповідно до правил додавання векторних операторів кутових моментів спін *S* двонуклонної системи лежить в інтервалі $|s_p - s_n| \le S \le |s_p + s_n|$, а значення повного кутового моменту *I* – у межах $|L - S| \le I \le |L + S|$. Як відомо, спіни протона s_p і нейтрона s_n дорівнюють 1/2, тоді повний спін двонуклонної системи *S* дорівнює або нулю (синглетний стан, коли проекція повно-

го спіну має одне значення), або одиниці (триплетний стан з трьома значеннями для проекції повного спіну). У синглетному стані, S = 0, момент кількості руху I зумовлений тільки орбітальним рухом нуклонів. У цьому випадку L = I і парність стану π_r , яка згідно з підрозд. 1.6 дорівнює $(-1)^L$, визначається парністю повного моменту $\pi_r = (-1)^L = (-1)^I$. Для триплетного стану S = 1 і оскільки $|I - S| \le L \le |I + S|$, то квантове число L може набувати трьох значень: I - 1, I, I + 1. Тому парність $\pi_r = (-1)^L$ станів з повним кутовим моментом I = L протилежна парності станів з $I = L \pm 1$. Як і у випадку однієї частинки (див. підрозд. 1.6), замість числових значень орбітального моменту L використовують спектроскопічні позначення, але з великими літерами:

> значення *L*: 0 1 2 3 4 5 6 символ стану: *S P D F G H I*

Стани системи позначають символами ${}^{2S+1}L_I$. Наприклад, символ ${}^{3}D_{1}$ означає, що система перебуває в триплетному стані (S=1) з орбітальним моментом L=2 і повним моментом кількості руху I = 1. У триплетних станах ${}^{3}(I-1)_{I}$ та ${}^{3}(I+1)_{I}$ (з різними значеннями $L = I \pm 1 \ge 0$) значення спіну повного кутового моменту *I* і парності $(-1)^{L} = (-1)^{I-1} = (-1)^{I+1}$ однакові, тому ці стани можуть існувати одночасно. Суперпозиція станів, що існують одночасно, називається змішаним станом. Стани ${}^{3}I_{I}$ та ${}^{1}I_{I}$ мають різні значення спіну, тому вони не змішуються один з одним. Такі стани називаються чистими. Характеристики станів будують, враховуючи нерівність $|I - S| \le L \le |I + S|$ і парність $\pi_r = (-1)^L$. Найпростіші синглетні та триплетні стани наведені в табл. 2.1. Система, що складається з протона ы нейтрона може бути як стабільною, так і нестабільною. Наприклад, ядро дейтрона (важкого водню) стабільне. Разом з тим, нестійка система з двох протонів або нейтронів може утворитися при їхньому розсіянні.

Ι	Синглетні стани (<i>S</i> = 0)		Триплетні стани (<i>S</i> = 1)	
	Парність			
	$\pi_r = +1$	$\pi_r = -1$	$\pi_r = +1$	$\pi_r = -1$
0	${}^{1}S_{0}$			${}^{3}P_{0}$
1		${}^{1}P_{1}$	${}^{3}S_{1} + {}^{3}D_{1}$	${}^{3}P_{1}$
2	$^{1}D_{2}$		$^{3}D_{2}$	${}^{3}P_{2} + {}^{3}F_{2}$

Таблиця 2.1. Характеристики найпростіших двочастинкових станів

2.2. Дейтрон та його властивості

Експериментальні дослідження показали, що спін основного стану дейтрона дорівнює одиниці. Із табл. 2.1 видно, що в цьому випадку дейтрон може існувати або в чистих станах ${}^{1}P_{1}$, ${}^{3}P_{1}$, або в змішаному стані ${}^{3}S_{1} + {}^{3}D_{1}$. Відмінне від нуля значення електричного квадрупольного моменту дейтрона показує, що орбітальний момент дейтрона не може дорівнювати одиниці, тому основним його станом є триплетний стан ${}^{3}S_{1} + {}^{3}D_{1}$. Іншими словами, хвильова функція дейтрона ψ є суперпозицією хвильових функцій ${}^{3}S_{1}(\varphi_{S})$ та ${}^{3}D_{1}(\varphi_{D})$ станів:

$$\Psi = a_S \varphi_S + a_D \varphi_D \tag{2.1}$$

з амплітудами ймовірностей a_S та a_D , що задовольняють умову

$$a_S^2 + a_D^2 = 1 \ . \tag{2.2}$$

Згідно з експериментальними даними та теоретичними розрахунками домішок *D* стану незначна:

$$(a_D / a_S)^2 \approx (3 \div 4)\%.$$
 (2.3)

Дослідження розсіяння релятивістських електронів на дейтронах дозволило визначити середньоквадратичний радіус $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ розподілу його заряду, який виявився таким, що дорівнює 2,15 фм. Оскільки радіус нуклона приблизно дорівнює 0,8 фм, то нуклони в дейтроні достатньо розділені. Дейтрон має додатний електричний квадрупольний момент Q_0 , що свідчить про його витягнуту форму, подібну до сигари.

Енергію зв'язку дейтрона було знайдено при вивченні його фоторозщеплення (d + $\gamma \rightarrow$ p + n). Вона дорівнює 2,225 MeB, що набагато менше від енергії зв'язку інших найлегших ядер. Наприклад, енергія зв'язку $_{1}^{3}$ H дорівнює 8,5 MeB, а енергія зв'язку $_{2}^{3}$ He – 7,7 MeB, $_{2}^{4}$ He – 28,4 MeB. Таким чином, дейтрон є досить "пухкою" системою. Він також має досить великий радіус $R_{0} = 4,8 \text{ фм}$. Дійсно, якщо спиратися на стандартну систематику $R_{0} = 1,25A^{1/3}$, то такому радіусу дейтрона відповідало б значення масового числа $A = (4,8/1,25)^{3} \approx 57$.

Розглянемо властивості основного стану дейтрона, нехтуючи домішкою D компонента і припускаючи, що потенціал взаємодії між нуклонами можна апроксимувати сферичносиметричною прямокутною ямою з глибиною V_0 і радіусом R. Рівняння Шредінгера для хвильової функції φ_{α} відносного руху протона й нейтрона в дейтроні має вигляд

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2\mu} + V(r)\right] \varphi_{\alpha}(r) = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + V(r)\right] \varphi_{\alpha}(r) = -\varepsilon \varphi_{\alpha}(r), \quad (2.4)$$

де $V(r) = -V_0 \theta(R-r)$, V_0 – глибина потенціалу, $r = |\vec{r_n} - \vec{r_p}|$ – відстань між протоном і нейтроном, μ – зведена маса протона і нейтрона: $\mu^{-1} = m_n^{-1} + m_p^{-1} \cong 2m_p^{-1}$; ε – енергія зв'язку, що визна-

чає енергію E системи відносно енергії спокою нуклонів, з яких вона складається $E = -\varepsilon$.

Ураховуючи сферичну симетрію потенціалу V(r), рівняння Шредінгера (2.4) зручно розглядати у сферичній системі координат. Оператор Лапласа у такій системі має вигляд

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{\ell}^2}{r^2}.$$
 (2.5)

Тут оператор $\tilde{\ell}^2$ залежить лише від кутових змінних θ, φ сферичної системи координат відносного руху нуклонів і збігається з оператором квадрата орбітального кутового моменту, виміряним в одиницях \hbar^2 (див. підрозд. 1.6):

$$\vec{\ell}^2 = -\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right].$$
(2.6)

Якщо система характеризується відносним орбітальним моментом L, то хвильова функція $\varphi_{\alpha}(\vec{r}) \equiv \varphi_{L}(\vec{r})$ є власною функцією оператора $\vec{\ell}^{2}$ і

$$\hat{\ell}^2 \varphi_L = L(L+1)\varphi_L. \tag{2.7}$$

При центральній взаємодії між нуклонами основним станом двонуклонної системи (тобто стан з найменшою енергією) є *S*-стан з L = 0. У цьому випадку рівняння (2.4) значно спрощується, якщо від функції $\phi_{L=0}(\vec{r})$ перейти до функції U(r):

$$\varphi_{L=0}(\vec{r}) = U(r) / r.$$
 (2.8)

Така заміна приводить до відсутності перших похідних у рівнянні для U(r). Підставляючи (2.8) у (2.4) і враховуючи (2.5), одержуємо радіальне рівняння Шредінгера для функції U(r):

$$U''(r) - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) U(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \varepsilon U(r), \text{ ge } U''(r) = \frac{d^2 U(r)}{dr^2}$$
(2.9)

Хвильова функція U(r) має також задовольняти граничні умови U(0) = 0, $U(\infty) = 0$, перша з яких означає скінченну ймовірність знайти нуклони при нульовій відстані між ними, тоді як друга обумовлена скінченним значенням радіуса дейтрона.

Інтервал змін координати r розіб'ємо на дві області: $0 \le r \le R$ (область 1) і r > R (область 2). В області 1 рівняння (2.9) набуває вигляду

$$U_1''(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 - \varepsilon) U_1(r) = 0$$
 (2.10)

і має такий розв'язок:

$$U_{1}(r) = A\sin(\chi r) + \tilde{A}\cos(\chi r), \quad \chi = \left[\frac{2\mu}{\hbar^{2}}(V_{0} - \varepsilon)\right]^{1/2}.$$
 (2.11)

Оскільки функція φ_L має бути скінченною при r = 0, то U(0) = 0 і $\tilde{A} = 0$.

Рівняння (2.9) в області 2 має вигляд

$$U_{2}''(r) - \frac{2\mu}{\hbar^{2}} \varepsilon U_{2}(r) = 0$$
 (2.12)

Розв'язком цього рівняння є

$$U_2(r) = Be^{-\alpha r} + \tilde{B}e^{+\alpha r}, \quad \alpha = \left[\frac{2\mu}{\hbar^2}\varepsilon\right]^{1/2}.$$
 (2.13)

Оскільки хвильова функція зв'язаного стану має зникати на нескінченності, то $\tilde{B} = 0$. Хвильова функція та її похідна мають бути неперервні в усій області, у тому числі, на межі потенціалу r = R, звідки

$$U_1(r=R) = U_2(r=R), \quad U_1'(r=R) = U_2'(r=R)$$

або

$$A\sin(\chi R) = Be^{-\alpha R}$$
, $A\chi\cos(\chi R) = -B\alpha e^{-\alpha R}$. (2.14)

Ці рівняння (умови "зшивання") містять за відомого значення V_0 три константи: A, B, ε . Для того, щоб знайти рівняння для ε , поділимо ліві та праві частини другого та першого співвідношень (2.14) одну на одну. Тоді отримаємо

$$\chi \operatorname{ctg}(\chi R) = -\alpha. \tag{2.15}$$

Величини

$$\chi \equiv \chi(\varepsilon, V_0) = \left[\frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0 - \varepsilon)\right]^{1/2}, \quad \alpha \equiv \alpha(\varepsilon) = \left[\frac{2\mu}{\hbar^2}\varepsilon\right]^{1/2}$$
(2.16)

є функціями амплітуди потенціалу та енергії, тому (2.15) є трансцендентним рівнянням для визначення або енергії при заданому V_0 , або амплітуди взаємодії за відомої енергії зв'язку є. Константи A та B у загальному виразі для хвильової функції

$$U(r) = A\sin(\chi r)\theta(R-r) + Be^{-\alpha r}\theta(r-R)$$
(2.17)

знаходимо таким чином. Із першого рівняння пари рівнянь (2.14) отримуємо відношення $B / A = \sin(\chi R) / e^{-\alpha R}$. Далі, користуючись умовою нормування

$$\int \varphi_{L=0}^2(\vec{r}) d\vec{r} = 4\pi \int_0^\infty U^2 dr = 1, \qquad (2.18)$$

обчислюємо величину А. Звідси маємо

$$A^{2} = \frac{\alpha}{2\pi(1+\alpha R)}, \quad B^{2} = \frac{\alpha \sin^{2}(\chi R)e^{2\alpha R}}{2\pi(1+\alpha R)}$$

У граничному випадку потенціалу нульового радіуса дії ядерних сил ($R \rightarrow 0$) нормована хвильова функція U(r) основного стану має вигляд

$$U(r) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} e^{-\alpha r} \,. \tag{2.19}$$

Розв'язок трансцендентного рівняння (2.15), який визначає енергії, залежить від параметра

$$x_0 = \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} V_0 R^2\right]^{1/2} \equiv \left[\chi^2 R^2 + \alpha^2 R^2\right]^{1/2}.$$
 (2.20)

Рівняння (2.15) після множення на R можна переписати у вигляді зручної для графічного аналізу системи двох трансцендентних рівнянь відносно змінних $y = \alpha R$, $x = \chi R$:

$$\begin{cases} y = -x \cdot \operatorname{ctg}(x) \\ x^2 + y^2 = x_0^2, \end{cases}$$
(2.21)

розв'язки якої залежать лише від x_0 .

Кола $x^2 + y^2 = x_0^2$ різних радіусів x_0 і крива $y = -x \cdot \text{ctg}(x)$ зображені на рис. 2.1. Точки перетину цих двох кривих і є роз-

в'язками рівнянь (2.15) і (2.21). Згідно з виразом (2.20) коло радіуса $x_0 \equiv n$ відповідає випадку взаємодії з характеристиками

(2.22)



Рис. 2.1. Графічний аналіз станів дейтрона в прямокутній ямі

В області $y \ge 0$ гілка кривої $y = -x \cdot \operatorname{ctg}(x)$, яка найближче розташована до нуля координат, починається з точки $x_0 = \pi/2$, y = 0, а далі зростає до нескінченності при $x = \pi$. Наступна гілка цієї функції починається лише з $x_0 = 3\pi/2$, тому при $x_0 < \pi/2$ $(V_0 R^2 < \pi^2 \hbar^2 / (8\mu))$ рівняння (2.21) розв'язків не мають, і зв'язані стани в системі нейтрон-протон відсутні. Якщо x_0 лежить в інтервалі $\pi/2 < x_0 < 3\pi/2$ $(\pi^2 \hbar^2 / (8\mu) < V_0 R^2 < 9\pi^2 \hbar^2 / (8\mu))$, то функції $x^2 + y^2 = x_0^2$, $y = -x \cdot \operatorname{ctg}(x)$ можуть перетинатися лише один раз, тоді система (2.21) може мати лише один розв'язок, тобто для x_0 у цій області може існувати лише один стан.

Таким чином, параметри взаємодії для утворення найнижчого стану у n – p -системі з потенціалом у вигляді прямокутної ями лежать в інтервалі

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu} < V_0 R^2 < \frac{9\pi^2 \hbar^2}{8\mu}.$$
(2.23)

Згідно із цим співвідношенням, можливість утворення стійкої протон-нейтронної системи залежить не від окремо взятих значень V_0 і R, а від їхнього добутку V_0R^2 . Тобто стабільний стан дейтрона може існувати як у випадку широкого і мілкого потенціалу, так і у випадку вузької, але глибокої потенціальної ями. Із даних про розсіяння нуклонів для радіуса дії ядерних сил можна взяти значення $R \approx 1,7$ фм, тоді нерівність (2.23) означатиме, що глибина потенціальної ями має лежати в інтервалі $35 \le V_0 < 320$ МеВ. Числовий розв'язок рівняння (2.15) з $\varepsilon = 2,225$ МеВ дає для глибини потенціалу значення $V_0 \cong 35$ МеВ, яке більше ніж на порядок перевищує енергію зв'язку дейтрона.

Зазначимо, що радіус дейтрона R_0 відрізняється від радіуса дії сил між нуклонами R. Згідно з (2.19) на відстані $R'_0 = 1/\alpha = \hbar / \sqrt{2\mu\epsilon}$ амплітуда ймовірності існування дейтрона зменшується приблизно в e разів, і тому часто саме це значення використовують як радіус дейтрона: $R_0 \cong R'_0 = 4,3$ фм.

У випадку центральних ядерних сил у n - p-системі немає зв'язаних збуджених станів. Із рис. 2.1 видно, що другий розв'язок рівнянь (2.21), а саме, збуджений зв'язаний стан з нульовим орбітальним моментом, може існувати лише за умови $x_0 \ge 3\pi/2$, тобто якщо

$$V_0 R^2 \ge \frac{9\pi^2 \hbar^2}{8\mu} \approx 921 \,\mathrm{MeB} \cdot \phi \mathrm{M}^2, \qquad (2.24)$$

але ця умова суперечить (2.23). Дейтрон також не може мати зв'язаних збуджених станів з $L \neq 0$, і *P*-стан уже відповідає області значень енергії, за яких дейтрон розпадається, оскільки при $L \neq 0$ діє відцентрова сила й при L = 1 енергія цієї сили, що

наближено дорівнює $\hbar^2 L(L+1) / (\mu R^2) \cong 4\hbar^2 / (mR^2) \cong 34 \text{ MeB}$, приводить до відштовхування і перевищує енергію зв'язку детрона.

2.3. Загальні властивості ядерних сил

Як було вже зазначено, нуклони в ядрах утримуються специфічними ядерними силами з великою інтенсивністю на малих відстанях. Згідно із сучасними поглядами ядерні сили між нуклонами є виявом сильної кварк-глюонної взаємодії. Послідовна теорія таких сил складна (див підрозд. 2.5), тому для вивчення ядерних сил будують моделі та використовують різні напівемпіричні параметризації залежності ядерних сил від відстаней між нуклонами та від їхніх спінів.

Ядерні сили проявляються в процесах

1) парної взаємодії двох нуклонів у вільному просторі, що приводить до існування дейтрона і зумовлює розсіяння нуклона нуклоном;

2) взаємодії вільних нуклонів зі складними ядрами та ядер один з одним (найбільш вивчена взаємодія при розсіянні нуклонів на ядрах);

3) взаємодії між нуклонами всередині ядра, коли пара нуклонів взаємодіє в оточенні інших нуклонів.

Зупинимось на властивості ядерних сил, які вдається отримати з експериментальних даних, і розглянемо деякі наближення, що використовуються при їхньому аналізі.

1. Ядерні сили є короткодіючими силами з радіусом дії $R \sim 1 \div 2 \, \text{фм}$. Інтенсивність ядерних сил на відстанях їхньої дії на два-три порядки більша, ніж електромагнітних сил, оскільки вони приводять до утворення більш стабільних систем. Пояснимо це твердження. Ядерні сили забезпечують існування атомних ядер із середньою енергією зв'язку близько 8 МеВ, що становить приблизно 10^{-2} від енергії спокою нуклона $m_{\rm p}c^2 \approx 940 \, \text{MeB}$. Електромагнітні сили приводять до утворення електронної оболонки атома водню з енергію зв'язку електрона 13,6 еВ, що становить

близько 10^{-5} від енергії спокою електрона $m_{\rm e}c^2 \cong 0.5$ MeB, співвідношення факторів 10^{-2} та 10^{-5} і приводить до значення $\approx 10^3$. Таким чином, проведена оцінка показала, що ядерні сили на три порядки більш інтенсивні, ніж електромагнітні сили.

2. При не дуже високих енергіях ядерні сили можна вважати потенціальними і явно не враховувати внутрішню структуру нуклонів. Для ядерних сил зазвичай використовують двочастин-кове наближення і розглядають їх як сукупність бінарних взаємодій V_{ij} . У цьому випадку потенціальну енергію взаємодії системи нуклонів записують у вигляді

$$V = \sum_{i>j}^{A} V_{ij} \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{A} V_{ij} , \qquad (2.25)$$

де множник 1/2 враховує те, що в останню суму внески від взаємодії між парою нуклонів входять двічі.

В ядрах існують і багаточастинкові ядерні сили, що прямують до нуля при віддалені на нескінченність хоча б одного із взаємодіючих нуклонів. У вільному просторі ними можна знехтувати. В ефективних силах між нуклонами в ядрах зазвичай враховують тричастинковий компонент взаємодії (див. вираз (2.74)).

3. У деяких ядерних задачах виявляється достатнім використовувати так зване наближення центральної взаємодії, коли потенціал V взаємодії залежить тільки від відстані $r = |\vec{r_1} - \vec{r_2}|$ між нуклонами: $V \equiv V(r)$. Були запропоновані й використовуються різні типи феноменологічних виразів для їх опису. Наприклад:

- потенціал типу Гаусса: $V(r) = -V_0 \exp(-\chi r^2)$,
- потенціал Юкави: $V(r) = -V_0 \exp(-\chi r) / r$,
- точкова (контактна) взаємодія: $V(r) = -V_0 \delta(\vec{r})$,
- прямокутна сферична потенціальна яма: $V(r) = -V_0 \theta(R-r)$,
- експоненціальний потенціал: $V(r) = -V_0 \exp(-\chi r)$,

потенціал Вудса–Саксона: $V(r) = -V_0 / (1 + \exp[(r - R) / a]).$

Основною властивістю цих виразів є їхня від'ємність і швидке спадання зі збільшенням відстані. Величина V_0 називається *гли*-
биною відповідного потенціалу. Згідно з експериментальними даними для взаємодії зі скінченним радіусом дії $V_0 \approx 50 \text{ MeB}$.

4. Детальний аналіз експериментальних даних із розсіяння нуклонів на нуклонах і дослідження проблеми насичення ядерних сил показують, що на дуже малих відстанях притягання між нуклонами змінюється на відштовхування. Цю властивість враховують за допомогою введення відштовхувальної серцевини, тобто вважають, що ядерний потенціал має сингулярну поведінку й прямує до $+\infty$ при $r \rightarrow 0$. Наприклад, якщо використовувати потенціал Юкави, то найкраще узгодження з експериментальними даними досягається при модифікації цього потенціалу на малих відстанях r < b таким чином, щоб у цій області він прямував до нескінченності (рис. 2.2).



Рис. 2.2. Схематичний вигляд радіальної залежності ядерної взаємодії

Параметр $b \approx 0,4 \, \text{фм} \, \epsilon$ радіусом відштовхувальної серцевини, а значення глибини V_0 потенціалу Юкави залежить від стану, в якому взаємодіють нуклони.

5. Ядерні сили залежать не тільки від відстані між нуклонами, але й від взаємної орієнтації їхніх спінів. В іншому випадку в системі протон–нейтрон при заданому орбітальному моменті існували б як триплетний (спіни протона і нейтрона паралельні), так і синглетний (спіни – антипаралельні) зв'язані стани з однаковими енергіями. Однак з дослідів випливає, що в дейтрона

спіни нуклонів завжди паралельні й стабільного синглетного стану не існує (підрозд. 2.2).

Залежність ядерних сил від спінів ураховують включенням у потенціал взаємодії V доданка, що містить скалярний добуток $(\vec{\hat{s}}_1 \vec{\hat{s}}_2)$:

$$\hat{V} = V_1(r)\hat{I} + V_2(r)(\vec{\hat{s}}_1\vec{\hat{s}}_2) \equiv V_S , \qquad (2.26)$$

де \hat{I} – одиничний оператор, що діє у спіновому просторі; $V_j(r)$ (j = 1, 2) – функції, які описують залежність компонентів від просторових координат. Ці функції іноді називають радіальними формфакторами ядерного потенціалу. Для простоти позначень у цьому підрозділі використовуються векторні оператори \vec{s}_j спінів нуклонів у одиницях сталої Планка \hbar .

Знайдемо потенціали, що діють у синглетному ($\hat{V}_{S=0}$) і триплетному ($\hat{V}_{S=1}$) станах. Для цього запишемо вираз (2.26) через оператор повного спіну $\vec{\hat{S}} = \vec{\hat{s}}_1 + \vec{\hat{s}}_2$. Після обчислення квадрата оператора $\vec{\hat{S}}$ і врахування співвідношення $\vec{\hat{s}}_j^2 = 3\hat{I}/4$ знаходимо

$$\left(\vec{\hat{s}}_{1}\,\vec{\hat{s}}_{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\vec{\hat{S}}^{2} - \vec{\hat{s}}_{1}^{2} - \vec{\hat{s}}_{2}^{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\vec{\hat{S}}^{2} - \frac{3}{2}\hat{I}\right), \qquad 2.27$$

і для (2.26) маємо

$$\hat{V}_{S} = \left[V_{1}(r) - \frac{3}{4} V_{2}(r) \right] \hat{I} + \frac{1}{2} V_{2}(r) \vec{\hat{S}}^{2} .$$
(2.28)

Із (2.28) видно, що взаємодія такого типу зберігає сумарний спін двонуклонної системи, оскільки оператор \hat{V}_S комутує з $\vec{\hat{S}}^2$.

У синглетному стані власне значення оператора повного спіну дорівнює нулю, а в триплетному воно дорівнює (в одиницях \hbar^2) S(S+1)=1(1+1)=2. Тому із (2.28) випливає, що взаємодію в різних спінових станах можна виразити через функції V_1 та V_2 простими співвідношеннями:

$$\hat{V}_{S=0} = V_1(r) - \frac{3}{4}V_2(r), \qquad \hat{V}_{S=1} = V_1(r) + \frac{1}{4}V_2(r).$$
 (2.29)

Як видно із (2.29), потенціали в різних станах різні. Саме це й обумовлює різницю у властивостях нейтрон-протонної системи при паралельних і антипаралельних спінах нуклонів. Оскільки зв'язаного синглетного стану в дейтрона не існує, то потенціал $\hat{V}_{S=0}$ має бути менш глибоким, ніж $\hat{V}_{S=1}$. У дейтроні $V_1 < 0$ (нехтуємо областю r < b, де розташована жорстка серцевина, яка принципово не впливає на формування дейтрона), тому взаємодія V_2 також має бути від'ємною.

6. У загальному випадку ядерні сили є нецентральними, тобто вони залежать не тільки від відстані між нуклонами та взаємної орієнтації їхніх спінів, але й від орієнтації спінів відносно напряму між нуклонами. На нецентральний характер ядерних сил вказує, наприклад те, що основний стан дейтрона є суперпозицією станів з різними значеннями орбітального моменту, що неможливо у випадку центральних сил $V \equiv V(|\vec{r}|)$. У центральних полях орбітальний момент L зберігається, і тому стани з різними значеннями L не змішуються (див. підрозд. 1.6).

Нецентральна частина ядерної взаємодії має вигляд тензора, тому її називають *взаємодією з тензорними силами*. Загальний вигляд потенціалу тензорних сил задається завдяки таким вимогам:

1) потенціал будуємо лише з векторів

$$\vec{n} = \vec{r} / r \equiv (\vec{r_1} - \vec{r_2}) / |\vec{r_1} - \vec{r_2}|$$
 Ta $\vec{s_1}, \vec{s_2},$

які визначають поведінку частинок у координатному і спіновому просторах;

2) потенціал має бути скаляром;

 вважають, що потенціал дорівнює нулю при усередненні за всіма напрямками вектора *n* (хоча ця умова не обов'язкова).
 Звідси тензорний потенціал можна записати таким чином:

$$V_{\rm T} = V_3(r) \left\{ 3(\vec{\hat{s}}_1 \, \vec{n})(\vec{\hat{s}}_2 \, \vec{n}) - (\vec{\hat{s}}_1 \, \vec{\hat{s}}_2) \right\} \equiv V_3(r) \hat{S}_{12} \,. \tag{2.30}$$

Оператор \hat{S}_{12} за своєю структурою збігається з потенціалом двох взаємодіючих магнітних диполів у класичній електродинаміці. Тензорний потенціал також можна переписати через вектор сумарного спіну двох нуклонів. Якщо піднести до квадрата

обидві частини рівності $(\vec{\hat{S}} \vec{n}) \equiv (\vec{\hat{s}}_1 \vec{n}) + (\vec{\hat{s}}_2 \vec{n})$ і врахувати, що для кожного нуклона $(\vec{\hat{s}}_j \vec{n})^2 = \hat{I} / 4$, то тоді

$$\left(\vec{\hat{s}}_{1}\vec{n}\right)\left(\vec{\hat{s}}_{2}\vec{n}\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(\vec{\hat{S}}\vec{n}\right)^{2} - \frac{1}{2}\hat{I}\right\}, \quad \hat{s}_{1,2} = \{3(\vec{\hat{s}}\vec{n})^{2} - \vec{\hat{s}}\}.$$
 (2.31)

Підставляючи (2.31) у (2.30), маємо

$$V_{\rm T} = \frac{1}{2} V_3(r) \left\{ 3 \left(\vec{\hat{S}} \, \vec{n} \right)^2 - \vec{\hat{S}}^2 \right\}.$$
(2.32)

Отже, оператор \hat{V}_{T} комутує з оператором квадрата спіну \vec{S}^2 , але не з оператором проєкції спіну \hat{S}_Z , як це було у випадку взаємодії (2.28). Оскільки у виразі (2.32) присутній вектор \vec{n} , то оператор \hat{V}_{T} не комутує з \vec{L}^2 , тому в загальному випадку величина L не зберігається, що й уможливлює змішування станів з різними орбітальними моментами.

У загальному випадку потенціальна енергія взаємодії двох нуклонів у вільному просторі залежить від спіну та координат таким чином:

$$\hat{V} = V_1(r)\hat{I} + V_2(r)(\vec{\hat{s}}_1\vec{\hat{s}}_2) + V_3(r)\left\{3(\vec{\hat{s}}_1\vec{n})(\vec{\hat{s}}_2\vec{n}) - (\vec{\hat{s}}_1\vec{\hat{s}}_2)\right\} =$$

$$= U_1\hat{I} + U_2\hat{S}^2 + U_3(\vec{\hat{S}}\vec{n})^2.$$
(2.33)

де

$$U_1 = V_1 - \frac{3}{4}V_2$$
, $U_2 = \frac{1}{2}(V_2 - V_3)$, $U_3 = \frac{3}{2}V_3$.

Міжнуклонний потенціал взаємодії довільного типу (2.33) залежить від дев'яти формфакторів $V_i(r_{\alpha\beta})$, $\alpha, \beta = p, n$.

Фактично структура ядерного потенціалу (2.33) визначається вимогами його інваріантності відносно трансляції (однорідність простору), обертання (ізотропність простору) та інверсій системи координат (дзеркальна симетрія), тим самим властивостями простору, у якому він діє. Інваріантність відносно трансляції веде до того, що V може залежати лише від вектора відносної

відстані $\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$, але не окремо від векторів $\vec{r_1}, \vec{r_2}$, оскільки лише їхня різниця не залежить від зсувів:

$$\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2} = (\vec{r_1} + \vec{a}) - (\vec{r_2} + \vec{a}).$$
 (2.34)

З інваріантності щодо обертання випливає, що до потенціалу взаємодії можуть входити тільки скалярні комбінації векторів $\vec{r}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$, а саме: $r \equiv (\vec{r} \cdot \vec{r})^{1/2}$, $(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)$, $(\vec{s}_j \cdot \vec{n})$, j = 1, 2 (останнє – оскільки завдяки властивостям матриць Паулі всі скалярні комбінації з вищими степенями \vec{s}_1, \vec{s}_2 зводяться до вказаних). При операції інверсії вектор \vec{n} змінює знак, а \vec{S} не змінює, тому добутки $(\vec{s}_1 \vec{n})$ та $(\vec{s}_2 \vec{n})$ є псевдоскалярами, що змінюють знаки при інверсії. Вимога інваріантності щодо дзеркальної симетрії приводить до того, що ці псевдоскаляри входять до формули (2.33) не відокремлено, а у вигляді добутку. Потенціал (2.33) також не залежить від швидкості.

Зауважимо, що потенціал (2.33) взаємодії між нуклонами довільного типу ((n,n), (p,p), (n,p)) залежить від дев'яти невідомих радіальних формфакторів $V_i(r)$.

2.4. Зарядова незалежність і формалізм ізоспіну

ī

Розглянемо детальніше формфактори $V_j(r)$ ядерних потенціалів у системах з двох нуклонів різного типу. Експериментальні та теоретичні дослідження показують, що ядерна взаємодія в системах нейтронів і протонів однакова. Рівність ядерних сил, що діють між тотожними нуклонами (протоном і протоном або нейтроном і нейтроном) називається зарядовою симетрією. Про цю властивість, наприклад, свідчить приблизно однакова кількість протонів Z і нейтронів N у легких ядер, де роль електромагнітної взаємодії мала. Зарядову симетрію також підтверджує і рівність ймовірностей p-p- та n-n-розсіяння за висо-

ких енергіях, коли внеском кулонівського розсіяння протонів можна знехтувати.

Аналізуючи дані про p - p - та n - p-розсіяння, було виявлено зарядову незалежність, а саме, тотожність ядерних сил, діючих між протоном і протоном та між нейтроном і нейтроном, із взаємодією між протоном і нейтроном:

$$V_{\rm pp} = V_{\rm nn} = V_{\rm np} \,.$$
 (2.35)

Як окремий випадок ця властивість включає і зарядову симетрію.

Слід зазначити, що зарядова незалежність не означає тотожність повної взаємодії в системах p-p, n-n і n-p навіть після нехтування електромагнітною взаємодією. Незважаючи на те, що будь-який стан системи двох протонів або двох нейтронів за своїми властивостями збігається з деякими станами системи протон-нейтрон, ці системи мають різну кількість станів. Серед станів системи n-р існують такі, які не мають аналогів у системах p-p i n-n. Це зумовлено тим, що нуклони є ферміонами і хвильові функції систем тотожних частинок p-p і n-n згідно з принципом Паулі мають бути антисиметричними, на відміну від n-p-системи, яка складається з різних частинок і може мати стани як з асиметричними, так і з симетричними хвильовими функціями. Тому зарядова незалежність у двонуклонній системі означає: якщо нехтувати електромагнітною взаємодією то стани системи n-p, які описуються антисиметричною хвильовою функцією, тотожні за своїми властивостями відповідним станам систем p-p і n-n. Станів у n-p-системі більше, ніж у p-p та n-n, тобто загальна ймовірність взаємодії в такій системі також більша.

Завдяки зарядовій незалежності протон і нейтрон зручно розглядати як два стани однієї й тієї самої частинки – нуклона. Ці стани ототожнюють з двома значеннями деякої внутрішньої змінної, яку називають *ізотопічним спіном*, а самі стани – *ізотопічними*, або *ізобарними*. Ізотопічний стан нуклона характеризується зарядовою (ізоспіновою) координатою t_z , яка набуває двох значень:

$$t_{z} = \begin{cases} +\frac{1}{2}, \text{ протонний стан (протон)}, \\ -\frac{1}{2}, \text{ нейтронний стан (нейтрон).} \end{cases}$$
 (2.36)

Значення зарядової змінної вибирають таким чином, щоб формалізм ізотопічного спіну можна було побудувати аналогічно формалізму звичайного спіну для частинок зі спіном 1/2. Для цього вводиться оператор-вектор зарядової координати \vec{t} з компонентами $\hat{t}_x, \hat{t}_y, \hat{t}_z$ уздовж одиничних ортів у просторі, який називають *ізотопічним простором*. Використовується також оператор ізотопічного спіну $\vec{\tau}$, який пов'язаний з \vec{t} таким співвідношенням, як і матриця Паулі $\vec{\sigma}$ з оператором спіну \vec{s} (див. підрозд. 1.6):

$$\vec{t} = \frac{1}{2}\vec{\hat{\tau}},\tag{2.37}$$

$$\hat{\tau}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

Тут простір з осями x, y, z, у якому діють матричні оператори (2.38), є простором ізотопічного спіну, його не слід ототожнювати зі звичайним координатним простором.

Протонний і нейтронний стани нуклона описуються хвильовими функціями

$$\xi_{p} = \xi_{t_{z}=+1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_{n} = \xi_{t_{z}=-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
 (2.39)

оскільки саме такі функції є власними функціями оператора $\hat{t}_z = \hat{\tau}_z / 2$ із власними значеннями $\pm 1 / 2$, що відповідають значенням зарядової змінної в протонному та нейтронному станах нуклона

$$\hat{t}_z \xi_p = \frac{1}{2} \xi_p , \quad \hat{t}_z \xi_n = -\frac{1}{2} \xi_n .$$
 (2.40)

Таким чином, побудований згідно зі співвідношеннями (2.37)

і (2.38) вектор ізоспіну $\vec{t} = \vec{\tau}/2$ має тільки два значення проек-

цій на вісь z. Значенню +1/2 відповідає протонний стан, а значенню -1/2 – нейтронний.

Для фізичної інтерпретації операторів $\hat{\tau}_x$ і $\hat{\tau}_y$ введемо оператори $\hat{\tau}_+$ і $\hat{\tau}_-$:

$$\hat{\tau}_{+} = \frac{1}{2} (\hat{\tau}_{x} + i\hat{\tau}_{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\hat{\tau}_{-} = \frac{1}{2} (\hat{\tau}_{x} - i\hat{\tau}_{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
(2.41)

Їхня дія на функції ξ_{p}, ξ_{n} описується співвідношеннями:

$$\hat{\tau}_{+}\xi_{p} = 0, \quad \hat{\tau}_{+}\xi_{n} = \xi_{p}; \quad \hat{\tau}_{-}\xi_{n} = 0, \quad \hat{\tau}_{-}\xi_{p} = \xi_{n}. \quad (2.42)$$

Оператор $\hat{\tau}_+$ "знищує" протонний стан і "перетворює" нейтрон на протон, а оператор $\hat{\tau}_-$ "знищує" нейтронний стан і "перетворює" протон на нейтрон. Переходу від протонного до нейтронного стану і навпаки, відповідає обертання на 180[°] у площині *x у* простору ізотопічного спіну. Оператори $\hat{\tau}_+$ і $\hat{\tau}_-$ називають відповідно операторами народження та знищення заряду, а оператори $\hat{\tau}_x$ і $\hat{\tau}_y$ є їхніми лінійними комбінаціями. Оператор $\hat{\tau}_z$ також визначає оператор електричного заряду нуклона \hat{q} і оператор його маси \hat{m} :

$$\hat{q} = \frac{1}{2} (1 + \hat{\tau}_z) e; \quad \hat{m} = \frac{1}{2} (1 - \hat{\tau}_z) m_n + \frac{1}{2} (1 + \hat{\tau}_z) m_p.$$
 (2.43)

Оскільки просторова, спінова та ізоспінова координати незалежні, то хвильову функцію ψ вільного нуклона з координатами (\vec{r}_i, m_s, t_z) можна записати у вигляді добутку просторової φ , спінової χ_{sm_s} та ізоспінової ξ_{t_z} функцій

$$\Psi\left(\vec{r}_{i}, m_{s}, t_{z}\right) = \varphi\left(\vec{r}_{i}\right) \chi_{s m_{s}} \xi_{t_{z}}.$$
(2.44)

Оператори ізотопічного спіну можна додавати, а також множити за правилами векторної алгебри. Зокрема, скалярний добуток двох операторів \vec{t}_1 і \vec{t}_2 двох нуклонів є величиною

$$\left(\vec{\hat{t}}_{1}\,\vec{\hat{t}}_{2}\right) = \hat{t}_{1x}\,\hat{t}_{2x} + \hat{t}_{1y}\,\hat{t}_{2y} + \hat{t}_{1z}\,\hat{t}_{2z} , \qquad (2.45)$$

яка не змінюється при обертаннях у зарядовому просторі. Оператор повного ізотопічного спіну в системі з двох нуклонів має вигляд

$$\vec{\hat{T}} \equiv \vec{\hat{t}}_1 + \vec{\hat{t}}_2 = \frac{1}{2} \left(\vec{\hat{\tau}}_1 + \vec{\hat{\tau}}_2 \right).$$
(2.46)

Оскільки при додаванні ізотопічних спінів діють звичайні правила додавання кутових моментів, то два нуклони перебувають або в синглетному (T = 0), або у триплетному (T = 1) зарядових станах. Для квантового опису таких станів введемо функцію $\Psi_{TT_z}(1,2)$ зарядових змінних, яка характеризується значеннями сумарного ізоспіну \hat{T} і його проекції \hat{T}_z :

$$\hat{T}^{2}\Psi_{TT_{Z}} = T(T+1)\Psi_{TT_{Z}};$$

$$\hat{T}_{Z}\Psi_{TT_{Z}} = T_{Z}\Psi_{TT_{Z}}, \quad -T \le T_{Z} \le T, \quad \sum T_{Z} = 2T+1.$$
(2.47)

Оператори \hat{T}^2 , \hat{T}_Z комутують між собою, тому відповідні їм фізичні величини зберігаються одночасно. Нормовані хвильові функції ψ_{TT_2} мають вигляд

$$\begin{split} \psi_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \xi_{p}(1) \xi_{n}(2) - \xi_{n}(1) \xi_{p}(2) \}; \\ \psi_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \xi_{p}(1) \xi_{n}(2) + \xi_{n}(1) \xi_{p}(2) \}; \\ \psi_{1-1} &= \xi_{n}(1) \xi_{n}(2); \quad \psi_{11} = \xi_{p}(1) \xi_{p}(2), \end{split}$$
(2.48)

де $\xi_p(j) \xi_n(j)$ – ізоспінова хвильова функція *j*-го нуклона, що перебуває в протонному (нейтронному) стані. Із формули (2.48) видно, що у станах з $T_3 = 0$ кожен з нуклонів не перебуває в якомусь фіксованому зарядовому стані, а з ймовірністю 1/2 може бути як у протонному, так і нейтронному станах.

Оскільки нуклони тотожні й мають спін 1/2, то вони є ферміонами і підпорядковуються статистиці Фермі–Дірака. Введення додаткової змінної приводить до модифікації поняття стану нуклона порівняно з протонами і нейтронами, а саме, до індивідуального стану нуклона, що характеризується п'ятьма координа-

тами ($\vec{r}_i, m_{s,i}, t_{z,i}$). З огляду на це згідно з принципом Паулі в такому стані не може бути більше одного нуклона.

Таким чином, хвильова функція системи нуклонів має бути антисиметричною¹ стосовно перестановок усіх п'яти координат двох нуклонів. Узагальнений принцип Паулі не є додатковим припущенням, а пов'язаний з існуванням зарядової змінної як характеристики стану нуклона.

Спробуємо сформулювати властивості симетрії хвильової функції системи двох нуклонів.

1. Перестановка просторових декартових координат означає дзеркальне відображення координат відносно руху й приводить до появи множника $(-1)^L$, де L – орбітальний момент відносного руху (див. підрозд. 1.6, 2.2).

2. Перестановки спінових змінних у стані із сумарним спіном *S* приводять до фактора $(-1)^{S+1}$. Це випливає з властивостей симетрії спінових хвильових функцій $\psi_{SS_z}(1,2)$ у двонуклонних станах із фіксованими значеннями повного спіну *S* і його проекції S_Z :

$$\begin{split} \Psi_{S=0,S_{Z}=0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \chi_{1/2,+1/2} \left(1 \right) \chi_{1/2,-1/2} \left(2 \right) - \chi_{1/2,-1/2} \left(1 \right) \chi_{1/2,+1/2} \left(2 \right) \right\}; \\ \Psi_{S=1,S_{Z}=1} &= \chi_{1/2,+1/2} \left(1 \right) \chi_{1/2,+1/2} \left(2 \right); \\ \Psi_{S=1,S_{Z}=-1} &= \chi_{1/2,-1/2} \left(1 \right) \chi_{1/2,-1/2} \left(2 \right); \end{split}$$
(2.49)

 $\psi_{S=1,S_{Z}=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \chi_{1/2,+1/2}(1) \chi_{1/2,-1/2}(2) + \chi_{1/2,-1/2}(1) \chi_{1/2,+1/2}(2) \},\$

де $\chi_{1/2,\pm 1/2}(j)$ – спінова хвильова функція *j*-го нуклона.

3. Симетрія ізоспінової хвильової функції (2.48) аналогічна спіновій і перестановка ізоспінових змінних зводиться до появи

¹ Нехай хвильова функція системи *A* нуклонів антисиметрична: $\psi(2,1,...,A) = -\psi(1,2,...,A)$. Якщо частинки 1 і 2 можуть перебувати в однаковому стані, то функції $\psi(2,1,...,A)$ і $\psi(1,2,...,A)$ мають збігатися, тобто $\psi = -\psi$, $2\psi = 0$, $\psi = 0$, і тому такого стану не існує.

⁸²

множника $(-1)^{T+1}$. Звідси маємо, що одночасна перестановка всіх координат у хвильовій функції $\psi_{L,S,T}$ системи двох нуклонів із фіксованими значеннями L,T,S приводить до появи множника $(-1)^{L+S+T}$, тобто $\psi(2,1) = (-1)^{L+S+T} \psi(1,2)$. Тому вимога антисиметрії хвильової функції (зміна її знака при зміні всіх координат на протилежні:

 $P\psi(1,2) = \Psi(2,1) = -\Psi(1,2)$, $(-1)^{L+T+S}\psi(1,2) = -\psi(1,2)$) приводить до співвідношення

$$(-1)^{T} = (-1)^{L+S+1}$$
. (2.50)

Формула (2.50) визначає можливі значення ізоспіну T (0 або 1) двонуклонної системи у станах із фіксованими величинами L і S. Наприклад, у випадку S = 1 і парного L (як у дейтрона) маємо T = 0.

Згідно зі співвідношенням (2.42) переходи між протонним і нейтронними станами нуклонів відповідають обертанню в ізоспіновому просторі. Зарядово-незалежна взаємодія має бути інваріантна щодо таких поворотів, і тому може визначатися лише скалярними величинами, побудованими з операторів $\vec{\tau}_1$ і $\vec{\tau}_2$ для нуклонів типу 1, 2. Існують тільки два таких незалежних скаляри: одиничний оператор \hat{I} і скалярний добуток $(\vec{\tau}_1 \ \vec{\tau}_2)$.

Справді, $\vec{\hat{\tau}}_1^2 = \vec{\hat{\tau}}_2^2 = 3\hat{I}/4$, тому оператори $\vec{\hat{\tau}}_j^{2k}$ кратні одиничному оператору, а добутки $(\vec{\hat{\tau}}_1 \ \vec{\hat{\tau}}_2)^k$ з $k \ge 2$ лінійно залежать від \hat{I} та $(\vec{\hat{\tau}}_1 \ \vec{\hat{\tau}}_2)$, наприклад:

$$\left(\vec{\hat{\tau}}_{1}\ \vec{\hat{\tau}}_{2}\right)^{2} = \frac{3}{16}\hat{I} - \frac{1}{2}\left(\vec{\hat{\tau}}_{1}\ \vec{\hat{\tau}}_{2}\right). \tag{2.51}$$

Отже, формфактори $V_j \equiv V_j(r)$ зарядово-інваріантної взаємодії (2.33) між двома нуклонами повинні мати загальний вигляд

$$\hat{V} = \hat{V}_I + \hat{V}_{II} \left(\vec{\hat{\tau}}_1 \ \vec{\hat{\tau}}_2 \right),$$
 (2.52)

де для скорочення запису не наведено індекс *j*. Оскільки власні значення оператора $(\vec{\hat{\tau}}_1 \ \vec{\hat{\tau}}_2) = [(\vec{\hat{\tau}}_1 + \vec{\hat{\tau}}_2)^2 - \vec{\hat{\tau}}_1^2 - \vec{\hat{\tau}}_2^2]/2$ у станах із фіксованими величинами сумарного ізоспіну $\hat{T} = (\vec{\hat{\tau}}_1 + \vec{\hat{\tau}}_2)/2$ визначаються формулою

$$\left(\vec{\hat{\tau}}_{1} \ \vec{\hat{\tau}}_{2}\right) \Psi_{T T_{Z}} \equiv \frac{1}{2} \left(\vec{\hat{T}}^{2} - \frac{3}{2} \hat{I}\right) \Psi_{T T_{Z}} = \Psi_{T T_{Z}} \begin{cases} \frac{1}{4}, \ T = 1, \\ \\ \\ -\frac{3}{4}, \ T = 0, \end{cases}$$
(2.53)

то оператори $\hat{U}_0, \hat{U}_1 (\hat{V} \Psi_{TT_Z} \equiv \hat{U}_T \Psi_{TT_Z})$ міжнуклонної взаємодії у станах зі значеннями T = 0 і 1 пов'язані з операторами \hat{V}_I, \hat{V}_{II} співвідношеннями

$$\hat{U}_0 = \hat{V}_I - \frac{3}{4}\hat{V}_{II} \qquad \text{ta} \ \hat{U}_1 = \hat{V}_I + \frac{1}{4}\hat{V}_{II} , \qquad (2.54)$$

тоді формулу (2.52) можна переписати у вигляді

$$\hat{V} = \frac{1}{4}(\hat{U}_0 + 3\hat{U}_1) + (\hat{U}_1 - \hat{U}_0)(\vec{\hat{\tau}}_1 \, \vec{\hat{\tau}}_2) \,. \tag{2.55}$$

Уведення в потенціал компонентів сил, що пропорційні скалярному добутку $(\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)$ ізоспінів, дає змогу коректно врахувати зарядову незалежність ядерної взаємодії, і тим самим зменшити кількість невідомих функцій $V_j(r)$, які визначають взаємодію між нуклонами (2.33), з дев'яти до шести.

2.5. Обмінний характер ядерної взаємодії

Згідно зі співвідношеннями (2.33) і (2.52) незалежний від швидкості ядерний потенціал взаємодії двох нуклонів, який задовольняє умови трансляційної і ротаційної інваріантності відносно інверсій та ізотопічної симетрії, має такий загальний вигляд:

$$\hat{V} = V_{\rm C}(r) + V_{\sigma}(r)(\vec{\sigma}_{1}\vec{\sigma}_{2}) + V_{\tau}(r)(\vec{\tau}_{1}\vec{\tau}_{2}) + V_{\sigma\tau}(r)(\vec{\sigma}_{1}\vec{\sigma}_{2})(\vec{\tau}_{1}\vec{\tau}_{2}) + V_{\rm T}(r)S_{12} + V_{\rm T\tau}(r)S_{12}(\vec{\tau}_{1}\vec{\tau}_{2}),$$
(2.56)

де замість операторів спінів використано матриці Паулі; функції $V_{\alpha}(r)$, ($\alpha = c, \sigma, \tau$) визначають силу відповідних компонентів взаємодії, а оператор \hat{S}_{12} задається формулою

$$\hat{S}_{12} = 3(\vec{\sigma}_1 \, \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \, \vec{n}) - (\vec{\sigma}_1 \, \vec{\sigma}_2), \qquad (2.57)$$

яка випливає зі співвідношення (2.30). Залежність потенціалу (2.56) від спінових та ізоспінових змінних можна також подати в іншому вигляді, що має більш наочну фізичну інтерпретацію, а саме:

$$V = V_W(r) + V_M(r)\hat{P}_r + V_B(r)\hat{P}_{\sigma} - V_H(r)\hat{P}_{\tau} + V_{TW}(r)\hat{S}_{12} + V_{TM}(r)\hat{S}_{12}\hat{P}_r.$$
(2.58)

Зауважимо, що при переході від (2.57) до (2.58) були використані співвідношення $\hat{S}_{12}\hat{P}_{\sigma} = \hat{P}_{\sigma}\hat{S}_{12} = \hat{S}_{12}$ та (2.63). Перший компонент у виразі (2.58), який залежить лише від просторових координат, називають *силами Вігнера*. Подальші доданки називають *силами Майорана, Бартлета* та *Гейзенберга*, п'ятий доданок – *тензорні сили*, а шостий – *тензорні сили Майорана*. Ці сили названі прізвищами вчених, які їх вперше вивчали. Оператори

$$\hat{P}_{\sigma} = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\vec{\sigma}_{1} \, \vec{\sigma}_{2} \right) \right), \qquad \hat{P}_{\tau} = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\vec{\tau}_{1} \, \vec{\tau}_{2} \right) \right),$$

$$\hat{P}_{r} = -P_{\sigma} P_{\tau} = -\frac{1}{4} \left(1 + \left(\vec{\sigma}_{1} \, \vec{\sigma}_{2} \right) \right) \left(1 + \left(\vec{\tau}_{1} \, \vec{\tau}_{2} \right) \right)$$
(2.59)

є операторами обміну спінових, ізоспінових і просторових координат двох нуклонів:

$$\hat{P}_{\sigma}\psi(\vec{r}_{1},m_{s,1},t_{z,1};\vec{r}_{2},m_{s,2},t_{z,2}) = \psi(\vec{r}_{1},m_{s,2},t_{z,1};\vec{r}_{2},m_{s,1},t_{z,2}),$$

$$\hat{P}_{\tau}\psi(\vec{r}_{1},m_{s,1},t_{z,1};\vec{r}_{2},m_{s,2},t_{z,2}) = \psi(\vec{r}_{1},m_{s,1},t_{z,2};\vec{r}_{2},m_{s,2},t_{z,1}),$$

$$\hat{P}_{r}\psi(\vec{r}_{1},m_{s,1},t_{z,1};\vec{r}_{2},m_{s,2},t_{z,2}) = \psi(\vec{r}_{2},m_{s,1},t_{z,1};\vec{r}_{1},m_{s,2},t_{z,2}).$$
(2.60)

Оператор \hat{P}_r переставляє просторові координати, його називають обмінним оператором Майорана. Оператор \hat{P}_{σ} , який переставляє спінові координати частинок, називають обмінним оператором Бартлета, а оператор \hat{P}_{τ} , що переставляє ізоспінові координати, називають обмінним оператором Гейзенберга. Квадрати операторів \hat{P}_{α} дорівнюють одиниці

$$\hat{P}_r^2 = \hat{P}_{\sigma}^2 = \hat{P}_{\tau}^2 = 1.$$
(2.61)

За узагальненим принципом Паулі, згідно з яким функція системи нуклонів має бути антисиметричною, маємо

$$\hat{P}_{\tau}\,\hat{P}_{\sigma}\,\hat{P}_{r}=-1\,.$$
 (2.62)

Із виразів (2.61) і (2.62) видно, що обмінний оператор Гейзенберга одночасно переставляє як просторові, так і спінові координати частинок

$$\hat{P}_{\tau} = -\hat{P}_{r}\hat{P}_{\sigma} \equiv -\hat{P}_{r\sigma} . \qquad (2.63)$$

Форма запису ядерної взаємодії у вигляді (2.58) є більш загальною, ніж у вигляді (2.56). Оскільки після заміни відповідно (2.63) формулу (2.58) можна використовувати також, коли формалізм ізотопічного спіну явно не застосовується. Функції, що описують залежність від просторових координат у виразах (2.56) і (2.58), пов'язані співвідношеннями:

$$V_{\rm C} = V_W + \frac{1}{2}V_B - \frac{1}{2}V_H - \frac{1}{4}V_M, \quad V_{\sigma} = \frac{1}{2}V_B - \frac{1}{4}V_M, \quad (2.64)$$
$$V_{\tau} = -\frac{1}{2}V_H - \frac{1}{4}V_M, \quad V_{\sigma\tau} = -\frac{1}{4}V_M,$$
$$V_{\rm T} = V_{TW} - \frac{1}{2}V_{TM}, \quad V_{\rm T\tau} = -\frac{1}{2}V_{TM},$$

і навпаки:

$$V_W = V_C - V_{\sigma} - V_{\tau} + V_{\sigma\tau}, \quad V_M = -4V_{\sigma\tau}, \quad V_B = 2V_{\sigma} - 2V_{\sigma\tau}, \\ V_H = -2V_{\tau} + 2V_{\sigma\tau}, \quad V_{TW} = -V_T - V_{T\tau}, \quad V_{TM} = -2V_{T\tau}. \quad (2.65)$$

Зі співвідношень (2.61) випливає, що власні значення π_r, π_σ

і π_r операторів $\hat{P}_{\tau}, \hat{P}_{\sigma}, \hat{P}_r$ дорівнюють ±1. У станах двонуклон-

ної системи із фіксованими величинами *L*,*S*,*T* власні значення визначаються співвідношеннями (див. підрозд. 2.4):

$$\pi_r = (-1)^L, \ \pi_\sigma = (-1)^{S+1}, \ \pi_\tau = (-1)^{T+1}.$$
 (2.66)

Характерною особливістю ядерних сил (2.56) і (2.58) є їхня залежність від характеристик станів, а саме, від хвильових функцій станів, і в різних станах вони можуть змінитися від притягання до відштовхування. У відповідність до запису (2.53) така поведінка сил залежить від властивостей симетрії хвильової функції щодо перестановки або обміну координат пар нуклонів, тому відповідні сили називають *обмінними*. Виявляється, що саме обмінний характер ядерних сил (і врахування принципу Паулі) приводить до насичення ядерної речовини.

Уперше ядерні обмінні сили були ввів В. Гейзенберг (1932) за аналогією із силами хімічного зв'язку. Щодо фізичної інтерпретації цих сил, то їх можна розглядати як такі, що виникають між двома нуклонами внаслідок обміну третьою частинкою.

Основи першої обмінної теорії ядерних сил розробив Х. Юкава (1935). Наявність взаємодії між будь-якими системами означає, що між ними здійснюється обмін енергією. Юкава припустив, що ядерна взаємодія, як і електромагнітна, також передається порціями (квантами). Такий процес обміну є суто квантовим і короткочасним. Справді, якби система, що складається з нуклона і частинки носія взаємодії, перебувала в стаціонарному стані, то поглинання й випромінювання частинок привело б до порушення закону збереження енергії, оскільки при обміні частинка має забирати та надавати нуклону деяку енергію ΔE , а нуклон має залишатися незмінним. Інша ситуація виникає у випадку, коли процес обміну триває протягом деякого короткого часу Δt й описується законами квантової механіки. У цьому випадку виконується співвідношення невизначенності енергіячас, згідно з яким у системі зі скінченним часом життя (тобто у нестаціонарній системі) енергія не точно фіксована, а визначена з точністю до величини $\Delta E \ge \hbar / \Delta t$. Саме завдяки цьому співвідношенню стає можливим випромінювання частинки-носія одним нуклоном та поглинання її іншим. Необхідно, щоб увесь процес випромінювання та поглинання був нестаціонарним і

тривав протягом такого достатньо малого інтервалу часу, щоб розкид енергії (величина "порушення" закону збереження енергії) узгоджувався зі співвідношенням невизначенності. Такі стани і процеси малої тривалості, існування яких обумовлено наявністю співвідношення невизначенності, називають віртуальними, а проміжні частинки, які беруть участь у таких процесах, називають віртуальними частинками (від лат. *vires* – можливість).

Поняття про віртуальні процеси і частинки посідає центральне місце у квантовій теорії поля, згідно з якою Всесвіт заповнений квантовими полями різного типу, а внаслідок флуктуацій квантових полів і виникають віртуальні частинки. Взаємодія частинок і їхні взаємні перетворення розглядаються як народження та поглинання вільними частинками віртуальних. Реальна частинка безперервно випромінює й поглинає віртуальні частинки різних типів, що мають такі самі значення спіну, електричного та баріонного зарядів, як і реальні частинки.

Унаслідок короткодіючого характеру ядерної взаємодії та того факту, що швидкість руху віртуальної частинки не може перевищувати швидкість світла c, роль носія ядерної взаємодії можуть виконувати лише частинки з масою, відмінною від нуля. Дійсно, нехай віртуальна частинка, що обумовлює ядерну взаємодію, має масу m_v . При її випромінюванні або поглинанні виникає зміна енергії на величину $\Delta E \cong m_v c^2$, тому згідно зі співвідношенням невизначенності тривалість віртуального процесу буде не менше ніж $\Delta t \cong \hbar / \Delta E$. Очевидно, що відстань r_{int} , яку пролітає віртуальна частинка за час Δt і є радіусом дії цієї сили. Нехай віртуальна частина рухається з максимально можливою швидкістю, а саме, зі швидкістю світла c, тоді маємо таке співвідношення між r_{int} і масою відповідних віртуальних частинок:

$$r_{\rm int} = c\,\Delta t \cong \frac{\hbar c}{\Delta E} \cong \frac{\hbar c}{m_{\rm v} c^2} \,. \tag{2.67}$$

Радіус ядерної взаємодії за порядком значення є $r_{int} = 1,5 \text{ фм}$, тому маса частинок — носіїв ядерної взаємодії має бути щонайменше в ≈ 250 разів більше за масу спокою електрона:

$$m_v c^2 \simeq \frac{\hbar c}{r_{\rm int}} \simeq 197, 3/1, 5 \simeq 130 \text{ MeB}$$

Такими частинками є π-мезони, які зазвичай називаються більш коротко – піони (мезон з грец. μέσος – середній, проміжний, а літера " *π* "(пі) виникла від англ. *primary* – первинний). Існують три типи π -мезонів: π^+ , π^0 , π^- . Усі π -мезони є адронами з нульовими баріонними зарядами та спінами. Їх можна розглядати як різні зарядові стани однієї частинки зі значеннями електричного заряду: $q_{\pi^+} = +e$, $q_{\pi^-} = -e$, $q_{\pi^0} = 0$. Заряджені піони були зареєстровані у 1947 р. (С. Пуелл і Дж. Оккіаліні) як вільні реальні частинки космічного випромінювання, а в 1950 р. були зареєстровані й нейтральні піони. Маси нейтрального і заряджених π-мезонів трохи відрізняються й дорівнюють $m_{\pi^0} = 134,98$ MeB, $m_{\pi^+} = m_{\pi^-} = 139,57$ MeB.

Характер обмінної взаємодії залежить від типу π -мезона, яким обмінюються нуклони. Наприклад, перестановку просторових координат протона й нейтрона схематично можна уявити, як процеси обміну мезонами π^+ і π^- :

$$p + n \leftrightarrow n' + \pi^{+} + n \leftrightarrow n' + p';$$

$$n + p \leftrightarrow p' + \pi^{-} + p \leftrightarrow p' + n'.$$
(2.68)

Ці процеси зумовлюють обмін електричного заряду між нуклонами: протон стає нейтроном, а нейтрон – протоном, тобто нуклони ніби обмінюються місцями (переставляються) у просторі. Такі процеси породжують сили Майорана. У процесах типу (2.68) одночасно може мати місце й обмін спінів нуклонів, що приводить до виникнення сил Гейзенберга.

У процесах обміну нейтральним π -мезоном заряди нуклонів не змінюються й нуклони не обмінюються просторовими координатами, але можуть змінюватися спінові координати. Такі процеси можуть породжувати сили Бартлета.

Зауважимо, що "обмін" не слід трактувати надто буквально тому, що він здійснюється віртуальними частинками, існування яких має умовний сенс. Окрім того, важливо розуміти чітку різницю між концепцією обмінного механізму взаємодії та понят-

тям обмінних сил, що залежать від обміну координатами взаємодіючих частинок. Історично ці поняття розвивалися паралельно і спочатку ототожнювалися. Разом з тим концепція обмінних сил має вузькі межі нерелятивістської квантової механіки, де йдеться про потенціальну енергію, що залежить від операторів обміну. Концепція ж обмінного механізму взаємодії більш універсальна. Вона припускає існування носія взаємодії і вважається, що такий механізм притаманний усім фундаментальним взаємодіям. Наприклад, електромагнітна взаємодія характеризується обмінним механізмом (заряджені частинки обмінюються фотонами), але електромагнітні сили не є обмінними силами, що приводять до насичення.

Піони виконують роль частинок-переносників ядерної взаємодії на великих (щодо ядерних сил) відстанях, $\geq 0,4\phi$ м. На менших відстанях нуклон-нуклонна взаємодія визначається обміном більш важкими мезонами – η ($m_{\eta} = 549$ MeB), ρ ($m_{\rho} = 770$ MeB) і ω ($m_{\omega} = 782$ MeB), які відповідають за взаємодію на відстанях $r_{int}(\eta) \cong 0,36 \phi$ м і $r_{int}(\rho) \cong r_{int}(\omega) \cong 0,25 \phi$ м.

Обмін піонами фіксує форму просторової частини потенціалу взаємодії між нуклонами на великих відстанях. Такий асимптотичний потенціал, що створюється хмаркою піонів, має вигляд потенціалу Юкави (підрозд. 2.3) $V(r) = -g_N \exp(-r/r_{int}(\pi))/r$, де $r_{int}(\pi) = \hbar/(m_{\pi}c^2)$ – радіус взаємодії, g_N – константа ядерної взаємодії, яку аналогічно з випадком електромагнітної взаємодії іноді називають ядерним зарядом: $g_N^2 \approx 10\hbar c$. На відстанях, які менші за 0,2 фм, міжнуклонний потенціал стає відштовхувальним, що пояснюється обміном ρ - і ω -мезонами.

Наведена картина ядерної взаємодії у вільному просторі називається мезонною теорією ядерних сил, яка полягає в тому, що ядерна взаємодія є результатом обміну нуклонів віртуальними мезонами. Оскільки мезони є бозонами, тобто частинками, які підкоряються статистиці Бозе, то вищезгадані потенціали, що обумовлені обміном однієї частинки, називаються потенціалами однобозонного обміну (від англ. one boson exchange

potentials, OBEP). Вони враховують процеси одноразового обміну бозонами з масою меншою 1 ГеВ. Іноді як, наприклад, у випадку так званого Боннського міжнуклонного потенціалу, також враховують і одночасний обмін кількома бозонами.

2.6. Кваркова природа ядерних сил і ефективні ядерні сили

Згідно із сучасними уявленнями мезонна картина ядерної взаємодії є усередненою й може описати міжнуклонний потенціал лише наближено. Дослідження із фізики частинок показали, що нуклони не є безструктурними точковими об'єктами, а мають розмір $\approx 1 \, \text{фm}$ і складаються з трьох фундаментальних частинок – кварків, які на сучасному рівні знань можна вважати точковими. Кваркову модель будови адронів запропонували М. Гелл-Манн і Дж. Цвейг у 1963 р. Три частинки, з яких складаються нуклони, Цвейг назвав *тузами*, але цей термін не поширився, а закріпилася назва¹, яку запропонував Гелл-Манн – *кварки*.

Теоретичні та експериментальні дослідження привели до висновку, що існують шість типів "ароматів", кварків² з масою від 0,33 ГеВ до ≈175 ГеВ у складі адронів. Їх умовно позначають – d (від англ. down), u (від англ. up), s (від англ. strange), c (від англ. charm), b (від англ. beauty, або bottom), t (від англ. top, або truth) і відповідно називають "нижній", "верхній", "дивний", "чарівний", "вродливий" і "найвищий" (табл. 2.2). Кварки є ферміонами зі спіном $I^{\pi} = 1/2^{+}$. Несподіваними виявилися дробові елек-

¹ Слово *кварк* має літературне походження, Гелл-Маном узяв його з роману ірландського письменника Дж. Джойса "Поминки по Фіннегану". Герой бачить у сні, що ніби над бурхливим морем літають чайки і різко кричать: "Три кварки для містера Марка". Це слово в романі сприймається як щось невизначене, містичне, тому воно залишилося як назва частинок з властивостями, що суттєво відрізняються від властивостей інших частинок.

² У кварковій моделі дуже широко використовуються повсякденні поняття, які роблять більш наочними абстрактні твердження та висновки.

⁹¹

тричні та баріонний заряди кварків: баріонний заряд кварків дорівнює 1/3, а електричні заряди різних кварків мають значення $\pm e/3$, $\pm 2e/3$. Мезони згідно із цією моделлю складаються з кварка та антикварка (табл. 2.3). Також виявилося, що кварки можуть перебувати в трьох різних станах, які відрізняються новим квантовим числом, не пов'язаним з електричним зарядом і спіном (Н. Н. Боголюбов, Б. В. Струмінський, А. М. Тавхелідзе та незалежно Й. Намбу і Е. Хан, 1965). Це квантове число називають кольором (або кольоровим зарядом), а його три значення позначають як червоне r (від англ. red), жовте y (від англ. yellow) або зелене g (від англ. green) і синє b (від англ. blue).

	Тип кварка (аромат)					
	d	U	S	c	b	t
Заряд <i>Q</i> [<i>e</i>]	-1/3	+2/3	-1/3	+2/3	-1/3	+2/3
Ізоспін <i>І</i>	1/2	1/2	0	0	0	0
Проєкція І ₃	-1/2	+1/2	0	0	0	0
Дивність s	0	0	-1	0	0	0
Шарм с	0	0	0	+1	0	0
Вродливість <i>В</i>	0	0	0	0	-1	0
Заряд <i>t</i>	0	0	0	0	0	+1

Таблиця 2.2. Властивості кварків (спін $I^{\pi} = 1/2^+$, баріонний заряд B = 1/3)

Маса у складі струму, ГеВ	4,7	2.2	95	1,3	4,2	173
Маса у складі адрона, ГеВ	0,33	0,33	0,51	1,8	5	173

Для кожного кварка існує своя античастинка – антикварк. Антикварки мають таки ж значення спіну, ізоспіну та маси, як і відповідні кварки, але всі інші числа, що визначають їх аромат, мають протилежні значення мають.

Адрони (баріони і мезони – частинки, що беруть участь у сильній взаємодії) складаються з кварків різного кольору. При цьому кварки в баріоні представлені у всіх трьох кольорових станах, тобто в баріоні кожен з трьох кварків має інший колір, а всі разом вони утворюють безколірну (білу) комбінацію (за аналогією зі звичайним світлом: суміш трьох основних кольорів – червоного, жовтого (або зеленого) і синього сприймається оком як білий колір, тобто веде до відсутності кольору або безбарвності). У мезонах кольору кварка відповідає антиколір антикварка. Таким чином, адрони, які спостерігаються у природі, абсолютно незабарвлені (білі) і мають нульовий кольоровий заряд.

· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						
Частинка	Кваркова структура	Маса, Мев	Час життя, с	Спін- парність	B	
р	uud	938,27	$>10^{32}$ p.	$1/2^{+}$	1	
n	udd	939,57	882 ± 2	$1/2^{+}$	1	
π^+	ud	139,57	$2,6 \cdot 10^{-8}$	0-	0	
π^{-}	$d\overline{u}$	139,57	$2,6 \cdot 10^{-8}$	0-	0	
π^0	$u\overline{u} - d\overline{d}$	134,98	$8,4 \cdot 10^{-17}$	0-	0	
η	$u\overline{u} - d\overline{d} - 2s\overline{s}$	547	$5, 5 \cdot 10^{-19}$	0-	0	
ρ^+	u - d	769	$4, 4 \cdot 10^{-24}$	1-	0	
ρ_	$d\overline{u}$	769	$4, 4 \cdot 10^{-24}$	1-	0	

Таблиця 2.3. Властивості деяких адронів. Баріони B = 1, мезони B = 0

ρ^0	$u\overline{u} - d\overline{d}$	769	$4, 4 \cdot 10^{-24}$	1-	0
ω	$u\overline{u} + d\overline{d}$	783	$7,8 \cdot 10^{-23}$	1-	0
J/ψ	cc	3097	$7,5 \cdot 10^{-21}$	1-	0

Усередині адронів кварки взаємодіють за рахунок віртуального обміну безмасовою електрично нейтральною частинкою зі спіном 1 і відмінним від нуля бінарним кольоровим зарядом. Така частинка-носій сильної міжкваркової взаємодії називається глюоном (від англ. glue – клей, клеїти). У глюонів – носіїв сильної взаємодії і фотонів – носіїв електромагнітної взаємодії, існують деякі загальні риси. Насамперед їхні маси дорівнюють нулю. Спін глюона, як і спін фотона, дорівнює одиниці. Роль і функції кольорових зарядів кварків і глюонів при сильних взаємодіях подібні до ролі та функцій електричних зарядів заряджених частинок і фотонів у електромагнітних взаємодіях.

Однак між електромагнітним полем і полем глюонів існує і принципова різниця. Електричні заряди бувають двох типів ("+" і "-"), а кольорові заряди кварків – шести (три кольори і три антикольори}; фотон є електрично нейтральним і тим самим єдиним у своєму роді, а глюони мають бінарний кольоровий заряд і вісім типів.

Глюони двокольорові та їхній кольоровий заряд, що є комбінацією кольору й антикольору. При взаємодії глюонів з кварками колір кварків змінюється; наприклад, синій кварк при взаємодії з червоно-антисинім глюоном стає червоним: глюон немовби гасить своїм антикольором колір кварка і передає йому свій колір. Аромат кварків, їхній електричний і баріонний заряди при взаємодії з глюонами не змінюються, тобто колір є найбільш важливою властивістю кварків при взаємодії. Теорія, що описує таку взаємодію, називається *квантовою хромодинамікою* (КХД). Така назва віддзеркалює подібність у побудові КХД і квантової електродинаміки (КЕД) (тобто квантової теорії поля та взаємодію поля із зарядженими частинками), а також підкрес-

лює значення фундаментальної властивості "кольору" для даних явищ¹.

Наявність бінарного кольорового заряду приводить до того, що глюони взаємодіють не тільки з кварками, але й між собою. Якщо фотони випромінюються тільки зарядженими частинками і не випромінюються фотонами, то кольорові глюони можуть бути випроміненими не тільки кольоровими кварками, але й кольоровими глюонами. Якби остання ситуація реалізувалася у випадку фотонів, то виникало б світло що немовби "світиться". Саме тому рівняння глюонного поля (на противагу рівнянням Максвелла для електромагнітного поля) виявляються нелінійними. Глюонне поле, що називається неабелевим калібровочним полем, квантами якого є глюони, на відміну від електромагнітного, має дивовижну властивість: сила взаємодії кольорових кварків унаслідок обміну кольоровими глюонами збільшується зі збільшенням відстані між кварками (електромагнітна взаємодія стає слабкішою зі зростанням відстані між електричними зарядами). Така властивість неабелевих калібровочних полів отримала назву асимптотична свобода: при наближенні кварків один до одного сили взаємодії між ними майже зникають і на відстанях $\Delta r \rightarrow 0$ кварки стають вільними, тобто невзаємодіючими (Д. Гросс, Д. Політцер, Ф. Волчек, Нобелівська премія із фізики, 2004).

Взаємодію між двома кварками на відстанях, відмінних від нуля, можна параметризувати потенціалом типу водоверті:

$$V_s = \frac{4\alpha_s \hbar c}{3r} + kr \,,$$

де α_s – константа сильної взаємодії, а k – так звана стала струни. Величина α_s зменшується з енергією і при енергії в кілька гігаелектрон-вольтів $\alpha_s \cong 0,3$. Перший доданок у виразі для V_s , що домінує на малих відстанях (< 0,2 фм), обумовлений обміном одного глюона й має такий самий вигляд, як і потенціал кулонівської взаємодії між одиничними зарядами різного знака. Другий доданок, що домінує на великих відстанях, утворюється

¹ Хром (від грец. хрона-колір).

⁹⁵

внаслідок багатоглюонного обміну. Згідно з експериментальними даними стала струни $k \cong 1 \, \Gamma eB/\phi M$, тому, щоб розсунути два кварки на відстань 1 фм, потрібна фантастична енергія $\cong 1 \, \Gamma eB$. Кварки постійно перебувають усередині адронів і не можуть поодинці вилітати звідти. Явище утримання кварків у адронах отримало назву *конфайнмент* (від англ. *confinement* – тюремне ув'язнення, обмеження свободи).

Згідно з асимптотичною свободою кварки всередині адронів майже вільні, але при "спробі" кварка вирватися назовні, подолати конфайнмент, сили його взаємодії з рештою кварків адронів стають настільки великими, що виліт окремого кварка стає неможливим. За рахунок цієї сильної взаємодії можуть виникнути нові кварк-антикваркові пари, кожен кварк, що вилітає, "вкривається" ними, унаслідок чого з адрона можуть вилітати тільки адрони. Процес перетворення народжених кварків на адрони називається *адронізацією*. Народжені адрони "пам'ятають", що їхнє походження пов'язане з парою первинних кварків і зберігають інформацію про них. Як наслідок, адрони утворюються у вигляді двох струменів, що вилітають у протилежних напрямках. Струмені адронів, які були передбачені як прояв кваркової структури адронів, уперше спостерігалися в 1975 р. (Стенфорд, США).

Рівняння квантової хромодинаміки можна досить точно розв'язати для процесів, у яких відстань між кварками мала, і вони внаслідок асимптотичної свободи слабко пов'язані між собою (напр., КХД змогла відтворити вид потенціалу між кварками всередині адрона). Разом з тим, коли кварки перебувають один від одного на відстанях порядку радіуса адрона ($\approx 1 \, \phi$ м), де вони сильно взаємодіють (напр., конфайнмент, адронізація кварків і глюонів, ядерна взаємодія між нуклонами), кількісний опис таких процесів стикається з великими труднощами, які в даний час ще не переборені.

Таким чином, хоча первинна природа ядерної взаємодії між нуклонами відома (сильна кольорова міжкваркова взаємодія, що зумовлена віртуальними процесами випромінювання та поглинання бікольорових глюонів однокольоровими кварками), але її кількісний опис у теорії КХД дуже ускладнений. Сильна ядерна

взаємодія між нуклонами є деяким залишком сильної кольорової кварк-глюонної взаємодії.

Наближено вдається описати нуклон-нуклонну взаємодію за допомогою спрощених теорій мезонного обміну без використання КХД, тому що і нуклони, і мезони складаються із кварків, а ядерний потенціал на відстанях, що важливо в нерелятивістській ядерній фізиці, головним чином залежить від обміну систем із трьох кварків системами з двох кварків, якими й є мезони.

Вирази (2.56) і (2.58) для потенціалу нуклон-нуклонної взаємодії, що побудовані на базі загальних фізичних уявлень та емпіричних даних, містять шість невизначених функцій, що залежать від відстані між нуклонами. На сьогодні використовуються декілька потенціалів взаємодії між нуклонами у вільному просторі, які враховують усі компоненти ядерних сил. Це, наприклад, паризький потенціал однобозонного обміну; потенціали Рейда і Хамада-Джонсона у вигляді суми потенціалів Юкави з відштовхувальним кором на малих відстанях; потенціал Волкова у вигляді суми потенціалів Гаусса. Параметри таких потенціалів знаходять переважно за експериментальними даними з розсіяння нуклонів у вільному просторі та згідно з характеристиками малонуклонних систем.

Хоча емпіричні дані підтверджують, що взаємодію між вільними нуклонами при не дуже високих енергіях можна характеризувати потенціалами переважно статичного типу, існують дані, які свідчать про наявність значних компонентів потенціалу, що залежать від швидкості нуклонів. Такі сили згідно з галілеєвою інваріантністю є функціями відносного імпульсу $\vec{p} = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)/2$. Зазвичай обмежуються найнижчим наближенням за швидкістю – лінійним. Лінійним за імпульсами виразом, що не порушує загальних властивостей симетрії, зокрема операції інверсії координат, є спін-орбітальний доданок типу $([\vec{r} \times \vec{p}] \cdot (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2))$; відповідний спін-орбітальний доданок двочастинкової взаємодії має вигляд

$$\hat{V}_{ls} = v_{ls}(r)(\hat{L}\hat{S})$$
. (2.69)

Тут $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ – оператор відносного орбітального моменту; $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ – оператор сумарного спіну. Хоча внесок такого потенціалу при розсіянні нуклонів малий, його наявність приводить до спін-орбітального компонента в одночастинковому потенціалі самоузгодженого середнього поля нуклонів у ядрах, який дозволяє отримати магічні числа ядер (див. підрозд. 3.5).

Ядерні сили короткодіючі, тому можна сподіватися, що для параметризації функцій, які описують їхню радіальну залежність, можна використовувати точковий (контактний) потенціал нульового радіуса дії, а саме, δ-сили у вигляді δ-функції

$$V_{\delta}(\vec{r}) = V_{\delta}^{(0)}\delta(\vec{r}). \qquad (2.70)$$

Виявляється, що амплітуда $V_{\delta}^{(0)}$ такого потенціалу має залежати від відносної швидкості нуклонів, якщо за його допомогою моделюється дія потенціалів зі скінченним радіусом. Це видно з розгляду поведінки в імпульсному просторі \vec{p} потенціалу $V(\vec{r})$ із довільною залежністю від відстані $\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$, тобто, якщо обчислити матричний елемент цього потенціалу в імпульсному просторі

$$\langle \vec{p} | V | \vec{p}' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int e^{-i(\vec{p} - \vec{p}')\vec{r}/\hbar} V(\vec{r}) d\vec{r}.$$
 (2.71)

Очевидно, що δ-сили приводять до сталого матричного елемента, але використання будь-якого потенціалу з довільним скінченним радіусом дії зумовить залежність матричного елемента (2.71) від імпульсів. Найпростіше ротаційно-інваріантне наближення для нього має вигляд

$$(2\pi\hbar)^{3} \langle \vec{p} | V | \vec{p}' \rangle = V_{0} + V_{1} \vec{p}'^{2} + V_{1} \vec{p}^{2} + V_{2} (\vec{p} \, \vec{p}').$$
 (2.72)

У координатному просторі цьому виразу відповідає такий оператор точкової взаємодії:

$$V(\vec{r}) = V_0 \delta(\vec{r}) + V_1 (\vec{p} \, {}^{2} \delta(\vec{r}) + \delta(\vec{r}) \vec{p} \, {}^{2}) + V_2 \, \hat{\vec{p}} \, \delta(\vec{r}) \, \hat{\vec{p}} \,, \qquad (2.73)$$

де $\vec{p} = -i\hbar(\vec{\nabla}_1 - \vec{\nabla}_2)/2$ – оператор відносного імпульсу, який у виразі (2.73) діє на функції, розташовані праворуч від нього (коли він розташований праворуч від δ -функції), і навпаки; амплі-

туди V_i від швидкостей не залежать. Сили типу (2.73) зазвичай

застосовуються як двочастинковий компонент ефективної взаємодії між нуклонами в середніх і важких ядрах.

Як уже зазначалося, при розв'язанні ядерних задач багатьох тіл широко використовується і відіграє дуже важливу роль концепція ефективних потенціалів взаємодії між нуклонами. На це існують такі причини:

 потенціали взаємодії між нуклонами у вільному просторі принципово відрізняються від нуклон-нуклонних потенціалів у ядерному середовищі, оскільки нуклони в ядрі перебувають в оточенні інших нуклонів і відчувають середнє поле, що генерується іншими нуклонами в процесі обміну мезонами. Останнє зумовлює залежність взаємодії від густини розподілу нуклонів;

 розрахунки ядерних характеристик легких ядер з реалістичними нуклон-нуклонними потенціалами типу (2.58) трудомісткі завдяки складності цих потенціалів;

 у середніх і важких ядрах такі розрахунки можна виконати лише обмежившись деякою скінченною кількістю можливих ступенів свободи системи, а для врахування решти ступенів свободи необхідно модифікувати парні ядерні сили.

У 1956 р. Т. Скірм запропонував як ефективну взаємодію використовувати двочастинкові та тричастинкові сили нульового радіуса дії. Двочастинковий компонент мав вигляд (2.73), а тричастинкові сили V(1,2,3) були силами нульового радіуса дії:

$$V(1,2,3) = t_3 \,\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \,\delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_3). \tag{2.74}$$

Зазначимо, що зазвичай цей компонент сил моделюється двочастинковим потенціалом, який залежить від густини нуклонів р:

$$V_{\rho}(1,2) = \frac{1}{6} t_3 (1+P_{\sigma}) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \rho\left(\frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)\right).$$
(2.75)

Компонент потенціалу такого вигляду з $t_3 > 0$ призводить до відштовхування на малих відстанях.

Взаємодії (2.73) – (2.75) називають *силами Скірма*, їх дуже широко використовують для обчислення різних характеристик ядер. Параметри потенціалу Скірма зазвичай знаходять з умови отримання за допомогою цих сил відомих значень величин, що

характеризують загальні властивості ядерної матерії, а саме: густини ядерної речовини, її нестисливості, що визначає зміну повної енергії системи за зміни густини нуклонів, і тим самим – стабільність ядерної матерії, енергії симетрії тощо. Також часто параметри сил Скірма знаходять з умови узгодження результатів теоретичних розрахунків енергій зв'язку, енергій одночастинкових рівнів і радіусів деяких ядер з експериментальними даними.

У виразах для ефективної взаємодії нуклонів як двочастинковий компонент використовують і більш реалістичні потенціали зі скінченним радіусом дії. Це, наприклад, так звані *сили Гоні*, які складаються із суми потенціалів Гаусса для двочастинкового компонента і з тричастинкового компонента вигляду (2.75).

У цілому ефективні сили взаємодії між нуклонами в ядрах завжди залежать від густини розподілу нуклонів. Один із найпростіших виразів такого типу запропонував А. Б. Мігдал при визначенні властивостей ядер у теорії скінченних фермі-систем. *Сили Мігдала* мають вигляд

$$V(1,2) = V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \Big[f + g(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) + f'(\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2) + g'(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2) \Big],$$
(2.76)

де f і f' - функції вигляду

$$f = f_{\rm in} + (f_{\rm ex} - f_{\rm in}) \frac{\rho(0) - \rho(r)}{\rho(0)} = f_{\rm ex} + (f_{\rm in} - f_{\rm ex}) \frac{\rho(r)}{\rho(0)}, \quad (2.77)$$

де $\rho(r)$ – густина розподілу нуклонів ядра у вигляді функції Фермі (1.37); $f_{\rm ex}$ і $f_{\rm in}$ – сили взаємодії у вільному просторі та центрі ядра (фактично в однорідному ядерному середовищі). Існують декілька наборів параметрів цієї взаємодії, наприклад:

$$f_{\rm in} = 0,0685; \quad f_{\rm ex} = -2,165; \quad f'_{\rm in} = 0,3315; \quad f'_{\rm ex} = 0,465;$$

 $V_0 = 380 \,\,{\rm MeB} \cdot \phi {\rm M}^3; \quad g = 0,0575; \quad g' = 0,725 \,,$ (2.78)

або трохи інший

$$f_{\rm in} = -0.163, \quad f_{\rm ex} = -4.36; \quad f_{\rm in}' = f_{\rm ex}' = 1.53 (1 + 2.55 A^{-2/3});$$

 $V_0 = 350 \,{\rm MeB} \cdot \phi {\rm M}^3; \quad g = 0; \quad g' = 1.2.$ (2.79)

Із формул (2.76) і (2.77) видно, що значення ефективних сил значно змінюються при переході від внутрішньої області ядра

до вільного простору. Порівняння експериментальних даних і розрахунків із силами Скірма та Гоні показує, що більш реалістичними є від'ємні значення параметра $f_{\rm in}$.

Ефективні сили Мігдала, як і сили Скірма та Гоні, моделюють повну ймовірність взаємодії двох нуклонів у ядрі, що включає багатократні зіткнення нуклонів у ядерному середовищі, де діє принцип Паулі. Це дає змогу розглядати ядро як систему незалежних квазічастинок, що рухаються в середньому полі, сформованому ефективними силами. Залежність ефективної взаємодії від імпульсу приводить до так званої ефективної маси нуклона, коли одночастинкові стани ядер відповідають руху квазічастинки з масою, відмінною від маси нуклона у вільному просторі.

Задачі та завдання для самостійної роботи

2.1. Використовуючи рівняння (2.9) для радіальної хвильової функції дейтрона U(r) і мализну його енергії зв'язку ε , знайти зв'язок між ефективною глибиною V_0 потенціальної ями ядерної взаємодії між нейтроном і протоном та її шириною R.

Розв'язання:Після інтегрування рівняння

$$U''(r) - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) U(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \varepsilon U(r)$$

у межах області дії ядерних сил (тобто за r від 0 до R), нехтуючи (згідно з умовою) правою частиною рівняння, маємо

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^R dr U(r) V(r) \approx \frac{dU}{dr} \bigg|_{r=R} - \frac{dU}{dr} \bigg|_{r=0}$$

Оскільки функція U(r) при $r \to 0$ має вигляд $U(r) = \text{const} \cdot r$ R t^2

(див., напр., (2.11) з $\tilde{A} = 0$), то знаходимо $\int_{0}^{R} dr \, r \, V(r) = \frac{\hbar^2}{2\mu} G$, де

під інтегралом замість функції U(r) був підставлений її приблизний вираз для малих значень r, а G – деяка стала. Якщо тепер в останньому інтегралі замінити потенціал ядерних сил V(r) його

ефективним значенням - V0, то отримаємо зв'язок між глибиною

потенціальної ями та її шириною $V_0 R^2 \approx \text{const}$.

2.2. Хоча ядерні сили між двома нейтронами є силами притягання, вони не можуть утворити зв'язаної системи в триплетному спіновому стані (S = 1), подібної до дейтрона. Як це можна якісно пояснити?

Розв'язання: Нуклони є ферміонами, і тому відповідно до принципу Паулі між характеристиками двонуклонних станів існує співвідношення (2.50): $(-1)^T = (-1)^{L+S+1}$, де *T* і *L* є значеннями ізоспіну і відносного орбітального моменту двох нуклонів. Відповідно до вигляду хвильової функції (2.48) два нейтрони можуть перебувати лише в триплетному зарядовому стані T = 1. Звідси мінімальне значення відносного орбітального моменту має дорівнювати одиниці (L=1), на відміну від дейтрона, де L=0. Це означає, що в системі двох нейтронів діє додаткова відцентрова сила, і тому, як і в дейтроні (підрозд. 2.3), у системі нейтрон-нейтрон не може існувати зв'язаний стан. Цей результат фактично ілюструє дію принципу Паулі, а саме, без урахування принципу Паулі через зарядову незалежність ядерних сил взаємодія між двома нуклонами має бути однаковою, але на відміну від дейтрона, в динейтронній системі два нуклони не можуть перебувати в однакових станах. Це немовби приводить до появи в такій системі тотожних нуклонів додаткової відштовхувальної взаємодії, а система двох нетотожних нуклонів (дейтрон) є слабкозв'язаною, і додаткова відштовхувальна взаємодія не дає змоги утворити зв'язану систему двох тотожних нуклонів.

2.3. Довести, що квадрат оператора спіну нуклона пропорційний одиничній матриці; тобто $\hat{s}^2 = \hbar^2 (3/4) \hat{I}$.

Розв'язання:Згідно з визначенням квадрата оператора спіну маємо $\hat{s}^2 = \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2$, де \hat{s}_{x_i} – оператор проекції спіну на вісь x_i , а саме:

$$\hat{s}_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{s}_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ i \ \hat{s}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Звідси $\hat{s}_{x_i}^2 = \frac{1}{4} \cdot \hat{I}$, де $\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця, тоді маємо

$\hat{s}^2 = \hbar^2 (3/4) \hat{I}$.

2.4. Обчислити сталі нормування хвильової функції дейтрона (2.16), що була отримана в наближенні центральної взаємодії між нуклонами.

2.5. Довести співвідношення (2.64), (2.65), що зв'язують формфактори компонентів нуклон-нуклонного потенціалу в його виразах з урахуванням (2.58) і без (2.56) формалізму ізотопічного спіну.

2.6. Знайти значення сумарного ізоспіну та його проекції для системи двох нуклонів, що перебувають у станах із такими хвильовими функціями:

1)
$$\xi_{n}(1)\xi_{n}(2);$$

2) $\xi_{p}(1)\xi_{p}(2);$
3) $\xi_{p}(1)\xi_{n}(2)\pm\xi_{n}(1)\xi_{p}(2).$

Розділ З

ОДНОЧАСТИНКОВІ ТА КОЛЕКТИВНІ ЯВИЩА В ЯДРАХ

3.1. Необхідність побудови моделей структури ядер

Однією з головних задач теорії атомного ядра є пояснення та передбачення характеристик основних і збуджених станів ядер. Для її розв'язання можливі два підходи. Перший підхід пов'язаний з дослідженням властивості ядер мікроскопічними методами квантової теорії багатьох тіл, базуючись на ядерній взаємодії між нуклонами, а другий полягає в застосовуванні простих феноменологічних моделей ядра. При цьому ядро замінюється деякою модельною фізичною системою, яка досить добре описує певні властивості ядра і допускає досить простий математичний розгляд.

Перший підхід відомий як мікроскопічна теорія ядра. Оскільки реальна ядерна взаємодія точно невідома, а для її описання використовують різні параметризації, то такий метод наближений, і тому його зазвичай називають *напівмікроскопічним підходом*. Головними проблемами у використанні мікроскопічних методів є математичне розв'язання квантової задачі багатьох тіл і фізична інтерпретація отриманих результатів. Для важких ядер математичні труднощі не лише технічні, але й принципові, тому що вони можуть привести до неконтрольованих спрощень у формулюванні задачі за рахунок існування неконтрольованих похибок при її числових розв'язках. У квантовій теорії система з Aнуклонів у деякому стані α описується хвильовою функцією

$$\Psi_{\alpha}(\vec{r}_{1}, \vec{r}_{2}, ..., \vec{r}_{A}; m_{s,1}, m_{s,2}, ..., m_{s,A}) \equiv \langle \{\vec{r}_{j}\}, \{m_{s,j}\} | \alpha \rangle, \qquad (3.1)$$

що залежить від 3A просторових координат $\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_A}$ і від A спінових індексів $m_{s,1}, m_{s,2}, ..., m_{s,A}$, кожний з яких пробігає два значення, що відповідають двом можливим орієнтаціям спіну нуклона. Наприклад, рівняння Шредінгера, для ядра зі стану клонів має вигляд диференціального рівняння в частинних похідних від 300-3=297 просторових змінних (після виділення руху центра мас) і містить $2^{100} \approx 10^{30}$ спінових і стільки ж ізоспінових функцій. Очевидно, що така задача не може бути розв'язана без серйозних математичних спрощень, а тому може призвести до непередбачених фізичних змін у постановці задачі. У певному сенсі сучасна мікроскопічна теорія ядра є деяким різновидом моделі, яка дозволяє розрахувати багато характеристик реальних ядер, і разом з тим визначити межі застосування більш простих феноменологічних моделей, що описують конкретні властивості ядер і дають змогу побудувати уявлення про внутрішні процеси. Мікроскопічна теорія може виявити внутрішню єдність різних феноменологічних моделей і усунути суперечності між протилежними, на перший погляд, початковими припущеннями, на яких вони базуються.

3.2. Загальна класифікація ядерних моделей

Ядерні моделі розрізняються між собою залежно від того, яку кількість ступенів свободи руху нуклонів вони враховують. Точна хвильова функція (3.1) залежить від A просторових координат $\vec{r_i}$, які відраховуються від центра інерції ядра, тобто

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' - \vec{R}_C, \quad \vec{R}_C = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \vec{r}_i',$$
(3.2)

де \vec{r}' – координати відносно нерухомої (лабораторної) системи координат. Із формули (3.2) маємо

$$\sum_{i=1}^{A} \vec{r_i} = 0. \tag{3.3}$$

Таким чином, із 3*A* просторових координат $\vec{r_i}$ незалежними $\epsilon \ 3(A-1)$, тобто система з *A* нуклонів має 3(A-1) ступенів свободи в координатному просторі.

У кожній феноменологічній моделі враховується лише певна обмежена кількість ступенів свободи ядра. Ступені свободи природно поділити на одночастинкові, які описують рух окремих частинок, і колективні, що відповідають корельованому руху великої кількості частинок. Відповідно до цього моделі, які використовуються в ядерній фізиці, можна поділити на одночастинкові та колективні, а також узагальнені, у яких враховуються як колективні, так і одночастинкові ступені свободи.

За аналогією із суцільним середовищем колективні моделі, що враховують достатньо велику кількість корельованих ступенів свободи ядра, називають *моделями з сильною взаємодією*. У колективних моделях ядро розглядається як деяка рідина або тверде тіло. У макроскопічних середовищах колективні ефекти виникають зазвичай унаслідок частих та інтенсивних зіткнень частинки з її ближніми сусідами. Застосування таких уявлень до ядра означає, що радіус дії сил між нуклонами r_{int} і довжина lвільного пробігу нуклонів вважаються малими порівняно з радіусом ядра R_0 :

$$R_0 \gg \{r_{\text{int}}, l\}. \tag{3.4}$$

Одночастинкові моделі враховують ступені свободи, що описують рух індивідуальних нуклонів. Припускається, що кожна частинка рухається незалежно від інших у деякому самоузгодженому полі, яке створюється сукупним рухом усіх нуклонів ядра. Тому такі моделі називають *моделями незалежних части*нок, а ядро розглядається як деякий ідеальний газ у замкненому об'ємі. Вважається, що вільний пробіг нуклонів значно більший за радіус ядра, який значно перевищує радіус взаємодії

$$l \gg R_0 \gg r_{\rm int} \ . \tag{3.5}$$

З погляду класичної теорії суцільних середовищ у колективних і одночастинкових моделях роблять протилежні та взаємовиключні припущення про довжину вільного пробігу нуклона в ядрі, а співіснування таких моделей має доволі парадоксальний

вигляд. Вирішення цього парадокса полягає в тому, що ядерне середовище відрізняється від класичного, у той час як довжина пробігу є характеристикою саме класичної механіки. Рух нуклонів у ядрі є квантовим процесом, дебройлівська довжина хвилі нуклона в ядрі має порядок розмірів ядра, і тому таку саму невизначеність має значення довжини вільного пробігу нуклона.

Наведемо найпоширеніші феноменологічні моделі ядра. Історично першими моделями, які дозволили описати основні глобальні властивості ядер, були колективні моделі. До них належать такі підходи:

 ядерна матерія – модель, що вивчає властивості гіпотетичного необмеженого суцільного середовища, яке складається з протонів і нейтронів, що взаємодіють за допомогою ядерних сил. За однакової густини протонів ρ_p і нейтронів ρ_n ядерна

матерія називається симетричною, за $\rho_p \neq \rho_n - асиметричною.$

Область застосування: розрахунки густини і питомої енергії зв'язку ядерної речовини, дослідження насичення ядерних сил і поведінки нуклонів за великих енергій збуджень і т. ін. Модель може бути використана для опису руху нуклонів у центрі важких ядер і дослідження деяких типів колективних збуджень;

• краплинна модель. Ядро трактується як заряджена крапля рідини (у модифікованому варіанті – як крапля протонної та нейтронної рідини), густина якої дорівнює густині нуклонів у центрі ядра. Енергія ядра записується у вигляді суми об'ємного, поверхневого та кулонівського компонентів. Додатково враховуються, виходячи за межі уявлень класичної фізики, енергії симетрії та спарювання.

Область використання: побудова напівемпіричної формули мас, що описує поведінку усередненої енергії зв'язку ядер як функції A та Z; розгляд поверхневих коливань сферичних ядер; фізичне пояснення процесу поділу ядер.

Основою для використання зазначеної моделі є такі властивості: а) сталість густини ядерної речовини, що свідчить про її "нестисливість"; б) пропорційність енергії зв'язку ядра його масовому числу, яка подібна до пропорційності енергії випарову-

вання з поверхні рідкої краплі масі краплі; в) насичення ядерної взаємодії подібне до властивості сил, які діють на молекулу в об'ємі рідини;

• *модель несферичного ядра*. Ядро розглядають як згусток ядерної речовини, який з деяких причин має нєсферичну форму в рівноважному стані. Ураховуються обертальні та коливні ступені свободи.

Область застосування: опис нижніх обертальних і коливних рівнів парно-парних ядер несферичної форми; дослідження властивостей ядерних систем з великими швидкостями обертання, які утворюються при зіткненні важких іонів.

Колективні моделі не дають можливості описати оболонкову структуру ядер, зокрема магічні числа ядер. Це можна зробити, лише користуючись одночастинковими моделями, до яких належать такі:

модель ядерного фермі-газу, яка є найпростішою одночастинковою моделлю. Ядро розглядається як ідеальний фермі-газ невзаємодіючих між собою нуклонів. Об'єм, що займає фермі-газ, обирають таким, що дорівнює об'єму ядра. Поверхневі явища при цьому не враховують.

Область застосування: обчислення глибини ефективної ядерної потенціальної ями; якісне пояснення насичення ядерних сил та ефекту симетрії; наближений опис розподілу нуклонів за імпульсами;

 оболонкові моделі ядра. Вважається, що нуклони рухаються майже незалежно один від одного в деякому середньому потенціальному полі, що створюється рухом усіх нуклонів ядра. Реальна взаємодія між нуклонами розглядається у вигляді суми домінуючого самоузгодженого поля та достатньо слабкої залишкової взаємодії. Існують різні варіанти оболонкових моделей, які розрізняються методами урахування залишкової взаємодії. У першому варіанті цієї моделі, яку часто називають одночастинковою моделлю оболонок, залишкової взаємодії немає. Усі інші варіанти об'єднують під загальною назвою "оболонкові моделі з парними кореляціями та залишковою взаємодією".

Область застосування одночастинкової оболонкової моделі: отримання магічних чисел; пояснення спінів, парності та
магнітних моментів основних і деяких збуджених станів ядер, що відрізняються від магічних на один нуклон.

Варіанти оболонкової моделі з парними кореляціями та залишковою взаємодією характеризуються переважно типом і способами урахування залишкової взаємодії. У моделі оболонок із феноменологічним спарюванням залишкова взаємодія явно не враховується, а ефект спарювання нуклонів одного типу використовується при побудові хвильових функцій ядра. Вважається, що нуклони одного виду об'єднуються в пари з нульовим моментом кількості руху та додатною парністю, тому повна хвильова функція ядра формується хвильовими функціями пар нуклонів.

Область застосування: пояснення значень спінів і парності основних станів усіх парно-парних ядер і майже всіх парнонепарних ядер; наближене обчислення магнітних моментів майже всіх парно-непарних ядер.

Надплинна модель відрізняється від попередньої явним введенням залишкової взаємодії, яка забезпечує ефект спарювання нуклонів. Ця модель на більш глибокому рівні пояснює ефект спарювання і дає теоретичну базу для попереднього підходу.

Основні властивості колективних та одночастинкових моделей враховані в узагальненій моделі ядра. Вважається, що ядро є згустком ядерної речовини деякої форми, яка може бути оточена кількома зовнішніми нуклонами. Поведінка остова описується однією з колективних моделей, а поведінка зовнішніх нуклонів – самоузгодженим полем із залишковою взаємодією або без неї. Окрім цього, вводиться певна інтенсивна взаємодія між колективними (остов) та одночастинковими (зовнішні нуклони) ступенями свободи. Ураховується можливість деформації остова, що приводить до несферичності ядер.

Область застосування: обчислення квадрупольних моментів і характеристик великої кількості рівнів з невеликими енергіями.

Тепер, після ознайомлення із загальним характером руху нуклонів у ядрах і моделями його опису, розглянемо деякі моделі ядра більш детально.

3.3. Незалежний рух нуклонів у моделі ядерного фермі-газу

Модель фермі-газу – це найпростіша модель незалежного руху нуклонів у ядрі. Відповідно до неї ядро розглядається як система виродженого ядерного фермі-газу, тобто як система невзаємодіючих нуклонів, що підпорядковуються принципу Паулі. Рух нуклонів описується законами квантової механіки і припускається, що він близький до вільного руху частинок. Згідно із принципом Паулі, якщо немає зіткнень, нуклони незбудженого ядра повністю заповнюють усі нижні енергетичні рівні, аж до деякого рівня з енергією

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} \tag{3.6}$$

включно (див. рис. 3.1). Ця максимальна енергія заповнених одночастинкових станів називається *енергією Фермі* і відраховується від дна потенціальною ями. Величина p_F – це максимальний (граничний) імпульс нуклона, або імпульс Фермі, нижче якого всі стани зайняті.



110

Таким чином, густина розподілу нуклонів за імпульсами $\rho_{\vec{p}}(\vec{p})$ у незбудженому(холодному) ядрі дорівнює нулю при $p > p_F$, тому повна кількість нуклонів A в ядрі та його енергія E_0 пов'язані з густиною нуклонів у імпульсному просторі $\rho_{\vec{p}}(\vec{p})$ та імпульсом Фермі такими співвідношеннями:

$$A = \int_{p \le p_F} \rho_{\vec{p}}(\vec{p}) d\vec{p}; \quad E_0 = \int_{p \le p_F} \frac{p^2}{2m} \rho_{\vec{p}}(\vec{p}) d\vec{p}, \quad (3.7)$$

де інтегрування виконується за об'ємом імпульсного простору з $p \leq p_F$.

Знайдемо вираз для густини розподілу $\rho_{\vec{p}}$. Вважаємо, що об'єм системи достатньо великий, і тому форма поверхні не істотно впливає на $\rho_{\vec{p}}$. Ядро апроксимуємо кубом з ребром L та

об'ємом $V = L^3$. Хвильова функція частинки, що рухається в такому кубі, має вигляд

$$\psi \equiv \operatorname{const} \cdot \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) , \ \vec{k} = \vec{p} / \hbar .$$
 (3.8)

Для виключення ефектів, пов'язаних з рухом центра мас, використовуємо систему центра мас і вважаємо, що кожна з координат змінюється в інтервалі від -L/2 до +L/2, оскільки центр мас кубу збігається з його геометричним центром. Нехтуючи ймовірністю розташування нуклонів зовні ядра і враховуючи неперервність хвильової функції на межі системи, маємо умову необхідності рівності нулю хвильової функції на поверхні. Тоді хвильове число $\vec{k} = \vec{p} / \hbar$ буде задовольняти такі умови квантування: $\sin(\pm k_{\alpha}L/2) = 0$, звідки

$$\pm k_x \frac{L}{2} = \pi n_x, \quad \pm k_y \frac{L}{2} = \pi n_y, \quad \pm k_z \frac{L}{2} = \pi n_z, \tag{3.9}$$

де коефіцієнти n_x, n_y, n_z набувають цілих значень. Співвідношення (3.9) означають, що одночастинкові енергії $\varepsilon \equiv \hbar^2 \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \right) / 2m$ дискретні, а числа n_x, n_y, n_z визначають як значення імпульсу, так і значення енергії,

 $\varepsilon = (\hbar^2 / 2m)(2\pi / L)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$, і тим самим стан системи в імпульсному просторі. Зауважимо, що умова рівності нулю хвильової функції на межі зайнятого об'єму та вибір початку координат у центрі мас призводять до таких самих значень хвильових чисел, як і використання періодичних граничних умов $\psi(\vec{r} + \vec{L}) = \psi(\vec{r})$.

Нехай $\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$ – комірка мінімального розміру поблизу деяких значень чисел n_x, n_y, n_z , що фіксують значення одночастинкової енергії. Тоді відповідно до принципу Паулі в кожній комірці розміру $\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$ може бути чотири нуклони, що мають дві різні проєкції ізоспіну та дві різні проєкції спіну. Тому згідно з (3.9) кількість нуклонів, значення імпульсів яких лежить у інтервалі $\Delta \vec{p} \equiv \Delta \vec{k} / \hbar$, дорівнює добутку кількості відповідних станів $\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$ на ступінь виродження 4:

$$\Delta N(\vec{p}) = 4\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \frac{4V}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z.$$
(3.10)

Для великої системи $V = L^3 >> 1$, тому $\Delta k_j \to dk_j$, тобто збігаються з відповідними диференціалами і

$$dN(\vec{p}) = \frac{4V}{(2\pi\hbar)^3} d\vec{p}; \quad d\vec{p} = \hbar^3 d\vec{k}.$$
(3.11)

Таким чином, густина розподілу нуклонів за імпульсами для моделі фермі-газу при $p \le p_F \ \epsilon$ сталою величиною й дорівнює

$$\rho_{\vec{p}}(\vec{p}) = \frac{dN(\vec{p})}{d\vec{p}} = \frac{4V}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{r_0}{\pi\hbar}\right)^3 A.$$
(3.12)

При отриманні формули (3.12) ми використали стандартне співвідношення між об'ємом і кількістю нуклонів у ядрі

$$V = 4\pi R_0^3 / 3 = 4\pi r_0^3 A / 3.$$
(3.13)

За формулами (3.7) і (3.12) знаходимо співвідношення

$$A = \int_{p \le p_F} \rho_{\vec{p}} d\vec{p} = \frac{4}{3} \pi p_F^3 \rho_{\vec{p}} = \rho_0 V$$
(3.14)

між граничним імпульсом Фермі p_F і густиною ρ_0 ядерної речовини в координатному просторі

$$\rho_0 = \frac{A}{V} = \frac{3}{4\pi r_0^3} \cong 0,14 \,\,\text{фm}^{-3}. \tag{3.15}$$

За допомогою (3.14), користуючись (3.15), маємо такі вирази для хвильового числа Фермі k_F та енергії Фермі:

$$k_F \equiv \frac{p_F}{\hbar} = \left(\frac{3}{2}\pi^2 \rho_0\right)^{1/3} \equiv \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{1}{r_0} \cong 1,27 \ \text{\phi}\text{m}^{-1}; \qquad (3.16)$$

$$\varepsilon_{F} \equiv \frac{\left(\hbar k_{F}\right)^{2}}{2m} = \frac{\hbar^{2}}{2m} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \frac{1}{r_{0}^{2}} = \frac{\hbar^{2}}{2m} \left(\frac{3\pi^{2}}{2}\rho_{0}\right)^{2/3} = \frac{48,495}{r_{0}^{2}[\phi M^{2}]} \text{MeB} = 126,015 \left(\rho_{0}[\phi M^{-3}]\right)^{2/3} \text{MeB} \cong 34 \text{ MeB}.$$
(3.17)

Числові значення у формулах (3.15) – (3.17) були отримані з $r_0 = 1,2$ фм і масою *m*, що відповідає значенню одиниця атомної

маси
$$m_u$$
, (1.2): $\hbar^2 / m_u = 41,80159 \text{ фм}^2 / \text{MeB}$

Із формул (3.7) і (3.14) знаходимо вираз для енергії системи нуклонів

$$E_{0} = E_{0}(A) = \int_{p \le p_{F}} \frac{p^{2}}{2m} \rho_{\vec{p}}(\vec{p}) d\vec{p} = A \varepsilon_{av}, \qquad (3.18)$$

де є_{*av*} – стала середня енергія, що припадає на один нуклон,

$$\varepsilon_{av} \equiv \frac{E_0}{A} = \frac{3}{5} \varepsilon_F \cong 22 \text{ MeB.}$$
(3.19)

Таким чином, в обмеженому фермі-газі, як і в ядрі (відповідно до формули Вейцзекера), енергія системи E_0 пропорційна кількості частинок системи. Разом з тим величина енергії (3.18) додатна, оскільки енергія, яка визначена згідно із формулою (3.7), є лише повною кінетичною енергією системи нуклонів. При застосуванні до ядра модель вільного фермі-газу має бути

модифікована шляхом урахування потенціальної енергії. Це відзеркалює те, що нуклони ядра утворюють зв'язану систему, і тому мають бути в деякому потенціальному полі сил притягання. Якщо апроксимувати таке поле прямокутною потенціальною ямою з нескінченно високими стінками, то всі попередні результати не зміняться. Глибину ями V_0 можна оцінити з умови тотожності експериментального значення енергії S_n відриву нуклона від ядра ($S_n \cong 8$ MeB) і теоретичного значення цієї величини, $S_n = V_0 - \varepsilon_F$. Останнє співвідношення випливає з того, що енергія Фермі є енергією найменш зв'язаного нуклона (рис. 3.1), таким чином, маємо

$$V_0 = S_n + \varepsilon_F \cong 34 + 8 = 42 \,\text{MeB}.$$
 (3.20)

Таке значення V_0 близьке до середнього значення глибини потенціалу, за допомогою якого можна досить точно обчислити характеристики одночастинкових станів у сферичних ядрах (див. підрозд. 3.5).

У розглянутій вище моделі фермі-газу не враховувався той факт, що ядро складається з різних типів нуклонів (Z протонів і N нейтронів), і тому його можна застосовувати тільки в ядрах з однаковою кількістю протонів і нейтронів. У більшості стабільних ядер $N \neq Z$, тому ядерну систему необхідно розглядати як суміш двох вироджених фермі-газів, а саме, газу з Z протонів і газу з N нейтронів, які містяться в одному й тому самому об'ємі $V = 4\pi r_0^3 A/3$, що дорівнює об'єму еквівалентного сферичного ядра (див. (3.13)).

Значення енергій Фермі для протонів $\varepsilon_F^{(p)}$ і нейтронів $\varepsilon_F^{(n)}$ знаходимо з виразів, які визначають кількість протонів і нейтронів у ядрі, що аналогічні формулі (3.14):

$$Z = \int_{p \le p_F^{(p)}} \rho_{\vec{p}}^{(p)} d\vec{p} = \frac{4}{3} \pi \left(p_F^{(p)} \right)^3 \rho_{\vec{p}}^{(p)} = \rho_0^{(p)} V ,$$

$$N = \int_{p \le p_F^{(n)}} \rho_{\vec{p}}^{(n)} d\vec{p} = \frac{4}{3} \pi \left(p_F^{(n)} \right)^3 \rho_{\vec{p}}^{(n)} = \rho_0^{(n)} V , \qquad (3.21)$$

де $p_F^{(p)}$ і $p_F^{(n)}$ – імпульси Фермі для протонів і нейтронів, що визначають енергії Фермі для протонів і нейтронів:

$$\varepsilon_F^{(p)} = \frac{\left(p_F^{(p)}\right)^2}{2m_p}, \quad \varepsilon_F^{(n)} = \frac{\left(p_F^{(n)}\right)^2}{2m_n}.$$
(3.22)

Величини $\rho_{\vec{p}}^{(p)}$, $\rho_{\vec{p}}^{(n)}$ і $\rho_0^{(p)}$, $\rho_0^{(n)}$ у (3.21) є густинами протонів і нейтронів відповідно в імпульсному та координатному просторах:

$$\rho_{\vec{p}}^{(p)}(\vec{p}) = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{r_0}{\pi\hbar}\right)^3 A, \quad p \le p_F^{(p)},$$

$$\rho_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{p}) = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{r_0}{\pi\hbar}\right)^3 A, \quad p \le p_F^{(n)}, \quad (3.23)$$

$$\rho_0^{(p)} = \frac{Z}{V} = \rho_0 \frac{Z}{A}, \quad \rho_0^{(n)} = \frac{N}{V} = \rho_0 \frac{N}{A} , \quad r \le R.$$
(3.24)

У формулах (3.23), (3.24) $\rho_{\vec{p}}$ і ρ_0 – густини нуклонів у імпульсному та координатному просторах, які задаються співвідношеннями (3.12) і (3.15). Густини розподілу протонів і нейтронів в імпульсному просторі у два рази менші відповідних густин розподілу нуклонів, (3.12), $\rho_{\vec{p}}^{(p)} = \rho_{\vec{p}}^{(n)} = \rho_{\vec{p}} / 2$, оскільки у випадку нетотожних нуклонів одночастинкові стани лише двократно вироджені (за спіном).

За допомогою формул (3.21) – (3.24) знаходимо вирази для імпульсів Фермі $p_F^{(p)}$, $p_F^{(n)}$ протонів і нейтронів та енергій Фермі

$$p_F^{(p)} = \left(\frac{2Z}{A}\right)^{1/3} p_F, \quad p_F^{(n)} = \left(\frac{2N}{A}\right)^{1/3} p_F; \quad (3.25)$$

$$\varepsilon_F^{(\mathbf{p})} = \left(\frac{2Z}{A}\right)^{2/3} \left(\frac{m}{m_{\mathbf{p}}}\right) \varepsilon_F, \quad \varepsilon_F^{(\mathbf{n})} = \left(\frac{2N}{A}\right)^{2/3} \left(\frac{m}{m_{\mathbf{n}}}\right) \varepsilon_F. \tag{3.26}$$

Зазначимо, що в імпульсному просторі густини розподілу протонів і нейтронів однакові, але зосереджені в різних областях

імпульсного простору: $p \le p_F^{(p)} - для$ протонів і $p \le p_F^{(n)} - для$ нейтронів.

Для енергії двокомпонентного фермі-газу аналогічно формулі (3.18), маємо

$$E_{0} = E_{0}(Z, N) = \int_{p \le p_{F}(p)} \frac{p^{2}}{2m_{p}} \rho_{\vec{p}}^{(p)} d\vec{p} + \int_{p \le p_{F}(n)} \frac{p^{2}}{2m_{n}} \rho_{\vec{p}}^{(n)} d\vec{p} =$$

$$= \frac{3}{5} \left[Z \,\varepsilon_{F}^{(p)} + N \,\varepsilon_{F}^{(n)} \right] =$$

$$= A \,\varepsilon_{av} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2Z}{A} \right)^{5/3} \left(\frac{m}{m_{p}} \right) + \left(\frac{2N}{A} \right)^{5/3} \left(\frac{m}{m_{n}} \right) \right], \qquad (3.27)$$

де ε_{av} – середня енергія, що припадає на один нуклон (3.19).

У випадку симетричного фермі-газу, тобто, якщо Z = N = A/2 і $m_p \cong m_n \cong m$ (m – маса нуклона), співвідношення (3.25) і (3.26) збігаються з аналогічними виразами моделі (3.16) – (3.17) однокомпонентного нуклонного фермі-газу.

Перепишемо формулу (3.27) для енергії $E_0(Z,N)$ двокомпонентної системи нуклонів у такому вигляді ($m_p \cong m_n \cong m$):

$$E_{0}(Z,N) = \frac{3}{10} \varepsilon_{F} A \Big[(1-I)^{5/3} + (1+I)^{5/3} \Big],$$

$$I = \frac{N-Z}{A} = 1 - \frac{2z}{A},$$
(3.28)

де I – відносний нейтронний надлишок. Розклад виразу у квадратних дужках за ступенями I з точністю до доданків другого порядку мализни дає

$$E_0(Z,N) = E_0(A) + E_{\text{sym}},$$

$$E_{\text{sym}} = \frac{1}{3} \varepsilon_F \frac{(N-Z)^2}{A} \equiv \frac{1}{3} \varepsilon_F \frac{(A-2Z)^2}{A}.$$
 (3.29)

Звідси видно, що енергія $E_0(Z, N)$ набуває при заданому масовому числі A = Z + N найменшого значення тоді, коли в даному об'ємі ядра кількість нейтронів і протонів однакова. Залежність

енергії від різниці нейтронів і протонів пов'язана з тим, що за принципом Паулі в незбудженому ядрі послідовно заповнюються всі стани з енергіями, нижчими від енергій Фермі $\varepsilon_F^{(p)}$ та $\varepsilon_F^{(n)}$, значення яких нелінійно залежать від нейтронного залишку. Тому за $Z \neq N$ зміни енергій Фермі $\varepsilon_F^{(p)}$ і $\varepsilon_F^{(n)}$ не компенсуються й сумарна енергія $E_0(Z,N)$ збільшується порівняно з енергією $E_0(A) = 3\varepsilon_F A / 5$ симетричного ядра з Z = N = A / 2.

Другий доданок у розкладі (3.29) має вигляд енергії симетрії у формулі Вейцзекера (1.17) для енергії зв'язку нуклонів у ядрах, але значення коефіцієнта $a_4 \cong 24$ MeB, що задає значення енергії симетрії у формулі Вейцзекера, удвічі перевищує значення відповідного коефіцієнта $a_4^{(0)} \equiv \varepsilon_F / 3 \cong 12$ MeB у формулі (3.29). Це пов'язано з тим, що сумарна енергія $E_0(Z,N)$ моделі фермігазу є лише повною кінетичною енергією системи нуклонів і не враховує потенціальну енергію взаємодії між ними в ядрі. Внесок потенціальної енергії в a_4 обумовлений тією особливістю ядерних сил, що повна взаємодія нейтрона з протоном у середньому сильніша, ніж взаємодія між однаковими нуклонами, завдяки більшій кількості можливих двочастинкових станів при (n-p)-взаємодії (див. підрозд. 2.4). Тому за фіксованого А максимум потенціальної енергії (а тому і мінімум повної енергії) також досягається при Z = N, оскільки саме в цьому випадку внесок (n-p)-взаємодії буде найбільшим.

Схематичне зображення ядра як системи виродженого ядерного фермі-газу або як системи нуклонів, що описуються законами квантової механіки, які підпорядковуються принципу Паулі та повністю заповнюють усі нижні енергетичні рівні в холодному ядрі, ілюструє рис. 3.1. Збудженому стану відповідає перехід частинки із заповнених рівнів на незаповнені. Вакансії, які таким чином з'являються на заповнених рівнях, називають *дірками*. У моделі фермі-газу існує різка межа між заповненими та незаповненими станами. Урахування залишкової парної взаємодії між нуклонами може привести до такого розмиття межі

Фермі, що розподіл нуклонів за рівнями не матиме чіткої межі. Дійсно, поява вакансій або "дірок" на нижніх орбітах і частинок на верхніх буде збільшувати повну енергію системи. Разом з тим, притягання між нуклонами, яке дає від'ємний внесок в енергію, може компенсувати це збільшення, тому з деякою ймовірністю частина нуклонів може бути розміщена на рівнях, вищих за рівень Фермі, а частина нижніх рівнів не буде заповнена повністю.

Таким чином, кореляція в русі нуклонів призводить до розмиття межі Фермі. Ступінь цього розмиття і ймовірність переходу частинки на рівень з енергією, більшою ніж ε_F , залежить від енергетичного інтервалу (ΔE), що відокремлює рівень Фермі від наступного рівня. Сукупність експериментальних даних і теоретичні розрахунки показують, що в тих випадках, коли вказаний інтервал великий, як це справедливо для магічних ядер, уявлення про ядро як про систему незалежних нуклонів, що рухаються в потенціальному полі і заповнюють без пропусків енергетичні рівні до рівня Фермі, є першим наближенням до дійсної картини руху нуклонів у ядрах. Зокрема, саме короткодіючий характер нуклон-нуклонного потенціалу приводить до незначної ймовірності обміну великими імпульсами при зіткненні двох нуклонів, і тим самим зумовлює можливість переходу нуклонів лише при деякому досить малому значенні ΔE .

Пояснимо роль короткодії взаємодії на простому прикладі. Нехай два нуклони в ядрі з імпульсами \vec{p}_1 та \vec{p}_2 взаємодіють один з одним за допомогою потенціалу Гаусса:

$$V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -V_0 \exp\left[-|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 / \mu^2\right], \quad \mu \approx 1 \, \text{$\mbox{$\mbox{$\mbox{$\mbox{$\mbox{$$\mbox{$$\mbox{$$\mbox{$$\mbox{$$1$}}$}}$}}. (3.30)$$

Імовірність того, що частинки в кінцевому стані будуть мати імпульси \vec{p}'_1 та \vec{p}'_2 , визначається квадратом матричного елемента переходу з початкового стану в кінцевий і в першому наближенні має вигляд (в одиницях $\hbar = 1$):

$$\left| \left\langle \vec{p}_{1}^{\prime}, \vec{p}_{2}^{\prime} \mid V \mid \vec{p}_{1}, \vec{p}_{2} \right\rangle \right|^{2} \equiv \\ \equiv \left| \int d\vec{r}_{1} d\vec{r}_{2} \, e^{-i(\vec{p}_{1}^{\prime} \vec{r}_{1} + \vec{p}_{2}^{\prime} \vec{r}_{2})} V(\vec{r}_{1} - \vec{r}_{2}) e^{i(\vec{p}_{1} \cdot \vec{r}_{1} + \vec{p}_{2} \cdot \vec{r}_{2})} \right|^{2}.$$
(3.31)

Введемо нові змінні $\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$, $\vec{R} = (\vec{r_1} + \vec{r_2})/2$ і виконаємо інтегрування. Виключаючи рух центра мас і враховуючи закон збереження імпульсу $\vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{p_1}' + \vec{p_2}'$, отримуємо, що матричний елемент у формулі (3.31) пропорційний величині

$$V(\vec{p}) = \int d\vec{r} e^{-i\vec{p}\vec{r}} V(\vec{r}) = -\pi^{3/2} \mu^3 V_0 e^{-(\vec{p}_1 - \vec{p}_1')^2 \mu^2/4}, \qquad (3.32)$$

де $\vec{p} \equiv \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$, і тому при взаємодії двох нуклонів імовірність обміну імпульсами з великими змінами їхніх значень ($p \gg 1/\mu \gg 1$) мала. Цей результат справедливий для довільних короткодіючих потенціалів.

Короткодіючий характер нуклон-нуклонної взаємодії та принцип Паулі зумовлююють те, що модель незалежних частинок можна взяти за основу при розгляді структури ядра. Справді, усі сусідні рівні, окрім найвищих, заповнені нуклонами, а на заповнені стани нуклони (згідно з принципом Паулі) перейти не можуть. У випадку короткодіючих ядерних сил переходи між далекими рівнями також малоймовірні, оскільки взаємодія двох нуклонів з великим переданим імпульсом мала.

3.4. Формування середнього поля

Покажемо, що в першому наближенні можна вважати, що в ядрах нуклони незалежно рухаються в деякому самоузгодженому середньому полі. Нагадаємо, що електрони атомів також рухаються в середньому полі, але фізичні причини виникнення такого поля в ядрах і атомах зовсім різні. Якщо в атомі середнє поле є далекодіючим кулонівським полем, яке зумовлене наявністю зарядженого виділеного центра (нескінченно важкого ядра відносно електронів атома), то в ядрі немає такого центра притягання й середній ядерний потенціал утворюється усередненою взаємодією даного нуклона з усіма іншими. Короткодіюче взаємне притягання нуклонів приводить до їхньої просторової концентрації біля центра ядра, але стисненню системи заважає принцип Паулі та відштовхування на малих відстанях. У результаті формується досить плавний розподіл густини нуклонів у координатному просторі, а середній потенціал в ядрі поро-

джується наявністю такого розподілу. Отже, для потенціалу взаємодії нейтрона з іншими нуклонами маємо¹:

$$V_{n}\left(\vec{r} \equiv \vec{r}_{n}, \{\vec{r}_{j\neq n}\}\right) \equiv \sum_{n'} V_{n\,n'}\left(\vec{r}_{n}, \vec{r}_{n'}\right) + \sum_{p} V_{n\,p}\left(\vec{r}_{n}, \vec{r}_{p}\right) =$$

$$= \sum_{i_{n}} V_{n\,n'}\left(\vec{r}_{n}, \vec{r}_{i_{n}}\right) \left[\frac{\Delta N_{n}\left(\vec{r}_{i_{n}}\right)}{\Delta \vec{r}_{i_{n}}}\right] \Delta \vec{r}_{i_{n}} + \sum_{i_{p}} V_{n\,p}\left(\vec{r}_{n}, \vec{r}_{i_{p}}\right) \left[\frac{\Delta N_{p}\left(\vec{r}_{i_{p}}\right)}{\Delta \vec{r}_{i_{p}}}\right] \Delta \vec{r}_{i_{p}},$$
(3.33)

де $V_{nn'}$, V_{np} – потенціали взаємодії нейтронів відповідно з нейтронами та протонами; $\Delta N_n(\vec{r}_i) (\Delta N_p(\vec{r}_i))$ – кількість нейтронів (протонів) у комірці такого малого об'єму $\Delta \vec{r}_i \ll 1$ поблизу точки \vec{r}_i , що двочастинкові потенціали в ньому можна вважати незмінними.

Враховуючи існування плавних густини розподілу нейтронів $\rho_n(\vec{r}_i) \equiv \Delta N_n(\vec{r}_i) / \Delta \vec{r}_i$ і протонів $\rho_p(\vec{r}_i) \equiv \Delta N_p(\vec{r}_i) / \Delta \vec{r}_i$ при $\Delta \vec{r}_i \rightarrow 0$, виконуємо стандартний перехід у формулі (3.33) від підсумовування до інтегрування й отримуємо такий вираз для потенціалу взаємодії нейтрона в ядрі:

$$V_{n}\left(\vec{r} \equiv \vec{r}_{n}, \{\vec{r}_{j\neq n}\}\right) = \int V_{n\,n'}(\vec{r}, \vec{r}')\rho_{n}(\vec{r}')d\vec{r}' + \int V_{n\,p}(\vec{r}, \vec{r}')\rho_{p}(\vec{r}')d\vec{r}' \equiv V_{a\nu}^{(n)}(\vec{r}).$$
(3.34)

Очевидно, що потенціал взаємодії протона має подібний до виразу (3.34) вигляд після заміни індексів р на n і додавання електростатичного кулонівського потенціалу. Згідно із формулами (3.33) і (3.34) потенціал $V_{av}^{(n)}(\vec{r})$, що діє на нуклон, залежить не від координат усіх нуклонів, а лише від його координат, тобто є одночастинковим середнім потенціалом. Саме просторо-

¹ Для визначеного таким чином потенціалу повна потенціальна енергія нейтронів дорівнює $V = \frac{1}{2} \sum_{n} V_n$.

¹²⁰

ва концентрація нуклонів в ядрі, яку можна описати за допомогою густини розподілу нуклонів $\rho_n(\vec{r})$, $\rho_p(\vec{r})$, зумовлює виникнення середнього поля ядра, у якому рухаються нуклони. Причому це поле має бути узгодженим з густиною розподілу нуклонів. Таке поле зазвичай називають *самоузгодженим*. Атомне ядро є прикладом самоорганізованої системи, властивості якої визначаються внутрішніми процесами, що їй притаманні, на відміну від несамоорганізованих систем, рух у яких визначається зовнішніми полями, наприклад, електронної оболонки атома, де рух електронів зумовлюється їхньою взаємодією з майже точковим кулонівським полем ядра.

Густина $\rho_{\alpha}(\vec{r})$ розподілу нуклонів типу α ($\alpha = n, p$ для нейтронів і протонів, відповідно) визначається повною хвильовою функцією $\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$ ядра, яка залежить від координат усіх нуклонів (див. (1.107)):

$$\rho_{\alpha}(\vec{r}) = \int |\Psi(\vec{r}_{1}, \cdots, \vec{r}_{A})|^{2} \sum_{i=1}^{X_{\alpha}} \delta(\vec{r}_{i} - \vec{r}) d\vec{r}_{1} \dots d\vec{r}_{A} , \qquad (3.35)$$

де $X_{\alpha} = N$, Z для нейтронів $\alpha = n$ і протонів $\alpha = p$. Тому і для знаходження самоузгодженого середнього ядерного потенціалу (3.34) треба знати точну хвильову функцію $\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$, яка є розв'язком багаточастинкового рівняння Шредінгера. Очевидно, що в загальному випадку середнє поле можна знайти лише наближено з тією ж самою точністю, з якою можна обчислити функцію $\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$.

У припущенні незалежного руху нуклонів у ядрі з хвильовою функцією $\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$ у вигляді добутку одночастинкових ортонормованих хвильових функцій $\phi_{\alpha_i}(\vec{r}_i)$:

$$\Psi(\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_A) = \prod_j \varphi_{\alpha_j}(\vec{r}_j)$$
(3.36)

середній одночастинковий потенціал (3.34) буде залежати від квадратів одночастинкових хвильових функцій

$$V_{av}^{(n)}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{N} \int V_{nn'}(\vec{r}, \vec{r}') |\phi_{\alpha_j}(\vec{r}')|^2 d\vec{r}' + \sum_{i=1}^{Z} \int V_{np}(\vec{r}, \vec{r}') |\phi_{\alpha_i}(\vec{r}')|^2 d\vec{r}'.$$
(3.37)

Таким чином, багаточастинкове рівняння Шредінгера для функції (3.36) зводиться до системи одночастинкових рівнянь Шредінгера для хвильових функцій $\varphi_{\alpha_j}(\vec{r}_j)$ з нелінійною взаємодією (3.37). Самоузгоджене поле при обчисленні повної хвильової функції системи багатьох частинок уперше послідовно ввів Д. Хартрі в 1927 р. при дослідженні властивостей атомів. У 1930 р. цей метод суттєво доповнив В.А. Фок, урахувавши дію принципу Паулі. При обчисленні властивостей зв'язаних станів системи багатьох частинок середній потенціал вигляду (3.37) часто називають *потенціалом Хартрі*, або *наближенням Хартрі для середнього поля*. У теорії розсіяння частинок на ядрах потенціали вигляду (3.34) називають *потенціалами згортки* (від англ. folding potentials).

Завдяки короткодіючому характеру ядерних сил середній потенціал (3.34) за формою близький до розподілу густини нуклонів. У граничному випадку контактного потенціалу з нульовим радіусом дії, а саме, у випадку, коли радіальна залежність V_{ab} має вигляд δ -функції: $V_{ab}(\vec{r},\vec{r}') = V_{ab}^{(0)} \delta(\vec{r}-\vec{r}')$, форма середнього потенціалу (3.34) повторює радіальну залежність густини нуклонів

$$V_{\rm n}(\vec{r}) \equiv V_{\rm n\,n'}^{(0)} \rho_{\rm n}(\vec{r}) + V_{\rm n\,p}^{(0)} \rho_{\rm p}(\vec{r}) \,. \tag{3.38}$$

Саме тому як феноменологічні однонуклонні ядерні потенціали здебільшого використовують потенціали з тією самою залежністю від просторових координат, що й у виразах для густини розподілу нуклонів. У сферичних ядрах густина розподілу має вигляд функції Фермі (1.37), і таку саму форму мають середні потенціали:

$$V_{\rm n}(r) = -V_0^{(\rm n)} f_F(r), \quad V_{\rm p}(r) = -V_0^{(\rm p)} f_F(r), \quad (3.39)$$

$$f_F(r) = \left[1 + \exp\left\{\frac{r - R_0}{a}\right\}\right]^{-1},$$

де $R_0 = r_0 A^{1/3}$ – ефективний радіус ядра; *а* – параметр дифузності.

Одночастинкові потенціали вигляду (3.39) отримали назву *потенціали Вудса–Саксона*. Аналіз рівнів непарних ядер, що розташовані біля магічних ядер, дозволив отримати такі значення для параметрів потенціалу:

$$r_0 = 1,27 \, \text{фm} \,, \quad a = 0,67 \, \text{фm} \,, \tag{3.40}$$

які близькі до тих, що використовують для опису густини розподілу ядерної величини (див. підрозд. 1.5):

$$r_0 = r_0' = 1,25 \,\,\mathrm{фM}\,; \quad a = a' = 0,55 \,\,\mathrm{\phiM}\,. \tag{3.41}$$

Значення параметрів r_0 , *a* більші за r'_0 , *a'*, оскільки малий, але скінченний радіус дії парних сил між нуклонами приводить до того, що область дії середнього потенціалу має бути більшою за область, у якій зосереджені нуклони. У формулі (3.39) відокремлено знак "-", який відповідає потенціалу притягання, тому глибини відповідних потенціалів $V_0^{(\alpha)}$, ($\alpha = n, p$) додатні.

Оскільки густини розподілу нейтронів ρ_n і протонів ρ_p у ядрах не збігаються ($\rho_n / \rho_p \cong N/Z$), то згідно з виразом (3.38) значення глибин потенціалів $V_0^{(\alpha)}$ для нуклонів різного типу можуть бути різними і залежати від заряду ядра та кількості нуклонів. Глибини середніх потенціалів нейтрона і протона також відрізняються внаслідок дії принципу Паулі, який приводить до взаємодії нуклонів різного типу в синглетному та триплетному станах, а нуклонів одного типу – лише в синглетному (див. під-

розд. 2.3). Параметри $V_0^{(\alpha)}$ зазвичай подають у вигляді

$$V_0^{(n)} = V_0 - V_1 \frac{N-Z}{2A} = V_0 - \frac{V_1}{2}I,$$

$$V_0^{(p)} = V_0 + V_1 \frac{N-Z}{2A} = V_0 + \frac{V_1}{2}I,$$
 de $I = \frac{N-Z}{A}.$ (3.42)

Значення V₀ і V₁ знайдено емпірично і виявилося, що

$$V_0 \cong 50 \text{ MeB}, \quad V_1 \cong 2V_0.$$
 (3.43)

Для протонів до середнього потенціалу вигляду Вудса–Саксона необхідно також додати електростатичний кулонівський потенціал

$$V_{c}(\vec{r}) = \int \frac{e^{2}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho_{p}(\vec{r}') d\vec{r}'. \qquad (3.44)$$

Якщо за протонну густину взяти сферично-симетричний розподіл у вигляді сходинки $\rho_{\rm p} = \rho_0^{(p)} \Theta(R-r)$, то кулонівський потенціал матиме вигляд потенціалу рівномірно зарядженої кулі

$$V_{c}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[3 - \left(\frac{r}{R}\right)^{2} \right] \frac{e^{2}(Z-1)}{R}, & r \leq R, \\ \frac{e^{2}}{r}(Z-1), & r > R. \end{cases}$$
(3.45)

Потенціал $V_c(\vec{r})$ створюється дією (Z-1) протонів на деякий один з Z протонів ядра, тому порівняно із формулою (1.29) у вираз (3.45) входить додатковий множник (Z-1). Урахування дифузності розподілу протонів неістотно змінює вираз (3.45) і в розрахунках зазвичай використовують саме такий кулонівський потенціал.

Згідно зі співвідношеннями (3.33) і (3.34) взаємодію одного нуклона з рештою можна апроксимувати сумою потенціалу домінуючого середнього (самоузгодженого) поля V_{av} і деякої залишкової взаємодії V_{res} . Схематично взаємодію нуклона в ядрі можна записати у вигляді

$$V(\vec{r}, \{\vec{r}_{j}\}) \equiv \sum_{j} V(|\vec{r} - \vec{r}_{j}|) = V_{av}(\vec{r}) + V_{res}(\vec{r}, \{\vec{r}_{j}\}), \qquad (3.46)$$

де \vec{r} – координата даного нуклона, а $\{\vec{r}_j\}$ – координати всіх інших нуклонів. У цілому залишкова взаємодія V_{res} не дуже велика внаслідок короткодіючого характеру ядерних сил і відносно малого об'єму, що займають нуклони в ядрі (~20 % від об'єму ядра, див. (1.48)).

3.5. Одночастинковий рух у моделі оболонок

У моделі оболонок, як і в моделі ядерного фермі-газу, ядро розглядають як систему невзаємодіючих нуклонів у потенціальній ямі. У моделі фермі-газу характеристики однонуклонних станів (орбіт) і потенціальне поле не залежать від координати нуклонів. Припускають, що орбіти повністю заповнені до рівня з граничним імпульсом Фермі p_F (або з енергією Фермі ε_F) включно, та обчислюють середню густину розподілу одночастинкових станів у імпульсному просторі, яку використовують при розрахунках значення імпульсу Фермі та повної енергії. У моделі ж оболонок деталізують як потенціальне поле, так і поняття стану нуклона з урахуванням законів збереження, зокрема закону збереження кутового моменту. За допомогою потенціалу середнього поля обчислюють енергетичний спектр однонуклонних станів, а далі, як і в моделі ядерного фермі-газу, користуючись принципом Паулі, будують схему послідовного заповнення нуклонами орбіт, починаючи з найнижчої.

Вивчення оболонкової моделі ядра почнемо з обчислення енергетичного спектра одночастинкових станів у ядрах зі сферично-симетричним середнім потенціалом V(r), який не залежить від спіну. Хвильова функція $\psi(\vec{r})$, що описує рух нуклона, є розв'язком рівняння Шредінгера

$$\hat{h}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \tag{3.47}$$

з одночастинковим гамільтоніаном

$$\hat{h} = \frac{\hat{p}^2}{2m_{\rm p}} + V(r) \equiv -\frac{\hbar^2}{2m_{\rm p}}\Delta + V(r), \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (3.48)$$

де Δ – оператор Лапласа; E – енергія одночастинкового стану (орбіти); $m_{\rm p}$ – маса нуклона (маси протона та нейтрона вважаємо однаковими, $m_{\rm p} = m_{\rm n}$). Для сферично-симетричного потенціалу оператор Лапласа зручно записати у сферичних координатах, тоді маємо (див. (2.5) і (2.6)):

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\tilde{\ell}^2}{r^2}, \qquad (3.49)$$

де $\vec{l}^2 \equiv \vec{l}^2 / \hbar^2$ – оператор квадрата орбітального моменту (1.65) в одиницях \hbar^2 .

Унаслідок сферичної симетрії потенціалу V(r) момент кількості руху є інтегралом руху, а хвильову функцію $\psi(\vec{r})$ можна записати у вигляді добутку радіальної функції R_{nl} на кутову функцію Y_{lm} :

$$\Psi(\vec{r}) \equiv \Psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi).$$
(3.50)

Кутова функція $Y_{lm}(\theta, \phi) \equiv Y_{lm}(\hat{r}), \quad \hat{r} = \vec{r} / r$ – це сферична функція, яка є власною функцією одночастинкового стану із фіксованими значеннями моменту кількості руху l і його проекції на вісь Z:

$$\hat{\ell}^2 Y_{lm} \equiv l(l+1)Y_{lm}, \quad \hat{\ell}_z Y_{lm} \equiv m Y_{lm}.$$
 (3.51)

Сферична функція є добутком приєднаної функції Лежандра $P_l^m(\cos\theta)$ (1.52), (1.89) і функції $\exp(im\phi)$:

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \xi_{m0} \cdot \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi}, \qquad (3.52)$$

де

$$\xi_{m0} = \begin{cases} 1 , & m \ge 0 , \\ (-1)^m , & m < 0 , \end{cases}$$

а індекси l та m набувають цілих значень і $l \ge 0$. Значення проекції орбітального моменту лежать у межах $-l \le m \le l$ і змінюються через одиницю. Сферичні функції ортонормовані умовою

$$\int Y_{l_1m_1}^*(\theta,\varphi)Y_{l_2m_2}(\theta,\varphi)d\Omega = \delta_{l_1l_2}\delta_{m_1m_2}, \qquad (3.53)$$

де $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ – диференціал суцільного кута. Сферичні функції задовольняють такі умови симетрії:

$$Y_{lm}^{*}(\theta,\phi) \equiv Y_{lm}(\theta,-\phi) = (-1)^{m} Y_{l,-m}(\theta,\phi).$$
(3.54)

Наведемо приклади деяких сферичних функцій:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \qquad (3.55)$$
$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}, \qquad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(2 - 3\sin^2\theta\right).$$

Вигляд деяких сферичних гармонік у тривимірному просторі показано на рис. 3.2; значення декартових координат визначені таким чином:

$$X = |Y_{lm}|^2 \sin\theta \cos\varphi, \ Y = |Y_{lm}|^2 \sin\theta \sin\varphi, \ Z = |Y_{lm}|^2 \cos\theta.$$



Рис. 3.2. Тривимірний вигляд деяких сферичних гармонік

Після підстановки (3.50) у рівняння (3.48) знайдемо рівняння для радіальної функції R_{nl} . Ураховуючи (3.49) – (3.51) отримуємо радіальне рівняння Шредінгера

$$\frac{d^2 R_{nl}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_{nl}}{dr} + \frac{2m_p}{\hbar^2} \left[E_{nl} - V(r) - \frac{\hbar^2}{2m_p} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{nl} = 0. \quad (3.56)$$

Тут індексами nl вказані величини, від яких залежить енергія та хвильова функція одночастинкового стану. Енергії орбіт $E = E_{nl}$

є власними значеннями рівняння (3.56) і згідно з його виглядом не залежать від проекції кутового моменту m (кажуть, що вони вироджені за m). Індекс n нумерує різні орбіти з одним і тим самим значенням кутового моменту, його називають головним квантовим числом. У сферичних ядрах його значення на одиницю більше кількості вузлів (перетинів з віссю абсцис r) радіальної хвильової функції R_{nl} .

Радіальні хвильові функції мають бути неперервними, скінченними в центрі ядра r = 0 і дорівнювати нулю на нескінченності. Вони також нормовані згідно зі співвідношенням

$$\int_{0}^{\infty} r^{2} R_{nl}^{2}(r) dr = 1.$$
(3.57)

Ці умови є наслідком фізичного сенсу $R_{nl}^2(r)$ як імовірності перебування частинки на сферичній поверхні радіуса r.

Енергії одночастинкових зв'язаних станів визначають з умови неперервності радіальної функції та її парної похідної в усіх точках простору. Зокрема, використовують умову зшивання хвильової функції у внутрішній області та асимптотичній (див. підрозд. 2.2), де можна знехтувати взаємодією. Як вже відзначалося, рівні l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... називають s, p, d, f, g, h, i, j тощо. В ядрах, що існують у природних умовах, зазвичай не зустрічаються стани з l > 7.

У сферичних потенціалах кожний рівень (2l+1) кратно виродженний за проекцією кутового моменту, оскільки енергія станів нуклонів не залежить від значення проекції. Окрім того, кожний стан двократно вироджений за спіном та ізоспіном (останнє, якщо знехтувати кулонівською взаємодією, тобто вважати нейтрон і протон тотожними частинками). Згідно з принципом Паулі в одному й тому самому стані не можуть перебувати два однакових ферміони. Стан ферміона характеризується числами n, l, m_s і зарядом, тому на кожному рівні з даною енергією можуть бути 2(2l+1) нуклони одного виду (протони чи нейтрони), а всього 4(2l+1) нуклони.

Розглянемо рух нуклонів у середньому полі у вигляді сферичної прямокутної ями з нескінченними стінками (потенціал непроникної сфери)

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r \le R, \\ \infty, & r > R. \end{cases}$$
(3.58)

У цьому випадку частинка не може перебувати зовні потенціальної ями і функції R_{nl} на межі та зовні ядра мають тотожно дорівнювати нулю, тому для даної задачі необхідно розв'язувати рівняння (3.56) тільки на інтервалі $r \in [0; R]$. Функція R_{nl} має задовольняти такі граничні умови: бути скінченною за r = 0 і дорівнювати нулю за r = R. Усередині ядра радіальне рівняння Шредінгера (3.56) набуває вигляду

$$\frac{d^2 R_{nl}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_{nl}}{dr} + \frac{2m_p}{\hbar^2} \left[E_{nl} + V_0 - \frac{\hbar^2}{2m_p} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{nl} = 0. \quad (3.59)$$

Загальний розв'язок цього рівняння є суперпозицією сферичних функцій Бесселя j_l і Неймана η_l :

$$R_{nl}(r) = c_{nl} j_l(\rho) + d_{nl} \eta_l(\rho), \qquad (3.60)$$

$$\rho = k_{nl}r, \quad k_{nl} = \left[\frac{2m_p}{\hbar^2} (V_0 + E_{nl})\right]^{1/2}.$$

За малих $\rho \rightarrow 0$ сферичні функції Бесселя мають таку поведінку:

$$j_l(\rho) \to \frac{\rho^l}{(2l+1)!!}, \quad \eta_l(\rho) \to \frac{(2l-1)!!}{\rho^{l+1}},$$
 (3.61)

а при великих ρ≫1:

$$j_l(\rho) \rightarrow \frac{1}{\rho} \sin\left(\rho - l\frac{\pi}{2}\right), \quad \eta_l(\rho) \rightarrow -\frac{1}{\rho} \cos\left(\rho - l\frac{\pi}{2}\right).$$
 (3.62)

Унаслідок скінченності хвильової функції за $\rho \rightarrow 0$ коефіцієнт d_{nl} у формулі (3.60) дорівнює нулю і радіальна функція пропорційна регулярній сферичній функції Бесселя

$$R_{nl}(r) = c_{nl} j_l(k_{nl}r), \quad r \le R.$$
 (3.63)

Функції Бесселя $j_l(\rho)$ мають вигляд рядів за оберненими ступенями аргументу ρ , помноженими на гармонічну функцію синус або косинус. Наприклад,

$$j_0 = \frac{\sin \rho}{\rho}, \quad j_1 = \frac{\sin \rho}{\rho} - \frac{\cos \rho}{\rho},$$

$$j_2 = \left(\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho}\right) \sin \rho - \frac{3}{\rho^2} \cos \rho.$$
 (3.64)

Невизначені інтеграли від квадратів цих функцій мають вигляд

$$\int j_{l}^{2}(\rho)\rho^{2}d\rho = \frac{1}{2}\rho^{3}[j_{l}^{2}(\rho) - j_{l-1}(\rho)j_{l+1}(\rho)] , \quad l > 0,$$

$$\int j_{0}^{2}(\rho)\rho^{2}d\rho = \frac{1}{2}\rho[1 + \rho j_{0}(\rho)(j_{1}(\rho) - j_{0}(\rho))] , \quad l = 0.$$
(3.65)

Власні значення E_{nl} знаходимо з умови "зшивання", а саме, з умови неперервності радіальних хвильових функцій на межі r = R зміни потенціалу $(R_{nl}(R-\varepsilon) = R_{nl}(R+\varepsilon), \ \varepsilon \to +0)$, тобто для потенціалу (3.58) як розв'язок рівняння

$$R_{nl}(R) = 0 \Longrightarrow j_l(k_{nl}R) \equiv j_l(X_{nl}) = 0, \quad k_{nl} = \left[\frac{2m_p}{\hbar^2}(V_0 + E_{nl})\right]^{1/2},$$
(3.66)

звідки

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m_{\rm p}} k_{nl}^2 - V_0 \equiv -V_0 + \varepsilon_{nl}, \quad \varepsilon_{nl} \equiv \frac{\hbar^2 X_{nl}^2}{2m_{\rm p} R^2}, \quad (3.67)$$

де X_{nl} – значення нулів сферичних функцій Бесселя; $\varepsilon_{nl} \equiv E_{nl} + V_0$ – значення енергії, що обчислюється від дна потенціальної ями. З урахуванням (3.57) і (3.65) нормовані радіальні функції прямокутної ями з нескінченними стінками набувають вигляду

$$R_{nl}(r) = c_{nl} j_l(k_{nl}r), \quad c_{nl} = \frac{\left(2R^{-3}\right)^{1/2}}{j_{l+1}(k_{nl}R)}, \quad r \le R.$$
(3.68)

За l = 0, тобто для *s*-станів, розв'язок трансцендентного рівняння (3.66) зводиться до пошуку коренів рівняння $sin(X_{n0}) = 0$, звідки

$$X_{n0} \equiv k_{n0}R = \pm \pi n, \quad E_{n0} = -V_0 + \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m_{\rm p} R^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.69)$$

де без втрати загальності вважається що n > 0. Оскільки $k_{n0} = \pi n / R$, то радіальні хвильові функції *s*-станів (3.63) і (3.64) мають вигляд

$$R_{n0}(r) = c_{n0} \theta(R-r) \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) / \left(\frac{n\pi r}{R}\right).$$
(3.70)

Нормовані радіальні на одиницю в нулі функції $R'_{n0}(r) \equiv R_{n0}(r) / c_{n0}$ з $n \le 4$ зображені на рис. 3.3.



Рис. 3.3. Хвильові функції s-станів у потенціалі з нескінченною стінкою

Мінімальну енергію має 1*s*-стан (n = 1) і його радіальна хвильова функція не перетинає вісь абсцис. У 2*s*-стані (n = 2) радіальна хвильова функція має один вузол за r = R/2. Хвильова функція 3*s*-стану має два вузли при r = R/3 та r = 2R/3 і т. д. Таким чином, видно, що принаймні в полі непроникної сфери головне квантове число n, яке визначає енергію стану, на оди-

ницю більше, ніж кількість вузлів радіальної хвильової функції орбіти. Для даного потенціалу це число також збігається з кількістю нулів функції R_{nl} .

У загальному випадку корені $X_{nl} \equiv k_{nl}R$ сферичних функцій Бесселя знаходять числовим розв'язуванням трансцендентного рівняння (3.66). Відповідні їм енергії зображено на рис. 3.4, з якого видно, що енергії станів з однаковою кількістю вузлів n, але з різними орбітальними моментами задовольняють співвідношення

$$\varepsilon_{nl_2} > \varepsilon_{nl_1}, \quad l_2 > l_1. \tag{3.71}$$

Тобто стану з меншим значенням орбітального моменту відповідає й менше значення енергії. Цей ефект можна пояснити внеском відцентрової енергії

$$V_B = \left\langle \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right\rangle \sim \hbar^2 l(l+1) / (2mR^2)$$

у рух нуклона; тут, як і раніше (див. (1.39)), символом $\langle ... \rangle$ позначено усереднення за ймовірностю знаходження нуклона в координатному просторі. Значення V_B збільшується зі зростанням l, що призводить до ефективного зменшення глибини потенціальної ями і стани стають менш зв'язаними.

Фізичну причину пропорційності енергії ε_{nl} кількості вузлів n-1 радіальної хвильової функції можна зрозуміти таким чином. Збільшення числа n означає зменшення ефективної довжини хвилі $\lambda = 2\pi\hbar / p \sim R / n$ частинки (рис. 3.3), тому збільшується кінетична енергія

$$T = p^{2} / 2m_{\rm p} = 2(\hbar\pi)^{2} / (m_{\rm p}\lambda^{2}) \sim \hbar^{2}R^{2} / 2m_{p}\hbar^{2})$$

частинки, а отже, і її повна енергія, що узгоджується зі співвідношенням

$$\varepsilon_{n_2l} > \varepsilon_{n_1l}$$
 при $n_2 > n_1$. (3.72)

Зауважимо, що співвідношення (3.71) і (3.72) для одночастинкових енергій у сферичних полях загальні й не залежать від конкретного вигляду потенціалу.



Рис. 3.4. Енергетичні рівні ε_{nl} частинки у непроникній сфері в одиницях $\hbar^2 / (2m_p R^2)$: числа всередині – значення l

Зі схеми розташування всіх рівнів, зображеної в останньому стовпчику на рис. 3.4, видно, що вже в потенціалі непроникливої сфери існують групи рівнів, які близько розташовані один до одного. У реалістичних самоузгоджених потенціалах цей ефект виражений чіткіше, що схематично показано на рис. 3.5. Групи близьких одночастинкових станів називають *оболонками*. Для переміщення нуклона з однієї оболонки на іншу потрібна досить велика енергія, що істотно перевищує енергії, необхідні для переходів між станами всередині однієї оболонки.



Рис. 3.5. Групування одночастинкових рівнів середнього самоузгодженого одночастинкового потенціалу в оболонки

Згідно з принципом Паулі рівні заповнюються нуклонами послідовно, починаючи з найнижчого, тому ядра, у яких усі нуклони хоча б одного виду перебувають у повністю заповнених (замкнених) оболонках, повинні мати підвищену стійкість. Як було зазначено в підрозд. 1.4, такі особливо стійкі ядра справді існують, їх називають *магічними*. За найпоширенішими дослідними даними, на Землі є ядра з кількістю нуклонів одного виду (протонів або нейтронів) – 2, 8, 20(28), 50, 82, 126. Ці числа також називають магічними (число в дужках – слабо виражене магічне число). Ядра з магічними числами одночасно для протонів і нейтронів називають *двічі магічними*. Таких ядер відомо п'ять:

$${}^{4}_{2} \operatorname{He}(Z = 2, N = 2), \quad {}^{16}_{8} \operatorname{O}(Z = 8, N = 8), \quad {}^{40}_{20} \operatorname{Ca}(Z = 20, N = 20), \\ {}^{48}_{20} \operatorname{Ca}(Z = 20, N = 28), \quad {}^{208}_{82} \operatorname{Pb}(Z = 82, N = 126).$$

Ці ядра надзвичайно стійкі. Наприклад, у них перші збуджені стани розташовані на (1÷2) МеВ вище порівняно з сусідніми ядрами.

Отримаємо магічні числа нуклонів даного типу (протонів або нейтронів) у випадку сферичної прямокутної ями з непроникними стінками. Для цього обчислимо кількість частинок на од-

ночастинкових рівнях, що знаходять послідовним заповненням рівнів відповідно до принципу Паулі (табл. 3.1) У другому стовпчику табл. 3.1 наведено різницю значень енергій одночастинкових рівнів з мінімальною енергією в одиницях відносної енергії 1*s*-стану ε_{10} :

$$\varepsilon_{10} = E_{n=1,l=0} + V_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_{\rm p} R^2} \cong \frac{131}{A^{2/3}}$$
 (MeB). (3.73)

У третьому стовпчику наведено кількість N_{nl} ферміонів (нуклонів або протонів) на відповідних окремих рівнях, у четвертому – повна кількість частинок на замкнених оболонках, а в останньому – експериментальні значення магічних чисел.

Орбіти n l	$\frac{(E_{nl}-E_{10})}{\varepsilon_{10}}$	$N_{nl} = 2(2l+1)$	$N = \sum_{nl} N_{nl}$	Магічні числа
1 s (0)	0	2	2	2
1 p(1)	1,02	6	8	8
1 d (2)	2,38	10	18	
2 s (0)	3,02	2	20	20(28)
1 f (3)	4,0	14	34	
2 <i>p</i> (1)	5,12	6	40	50
1 g (4)	5,84	18	58	
2 d (2)	7,52	10	68	
1 h (5)	7,9	22	90	82
3 s (0)	8,0	2	92	
2f(3)	9,18	14	106	
1 <i>i</i> (6)	10,10	26	132	126

Таблиця 3.1. Магічні числа в ямі з непроникненими стінками

Аналіз табл. 3.1 показує, що розміщення частинок на рівнях прямокутної ями з нескінченними стінками відповідає тільки двом першим експериментальним значенням магічних чисел: 2 і 8. Число 2 відповідає заповненню 1*s*-стану, число 8 – заповненню 1*s*- і 1*p*-станів. Можна вважати, що третє експериментальне ма-

гічне число 20 також можна отримати, оскільки рівні 1d і 2s розміщені близько один до одного. У цьому разі число 20 відповідає заповненню 1s-, 1p-, 1d- та 2s-станів. Із табл. 3.1 також видно, що числа 28, 50, 80 і 126 не можуть бути отримані заповненням нуклонами орбіт сферичної прямокутної ями з нескінченними стінками. Інтенсивні дослідження показали, що жодній з одночастинкових моделей, у яких середнє поле залежить лише від просторової координати, не вдається пояснити всю сукупність відомих експериментальних даних. Зокрема, неможливо одночасно пояснити експериментальні магічні числа найпоширеніших у земних умовах ядер та розподіл густини нуклонів. З огляду на це найбільш реалістичним є потенціал Вудса-Саксона (3.39) зі скінченним радіусом дії. У важких ядрах близькими до обчислених за допомогою потенціалу Вудса-Саксона є рівні прямокутної ями. У легких ядрах ближчим до реалістичного потенціалу є потенціал гармонічного осцилятора вигляду

$$V_G(r) = -V_0 + \frac{1}{2}m_p\omega_0^2 r^2, \quad \hbar\omega_0 \cong 41 \ A^{-1/3} \text{ (MeB)}, \qquad (3.74)$$

де вираз для частоти $\omega_0 \cong 41 A^{-1/3}$ (MeB/ \hbar) обчислено з умови рівності середньо-квадратичного радіуса системи нуклонів у потенціалі гармонічного осцилятора з його експериментальним значенням для відповідного ядра. Глибину потенціалу V_0 зазвичай визначають з умови $V_G(r = R) = 0$, яка аналогічна тій, що виконується для потенціалу прямокутної ями; звідси маємо $V_0 = m_{\rm p} \omega_0^2 R^2 / 2$.

Зазначимо, що реалістичні середні потенціали типу Вудса– Саксона (3.39) скінченні. Тому під час руху частинок у таких потенціалах завжди існує відмінна від нуля ймовірність перебування частинки зовні ядра й частинки можуть мати будь-яку додатню енергію. Стани з додатньою енергією утворюють неперервний спектр, на відміну від дискретного спектра зв'язаних ста-

нів з від'ємними енергіями та ненульовими відстанями між їх значеннями¹.

Вирішальною для отримання експериментальних значень магічних чисел ядер біля лінії β -стабільності виявилась ідея, яку висунули М. Гепперт-Майєр, Й. Йенсен у 1949 р. (Нобелівська премія, 1963). Згідно з нею значну роль у розташуванні одночастинкових станів у ядрі відіграє спін-орбітальна взаємодія, що залежить від взаємної орієнтації спіну та кутового моменту. Хоча ця взаємодія не дуже значна і становить близько 10 % від загальної енергії взаємодії, але вона спричиняє розщеплення рівнів і значний їхній перерозподіл. Спочатку спін-орбітальну взаємодію було використано в атомній фізиці, але для атома ця взасмодія має обернений знак і значно менше значення. Гепперт-Майер і Йенсен уперше виявили роль спін-орбітальної взаємодії V_{ls} в ядрах, де вона зумовлює сильну кореляцію між орбітальним кутовим моментом l і спіном s.

Потенціал V_{ls} має вигляд

$$V_{ls} = -v_{ls}(r)(\vec{l}\,\vec{s}) \equiv -\frac{1}{2}\upsilon_{ls}(r) \left[\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2\right],\tag{3.75}$$

де $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ – оператор повного кутового моменту нуклона; \vec{l} та \vec{s} – векторні оператори його кутового та спінового моментів; радіальний формфактор $v_{ls}(r)$ спін-орбітальної взаємодії має поверхневий характер й обирається у вигляді

$$v_{ls}(r) = \frac{b}{r} \frac{dV}{dr}, \qquad (3.76)$$

де V(r) – незалежний від спіну компонент середнього потенціалу; b – деяка константа, яку називають *сталою спін*-

¹ Використання нескінченних потенціалів не приводить до серйозних проблем у випадку зв'язаних одночастинкових станів ядер на лінії β-стабільності, коли вплив імовірності перебування частинки зовні ядра на його властивості малий. Разом з тим, якщо розглядати збуджені стани в таких потенціалах, то завжди можна отримати зв'язані стани з дискретною енергією, яка у випадку реалістичного потенціалу належить до станів неперервного спектра.

орбітальної взаємодії; $b \approx 0,7 \, \text{фм}^2$ для середнього поля у вигляді потенціалу Вудса–Саксона (3.39).

У середньому сферичному потенціалі зі спін-орбітальною взаємодією зберігається не кутовий момент частинки, а повний кутовий момент нуклона (j) і його проекція m_j (див. підрозд. 1.6). Їхні значення містяться в інтервалах

$$|l-s| \le j \le l+s, \quad -j \le m_j \le j \tag{3.77}$$

для частинок зі спіном *s*. У цьому випадку однонуклонні стани характеризують чотирма квантовими числами: n, l, j, m_j , оскільки нуклон має спін ½, то повний кутовий момент нуклона набуває двох значень l+1/2 і l-1/2 для орбітальних моментів l > 1/2 та одне -j = 1/2 при l = 0; m_j – проекція повного моменту набуває 2j+1 значень; n – головне квантове число, яке нумерує порядок розміщення рівнів з даними значеннями l. Орбітальний момент l визначає парність рівня $\pi_r = (-1)^l$.

Хвильова функція $\psi_{nl\,jm_j}(\vec{r})$ нуклона, який розташований на рівні із фіксованими значеннями n, l, j, m_j , є власною функцією квадрата оператора повного кутового моменту \vec{j}^2 :

$$\bar{\hat{j}}^{2} \psi_{nljm_{j}} = \hbar^{2} j (j+1) \psi_{nljm_{j}}, \quad \hat{j}_{z} \psi_{nljm_{j}} = \hbar m_{j} \psi_{nljm_{j}}, \quad (3.78)$$

яку можна подати у вигляді

$$\psi_{nl\,j\,m_j}\left(\vec{r}\right) = R_{nl\,j}\left(r\right) Y_{j\,m_j}^{l\,s=l/2}\left(\theta,\phi\right). \tag{3.79}$$

Радіальні функції $R_{njl}(r)$ є розв'язками радіального рівняння Шредінгера вигляду (3.56) і не сильно залежать від спінорбітальної взаємодії. Як і раніше, значення головного квантового числа *n* дорівнює кількості вузлів радіальної функції плюс одиниця. Кутові функції $Y_{jm_j}^{ls}$ є суперпозицією сферичних гармонік (3.51) – (3.54) та спінових функцій (1.74) і називаються *тензорними сферичними гармоніками*, або *шаровими тензорами*,

$$Y_{j \, m_{j}}^{l \, s}\left(\theta, \phi\right) = \sum_{m_{l}, m_{s}} C_{l \, m_{l} \, s \, m_{s}}^{j \, m_{j}} Y_{l \, m_{l}}\left(\theta, \phi\right) \chi_{s \, m_{s}} \,. \tag{3.80}$$

Коефіцієнти $C_{lm_l \ sm_s}^{jm_j}$ є амплітудами ймовірностей того, що орбітальний момент l і спін s із проекціями m_l, m_s складаються в повний кутовий момент j з проекцією m_j . Вони називаються *коефіцієнтами Клебша–Гордана* і визначають імовірність формування повного кутового моменту системи, якщо він складається із двох кутових моментів l, s. Коефіцієнти Клебша–Гордана можна обчислити явно за довільних значень кутових моментів та їхніх проекцій і мають вигляд рядів щодо цих величин. Відповідно до правил векторного додавання кутових моментів відрізняються від нуля лише коефіцієнти, для яких виконується умова трикутника (3.77) та умова $m_l + m_s = m_j$.

Тензорні сферичні гармоніки (3.80) є власними значеннями оператора квадрата повного кутового моменту, оператора проекції повного кутового моменту, а також операторів квадратів орбітального моменту та спіну:

$$\hat{j}^{2}Y_{jm_{j}}^{ls} = \hbar^{2}j(j+1)Y_{jm_{j}}^{ls}, \qquad \hat{j}_{z}Y_{jm_{j}}^{ls} = \hbar m_{j}Y_{jm_{j}}^{ls},
\vec{l}^{2}Y_{jm_{j}}^{ls} = \hbar^{2}l(l+1)Y_{jm_{j}}^{ls}, \qquad \vec{s}^{2}Y_{jm_{j}}^{ls} = \hbar^{2}s(s+1)Y_{jm_{j}}^{ls}.$$
(3.81)

Величину *s* (значення спіну) в означеннях шарових тензорів називають *рангом шарового тензора*, а тензорні сферичні гармоніки при s = 1/2 – *шаровими спінорами*. Значення *s* визначає розмірність спінового простору $N_s = 2s + 1$, у якому діють спінові функції.

З урахуванням спін-орбітальної взаємодії одночастинкові стани в ядрі зі сферичним середнім полем V(r) позначають nx_j , де x – символ орбітального моменту (s, p, d, f, ...). Квантове число m_j не пишуть, оскільки рівні сферичного поля вироджені за проекцією m_j , тобто мають однакові енергії для різних значень m_i з однаковим j.

Спін-орбітальна взаємодія призводить до розщеплення рівнів з відмінним від нуля орбітальним моментом l на два підрівні з j = l + 1/2 і j = l - 1/2, величина енергії розщеплення дорівнює

$$\Delta E_{ls} \cong -20\lambda_{ls} A^{-2/3} \text{ (MeB)}, \qquad (3.82)$$

де λ_{ls} – власне значення оператора спін-орбітального зв'язку $(\vec{l}\,\vec{s}\,) = (\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2)/2$, яке згідно із формулами (3.78) – (3.81) дорівнює

$$\lambda_{ls} = \frac{1}{2} \{ j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \} = \begin{cases} \frac{1}{2} l, & j = l + \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} (l+1), & j = l - \frac{1}{2}. \end{cases}$$
(3.83)

Відповідно до співвідношень (3.82) і (3.83) стан з паралельним спіновим і кутовим моментами (j = l + 1/2) розміщений нижче від стану з антипаралельними \vec{l} та \vec{s} (j = l - 1/2); значення розщеплення зростає зі збільшенням орбітального моменту. На рис. 3.6 показано теоретичні нейтронні рівні для ядер біля лінії β -стабільності, що обчислені у сферичному потенціалі Вудса–Саксона зі спін-орбітальною взаємодією вигляду

$$V(r) = -V_0 f_F(r) + V_{ls,0}(\vec{l} \ \vec{s}) r_0^2 \frac{1}{r} \frac{df_F(r)}{dr}, \qquad (3.84)$$

де $V_0 = 51 - 31(N - Z) / A$, $V_{ls,0} = 0,44 V_0$; $f_F(r)$ – функція Фермі (3.34) із параметрами $r_0 = 1,27$ фм, a = 0,67 фм.



Унаслідок спін-орбітального розщеплення змінюється порядок розміщення рівнів з досить великим l і кількість нуклонів у замкнених оболонках збігається з такою, що відповідає магічним числам. Результати емпіричного аналізу структури ядерних оболонок (до сьомої оболонки) з урахуванням спін-орбітальної взаємодії наведено в табл. 3.2. Характеристики станів отримано внаслідок дослідження ядер не дуже віддалених від лінії β стабільності. Магічні числа для оболонок з номерами вище п'ятої для протонів і шостої для нейтронів – теоретичні оцінки з

використанням феноменологічного сферичного потенціалу Вудса-Саксона.

У другій колонці табл. 3.2 наведено порядок розміщення енергетичних рівнів, починаючи з меншого значення енергії. Жирним шрифтом виділені рівні, які внаслідок спін-орбітального розщеплення містяться в різних оболонках. Двічі магічні ядра, які наведено в останній колонці, мають повністю заповнені протонні та нейтронні оболонки. Нагадаємо, що нейтрони й протони можна вважати тотожними частинками, тому вони заповнюють оболонки незалежно. Якщо у хімічного елемента підкреслено нижній індекс, то це означає заповнення протонної оболонки з даним номером, якщо підкреслено верхній індекс, то – нейтронної оболонки.

№ оболонки	Позначення Рівнів	Z(N) в оболонці $\sum_{j} (2j+1)$	Z(N) В ядрі	Двічі магічні ядра
Ι	1 <i>s</i> _{1/2}	2	2	$\frac{4}{2}$ He
II	$1p_{3/2}, 1p_{1/2}$	6	8	$\frac{16}{\underline{8}}O$
III	$1d_{5/2}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2}$	12	20	$\frac{40}{20}$ Ca, $\frac{48}{20}$ Ca
IV	$1f_{7/2}$	8	28	$\frac{48}{20}$ Ca
	$2p_{3/2}, 1f_{5/2}, 2p_{1/2}, 1g_{9/2}$	22	50	$\frac{132}{50}$ Sn
V	$1g_{7/2}, 2d_{5/2}, 2d_{3/2}$ $3s_{1/2}, 1h_{11/2}$	32	82	$\frac{\frac{132}{50}}{\frac{208}{50}} \text{Sn}, \frac{\frac{208}{82}}{\frac{208}{82}} \text{Pb}$

Таблиця 3.2. Емпірічні одночастинкові стани ядер за аналізом структури ядерних оболонок (сьома оболонка – теоретичні розрахунки)

VI	$1h_{9/2}, 2f_{7/2}, 2f_{5/2}, 3p_{3/2}, 3p_{1/2}, 1i_{13/2}$	44	126	$\frac{208}{82}$ Pb
VII	$2g_{9/2}, 3d_{5/2}, 1i_{11/2}, 2g_{7/2} 4s_{1/2}, 3d_{3/2}, 1j_{15/2}$	58	184	

Четверта оболонка має підоболонку, яка містить вісім станів рівня $1f_{7/2}$, досить далеко розміщених за енергією від інших її орбіт. Заповнення цієї підоболонки відповідає ядру $^{48}_{20}$ Ca із магічним числом 20 для протонів і з "наполовину магічним" числом 28 для нейтронів. Незважаючи на те, що ядро $^{132}_{50}$ Sn двічі магічне, воно нестабільне щодо β -розпаду через значний надлишок нейтронів. Проте олово має найбільшу кількість стійких ізотопів – 10.

У достатньо вивчених ядер вищі оболонки, заповнені протонами та нейтронами, мають відповідно номери 5 і 6. Зараз інтенсивно досліджуються ядра з кількістю протонів, що відповідає шостій оболонці. Ці експериментальні дослідження надзвичайно трудомісткі, оскільки такі ядра нестабільні й існують лише протягом малого часу (див. розд. 4). Теоретичні оцінки дають різні значення магічного числа протонів у цій оболоці, наприклад, не тільки Z = 126, як у табл. 3.2, а й значення Z = 114. Експериментальні дослідження вказують на підвищену стабільність ядер з кількістю протонів Z = 112 - 114, тобто демонструють існування в цій області "острову стабільності" (С. Хофман та ін.; Ю. Ц. Оганесян та ін.). Зокрема були відкриті атомні ядра з Z=110 -Дармштадтій, Ds; 111- Рентгеній, Rg; 112 - Коперникій або Коперницій, Сп; (назви затверджено Міжнародним союзом теоретичної та прикладної хімії у листопаді 2011); 114- Флеровій, Fl; 116- Ліверморій, Lv (назви затверджено у листопаді 2012); 116 – Оганесон, Од (назви затверджено у листопаді 2016). Елемент оганесон отримав назву на честь видатного фізика-ядерника Ю. Ц. Оганесяна, який відіграв провідну роль у відкритті найважчих елементів періодичної системи і зараз продовжує активно працювати. Оганесон разом із сіборгієм є єдини-

ми хімічними елементами, названими на честь науковців прижиттєво.

У цілому зі збільшенням номера оболонки порядок її заповнення стає більш чутливим до особливостей деталей форми середнього потенціалу й дослідження в області надважких ядер дають змогу отримати інформацію про властивості ядерних систем і взаємодій в екзотичних умовах, які радше за все можуть виникати в зірках.

У потенціалі Вудса–Саксона неможливо отримати явні аналітичні вирази для радіальних хвильових функцій і всі розрахунки є числовими. С. Нільссон запропонував потенціал, який дає можливість отримувати аналітичні вирази для характеристик одночастинкових станів. Цей потенціал (*потенціал Нільссона*) є осциляторним потенціалом зі спін-орбітальною взаємодією та доданком, що містить залежність від квадрата кутового моменту

$$V(r) = V_N(r) = -V_0 + \frac{1}{2}m_p\omega_0^2 r^2 + C(\vec{l}\,\vec{s}) + D\vec{l}^2, \qquad (3.85)$$

де *C* і *D* – сталі коефіцієнти; значення *C* від'ємне і визначає силу спін-орбітального зв'язку. Параметр *D* характеризує ступінь відхилення осциляторного потенціалу від більш реалістичного потенціалу типу Вудса–Саксона. Для легких ядер *D* наближено дорівнює нулю, а для важких має від'ємне значення, наприклад, $D \cong -0,056 \text{ MeB}/\hbar^2$ у ядрі ²⁰⁸₈₂ Pb. Доданок з \vec{l}^2 зменшує енергії рівнів з великими значеннями орбітального моменту, і тому вдається досить точно відтворити експериментальні значення магічних чисел.

На підставі аналізу в ядрах одночастинкових станів для ядер на лінії β-стабільності та аналітичних виразів моделі гармонічного осцилятора також були одержані напівемпіричні модельнонезалежні формули для розрахунків енергій однонуклонних орбіт. Згідно з дослідженнями Д. Лодхі та Б. Вока (1974) вони мають такий вигляд (у MeB):

1) для нейтронних енергій

$$E_{nlj}^{(n)} = -94,902 + 17,951 \cdot n + 90,0 \cdot n / A^{1/3} - 2,572 \cdot n^2 + 70,838 \cdot l / A^{1/3} +$$
+43,285
$$\cdot l(l+1) / A - 18,038 \cdot j(j+1) / A^{2/3};$$
 (3.86)

2) для протонних енергій

$$E_{nlj}^{(\mathbf{p})} = -95,02 + 24,02 \cdot n + 76,284 \cdot n / A^{1/3} - 2,954 \cdot n^2 + 82,382 \cdot l / A^{1/3} - 17,54 \cdot j(j+1) / A^{2/3} .$$
(3.87)

Зазначимо, що при побудові схем заповнення нуклонних орбіт фактично використовують багаточастинкову модель незалежних частинок. Оскільки в моделі оболонок з послідовним заповненням орбіт повна енергія ядра має вигляд суми енергій E_{α_i} нуклонів

$$E = \sum_{j=1}^{A} E_{\alpha_j}, \qquad (3.88)$$

то повний гамільтоніан \hat{H} ядра є сумою одночастинкових гамільтоніанів \hat{h}_i (3.48) окремих нуклонів:

$$\hat{H}\left(\{\vec{r}_{j}, s_{z,j}, t_{z,j}\}\right) = \sum_{j=1}^{A} \hat{h}_{j}, \quad \hat{h}_{j} \equiv \hat{h}\left(\{\vec{r}_{j}, s_{z,j}, t_{z,j}\}\right).$$
(3.89)

На підставі принципу Паулі повна хвильова функція ядра $\Psi_{\{\alpha_j\}}$ у наближенні незалежного руху нуклонів є антисиметричним добутком (детермінантом Слетера) одночастинкових функцій ψ_{α_i} :

$$\Psi_{\{\alpha_{j}\}}(\{\vec{r}_{j}, s_{z,j}, t_{z,j}\}) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \psi_{\alpha_{1}}(x_{1}) & \psi_{\alpha_{1}}(x_{2}) & \dots & \psi_{\alpha_{1}}(x_{A}) \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ \psi_{\alpha_{A}}(x_{1}) & \psi_{\alpha_{A}}(x_{2}) & \dots & \psi_{\alpha_{A}}(x_{A}) \end{vmatrix}$$
$$\equiv \frac{1}{\sqrt{A!}} \det \psi_{\alpha_{j}}(x_{j}) \equiv \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \hat{P}_{\nu} \prod_{j=1}^{A} \psi_{\alpha_{j}}, \qquad (3.90)$$

де α_j – узагальнені індекси, що характеризують одночастинковий стан; узагальнені координати $x_j \equiv \{\vec{r}_j, s_{z,j}, t_{z,j}\}$ містять залежність від просторових координат \vec{r}_j , спінових ($s_{z,j}$) та ізоспі-

нових $(t_{z,j})$ змінних; \hat{P}_v – оператор перестановки узагальнених координат пар нуклонів. Багаточастинкові стани системи незалежних частинок називаються *конфігураціями системи*.

У цілому модель ядерних оболонок пояснює існування відносно стабільних магічних ядер, і особливо стабільних двічі магічних ядер. Вона дає змогу описати спіни, парності та магнітні моменти ядер, у яких або є один нуклон над заповненою оболонкою, або не вистачає одного нуклона до повного заповнення оболонки. Серед збуджених станів ядра також спостерігаються стани, які можуть бути інтерпретовані як одночастинкові, що зумовлені переходом останнього нуклона з одного рівня на інший з більшою енергією. Разом з тим, значення квадрупольних моментів ядер, обчислених за одночастинковою оболонковою моделлю, порівняно невеликі ($|Q|_{max} \le 50 \text{ фм}^2$), мають від'ємний знак. Зауважимо, що це суперечить експериментальним дослідженням (див. рис. 1.10), при цьому ніякі уточнення моделі незалежних частинок не змінюють такий висновок.

3.6. Парні кореляції. Квазічастинкові стани

Одним із найважливіших компонентів залишкової ядерної взаємодії є кореляційний потенціал спарювання нуклонів, який являє собою сильну короткодіючу взаємодію притягання, що зв'язує тотожні нуклони в пари з нульовим повним спіном (М. М. Боголюбов; О. Бор, Б. Моттельсон, Д. Пайнс, 1958). Теорія спарювання нуклонів у ядрах при дії кореляційного парного потенціалу між одночастинковими станами вперше розглянули незалежно В. Г. Соловйов і С. Т. Беляєв (1959). Їхні дослідження показали, що спарювальна взаємодія приводить до такого сильного змішування конфігурацій оболонкової моделі, що можна ввести ймовірність V_j^2 того, що одночастинковий рівень з повним кутовим моментом *j* зайнятий (заселений) і ймовірність U_j^2 того, що він порожній; очевидно,

$$V_j^2 + U_j^2 = 1, (3.91)$$

а повна кількість частинок на орбіті ј дорівнює

$$n_j = (2j+1)V_j^2. (3.92)$$

Під дією сил спарювання енергії E_j одночастинкових рівнів модифікуються так, що замість них формується спектр нових станів з енергіями ε_j :

$$\varepsilon_j = \left\{ \left(E_j - \lambda \right)^2 + \Delta^2 \right\}^{1/2}.$$
(3.93)

Величини ε_j можна інтерпретувати як енергії квазічастинок у квазічастинкових станах, які можуть заповнюватися з деякою ймовірністю V_j^2 . У формулі (3.93) λ – енергія Фермі, що відраховується від краю потенціальної ями ($\lambda \cong V_0 - \varepsilon_F = S_n$, підрозд. 3.3), а Δ – параметр, який називають енергетичною щілиною. Схематично співвідношення між енергіями ε_j квазічастинок і енергіями частинок E_j представлені на рис. 3.7.





Згідно з (3.93) енергія найнижчого квазічастинкового рівня, що формується незбуреною орбітою біля поверхні Фермі, має значення $\varepsilon_g \approx \Delta$, (3.94)

тобто існує відстань або, як кажуть, утворюється щілина Δ між енергіями основного стану ядра та його першого збудженого стану.

За теорією спарювання основний стан парно-парного ядра можна розглядати як квантово-механічний вакуумний стан, з якого може народитися пара квазічастинок, якщо енергія достатня для її утворення. Збуджені стани непарно-парних ядер відповідають переходу однієї частинки на квазічастинкові енергетичні рівні ε_j . Енергія основного стану парно-непарного ядра задається (3.94), а співвідношення (3.93) пов'язує послідовність одночастинкових рівнів ε_j , що спостерігаються в непарнопарному ядрі, з незбуреними одночастинковими рівнями E_j .

Якщо зв'язана пара нейтронів або протонів додається до непарно-парного ядра, то значення енергій E_j всіх станів зменшується, оскільки поява додаткових нуклонів приводить до збільшення радіуса еквівалентного потенціалу. У відповідність з (3.93), коли енергії E_j зменшуються, то зменшуються й енергії ε_j доти, доки енергія E_j не перейде через значення λ . Такий характер змін енергій одночастинкових рівнів можна простежити в непарних ізотопах одного й того самого ядра.

На рис. 3.8 показано зміни енергій одночастинкових рівнів у непарно-парних ізотопах паладію ¹⁰³ Pd, ¹⁰⁵ Pd, ¹⁰⁷ Pd i ¹⁰⁹ Pd (енергії E_j незбурених рівнів розташовані в такій послідовності $d_{5/2}$, $g_{7/2}$, λ , $s_{1/2}$, $h_{11/2}$, $d_{3/2}$ і $|E_{g_{7/2}} - \lambda| < \Delta$). Тому, коли додаються зв'язані пари до ¹⁰³ Pd, значення енергій усіх рівнів, окрім рівня $g_{7/2}$, зменшуються, а енергія останнього рівня зростає, оскільки незбурений рівень $g_{7/2}$ лежить дуже близько до енергії Фермі.



Рис. 3.8. Зміни енергій одночастинкових рівнів ізотопів паладію ¹⁰³ Pd , ¹⁰⁵ Pd , ¹⁰⁷ Pd i ¹⁰⁹ Pd

Теорія спарювання також пов'язує ймовірність заселеності V_j^2 з величинами E_j і Δ :

$$V_{j}^{2} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{E_{j} - \lambda}{\left\{ \left(E_{j} - \lambda \right)^{2} + \Delta^{2} \right\}^{1/2}} \right],$$
(3.95)

отже,

$$U_{j}^{2} = 1 - V_{j}^{2} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{E_{j} - \lambda}{\left\{ \left(E_{j} - \lambda \right)^{2} + \Delta^{2} \right\}^{1/2}} \right].$$
 (3.96)

Безпосереднім наслідком формул (3.95) і (3.96) є те, що ймовірність заселеності орбіти в основному стані, де $E_g - \lambda \ll \Delta$, близька до половини:

$$V_g^2 \approx 0.5$$
. (3.97)

٦

Це співвідношення ілюструє той факт, що спарювання значно піднімає частинки з їхніх нормальних незбурених станів. Перший від'ємний знак у виразі (3.95) гарантує, що стани з високими енергіями заповнюються з меншими ймовірностями.

Із формул (3.92) і (3.95) маємо вираз для повної кількості частинок на орбіті *j* :

г

$$n_{j} = (2j+1)V_{j}^{2} = \frac{1}{2}(2j+1)\left[1 - \frac{E_{j} - \lambda}{\left\{\left(E_{j} - \lambda\right)^{2} + \Delta^{2}\right\}^{1/2}}\right] = 2\Omega_{j}V_{j}^{2}, (3.98)$$

де $\Omega_j = (2j+1)/2 = j+1/2$ – кількість вироджених пар на рівні з повним кутовим моментом *j*. Із формул (3.93), (3.95) і (3.96) також знаходимо

$$\Delta = 2\varepsilon_j V_j U_j, \quad E_j - \lambda = \frac{\Delta \left(U_j^2 - V_j^2 \right)}{2V_j U_j}.$$
(3.99)

Параметр енергетичної щілини Δ задовольняє рівняння

$$\frac{1}{2} \sum_{j} \frac{2j+1}{\left\{ \left(E_{j} - \lambda \right)^{2} + \Delta^{2} \right\}^{1/2}} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j} \left(2j+1 \right) V_{j} U_{j} = G^{-1}, \quad (3.100)$$

де константа G – сила взаємодії спарювання з однаковими матричними елементами між одночастинковими станами.

Повна кількість частинок дорівнює

$$N = \sum_{j} n_{j} = \sum_{j} 2\Omega_{j} V_{j}^{2}.$$
 (3.101)

Величини, що виникають у теорії спарювання, мають такі типові значення (у MeB):

$$G \cong 24 / A, \quad \Delta \cong 0,7 \div 1,2 \quad i \quad \lambda \approx 4 \div 5.$$
 (3.102)

Амплітуди ймовірностей V_j можна визначити експериментально, досліджуючи заселення одночастинкових рівнів у ядерних реакціях.

3.7. Узагальнена модель ядра. Колективна енергія рідкої краплини

Великі значення власних квадрупольних моментів вказують на те, що в цілому в ядрах відхилення розподілу заряду від сферичної форми значно сильніші, ніж це передбачають оболонкові моделі. Зазначимо, що в багаточастинковій оболонковій моделі квадрупольний момент заповненої оболонки дорівнює нулю, тобто розподіл нуклонів у заповнених оболонках сферичносиметричним. Лише наявність нуклонів зовні заповнених оболонок приводить до несферичного розподілу заряду й відмінного від нуля квадрупольного моменту. Знайдені в експерименті великі значення квадрупольних моментів вказують на те, що несферичний розподіл заряду має формуватися також за участю нуклонів заповнених оболонок.

Самоузгоджене середнє поле утворюється нуклонами ядра і згідно з виразами (3.33) та (3.34) при несферичному розподілі заряду буде також несферичним. Характер і величина деформованості розподілу заряду, а отже і середнього поля, в основному визначаються кількістю нуклонів поза межами заповнених оболонок і залишковою взаємодією між нуклонами відносно сферичного потенціалу.

Слід очікувати, що за невеликої кількості додаткових нуклонів (нуклонної хмари зовні заповнених оболонок), їхній вплив на формування середнього поля і форму ядра буде незначним, тому потенціал ядра та його форма залишаються сферичносиметричними. Залишкова взаємодія між зовнішніми нуклонами

спричиняє корельований рух частинок, унаслідок якого форма ядра починає відрізнятися від сферичної. Зі зростанням кількості нуклонів поза заповненими оболонками вплив індивідуального руху нуклонів і залишкової взаємодії нуклонів на самоузгоджений потенціал посилюється. Деформація поверхні таких ядер буде поступово збільшуватись.

Фізичне уявлення про ядро як про багаточастинкову систему, що складається з внутрішньої стійкої області – "ядерного остову", утвореного нуклонами, які входять до складу замкнених, а також оболонок і зовнішніх нуклонів, що рухаються в полі цього остову й призводять до його деформації (тим самим до деформації ядра в цілому), лежить в основі так званої узагальненої моделі ядра. Цю модель називають узагальненою моделлю Бора-Моттельсона (О. Бор, Б. Моттельсон, Дж. Рейнуотер, 1950-1953). Зміни рівноважної форми ядра та його орієнтації в просторі в такій моделі описуються за допомогою колективних змінних $\alpha_{\lambda\mu}$, що є відносними зміщеннями радіуса ядра в лабораторній системі координат. Ці параметри визначають радіус ядра і вводяться аналогічно тому, як це робиться в краплинній моделі ядра, де ядро розглядається як краплина ідеальної нестисливої рідини з безвихровим рухом. А саме, у лабораторній системі координат K(X,Y,Z) радіус ядра записується у вигляді

$$R(\theta,\phi) = R'_0 \left(1 + \sum_{\lambda \ge 2}^{\lambda_m} \sum_{\mu = -\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta,\phi) \right), \qquad (3.103)$$

де параметри $\alpha_{\lambda\mu} \equiv \alpha_{\lambda\mu}(t)$ збурення поверхні ядра залежать від часу; R'_0 – середній радіус деформованого ядра, що враховує збереження об'єму ядра (див. підрозд. 1.5); R'_0 є функцією параметрів зміщень і його явний вид залежить від максимальної кількості параметрів, що враховуються в розкладі (3.103). У першому порядку за відносними зміщеннями $R'_0 = R_0$ з $R_0 = r_0 A^{1/3}$ для радіуса сферичного ядра еквівалентного об'єму. На відміну від позначень підрозд. 1.5, параметри $\alpha_{\lambda\mu}$ у формулі

(3.103) є множниками при сферичних гармоніках з кутами θ, φ, що визначені в лабораторній системі координат.

Величини λ і μ у формулі (3.103) характеризують просторовий вигляд збурень у системі координат з полярним та азимутальним кутами θ , ϕ , відповідно; даному значенню λ відповідає $2\lambda + 1$ значень μ . За малих збурень компоненти з $\lambda = 0$ і $\lambda = 1$ відсутні, оскільки $\lambda = 0$ відповідає ізотропному розширенню і стисненню системи, а $\lambda = 1$ – зміщенню центра мас (див. підрозд. 1.5). Значення $R(\theta, \phi)$ дійсне, що приводить до таких умов симметрії для параметрів збурень: $\alpha_{\lambda-\mu} = (-1)^{\mu} \alpha_{\lambda\mu}^{*}$. Радіус ядра є скалярною величиною, що не змінюється при обертанні, тому його загальний вигляд (3.103) не залежить від того, яка система координат використовується – лабораторна K(X,Y,Z) чи власна – K'(X',Y',Z'), що жорстко зв'язана з ядром, а початок її збігається із центром тяжіння ядра; тобто

$$R(\theta, \phi) = R(\theta', \phi') \equiv R'_0 \left(1 + \sum_{\lambda \ge 2} \sum_{\mu = -\lambda}^{\lambda} \beta_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta', \phi') \right), \qquad (3.104)$$

де параметри деформації поверхні $\beta_{\lambda\mu}$ ($\beta_{\lambda-\mu} = (-1)^{\mu}\beta_{\lambda\mu}^{*}$) визначені у власній (внутрішній) системі координат К' (див. підрозд. 1.5) з кутами θ', ϕ' . Взаємна орієнтація внутрішньої та лабораторної систем задається трьома кутами Ейлера $\{\theta_{\alpha}\} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, де кути θ_2, θ_1 є відповідно полярним ($\tilde{\theta}$) та азимутальним кутами (ф) осі Z' власної системи в лабораторній системі K, $(\theta_2 = \tilde{\theta}, \theta_1 = \tilde{\phi})$, а кути θ_2, θ_3 визначають полярний $(\tilde{\theta}')$ та азимутальний $(\tilde{\varphi}')$ кути осі Z у системі K', $(\tilde{\theta}' = \theta_2, \tilde{\phi}' = \pi - \theta_3)$. Якщо ядро має ненульовий кутовий момент, то власна система координат обертається відносно лабораторної й кути Ейлера залежать від часу. Тому систему К' також називають рухомою системою координат. Сферичні функції та параметри збурень при переході від системи координат К до К' перетворюються за формулами

$$Y_{\lambda\mu}(\theta',\phi') = \sum_{\nu=-\lambda}^{\lambda} D_{\nu\mu}^{\lambda*}(\{\theta_{\alpha}\})Y_{\lambda\nu}(\theta,\phi),$$

$$\alpha_{\lambda\nu} = \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} D_{\nu\mu}^{\lambda*}(\{\theta_{\alpha}\})\beta_{\lambda\mu} , \ \beta_{\lambda\mu} = \sum_{\nu=-\lambda}^{\lambda} D_{\nu\mu}^{\lambda}(\{\theta_{\alpha}\})\alpha_{\lambda\nu}. \ (3.105)$$

Тут $D_{\nu\mu}^{\lambda}$ – узагальнені сферичні функції, або D-функції Вігнера, що описують поворот системи координат K' у тривимірному просторі. Функції $D_{\nu\mu}^{\lambda}(\{\theta_{\alpha}\})$ є власними функціями оператора квадрата кутового моменту \vec{l}^2 та операторів \hat{l}_z , $\hat{l}_{z'}$ проекцій кутового моменту на осі Z і Z' із власними значеннями λ, ν, μ , відповідно¹:

$$\hat{l}^{2}D_{\nu\mu}^{\lambda} = \hbar^{2}\lambda(\lambda+1)D_{\nu\mu}^{\lambda},$$
$$\hat{l}_{z}D_{\nu\mu}^{\lambda} = \hbar\nu D_{\nu\mu}^{\lambda}, \quad \hat{l}_{z'}D_{\nu\mu}^{\lambda} = \hbar\mu D_{\nu\mu}^{\lambda}.$$
(3.106)

Вони задовольняють такі співвідношення ортонормованості:

$$\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} D_{\nu_{1}\mu}^{\lambda*}(\{\theta_{\alpha}\}) D_{\nu_{2}\mu}^{\lambda}(\{\theta_{\alpha}\}) = \delta_{\nu_{1}\nu_{2}}, \qquad (3.107)$$

$$\sum_{\nu=-\lambda}^{\lambda} D_{\nu\mu_1}^{\lambda*}(\{\theta_{\alpha}\}) D_{\nu\mu_2}^{\lambda}(\{\theta_{\alpha}\}) = \delta_{\mu_1\mu_2}.$$
(3.108)

Якщо значення λ цілочислове, а один із індексів v, μ дорівнює нулю, то *D*-функції Вігнера зводяться до сферичних функцій (підрозд. 3.5):

¹ Зауважимо, що прийняті позначення кутів Ейлера збігаються з тими, які використовуються в книгах І. Айзенберга, В. Грайнера; О. Бора, Б. Моттельсона; О. С. Давидова; В. Г. Соловйова, а *D*-функції Вігнера, визначені згідно з книгами О. Бора, Б. Моттельсона; О. С. Давидова та В. Г. Соловйова. Після комплексного спряження вони тотожні узагальненим сферичним функціям, які використовували І. Айзенберг, В. Грайнер та Д. О. Варшалович, А. М. Москальов, В. К. Херсонський.

$$D_{\nu\mu=0}^{\lambda}(\theta_{1},\theta_{2},\theta_{3}) = \left[\frac{4\pi}{2\lambda+1}\right]^{1/2} Y_{\lambda\nu}(\theta_{2},\theta_{1}),$$
$$D_{\nu=0\mu}^{\lambda}(\theta_{1},\theta_{2},\theta_{3}) = (-1)^{\mu} \left[\frac{4\pi}{2\lambda+1}\right]^{1/2} Y_{\lambda\mu}(\theta_{2},\theta_{3}).$$
(3.109)

Згідно з теорією малих збурень для визначення енергії, яка пов'язана з малими зміщеннями, можна використовувати гармонічне наближення. Зміна параметрів $\alpha_{\lambda\mu}$ збурення поверхні, що задані в лабораторній системі координат, може бути обумовлена як коливаннями поверхні, так і обертанням системи. Тому енергія зміщень $\alpha_{\lambda\mu}$ є повною енергією E_{col} колективного руху. Вона складається з енергії E_{vib} коливань ядерної поверхні (вібраційна енергія) та енергії E_{rot} обертань системи (ротаційна енергія):

$$E_{\rm col} \equiv E_{\rm vib} + E_{\rm rot} = T(\{\alpha_{\lambda\mu}\}) + V(\{\alpha_{\lambda\mu}\}), \qquad (3.110)$$

де $T(\{\alpha_{\lambda\mu}\})$ – кінетична енергія збурень поверхні,

$$T(\{\alpha_{\lambda\mu}\}) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \ge 2} \sum_{\mu = -\lambda}^{\lambda} B_{\lambda\mu} |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 , \qquad (3.111)$$

 $\dot{\alpha}_{\lambda\mu} = d\alpha_{\lambda\mu}(t)/dt$ – похідна за часом; $V(\{\alpha_{\lambda\mu}\})$ – потенціальна енергія,

$$V(\{\alpha_{\lambda\mu}\}) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \ge 2} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} C_{\lambda\mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2.$$
 (3.112)

Після запису виразів (3.110) – (3.112) для повної енергії E_{col} у власній (рухомій) системі координат K'(X',Y',Z'), що жорстко пов'язана з ядром, можна явно виділити внески вібраційного та ротаційного рухів. За відсутності ротаційного руху величини $B_{\lambda\mu}$ у формулі (3.111) називаються масовими параметрами (коефіцієнтами), а $C_{\lambda\mu}$ у (3.112) – коефіцієнтами жорсткості.

Розглянемо метод відшукання виразів для вібраційної $E_{\rm vib}$ і ротаційної $E_{\rm rot}$ енергій на прикладі ядер з еліпсоїдальною фор-

мою збурень, тобто ядер, які мають відмінні від нуля лише значення параметрів квадрупольних зміщень радіуса:

$$R(\theta, \phi) = R'_0 \left[1 + \sum_{\mu=0,\pm1,\pm2} \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}(\theta, \phi) \right] =$$
$$= R(\theta', \phi') \equiv R'_0 \left[1 + \sum_{\mu=0,\pm1,\pm2} \beta_{2\mu} Y_{2\mu}(\theta', \phi') \right]. \quad (3.113)$$

Зауважимо, що в узагальненій моделі (модель Бора– Моттельсона) спочатку розглядалися саме квадрупольні збурення, які приводять до еліпсоїдальної форми поверхні, координати якої задовольняють рівняння

$$\left(\frac{x'}{R_{X'}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{R_{Y'}}\right)^2 + \left(\frac{z'}{R_{Z'}}\right)^2 = 1, \qquad (3.114)$$

де $R_{X'}, R_{Y'}, R_{Z'}$ – значення напівосей уздовж напрямків трьох головних осей еліпсоїда (див. (3.120)).

У випадку еліпсоїдальних ядер осі X', Y', Z' внутрішньої системи координат вибирають уздовж головних осей еліпсоїда, тоді для колективних змінних $\beta_{2\mu}$ виконуються такі рівності:

$$\beta_{2+1} = \beta_{2-1} = 0, \quad \beta_{2+2} = \beta_{2-2}.$$
 (3.115)

Таким чином, із п'яти величин $\beta_{2\mu}$ тільки дві будуть незалежними, і замість п'яти параметрів $\alpha_{2\mu}$ лабораторної системи координат маємо п'ять нових параметрів, що характеризують властивості збурень, а саме: три кути Ейлера, що визначають обертальні (ротаційні) рухи ядра, і дві дійсні величини β_{20}, β_{2+2} , які характеризують деформацію його поверхні. Як видно з рис. 3.2, сферичні гармоніки $Y_{2\pm1}(\theta', \phi')$ описують збурення того самого типу, що й $Y_{2\pm2}(\theta', \phi')$, тільки максимуми й мінімуми просторових збурень розташовані під деякими кутами до напрямків осей координат внутрішньої системи. Саме тому умови (3.115) ніяк не звужують коло можливих зміщень поверхні.

Замість величин β_{20}, β_{22} О. Бор (1952) ввів два нових параметри β, γ за допомогою співвідношень:

$$\beta_{20} = \beta \cos \gamma, \quad \beta_{2+2} = \beta_{2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma.$$
 (3.116)

Звідси вираз для радіуса ядра (3.114) набуває такого вигляду:

$$R(\theta', \phi') =$$

$$= R_0' \left[1 + \alpha_B \left\{ \cos \gamma Y_{20}(\theta', \phi') + \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}} (Y_{22}(\theta', \phi') + Y_{22}^*(\theta', \phi')) \right\} \right] =$$

$$= R_0' \left[1 + \frac{\alpha_B}{2} \left\{ \cos \gamma [3\cos(\theta') - 1] + \sqrt{3}\sin \gamma \sin^2(\theta')\cos(2\phi') \right\} \right], (3.117)$$

$$\exists e$$

$$\alpha_{B} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta,$$

$$R_{0}' \equiv R_{0}'(\beta,\gamma) = R_{0}(1 - \frac{3}{4}\alpha_{B}^{2} + \frac{1}{4}\alpha_{B}^{3}\cos(3\gamma))^{-1/3}.$$
(3.118)

Параметр β визначає загальну деформацію ядра

_

$$\beta^{2} = \sum_{\mu=-2}^{2} |\beta_{2\mu}|^{2} = \beta_{20}^{2} + 2\beta_{2+2}^{2}. \qquad (3.119)$$

Параметр у характеризує відхилення форми ядра від аксіально-симетричної форми й називається параметром неаксіальності, або асиметрії. Спробуємо обчислити значення півосей уздовж напрямків трьох головних осей еліпсоїдального ядра. Згідно з (3.117) маємо

$$R_{X'} \equiv R\left(\theta' = \frac{\pi}{2}, \phi' = 0\right) = R'_0 \left(1 - \alpha_B \left\{\frac{\cos\gamma}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\gamma\right\}\right);$$

$$R_{Y'} \equiv R\left(\theta' = \frac{\pi}{2}, \phi' = \frac{\pi}{2}\right) = R'_0 \left(1 - \alpha_B \left\{\frac{\cos\gamma}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\gamma\right\}\right);$$

$$R_{Z'} \equiv R\left(\theta' = 0, \phi' = 0\right) = R'_0 \left(1 + \alpha_B\cos\gamma\right), \quad (3.120)$$

або

$$R_j = R'_0 \left(1 + \alpha_B \cos(\gamma - j\frac{2\pi}{3}) \right), \quad j = 1, 2, 3 \equiv X', Y', Z'. \quad (3.121)$$

Як випливає зі співвідношень (3.120) та (3.121) при значеннях γ , кратних $\pi/3$, ядро набуває форми еліпсоїда обертання, тобто поверхня ядра є симетричною відносно однієї з осей, а ступінь деформованості задається лише параметром β . Наприклад, якщо $\gamma = 0$ і $\beta > 0$, то ядро є витягнутим еліпсоїдом обертання з віссю симетрії уздовж осі Z':

$$R_{X'} = R_{Y'} = R'_0 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha_B \right), \quad R_{Z'} = R'_0 \left(1 + \alpha_B \right), \quad (3.122)$$

при $\gamma = \pi / 3$, $\beta > 0$ ядро – сплюснений еліпсоїд обертання з віссю симетрії вздовж осі *Y*':

$$R_{X'} = R_{Z'} = R'_0 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_B \right), \quad R_{Y'} = R'_0 \left(1 - \alpha_B \right), \quad (3.123)$$

а з $\gamma = \pi$, $\beta > 0$ – сплюснений еліпсоїд обертання з віссю симетрії вздовж осі Z':

$$R_{X'} = R_{Y'} = R'_0 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_B \right), \quad R_{Z'} = R'_0 \left(1 - \alpha_B \right). \tag{3.124}$$

Ступінь порушення аксіальної симетрії залежить від значення γ , зокрема у випадку $\gamma = \pi/6$ форма поверхні ядра є проміжною між формою еліпсоїда з віссю симетрії Z' та еліпсоїда з віссю симетрії Y'. Зазначимо, що для розгляду всіх можливих форм тривісного еліпсоїда достатньо значення β і γ вибирати в інтервалах

$$0 \le \gamma \le \frac{\pi}{3}, \quad 0 \le \beta \le \frac{\left(\frac{4\pi}{5}\right)^{1/2}}{\cos(\frac{\pi}{3} - \gamma)}.$$
 (3.125)

В аксіально-симетричних еліпсоїдальних ядрах, тобто, коли ($\gamma_0 = 0$ або π), параметр β моделі Бора–Моттельсона збігається з абсолютним значенням параметра β_{20} розкладу радіуса ядра

за сферичними гармоніками (див. підрозд. 1.5 і формулу (3.104)), а саме:

$$\beta_{20} = \begin{cases} +\beta, & \gamma_0 = 0, \\ -\beta, & \gamma_0 = \pi. \end{cases}$$
(3.126)

У змінних β , γ і $\{Q_{\alpha}\}$ повна кінетична енергія колективного руху T (див. (3.111)) складається з вібраційного T_{vib} і ротаційного T_{rot} компонентів

$$T = T_{\rm vib} + T_{\rm rot} , \qquad (3.127)$$

де з точністю до квадратичних членів (відносно похідних за часом), вирази для $T_{\rm vib}$ і $T_{\rm rot}$ мають вигляд

$$T_{\rm vib} = \frac{1}{2} \left\{ B_{\beta\beta}(\beta,\gamma) \cdot \dot{\beta}^2 + 2\beta B_{\beta\gamma}(\beta,\gamma) \cdot \dot{\beta} \cdot \dot{\gamma} + \beta^2 B_{\gamma\gamma}(\beta,\gamma) \cdot \dot{\gamma}^2 \right\}, \quad (3.128)$$

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2} \sum_{j} \omega_j^2 F_j = \sum_{j} \frac{(\vec{R})_j^2}{2F_j}, \quad (\vec{R})_j = \omega_j F_j , \qquad (3.129)$$
$$j = 1, 2, 3 \equiv X', Y', Z' .$$

Тут $(\vec{R})_j$ – проекція на *j*-ту внутрішню вісь вектора кутового моменту обертання ядра як цілого; $B_{\beta\beta}$, $B_{\beta\gamma}$, $B_{\gamma\gamma}$ – масові (інерційні) параметри, що визначають інертність поверхні ядра відносно відповідних коливань. У випадку моделі рідкої краплини маємо (Т. Каніовська, А. Собічевскі, К. Поморскі, С. Рогозінскі, 1976)

$$B_{\beta\beta} = Ba^{2} \left[1 + \alpha_{B}^{2} a^{3} b_{1} (1 + \frac{1}{2} a^{3} b_{1} b_{2}) \right],$$

$$B_{\beta\gamma} = \frac{1}{4} B \alpha_{B}^{3} a^{5} \left[1 + a^{3} b_{1} b_{2} \right] \sin(3\gamma),$$

$$B_{\gamma\gamma} = Ba^{2} \left[1 + \frac{1}{8} \alpha_{B}^{4} a^{6} b_{2} \sin^{2}(3\gamma) \right],$$
(3.130)

де

$$B = \frac{3}{8\pi} AmR_0^2, \quad a = R'_0 / R_0 = \left(1 - \frac{3}{4}\alpha_B^2 + \frac{1}{4}\alpha_B^3\cos(3\gamma)\right)^{-1/3},$$

$$b_1 = 1 - \frac{1}{2} \alpha_B \cos(3\gamma), \quad b_2 = 1 + \frac{1}{2} \alpha_B^2.$$
 (3.131)

Зберігши тільки два найнижчих за β компоненти у виразах для масових параметрів, отримуємо

$$B_{\beta\beta} = B \left[1 + \frac{15}{8\pi} \beta^2 \right],$$

$$B_{\beta\gamma} = B \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4\pi} \right)^{3/2} \beta^3 \sin(3\gamma) \left(1 - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos(3\gamma) \right),$$

$$B_{\gamma\gamma} = B \left[1 + \frac{5}{8\pi} \beta^2 \right].$$
(3.132)

Величина ω_j у формулі (3.129) є проекцією на *j*-ту внутрішню вісь кутової швидкості обертання ядра; F_j — момент інерції відносно відповідної внутрішньої осі. У випадку гідродинамічної моделі рідкої краплини вони мають вигляд

$$F_{j} \equiv F_{j,\text{hydr}} = \frac{Am}{5} \frac{\left(R_{k}^{2} - R_{l}^{2}\right)^{2}}{R_{k}^{2} + R_{l}^{2}}, \quad j, k, l = \{1, 2, 3\}; \{2, 3, 1\}; \{3, 1, 2\},$$
(3.133)

з Ат для повної маси ядра. Звідки можна отримати

$$F_{j,\text{hydr}} = 4\beta^2 D_j(\beta,\gamma) \sin^2 \gamma_j, \quad \gamma_j = \gamma - j\frac{2\pi}{3}, \quad (3.134)$$
$$D_j(\beta,\gamma) = Ba^2 \frac{(1-0,5\alpha_B\cos\gamma_j)^2}{b_2 - \alpha_B\cos\gamma_j - 0,25\alpha_B^2\cos(2\gamma_j)}.$$

З точністю до квадратичних за β доданків вираз для компонентів моменту інерції матиме вигляд

$$F_{j,\text{hydr}} = 4\beta^2 B \left[1 + \frac{5}{8\pi} \beta^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \gamma_j \right) \right] \sin^2 \gamma_j . \quad (3.135)$$

Видно, що значення моментів інерції $F_{j,hydr}$ за гідродинамічною моделлю (див. (3.113) і (3.135)) дорівнюють нулю за відсутності деформації поверхні ядра.

Проекції кутової швидкості обертання ядра визначаються зміною в часі кутів Ейлера:

$$\begin{split} \omega_{X'} &= \omega_1 = -\theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + \theta_2 \sin \theta_3 ,\\ \omega_{Y'} &= \omega_2 = \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 ,\\ \omega_{Z'} &= \omega_3 = \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_3 . \end{split}$$
(3.136)

Зазначимо, що загальний вираз (3.129) для ротаційної енергії $T_{\rm rot}$, який базується на краплинній моделі, збігається з ротаційною енергією тривісного твердотільного еліпсоїда, але значення моменту інерції твердого тіла також відмінні від нуля й у сферичних ядрах. Величини моментів інерції твердих тіл визначаються квадратами довжин напівосей еліпсоїда і мають вигляд

$$F_{j} \equiv F_{j, \text{ rig}} = m \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}') (x_{k}'^{2} + x_{l}'^{2}) = \frac{1}{5} Am(R_{k}^{2} + R_{l}^{2}),$$

$$j, k, l = \{1, 2, 3\}; \{2, 3, 1\}; \{3, 1, 2\}.$$
(3.137)

Після врахування співвідношення (3.121) отримуємо

$$F_{j, \text{ rig}} = \frac{1}{5} Am R_0'^2 \left[1 - \alpha_B \cos \gamma_j + \frac{\alpha_B^2}{4} \left(1 + 2\sin^2 \gamma_j \right) \right]. \quad (3.138)$$

Очевидно, що на відміну від краплинної моделі (3.133), твердотільні значення моментів інерції сферичних ядер відмінні від нуля й дорівнюють

$$F_{j, \text{ rig}} \equiv F = \frac{1}{5} Am R_0^2 = \frac{16\pi}{15} B.$$
 (3.139)

Відповідно до виразів (3.133), (3.137) між твердотільними значеннями моментів інерції та їхніми гідродинамічними значеннями за моделлю рідкої краплини існують такі співвідношення

$$F_{j,\,\text{hydr}} = \frac{\left(R_k^2 - R_l^2\right)^2}{\left(R_k^2 + R_l^2\right)^2} F_{j,\,\text{rig}} \,.$$
(3.140)

На відміну від твердотільного моменту інерції, гідродинамічний момент інерції має менше значення, оскільки формується нуклонами в приповерхневій зоні ядра та зумовлений хвилями на його поверхні.

Потенціальна енергія краплини ідеальної нестисливої рідини з рівномірно розподіленим зарядом складається із суми енергії поверхневого натягу та кулонівської енергії. Із точністю до третього порядку за значеннями β цю енергію можна подати у вигляді (О. Бор, Б. Моттельсон)

$$V(\beta,\gamma) = V_0 \left[(1-x)\beta^2 - \frac{2}{21}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}(1+2x)\beta^3 \cos(3\gamma) \right], \quad (3.141)$$

де $V_0 = 0,5a_2 / \pi$; a_2 – коефіцієнт поверхневої енергії у формулі Вейцзекера (1.17): $a_2 \cong 18A^{2/3}$ (MeB); x – параметр подільності ядра: $x = (Z^2 / A) / (2,315a_2A^{-2/3}) \cong 0,02(Z^2 / A) / 45$.

За малих зміщень поверхні деформованого ядра поблизу його статичних (рівноважних) значень β_0, γ_0 параметрів деформації, потенціал (3.141) набуває вигляду

 $V(\beta, \gamma) =$

$$=\frac{C_{\beta\beta}}{2}(\beta-\beta_{0})^{2}+C_{\beta\gamma}(\beta-\beta_{0})(\gamma-\gamma_{0})+\frac{C_{\gamma\gamma}}{2}(\gamma-\gamma_{0})^{2}+V(\beta_{0},\gamma_{0}),$$
(3.142)

$$\begin{split} C_{\beta\beta} &= \partial^2 V(\beta,\gamma) / \partial \beta^2 \mid_{\beta,\gamma} = \\ &= C_{\beta_0,\gamma_0} = 2V_0 \bigg[(1-x) - \frac{2}{7} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (1+2x) \beta_0 \cos(3\gamma_0) \bigg], \\ C_{\beta\gamma} &= \partial^2 V(\beta,\gamma) / \partial \beta \partial \gamma \mid_{\beta,\gamma=\beta_0,\gamma_0} = \frac{6}{7} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} V_0 (1+2x) \beta_0 \sin(3\gamma_0), \\ C_{\gamma\gamma} &= \partial^2 V(\beta,\gamma) / \partial \gamma^2 \mid_{\beta,\gamma=\beta_0,\gamma_0} = \frac{6}{7} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} V_0 (1+2x) \beta_0^3 \cos(3\gamma_0). \end{split}$$

Аналіз формул (3.141), (3.142) показує, що в аксіальносиметричних ядрах ($\gamma_0 = 0$ або π , $\beta > 0$), виконуються співвідношення $C_{\beta\beta} \neq 0$, $C_{\gamma\gamma} \neq 0$, $C_{\beta\gamma} = 0$. Це означає, що в аксільних ядрах β і γ коливання є незв'язаними. Із формул (3.128) – (3.135), (3.142) випливає вираз для вібраційної класичної енер-

гії $E_{\rm vib}$ коливань аксіально-симетричного ядра ($\gamma_0 = 0$ або π , $\beta > 0$):

$$\begin{split} E_{\rm vib} &= \frac{1}{2} \Big[\bar{B}_{\beta} \dot{\beta}^2 + \bar{C}_{\beta} (\beta - \beta_0)^2 \Big] + \frac{1}{2} \Big[\bar{B}_{\gamma} \beta^2 \dot{\gamma}^2 + \beta_0^2 \bar{C}_{\gamma} \gamma^2 \Big], \qquad (3.143) \\ \bar{C}_{\beta} &= C_{\beta\beta} (\beta_0, \gamma_0 = 0 \text{ afo } \pi) = C - \frac{4}{7} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} V_0 (1 + 2x) \beta_0 \sin \gamma_0 , \\ &\qquad (C = \bar{C}_{\beta} (\beta_0 = 0)) \\ \bar{C}_{\gamma} &= C_{\gamma\gamma} (\beta_0, \gamma_0 = 0 \text{ afo } \pi) = \frac{6}{7} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} V_0 (1 + 2x) \beta_0 \sin \gamma_0 , \\ &\qquad \bar{B}_{\beta} \cong B \Big[1 + \frac{15}{8\pi} \beta_0^2 \Big], \quad \bar{B}_{\gamma} \cong B \Big[1 + \frac{5}{8\pi} \beta_0^2 \Big], \end{split}$$

а ротаційна енергія дорівнює

$$E_{\text{rot}} \equiv T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1,2} \omega_j^2 F_j = \sum_{j=1,2} \frac{(\bar{R})_j^2}{2F}, \quad j = 1, 2 \equiv X', Y', \quad (3.144)$$
$$F \equiv F_1 = F_2 \cong 3\beta^2 B, \quad F_3 \equiv F_{Z'} = 0, \quad (\bar{R})_3 = 0.$$

В ядрах зі сферично рівноважною формою $\beta_0 = 0$, тому відмінним від нуля є параметр жорсткості $C_{\beta\beta}$ і можливі лише β коливання. У краплинній моделі енергія E_{vib} коливань поверхні сферичного ядра є

$$E_{\text{vib}} = \frac{1}{2} \left[\overline{B}_{\beta} \dot{\beta}^2 + C \beta^2 \right] + \frac{1}{2} \overline{B}_{\gamma} \beta^2 \dot{\gamma}^2 , \qquad (3.145)$$
$$C = \overline{C}_{\beta} (\beta_0 = 0) = 2V_0 (1 - x) , \\\overline{B}_{\beta} \cong \overline{B}_{\gamma} \cong B ,$$

а ротаційна енергія $E_{\rm rot}$ задається виразом (3.144), і тому у випадку сферичного ядра ($\beta = 0, F_j = 0$) дорівнює нулю.

Зазначимо, що обертальний і коливальний рухи взаємозалежні, оскільки моменти інерції та ротаційна енергія $E_{\rm rot}$ (3.144) залежать від параметра деформації β , зміна якого зумовлена головним чином коливаннями поверхні ядра.

В узагальненій моделі ядра вирази для квантових гамільтоніанів $\hat{H}_{\rm vib}$, $\hat{H}_{\rm rot}$, що визначають енергії вібраційних ($E_{\rm vib}$) і ротаційних ($E_{\rm rot}$) станів, визначаються за допомогою квантування вищенаведених гідродинамічних виразів моделі рідкої краплини, а параметри деформації { $\beta_{\lambda\mu}$ } розглядаються як колективні змінні. Гамільтоніан $\hat{H}_{\rm int}$ одночастинкових збуджень будується за аналогією з оболонковою сферичною моделлю у вигляді оператора, що визначає одночастинкові стани в деякому несферичному середньому потенціалі. Повний гамільтоніан узагальненої моделі ядра має вигляд

$$\hat{H} = \hat{H}(\{\alpha_{\lambda\mu}\}) = \hat{H}_{vib}(\{\beta_{\lambda\mu}\}) + \hat{H}_{rot}(\{\beta_{\lambda\mu}\}) + \hat{H}_{int}(\{\beta_{\lambda\mu}\}), (3.146)$$

де явно вказана залежність від колективних змінних. Кожна з величин $\beta_{\lambda\mu}$ є сумою рівноважних компонентів $\overline{\beta}_{\lambda\mu}$, що не змінюються із часом, і динамічної частини $\delta\beta_{\lambda\mu}$, яка визначається рівняннями колективного руху з гамільтоніаном \hat{H} у просторі коллективних змінних, $\beta_{\lambda\mu} = \overline{\beta}_{\lambda\mu} + \delta\beta_{\lambda\mu}$. Вважається, що рівноважні компоненти деформацій відповідають формі основного стану ядра.

Залежність компонентів повного гамільтоніана від динамічних частин колективних змінних приводить до взаємозв'язку між різними типами рухів нуклонів у ядрах. Співвідношення між енергіями різних рухів можна якісно оцінити, якщо розглянути періоди відповідних рухів. Оскільки колективний рух пов'язаний з переміщенням великої кількості нуклонів, то можна вважати, що він має велику інерційність і відбувається значно повільніше, ніж одночастинковий рух. З квантової механіки випливає, що період коливань T_{α} у стаціонарному стані з енергією E_{α} обернено пропорційний значенню енергії $T_{\alpha} = 2\pi\hbar / E_{\alpha}$. Виходячи із цього, можна очікувати справедливість такого співвідношення:

$$T_{\rm in} \equiv \frac{2\pi\hbar}{E_{\rm in}} \ll T_{\rm vib} \equiv \frac{2\pi\hbar}{E_{\rm vib}}, \quad T_{\rm rot} \equiv \frac{2\pi\hbar}{E_{\rm rot}}, \quad (3.147)$$

де $T_{\rm in}$ – середній період одночастинкового руху; $T_{\rm vib}$ і $T_{\rm rot}$ – середні періоди поверхневих коливань і обертання ядра як цілого, відповідно; $E_{\rm in}$, $E_{\rm vib}$, $E_{\rm rot}$ – характерні енергії рухів. Оскільки в середніх і важких ядрах за рахунок нуклонів, які розміщені поблизу поверхні ядра, коливання формуються значно меншою кількістю нуклонів, ніж обертання, то $T_{\rm rot} \gg T_{\rm vib}$. Звідки слід очікувати, що в достатньо важких ядрах для енергії внутрішнього (одночастинкового) руху та колективних енергій виконується нерівність

$$E_{\rm in} \gg E_{\rm vib} \gg E_{\rm rot} \,. \tag{3.148}$$

У такому разі різні типи рухів можна вважати незалежними. Такий випадок називають *адіабатичним наближенням*. Схематично спектри збуджених станів у такому наближенні зображені на рис. 3.9.



Рис. 3.9. Спектри збуджених станів в адіабатичній узагальненій моделі ядра

Згідно зі співвідношеннями (3.147) і (3.148) можна очікувати, що обертання ядра буде настільки повільним, що його впливом на одночастинковий рух і коливання можна знехтувати, а ядерні рухи можна наближено розкласти на три незалежних: внутрішній, вібраційний і обертання ядра як цілого. Це означає, що повний гамільтоніан системи (3.146) можна записати у вигляді суми трьох компонентів:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\rm vib} + \hat{H}_{\rm rot} + \hat{H}_{\rm int} ,$$
 (3.149)

$$\begin{split} \hat{H}_{\rm vib} &\equiv \hat{H}_{\rm vib}(\{\delta\beta_{\lambda\mu}\}) = \hat{H}_{\rm vib}(\{\beta_{\lambda\mu} = \overline{\beta}_{\lambda\mu} + \delta\beta_{\lambda\mu}\}),\\ \hat{H}_{\rm rot} &\equiv \hat{H}_{\rm rot}(\{\overline{\beta}_{\lambda\mu}\}) = \hat{H}_{\rm rot}(\{\beta_{\lambda\mu} = \overline{\beta}_{\lambda\mu}\}),\\ \hat{H}_{\rm int} &= \sum_{j=1}^{A} h_j \equiv \hat{H}_{\rm int}(\{\overline{\beta}_{\lambda\mu}\}) = \hat{H}_{\rm int}(\{\beta_{\lambda\mu} = \overline{\beta}_{\lambda\mu}\}), \end{split}$$

де \hat{H}_{rot} – оператор енергії обертання при рівноважних значеннях параметрів деформації; \hat{H}_{vib} – гамільтоніан, який описує коливання поверхні ядра; компонент \hat{H}_{int} відповідає внутрішньому одночастинковому руху нуклонів і є сумою одночастинкових потенціалів h_j із несферичним середнім полем, що визначається статичними значеннями параметрів деформації.

Згідно з (3.149), якщо не враховувати додаткових умов симетрії в ядрі, хвильову функцію Ψ будь-якого його стану можна подати у вигляді добутку хвильових функцій окремих збуджень – внутрішнього (χ), вібраційного (φ_{vib}) та обертального D_{rot} :

$$\Psi = \chi \varphi_{\rm vib} D_{\rm rot} \,. \tag{3.150}$$

Оскільки внутрішній гамільтоніан \hat{H}_{int} у цій моделі ототожнюється з гамільтоніаном моделі незалежного руху нуклонів, то в адіабатичному наближенні кількість ступенів свободи, що використовується в гамільтоніані (3.149), перевищує реально існуючу на кількість ступенів свободи вібраційного та ротаційного рухів.

Якщо адіабатичне наближення (3.148) не виконується, то повний гамільтоніан зазвичай розглядають у вигляді

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{int}} + \hat{H}_{\text{rot}} + \hat{H}_{\text{vib}} + \hat{H}_{\text{corr}}, \qquad (3.151)$$

де \hat{H}_{corr} – кореляційний доданок, що пов'язує внутрішній одночастинковий рух з колективним. У випадку, коли компонент \hat{H}_{corr} визначає вплив обертання на одночастинковий рух, його називають *взаємодією Коріоліса*, за аналогією з коріолісовою потенціальною енергією у класичній механіці.

Існують різні варіанти узагальненої моделі ядра. Першою такою модельною теорією була узагальнена модель Бора-Моттельсона в

адіабатичному наближенні (адіабатична модель Бора-Моттельсона, 1950–1953). При розгляді властивостей ядер О. Бор і Б. Моттельсон вважали, що ядра можуть бути лише квадрупольно-деформованими та аксіально-симетричними в основному стані ($\beta = \beta_0$, $\gamma_0 = 0$, у сферичних ядрах $\beta_0 = 0$). При обчисленні характеристик збуджених станів враховувалися малі відхилення параметрів β, γ від їхніх рівноважних значень. О.С. Давидов і Г.Ф. Філіппов (1958) розробили теорію неаксіальних ядер, яка базується на припущенні, що деформовані ядра вже в основному стані можуть мати форму неаксіального еліпсоїда. При розгляді ротаційних станів використовувалося адіабатичне наближення (модель жорсткого неаксіального ротатора) і вважалося, що ядро не змінює форми при обертанні, тобто ротаційні спектри обчислювалися за умови $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_{eff}$, де γ_{eff} - деякий ефективний параметр неаксіальності. У моделі О. С. Давидова і О.О. Чабана (1960) була врахована неадіабатичність колективного руху за змінною β, а параметр неаксіальності замінювався деяким ефективним значенням γ_{eff} . Послідовний неадіабатичний метод обчислення характеристик збуджених рівнів ядер, що аксіально-симетричні в основному стані, розробили І. Фесслер і В. Грайнер (1962–1965) у запропонованій ними ротаційно-вібраційній моделі.

Підсумовуючи, можна сказати, що узагальнена модель дала змогу класифікувати різні типи колективних збуджень, зокрема, виділити вібраційні й ротаційні стани серед усіх збуджених станів ядер, пояснити їхні властивості та кількісно описати їхні певні характеристики.

3.8. Одночастинкові стани в деформованих ядрах

Статично деформовані ядра мають відмінні від нуля значення квадрупольних моментів, а тому ненульові параметри квадрупольної деформації форми ядра (див. підрозд. 1.7). У нульовому наближенні можна вважати, що вони є аксіально-симетричними й мають форму еліпсоїда обертання. Властивості симетрії одночастинкового потенціалу відповідають властивостям симетрії ро-

зподілу нуклонів. Якщо середній розподіл заряду і маси ядра та його рівноважна форма мають вигляд еліпсоїда обертання, то і середній одночастинковий потенціал можна вважати аксіальносиметричним з відмінною від нуля тільки квадрупольною деформацією або з переважним внеском квадрупольної деформації.

Унаслідок анізотропії середнього потенціалу його власні функції не можуть бути власними функціями квадрата оператора повного кутового моменту \hat{j}^2 і при переході від сферичного симетричного потенціалу до деформованого квантові числа l та j перестають зберігатися. Однак за наявності аксіальної симетрії з гамільтоніаном комутує оператор проекції $\hat{j}_{z'}$ (вісь Z' внутрішньої системи координат вибрано вздовж осі симетрії). Проекція m_j одночастинкового кутового моменту на вісь симетрії ядра залишається інтегралом руху. Разом з тим, рівні, що відповідають різним значенням $|m_j|$, уже мають різні значення енергій. Виродження за знаком m_j залишається завдяки рівноправності обох орієнтацій відносно осі симетрії.

В аксіально-деформованих ядрах квантове число проекції моменту m_j зазвичай позначають через K (іноді через Ω). Це пов'язано з тотожністю величини m_j з проекцією K повного спіну ядра на вісь симетрії у випадку, коли внутрішній кутовий момент ядра одночастинковий (див. рис. 3.15). В одночастинковому гамільтоніані деформованих ядер також враховується і спін-орбітальний зв'язок. Якби його не було, то гамільтоніан комутував би з проекціями орбітального $\hat{l}_{z'}$ і спінового $\hat{s}_{z'}$ моментів. При цьому всі рівні були б додатково двічі виродженими, а стани з $K_{\pm} = \Lambda \pm \Sigma$ мали б однакову енергію, де $\Lambda(\Sigma)$ – квантове число проекції орбітального (спінового) моменту. Для повної характеристики рівня в несферичному потенціалі додатково до K потрібні ще деякі квантові числа. У загальному випадку не вдалося знайти (подібний до величин n, j, l у сферичному потенціалі) набір чисел, який мав би наочне фізичне тлу-

мачення, тому часто одночастинкові рівні деформованого ядра лише нумерують у порядку зростання енергії.

В аналітичних обчисленнях зазвичай використовується несферичний потенціал Нільссона, який має вигляд потенціалу гармонічного осцилятора (3.85), але з різними значеннями частот уздовж осей симетрії

$$V_{ND}(r) = -V_0 + \frac{1}{2}m_p\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right) + C(\vec{l}\,\vec{s}) + D\vec{l}^2 \,. (3.152)$$

Тут і далі в цьому підрозділі для спрощення запису формул не вказані штрихи в позначеннях декартових осей X', Y', Z' внутрішньої системи координат.

В аксіально-деформованих ядрах Нільссон ввів параметр деформації б такий, що

$$\omega_x^2 = \omega_y^2 = \omega_{\perp}^2 = \omega_0^2 \left(\delta\right) \left(1 + \frac{2}{3}\delta\right), \quad \omega_z^2 = \omega_0^2 \left(\delta\right) \left(1 - \frac{4}{3}\delta\right), \quad (3.153)$$

де частота $\omega(\delta)$ визначається з умови нестисливості ядерної матерії, тобто з умови збереження об'єму ядра при зміні деформації δ . Якщо знехтувати в потенціалі (3.152) останнім доданком, то умова нестисливості приводить до співвідношення¹

$$\omega_x \, \omega_y \, \omega_z = \omega_0^3 \tag{3.154}$$

із $\omega_0 = 41 A^{-1/3} / \hbar$ для значення частоти при $\delta = 0$. Із рівняння (3.154) маємо

Осциляторні функції і відповідна густина розподілу нуклонів є функціями добутку *br*, де $b \sim \omega^{1/2}$ – масштабний множник. Звідси маємо, що умова сталої кількості нуклонів у сферичному ядрі з розподілом густини у вигляді сходинки фіксує не значення радіуса ядра R_0 , а величину bR_0 ; у моделі зі сферичним осциляторним потенціалом $R_0 \sim \omega_0^{-1/2}$. Аналогічно, у деформованому ядрі $R_{0,x} \sim \omega_x^{-1/2}$, $R_{0,y} \sim \omega_y^{-1/2}$, $R_{0,z} \sim \omega_z^{-1/2}$, тому об'єм сферичного ядра пропорційний $\omega_0^{-3/2}$, а деформованого – $(\omega_x \omega_y \omega_z)^{-1/2}$. Якщо прирівняти ці об'єми, то знаходимо умову (3.154).

¹⁷⁰

$$\omega_0^6(\delta) = \omega_0^6 \left(1 - \frac{4}{3} \delta^2 - \frac{16}{27} \delta^3 \right). \tag{3.155}$$

Параметр δ пов'язаний із параметром деформації $\beta_2 \equiv \beta_{20}$, що характеризує радіус деформованого ядра (див. підрозд. 1.5, 1.7) співвідношенням

$$\delta = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta_2 \cong 0,95 \ \beta_2.$$
 (3.156)

Інколи використовують параметр деформації ε і частоти $\overline{\omega}(\varepsilon)$, які визначені таким чином:

$$\omega_x^2 = \omega_y^2 = \omega_\perp^2 = \omega_0^2 \left(\varepsilon\right) \left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon\right), \quad \omega_z^2 = \omega_0^2 \left(\varepsilon\right) \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right). \quad (3.157)$$

Параметри б і є пов'язані співвідношеннями

$$\varepsilon = 2\delta + \delta^2 / 6 + O\left(\delta^3\right); \quad \omega_0(\varepsilon) = \omega_0\left[1 + \varepsilon^2 / 9 + O\left(\varepsilon^3\right)\right]. \quad (3.158)$$

Деформований потенціал Нільссона (3.152) можна подати в іншій формі. Якщо використати рівняння

$$2z^{2} - \left(x^{2} + y^{2}\right) = 4\sqrt{\frac{\pi}{5}}r^{2}Y_{20}\left(\theta,\phi\right),$$
(3.159)

тоді маємо

$$V_{ND} = V_N + V_\delta , \qquad (3.160)$$

де V_N – потенціал Нільссона сферичного ядра (3.89), а V_{δ} – частина потенціалу, що порушує сферичну симетрію

$$V_{\delta} = -\delta m_{\rm p} \omega_0^2 \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} r^2 Y_{20}(\theta, \phi).$$
(3.161)

Звідси одночастинковий гамільтоніан Нільссона матиме вигляд

$$h = h_G + V_\delta , \qquad (3.162)$$

де \hat{h}_G – гамільтоніан гармонічного осцилятора сферичного ядра з потенціальною енергією згідно з (3.85).

Для власних функцій (χ) та енергій гамільтоніана \hat{h} (як і для інших одночастинкових несферичних потенціалів деформованих ядер) не знайдено простого аналітичного виразу. Зазвичай при обчисленні власних значень і функцій використовують ме-

тод діагоналізації гамільтоніана на обмеженому базисі. Цей метод полягає в розкладі хвильової функції χ у ряд за деяким пов-

ним ортонормованим набором функцій $\phi^{(i)}$:

$$\chi = \sum_{i} a_{i} \varphi^{(i)}; \quad \int \varphi^{(i)*}(\vec{r}) \varphi^{(k)}(\vec{r}) d\vec{r} \equiv \langle \varphi^{(i)} | \varphi^{(k)} \rangle = \delta_{ik} . \quad (3.163)$$

При власному виборі базисних функцій $\varphi^{(i)}$ функцію χ визначає невелика кількість доданків, що суттєво спрощує розрахунки. Вибір базисних функцій, за якими розкладають χ , називають також вибором представлення для χ . Амплітуди a_i знаходять розв'язуванням системи лінійних однорідних рівнянь, що виникає після підстановки χ у вигляді (3.163) у рівняння Шредінгера з гамільноніаном (3.162). Спрощено отриману систему можна записати у вигляді

$$\sum_{i} a_{i} \left(\langle i' | \hat{h} | i \rangle - E_{i} \delta_{i'i} \right) = 0; \quad \langle i' | \hat{h} | i \rangle \equiv \int \varphi^{(i')*}(\vec{r}) \hat{h} \varphi^{(i)}(\vec{r}) d\vec{r}, (3.164)$$

де $\langle i' | \hat{h} | i \rangle$ – матричний елемент гамільтоніана \hat{h} на функціях $\varphi^{(i)}$. Власні значення одночастинкових енергій E_i знаходять з умови рівності нулю визначника системи (3.164).

Для дослідження особливостей розв'язків рівняння Шредінгера з гамільтоніаном (3.161), (3.162) слід розглянути деякі граничні випадки. Якщо деформації дуже малі, то розв'язки (3.164) майже збігаються з розв'язками для сферично-симетричного гамільтоніана. Потенціал V_{δ} можна трактувати як мале збурення, тоді поправка до енергії від його внеску дорівнюватиме діагональному матричному елементу від V_{δ} за одночастинковими функціями сферичного ядра ψ_{im_i} , а саме:

$$\Delta E_{NIjK} = \langle \Psi_{jK} | V_{\delta} | \Psi_{jK} \rangle = -\delta \frac{\left(N + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega_0}{6j(j+1)} \left[j(j+1) - 3K^2 \right], (3.165)$$

де *N* – головне квантове число, що визначає енергію одночастинкового стану у сферичному гармонічному осциляторі (див. далі).

Із виразу (3.165) випливає, що рівні з різними значеннями проекцій *j* розщеплюються зі зростанням деформації ($\delta > 0$) енергії рівнів з малими *K* ($3K^2 < j(j+1)$) зменшуються, у той час як енергії рівнів з великими *K*, зокрема з *K* = *j*, збільшуються. Енергії рівнів з *j* = 1/2 ($s_{1/2}, p_{1/2}$) при малих деформаціях взагалі не змінюються, оскільки матричний елемент $\langle \psi_{1/2,1/2} | Y_{20} | \psi_{1/2,1/2} \rangle$ дорівнює нулю згідно з правилами відбору за кутовим моментом. Зазначимо, що при *j* > 1/2 усі рівні з *K* = 1/2 обов'язково зміщуються вниз.

В іншому граничному випадку достатньо великих деформацій також досить легко визначити суттєві особливості розв'язку (3.164). У першому наближенні можна вважати, що внесок спінорбітального компонента в загальний потенціал не залежить від деформації, тому при великих деформаціях внесок потенціалу V_{δ} буде набагато більшим за взаємодію $C(\hat{l}\hat{s}) + D\hat{l}^2$, яку можна вважати малим збуренням. Разом з тим, якщо впливом спінорбітального зв'язку знехтувати, то всі три оператори проекції повного K, орбітального Λ і спінового Σ моментів комутують як з гамільтоніаном, так і між собою. Звідси випливає, що у випадку достатньо великих деформацій кожна хвильова функція може характеризуватися трьома квантовими числами: K, Λ , Σ ($K = \Lambda + \Sigma$).

При великих деформацій, коли доданками $C(\hat{l}\,\hat{s})$ і $D\hat{l}^2$ можна знехтувати, розв'язок зручніше шукати не у сферичній системі координат, а в циліндричній або навіть декартовій. В останньому випадку гамільтоніан \hat{h} переходить у гамільтоніан анізотропного осцилятора й є сумою трьох одновимірних осциляторів, що описують коливання частинки вздовж кожної з декартових осей координат. Кожний збуджений стан може бути охарактеризований числами N_x , N_y , N_z квантів коливань з енергіями $\hbar\omega_x$, $\hbar\omega_y$, $\hbar\omega_z$, де нижній індекс визначає вісь, уздовж якої рухається частинка. Повна енергія анізотропного осцилятора має вигляд $E = N_x \hbar\omega_x + N_y \hbar\omega_v + N_z \hbar\omega_z$. Числа N_x , N_y , N_z є

кількістю вузлів хвильової функції на відповідній осі. Іноді їх називають кількістю коливань уздовж відповідних осей. У випадку сферичного гармонічного осцилятора сума цих чисел є головним квантовим числом $N = N_x + N_y + N_z$, що визначає енергію $E_N = E_{jIN} = \hbar \omega_0 (N + 3/2)$ одночастинкового стану. Якщо частоти коливань уздовж осей X і Y збігаються, то два взаємно перпендикулярних когерентних коливання можна скласти. Тоді повне збудження можна подати як обертання у площині (X,Y) зі значенням кутового моменту Λ і коливання в напрямку вздовж осі Z. Така картина відповідає розділенню змінних у гамільтоніані анізотропного осцилятора $(\omega_x = \omega_y)$ у циліндричній системі координат.

Таким чином, у випадку достатньо великих деформацій кожна хвильова функція може бути охарактеризована такими квантовими числами: N – головне квантове число; N_z – кількість квантів з енергією $\hbar\omega_z$; K, Λ , Σ – проекції повного, орбітального і спінового моментів. Але не всі ці квантові числа незалежні. Наприклад, знаючи N, N_z і K, можна знайти Λ і Σ . Дійсно, з властивостей хвильової функції тривимірного осцилятора випливає співвідношення $(-1)^N = (-1)^{N_z + \Lambda}$, тобто Λ буде парним чи непарним залежно від $N - N_z$. Оскільки $\Lambda = K - \Sigma$, то, знаючи парність величини Λ і значення проекції K, можна визначити Λ і Σ .

При дуже великих деформаціях, коли $\omega_{\perp} \gg \omega_z$, можна легко знайти послідовність рівнів і приписати їм квантові числа. Оскільки квантове число осциляторного потенціалу N дорівнює $N_x + N_y + N_z$, то мінімальна енергія рівня відповідає мінімальним значенням N_x , N_y ($N_x = N_y = 0$) і максимальному значенню N_z , а саме: $N_z = N$. Оскільки коливання вздовж осей X, Yпри цьому відсутні, то $\Lambda = 0$ і $K = \Sigma = 1/2$. Більш високо розташовані рівні з K = 1/2 відповідають значенням $N_z = N - 1$, N - 2 і т. д. При K = 3/2 найнижчий рівень має $N_z = N - 1$ ос-

циляторних квантів і зі збільшенням енергії рівня значення n_z зменшується на одиницю.

Таким чином, при великих деформаціях усі одночастинкові стани, що відповідають гамільтоніану (3.162), можна класифікувати за трьома незалежними квантовими числами: N, N_z , K. Разом з тим, інколи також використовують і "залежні" квантові числа Λ , а іноді й Σ . Ці квантові числа зазвичай наводять у такій послідовності: $K^{\pi}[NN_z\Lambda]$ або $K[NN_z\Lambda]$, оскільки значення парності дорівнює $\pi = (-1)^{N_z+\Lambda}$. Іноді замість K символічно вказують значення Σ і використовують позначення $[NN_z\Lambda]\uparrow$, якщо $K = \Lambda + 1/2$ та $[NN_z\Lambda]\downarrow$, якщо $K = \Lambda - 1/2$. Замість стрілок, що позначають знак Σ спіну, у літературі зустрічається позначення $[NN_z\Lambda]+$ для $K = \Lambda + 1/2$ і $[NN_z\Lambda]-$ для $K = \Lambda - 1/2$.

Приклади схем одночастинкових станів у аксіальносиметричному потенціалі Нільссона для протонів і нейтронів ілюструють рис. 3.10 і 3.11. На рис. 3.10 у дужках наведено магічні числа, а замість значень параметрів потенціалу C, D вказано значення параметрів χ і μ :

$$\chi = -2C / \omega_0, \quad \mu = 2D / C,$$
 (3.166)

і параметр деформації

$$\eta = \frac{\delta}{\chi} \frac{\omega(\delta)}{\omega_0} = \frac{\delta}{\chi} \left(1 - \frac{4}{3} \delta^2 - \frac{16}{27} \delta^3 \right)^{-1/6}.$$
 (3.167)







Рис. 3.11. Нейтронні орбіти в потенціалі Нільссона для ядер з кількістю нейтронів в інтервалі 82 < N < 126

У досконалішій одночастинковій оболонковій моделі деформованого ядра використовують середній ядерний потенціал більш реалістичної форми, ніж потенціальна яма гармонічного осцилятора з нескінченним відштовхуванням на великих відстанях. Як і у випадку сферично-симетричних ядер таким потенціалом є середній потенціал у формі Вудса–Саксона, який має скінченну глибину та розмитий край. Для аксіально-симетричних ядер у вигляді еліпсоїда обертання він є сумою двох компонентів:

центрального -

$$V(r,\beta_{2},\theta) = -V_{0} \left\{ 1 + \exp\left[\frac{r - R_{0}\left(1 + \beta_{2}Y_{20}\left(\theta\right)\right)}{a}\right] \right\}^{-1}$$
(3.168)

і спін-орбітального –

$$V_{ls}(r,\beta_2,\theta) = 2b \left[\vec{\hat{l}} \times \vec{\hat{s}} \right] \vec{\nabla} V(r,\beta_2,\theta), \qquad (3.169)$$

де *b* – деяка стала. Кулонівський потенціал, який необхідно враховувати при обчисленні одночастинкових протонних станів, має вигляд *V*(*r* β₂ θ) =

$$=\frac{3(Z-1)e^{2}}{4\pi R_{0}^{3}}\int\frac{dr}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\left\{1+\exp\left[\frac{r-R_{0}\left(1+\beta_{2}Y_{20}\left(\theta\right)\right)}{a}\right]\right\}^{-1}.$$
(3.170)

Одночастинкові стани в потенціалі Вудса–Саксона (3.168) – (3.170) часто також класифікують за допомогою набору квантових чисел $K^{\pi}[NN_{z}\Lambda]$. Поведінка енергій одночастинкових станів у несферичному потенціалі Вудса–Саксона подібна до обчисленої в потенціалі Нільссона. На практиці матричні елементи периферійних процесів на поверхні ядра, які обчислено із хвильовими функціями потенціалу Нільссона і Вудса–Саксона, можуть значно відрізнятися один від одного. Використання в обчисленнях структури ядра одночастинкових функцій потенціалу Вудса–Саксона значно поліпшує узгодження результатів з експериментом, особливо в тих випадках, коли головну роль відіграють процеси на поверхні ядра. Це пояснюється тим, що хвильові функції гармонічного потенціалу Нільссона (3.152) через його нескінченне відштовхування на великих відстанях мають неадекватну поведінку поблизу поверхні ядра.

У деформованих ядрах, як і у сферичних, також спостерігається оболонкова структура, тобто в одночастинковому спектрі існують послідовні згущення (оболонки) і розрідження одночастинкових ядерних рівнів. Особливості прояву ядерних оболонок у деформованих ядрах можна спостерігати на рис. 3.12, де показано рівні в потенціалі гармонічного осцилятора для витягнуто-

го еліпсоїда обертання без урахування спін-орбітальної взаємодії, яка обчислена з різними значеннями параметра деформації β_2 . Енергії наведено в одиницях $\hbar\omega_0$, на горизонтальній осі зверху вказано відношення півосей еліпсоїда. При нульовій деформації маємо послідовність вироджених рівнів, що приводить до магічних чисел: 2, 8, 20, 40 тощо. Ці числа стандартні для сферично-симетричного осциляторного потенціалу без урахування спін-орбітальної взаємодії. Як бачимо, при деформаціях, які відповідають відношенням довжин великої півосі *a* еліпсоїда і малої півосі *b* з a/b = 3/2 і 2, також з'являються згущення (оболонки) і розрідження (енергетичні інтервали між оболонками) одночастинкових рівнів. При a/b = 2 послідовність магічних чисел така: 2, 4, 10, 16 і т. д. Ці числа відрізняються від магічних чисел у сферичних ядрах.



Рис. 3.12. Схема рівнів гармонічного осцилятора для витягнутого еліпсоїда обертання

179

Зауважимо, що хоча при врахуванні спін-орбітальної взаємодії послідовності оболонок і магічних чисел будуть іншими, проте якісна картина схеми рівнів зберігається.

Оболонкова структура деформованих ядер проявляється, зокрема у таких фундаментальних явищах, як аномалії в питомій енергії зв'язку, несферичність форми ядер рідкісноземельних елементів і актиноїдів, існування ізомерів форми, що розпадаються спонтанним поділом тощо.

Слід зазначити, що оболонкова структура ядер – явище універсальне, вона є результатом загальної закономірності розподілу одночастинкових рівнів у тривимірній потенціальній ямі й пов'язана з особливостями руху частинок у самоузгодженому середньому потенціалі. Згідно з квазікласичною теорією одночастинкового руху положення центрів енергії пучків рівнів, що формують оболонки, визначаються тривимірними класичними періодичними траєкторіями та обумовлені правилами квантування тривимірного руху в обмеженому потенціалі з урахуванням багаторазового відбиття від стінок (В. М. Струтинський, О. Г. Магнер та ін., 1976–2002).

3.9. Вібраційні стани ядер

Розглянемо вібраційні коливання поверхні сферичних ядер, тобто ядер з нульовими значеннями параметрів рівноважних деформацій $\overline{\beta}_{\lambda\mu} = 0$. В адіабатичній узагальненій моделі у сферичних ядрах як вираз для енергії вібраційних збуджень можна використати квантовий аналог формул (3.110) – (3.112) для повної колективної енергії в лабораторній системі координат. Згідно з адіабатичним наближенням до узагальненої моделі (див. (3.149)), внесок ротаційної енергії в повну енергію колективного руху є енергією обертання ядра з рівноважними значеннями параметрів деформації. Оскільки гідродинамічні моменти інерції сферичного ядра дорівнюють нулю (див. (3.144)), то його ротаційна енергія є нульовою, а повна енергія збігається з вібраційною. Цей висновок також узгоджується з розглядом обертань з погляду квантової механіки. Сферично-симетричне ядро інваріантне відносно обертання навколо довільної осі, що проходить через його центр. Разом з тим, ротаційна енергія навколо такої
осі дорівнює нулю, оскільки обертання не може нічого змінити в даній системі й не існує ніяких умов квантування колективного руху, що привели б до зміни енергії.

У випадку сферичних ядер усі орієнтації ядра в просторі рівноправні, тому масовий параметр і коефіцієнт жорсткості у формулах (3.111) і (3.112) не залежать від індексу μ , $B_{\lambda\mu} = B_{\lambda}$, $C_{\lambda\mu} = C_{\lambda}$, і вираз для енергії (3.110) набуває вигляду

$$E_{\text{vib}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \ge 2} \sum_{\mu = -\lambda}^{\lambda} \left(B_{\lambda} \left| \dot{\alpha}_{\lambda \mu} \right|^2 + C_{\lambda} \left| \alpha_{\lambda \mu} \right|^2 \right).$$
(3.171)

де $\alpha_{\lambda\mu}(t)$ – параметри динамічної деформації поверхні ядра (3.103).

Значення B_{λ} і C_{λ} залежать від методу опису ядерного середовища та його характеристик. Зокрема, якщо ядро розглядати як краплину ідеальної нестисливої рідини з рівномірно розподіленим зарядом, то маємо так звані гідродинамічні вирази для масового параметра та коефіцієнта жорсткості:

$$B_{\lambda} = m \frac{\rho_0}{\lambda} R_0^5 = \frac{1}{\lambda} \frac{3}{4\pi} Am R_0^2 \equiv B_{\lambda}^{(\text{hydr})} , \qquad (3.172)$$

$$C_{\lambda} = (\lambda - 1)(\lambda + 2)\sigma R^2 - \frac{3}{2\pi} \left[(\lambda - 1)(2\lambda + 1) \right] \frac{Z^2 e^2}{R_0} \equiv C_{\lambda}^{(\text{hydr})},$$

де ρ_0 – густина ядерної рідини; σ – коефіцієнт поверхневого натягу, який визначає коефіцієнт $a_2 = 4\pi\sigma R^2 A^{-2/3} \equiv 4\pi\sigma r_0^2 \cong 20$ MeB поверхневої енергії у формулі Вейцзекера (1.17): $\sigma \approx 1 \cdot \text{MeB/}\phi\text{M}^2$. Перший компонент коефіціента жорсткості C_{λ} зумовлений зміною поверхневої енергії краплини, а другий – кулонівською взаємодією; у формулах (3.142), (3.145) коефіцієнт жорсткості квадрупольних коливань позначався як C:

$$C_{\lambda=2} \equiv C = C_{\beta\beta} (\beta = 0, \gamma = 0) \,.$$

Для того, щоб перейти від виразу (3.171) для енергії до виразу для квантового гамільтоніана $\hat{H}_{\rm vib}$, необхідно ввести узагальнені імпульси $\hat{\pi}_{\lambda\mu}$:

$$\hat{\pi}_{\lambda\mu} \equiv \partial E_{\rm vib} / \partial \dot{\alpha}_{\lambda\mu} = B_{\lambda} \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^* , \qquad (3.173)$$

які канонічно спряжені узагальненим координатам α_{λµ}. Тоді квантовий вібраційний гамільтоніан набуває вигляду

$$\hat{H}_{\text{vib}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \ge 2} \sum_{\mu = -\lambda}^{\lambda} \left(\frac{1}{B_{\lambda}} \left| \hat{\pi}_{\lambda \mu} \right|^2 + C_{\lambda} \left| \hat{\alpha}_{\lambda \mu} \right|^2 \right), \qquad (3.174)$$

де $\hat{\alpha}_{\lambda\mu}$ – оператори узагальнених координат, які визначають координати $\alpha_{\lambda\mu}$. Далі вважатимемо, що для операторів $\hat{\pi}_{\lambda\mu}$ і $\hat{\alpha}_{\lambda\mu}$, як і для операторів імпульсу та координати у звичайному тривимірному просторі, виконуються також комутаційні співвідношення:

$$\left[\hat{\pi}_{\lambda\mu},\hat{\alpha}_{\lambda'\mu'}\right] = -i\hbar\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\mu\mu'}, \quad \left[\hat{\pi}_{\lambda\mu},\hat{\pi}_{\lambda'\mu'}\right] = \left[\hat{\alpha}_{\lambda\mu},\hat{\alpha}_{\lambda'\mu'}\right] = 0. \quad (3.175)$$

Із курсу квантової механіки відомо, що енергетичний спектр вібраційних станів, який описується гамільтоніаном (3.174), виявляється еквідистантним і має вигляд

$$E_{\text{vib}} = \sum_{\lambda \ge 2} \sum_{\mu = -\lambda}^{+\lambda} \hbar \omega_{\lambda} \left(N_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\lambda \ge 2} \hbar \omega_{\lambda} \left(N_{\lambda} + \frac{2\lambda + 1}{2} \right), \quad (3.176)$$

де додатні числа $N_{\lambda} \ge 0$ визначають кількість елементарних збуджень мультипольності λ із характеристичною енергією

$$\hbar\omega_{\lambda} = \hbar\sqrt{C_{\lambda} / B_{\lambda}} \,. \tag{3.177}$$

Згідно з квантовими уявленнями збудження мультипольності λ з $N_{\lambda} = 1$ слід трактувати як квазічастинку коливального типу (фонон) зі спіном $\vec{I}_{\lambda} = \vec{\lambda}$ і парністю $(-1)^{\lambda}$. Стан з $N_{\lambda} = N$ є виродженим станом з N фононами зі значеннями спінів, які знаходять із правил трикутника при векторному додаванні однофононних спінів ($\vec{I} = \sum N_{\lambda}\vec{I}_{\lambda}$) без подвійного врахування тотожних станів. Величина $(2\lambda + 1)\hbar\omega_{\lambda} / 2 \equiv E_0$ у співвідношенні (3.176) є енергією нульових коливань і визначає енергію стану з мультипольністю λ , спектр коливань кожної мультипольності є еквідистантним за відсутності коливань.

Розглянемо ядра з квадрупольною динамічною деформацією поверхні ($\lambda = 2$): спін і парність фонона будуть дорівнювати $I^{\pi} = 2^+$, а енергетичний спектр має вигляд

$$E_N = \left(N + \frac{5}{2}\right)\hbar\omega_{2^+}, \quad N = 0, 1, 2, 3, \dots,$$
 (3.178)

де, наприклад, для ядра ${}^{114}_{48}$ Gd енергія $\hbar\omega_{2^+} \cong 0,5$ MeB. У даному випадку число N у формулі (3.178) описує кількість фононів, кожен з яких має момент кількості руху, що дорівнює двом, та енергію $\hbar\omega_{2^+}$. В основному стані ядро, яке має спін $I^{\pi} = 0^+$ та енергію $E_0 = (5/2)\hbar\omega_{2^+}$ фононів, не має (N = 0). У першому збудженому стані є один фонон (N = 1), спін стану дорівнює 2^+ , а енергія $E_{N=1} = \hbar\omega_{2^+} + E_0$.

У другому збудженому стані є два фонони (N = 2), і тому його енергія дорівнює $E_{N=+2} = 2\hbar\omega_{2^+} + E_0$. Обчислимо можливі значення спінів вироджених двофононних станів. Без урахування тотожності квадрупольних фононів векторне правило додавання моментів кількості руху ($0 \le I \le 4$) приводить до таких значень спінів: I = 0, 1, 2, 3, 4. Із цього набору необхідно виключити значення, які пов'язані з подвійним урахуванням однакових станів. Позначимо m_1 і m_2 – проекції на вісь Z моменту кількості руху кожного з двох квадрупольних фононів. Відповідно до правил алгебри кутових моментів ці проекції можуть набувати значень 0, $\pm 1, \pm 2$, а значення проекції спіну двофононного стану дорівнює $M = m_1 + m_2$. Однофононні стани, які відрізняються обміном значень проекцій m_1 та m_2 , тотожні; вони формують один і той самий двофононний стан з однаковим значенням M і їх необхідно врахувати лише один раз.

Найпростішим способом виключити таке подвійне врахування тотожних станів можна за допомогою так званої таблиці Слетера, у якій наведено всі можливі значення результуючої проекції M. Унаслідок того, що два стани, які відрізняються обміном m_1 і m_2 , є одним і тим самим станом, необхідно відкинути зна-

чення M, що розташовані нижче діагоналі в таблиці Слетера. Значення на діагоналі відповідають двом фононам, що перебувають в одному й тому самому стані. Такі стани дозволені, оскільки фонони, як відомо, підпорядковуються статистиці Бозе-Ейнштейна. Після виключення значень M, що розташовані нижче діагоналі, отримуємо значення, які відмічені жирним шрифтом у табл. 3.3. Дозволені величини M можна подати у вигляді трьох наборів: 1) $M = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0; 2) M = \pm 2, \pm 1, 0; 3) M = 0$. Оскільки значення проекцій не мають перевищувати значення повного кутового моменту ($|M| \le I$), то маємо, що перший набір відповідає спіну I = 4, другий – I = 2, а третій – I = 0.

Таблиця 3.3. Значення проекцій повного кутового моменту М (таблиця Слетера)

$m_1 m_2$	-2	-1	0	+1	+2
-2	-4	-3	-2	-1	0
-1	-3	-2	-1	0	+1
0	-2	-1	0	+1	+2
+1	-1	0	+1	+2	+3
+2	0	+1	+2	+3	+4

Таким чином, згідно з моделлю поверхневих коливань, у сферичних ядрах має існувати триплет (квадрупольних $\lambda = 2$) вібраційних станів з $I = 0^+, 2^+, 4^+$ з енергією, яка приблизно вдвічі перевищує енергію першого рівня 2^+ . Це спостерігається у сферичних парно-парних ядрах. Відповідний приклад наведено на рис. 3.13.



Рис. 3.13. Низькоенергетичні вібраційні рівні в ядрі $^{76}_{34}$ Se

Зауважимо, що хоча другий збуджений стан для більшості сферичних парно-парних ядер і характеризується значеннями спіну і парності, які дорівнюють значенням 0⁺,2⁺ та 4⁺, але здебільшого збуджені триплетні стани в ядрах не спостерігаються. Таку розбіжність можна пояснити загалом, якщо врахувати вплив неадіабатичності, ангармонічний компонент у вібраційному гамільтоніані, а також можливість флуктуації параметрів B_{λ} , C_{λ} унаслідок впливу оболонкових ефектів і парних кореляцій. Для більшості ядер, що мають рівноважну сферичну форму, перший збуджений рівень має спін і парність 2⁺, тобто відповідає колективному вібраційному квадрупольному стану. Енергія $E_{2^+} \equiv E_{N_{2^+}=1}$ цього рівня в середньому зменшується зі зростанням масового числа А. Зокрема, нехтуючи кулонівським компонентом жорсткості, згідно з адіабатичною узагальненою моделлю, що використовує гідродинамічні вирази для параметрів, маємо

$$E_{2^{+}}^{(\text{hydr})} \equiv \hbar \omega_{2^{+}}^{(\text{hydr})} = \hbar \sqrt{\frac{C_{\lambda}^{(\text{hydr})}}{B_{\lambda}^{(\text{hydr})}}} \cong A^{-1/2} .$$
(3.179)

Цей ефект – зменшення середнього значення енергії E_{2^+} у сферичних парно-парних ядрах зі зростанням масового числа – спостерігається експериментально (рис. 3.14), але з іншою залежністю від кількості нуклонів. Для не дуже важких ядер маємо систематику

$$E_{2^+}^{(\exp)} \cong 30 A^{-2/3}$$
. (3.180)

Середні значення найнижчих енергій квадрупольних станів немагнітних ядер приблизно в п'ять разів менші від гідродинамічних значень. Загалом коливальну модель з гамільтоніаном (3.174) гармонічного осцилятора можна використовувати для якісного аналізу середніх властивостей найнижчих збуджених вібраційних станів у парно-парних сферичних ядрах.



з 155 < A < 190 та 225 < A < 250

У деформованих ядрах також можливі коливання поверхні навколо рівноважної несферичної форми. Якщо у сферичних ядрах коливання мультипольності $\lambda \in (2\lambda + 1)$ -разів вироджені

й значення спіну однофононних збуджень збігається з мультипольністю коливань, то в деформованих ядрах виродження знімається. Іншими словами, можливі поверхневі коливання однакової мультипольності λ з різними енергіями і стани неможливо класифікувати в термінах фононів. Уперше вібраційні коливання в квадрупольно-деформованих ядрах дослідили в адіабатичному наближенні Бор і Моттельсон. Вони розглядали стани з енергією, меншою від енергії одночастинкових збуджень, і вважали, що ядро в основному стані аксіально-симетричне ($\beta_0 \neq 0, \gamma_0 = 0$), а коливальні стани зумовлені малими відхиленнями параметрів β , γ від рівноважних значень β_0 , γ_0 . Після квантування виразу (3.143) для енергії коливань класичної краплини вібраційний гамільтоніан, що описує малі квадрупольні коливання деформованого ядра, був отриманий у вигляді двох доданків:

$$\hat{H}_{\rm vib} = \hat{H}^{\beta}_{\rm vib} + \hat{H}^{\gamma}_{\rm vib} , \qquad (3.181)$$

де перший доданок відповідає поздовжнім аксіальносиметричним коливанням (β-коливання):

$$\hat{H}^{\beta}_{\text{vib}} = -\frac{\hbar^2}{2\overline{B}_{\beta}\beta^4} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\beta^4 \frac{\partial}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{2}\overline{C}_{\beta}(\beta - \beta_0)^2.$$
(3.182)

Другий доданок \hat{H}^{γ}_{vib} – гамільтоніан поперечних γ -коливань, що порушують аксіальну симетрію ядра:

$$\hat{H}_{\rm vib}^{\gamma} = -\frac{\hbar^2}{2\overline{B}_{\beta}\beta_0^2} \left[\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) - \frac{K^2}{4\gamma^2} \right] + \frac{1}{2} \beta_0^2 \overline{C}_{\gamma} \gamma^2 .$$
(3.183)

Тут \overline{C}_{β} , \overline{C}_{γ} – параметри жорсткості згідно з (3.143) для β - і γ коливань, відповідно; K – проекція повного кутового моменту ядра на внутрішню вісь симетрії (Z').

У деформованих ядрах завдяки наявності обертального кутового моменту (підрозд. 3.10) кутовий момент коливань не збігається з повним кутовим моментом. Тому в деформованих ядрах кутовий момент не зберігається, але зберігається його проекція на внутрішню вісь симетрії, оскільки вона збігається з проекцією K повного кутового моменту. Останнє обумовлено рівністю нулю проекції обертального моменту на внутрішню вісь симет-

рії в аксіально-симетричних ядрах. Коливання, що пов'язані зі зміною β (β -коливання), зберігають аксіальну симетрію ядра. Вони не створюють обертального моменту з компонентом уздовж осі симетрії, тому їм відповідають стани з проекціями $K^{\pi} = 0^+$. Коливання, що пов'язані зі зміною γ (тобто $\beta_{2,\pm 2}$) називають γ -коливаннями. Їм відповідають стани з $K^{\pi} = 2^+$. При γ -коливаннях аксіальна симетрія ядра порушується. Енергія вібраційних станів аксіально-деформованого ядра складається із двох компонентів:

$$E_{\rm vib} = E_{\rm vib}^{\beta} + E_{\rm vib}^{\gamma} , \qquad (3.184)$$

де $E_{\rm vib}^{\beta}$ – енергія β -коливань із $K^{\pi} = 0^+$,

$$E_{\rm vib}^{\beta} = \left(n_{\beta} + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_{\beta}, \quad \omega_{\beta} = \sqrt{\overline{C}_{\beta} / B_2}, \quad n_{\beta} = 0, 1, 2, 3, \dots, (3.185)$$

а $E_{\rm vib}^{\gamma}$ – енергія γ -коливань з $K^{\pi} = 2^+$:

$$E_{\text{vib}}^{\gamma} = \left(2n_{\gamma} + 1 + \frac{|K|}{2}\right)\hbar\omega_{\gamma},$$

$$\omega_{\gamma} = \sqrt{\overline{C}_{\gamma} / B_2}, \quad n_{\gamma} = 0, 1, 2, 3, \dots$$
(3.186)

3.10. Ротаційні стани ядер

Якщо розглянути рух власної системи координат відносно лабораторної, то в адіабатичному наближенні гамільтоніан системи матиме вигляд суми вібраційного гамільтоніана вигляду (3.174) і ротаційного гамільтоніана \hat{H}_{rot} , що збігається з оператором \hat{T}_{rot} кінетичної енергії обертання системи (підрозд. 3.7). Оператор \hat{T}_{rot} залежить лише від кутового моменту \vec{R} обертання ядра як цілого. У краплинній моделі ядра одночастинковий рух нуклонів не враховується, тому обертальний момент \vec{R} збігається з повним моментом кількості руху \vec{I} . В узагальненій моделі ядра одночастинковий рух нуклонів враховується, а пов-

ний момент \vec{I} складається з моменту обертання \vec{R} і внутрішнього кутового моменту \vec{j}_{in} , зумовленого одночастинковим рухом нуклонів у деформованій потенціальній ямі (рис. 3.15). Оскільки зберігається лише повний момент, то момент обертального руху може зберігатися лише при нульовому внутрішньому моменті.



Рис. 3.15. Схема зв'язку кутових моментів для витягнутого еліпсоїда ($\beta_2 > 0$)

Зазвичай ротаційний компонент \hat{H}_{rot} гамільтоніана узагальненої моделі ядра ототожнюють з компонентом оператора обертання \hat{T}_{rot} (підрозд. 3.7), що не залежить від квадрата внутрішнього кутового моменту: $\hat{H}_{rot} = \hat{T}_{rot} (\vec{R} \cong \vec{I})$. Інші компоненти оператора обертання стосуються внутрішнього гамільтоніана \hat{H}_{int} і взаємодії Коріоліса \hat{H}_{corr} , що визначає вплив обертання на одночастинковий рух. Як колективні координати, що описують обертальні (ротаційні) рухи ядра, використовують три кути Ейлера $\{\theta_{\alpha}\} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$. Ці кути (як зазначено в підрозд. 3.7) описують взаємну орієнтацію лабораторної (нерухомої) системи декартових координат K(X,Y,Z) відносно власної (рухомої) системи K'(X',Y',Z'):

$$\vec{I} = \vec{R} + \vec{j}_{in}, \quad \vec{R}^2 = \vec{j}_{in}^2 + \vec{I}^2 - 2\vec{j}_{in}\vec{I} .$$
 (3.187)

У багатьох випадках можна припустити, що ядро аксіальносиметричне і має форму еліпсоїда. Прикладом можуть бути ядра (155 < *A* < 190) рідкоземельних елементів та актиноїдів (225 < A < 250), яким наближено можна приписати таку форму, оскільки їхні квадрупольні моменти додатні (див. підрозд. 1.7). У таких ядрах проекція $I_{Z'} = K$ повного моменту I на вісь симетрії є константою руху, а кутовий момент обертання R перпендикулярний до осі симетрії. Схему зв'язку кутових моментів у випадку обертання ядра з поверхнею у вигляді витягнутого еліпсоїда ($\beta_2 > 0$) показано на рис. 3.15. Таке ядро обертається навколо осі, що перпендикулярна до осі симетрії. Схему обертання наведено на рис. 3.16, а.



Рис. 3.16. Схема обертання ядра з поверхнею у вигляді витягнутого еліпсоїда (**Z**' – вісь симетрії ядра)

Аксіально-симетричне ядро інваріантне щодо обертання навколо осі симетрії (рис. 3.16, δ). Згідно з квантовою механікою обертання навколо цієї осі відсутнє, оскільки воно не може нічого змінити в даній системі й неможливо також ввести ніякі умови квантування колективного руху, що привели б до зміни енергії. Разом з тим, таке ядро не інваріантне щодо обертань навколо осі, що лежить у площині X'0Y' (рис. 3.16, δ). Це дає змогу ввести відповідні умови квантування і визначити ротаційну енергію. При обертанні аксіально-симетричне ядро має вигляд або (1), або (2), що зображені на рис. 3.16, δ , і проекція його кутового моменту на вісь симетрії дорівнює нулю $R_{s'} = 0$. Такий роз-

гляд обертань повністю узгоджується з описом за краплинною моделлю ядра (див. (3.144)).

Повна хвильова функція Ψ_M^I ядра із фіксованими значеннями повного кутового моменту та його спіну є суперпозицією Dфункцій Вігнера:

$$\Psi_M^I = \sum_K \varphi_K(q) D_{MK}^I(\{\theta_\alpha\}) , \qquad (3.188)$$

де функції $\varphi_K(q) \sim \chi \varphi_{vib}$ описують внутрішній і вібраційний рухи в ядрі, що обертається з повним кутовим моментом I. Функції Вігнера D^I_{MK} описують поворот системи координат у тривимірному просторі й є власними функціями операторів $\vec{I}^2, I_z, I_{z'}$ з власними значеннями I, M, K, відповідно (див. (3.106) – (3.109)). Тому вони є власними функціями оператора обертань $\widehat{T}_k = \frac{1}{2} \sum_{l=1,2} \frac{I_l^2}{2F_i}$.

Ядро із формою еліпсоїда обертання дзеркально-симетричне відносно площини X'0Y' (рис. 3.15, 3.16), що перпендикулярна до осі симетрії ядра й проходить через його центр, тобто інваріантне щодо обертання на 180° навколо осі X' або Y'. При таких обертаннях узагальнені сферичні функції перетворюються за законом $D_{MK}^{I} \Rightarrow (-1)^{I+K} D_{M-K}^{I}$. Унаслідок інваріантності внутрішні стани такого ядра будуть виродженими за знаком проекції K, а хвильовим функціям $\varphi_{K}(q)$, $\varphi_{\overline{K}}(q)$, що описують внутрішні стани зі значеннями проекцій K та -K, відповідає однакова енергія. Звідси повна нормована хвильова функція, що є суперпозицією функцій станів з різними знаками K, набуває вигляду

$$\Psi_{M}^{I} = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^{2}(2-\delta_{K,0})}} \times \left[D_{MK}^{I}(\{\theta_{\alpha}\})\phi_{K}(q) + (-1)^{I+K} D_{M-K}^{I}(\{\theta_{\alpha}\})\phi_{\overline{K}}(q) \right]. \quad (3.189)$$

За даного значення проекції K, що визначається властивостями внутрішнього стану ядра, можливі обертальні енергетичні рівні з різними значеннями повного спіну I. Оскільки величина K є проекцією цього спіну, то її значення не можуть перевищувати величини спіну, $|K| \le I$, і тому

$$I = |K|, |K| + 1, |K| + 2, \dots$$
 (3.190)

Стани ядра з однаковими значеннями модуля проекцій K об'єднуються в так звані ротаційні смуги, кожний із них розрізняється тільки характером ("швидкістю") обертального руху і має однакову внутрішню структуру, що визначається функцією $\varphi_K(q)$. Набір можливих значень спінів у смузі залежить від співвідношення між внутрішніми хвильовими функціями φ_K і $\varphi_{\overline{K}}$. При K = 0 ці функції збігаються з точністю до фазового множника $r = \pm 1$: $\varphi_{\overline{K}} = r \varphi_K$, тому хвильова функція (3.189) буде відмінною від нуля лише за умови $r(-1)^I = 1$. Таким чином, при K = 0 ядро може мати тільки такі значення спінів, які задовольняють умову $(-1)^I = r$. У цьому випадку можливі дві ротаційні смуги парності $\pi = (-1)I$:

$$I = 0^{+}, 2^{+}, 4^{+}, \dots, r = \pi = +1;$$

$$I = 1^{-}, 3^{-}, 5^{-}, \dots, r = \pi = -1,$$
(3.191)

які відповідають парним і непарним станам. Нормована хвильова функція при *K* = 0 має вигляд

$$\Psi_{M}^{I} = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^{2}}} D_{M0}^{I}(\{\theta_{\alpha}\}) \phi_{K=0}(q) \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} Y_{IM}(\theta, \phi) \phi_{K=0}(q) . (3.192)$$

Енергії обертальних рівнів (ротаційні спектри) можна обчислити за допомогою співвідношень:

$$E_{I} = \frac{\hbar^{2}}{2F} I(I+1), \quad K = 0;$$

$$E_{I} = \frac{\hbar^{2}}{2F} \Big[I(I+1) - K(K+1) \Big], \quad K > \frac{1}{2}; \quad (3.193)$$

$$E_{I} = \frac{\hbar^{2}}{2F} \left[I \left(I + 1 \right) + a_{p} \left(-1 \right)^{I+1/2} \left(I + \frac{1}{2} \right) \right], \quad K = \frac{1}{2},$$

де F – момент інерції ядра, a_p – параметр "розв'язування", що виникає за рахунок доданка $2\vec{j}_{in}\vec{I}$ у формулі (3.187). Значення a_p залежить від спіну \vec{I} ядра і від імовірностей перебування нуклонів у одночастинкових станах із фіксованими значеннями кутових моментів. В узагальненій моделі ядра момент інерції Fобчислюється аналогічно краплинній моделі ядра (див. (3.144)) відносно внутрішніх осей X', Y':

$$F = F_{X'} = F_{Y'} . (3.194)$$

У парно-парних ядрах мінімальне значення модуля проекції дорівнює нулю, і тому найнижчою є так звана основна ротаційна смуга з K = 0 та додатною парністю. Їй відповідають (див. (3.191)) значення спінів I = 0, 2, 4, ... і згідно з (3.193) для енергій обертальних рівнів виконується співвідношення

$$E_2: E_4: E_6: E_8: E_{10}: \dots =$$

=1: $\frac{10}{3}$ (= 3,33): 7: 12: $\frac{55}{3}$ (= 18,33): ..., (3.195)

яке називають правилом інтервалів для основної ротаційної смуги. Досвід показує, що співвідношення (3.195) виконується у сильнодеформованих ядрах рідкісноземельних елементів (155 < A < 190) та актиноїдах (225 < A < 250).

У деформованих ядрах з непарним масовими числами обертальні спектри відповідають значенням $K \neq 0$. Якщо $K \neq 1/2$, то згідно з (3.193) спін основного стану I = K, оскільки ротаційна енергія в цьому стані дорівнює нулю $E_{I_0} = 0$. Значення спінів окремих станів смуги дорівнюють I_0 , $I_0 + 1$, $I_0 + 2$, ...; для відношення енергій збудження зі спінами $I_0 + 2$, $I_0 + 1$ маємо

$$E_{I_0+2} / E_{I_0+1} = 2 + \frac{1}{I_0+1}.$$
 (3.196)

Це співвідношення дозволяє експериментально визначити спін I_0 основного стану ядра. Наприклад, для ядра $\frac{181}{73}$ Та маємо

 $E_{I_0+1} = 136,2$ кеВ, $E_{I_0+2} = 303$ кеВ, тому $E_{I_0+2} / E_{I_0+1} = 2,23$ і спін основного стану дорівнює $I_0 = 1/0, 23 - 1 = 3,3478 = 7/2$. Користуючись експериментальними даними щодо спектрів і формулами (3.193), можна визначити момент інерції *F* аксіально-симетричного ядра. Теоретичні значення *F* суттєво залежать від внутрішньої структури ядра і можуть бути обчислені в тій чи іншій моделі. У моделі ядра як твердого тіла еліпсоїдальної форми (див. (3.137)) момент інерції *F* має вигляд

$$F \equiv F_{\text{rig}} = m \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}') (x'^2 + z'^2) = \frac{Am}{5} (R_{X'}^2 + R_{Z'}^2) =$$
$$= \frac{2}{5} Am R_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta_2 + \frac{25}{32\pi} \beta_2^2 \right), \quad \text{де } Am - \text{маса ядра. (3.197)}$$

Якщо ядро розглядати як еліпсоїдальну ємність з ядерною рідиною, то при потенціальному безвихровому русі рідини (див. (3.133)):

$$F \equiv F_{\text{hydr}} = \frac{Am}{5} \frac{\left(R_{X'}^2 - R_{Z'}^2\right)^2}{R_{X'}^2 + R_{Z'}^2} = \frac{9Am}{4\pi} R_0^2 \beta_2^2 \frac{\left(1 + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta_2\right)^2}{\left(2 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta_2 + \frac{26}{16\pi}\beta_2^2\right)} .$$
(3.198)

У формулах (3.197) і (3.198) $R_{a'}$ – головні півосі ядра (див. (3.120)):

$$R_{X'} = R_{Y'} = R_0 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta_2 \right), \quad R_{Z'} = R_0 \left(1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta_2 \right). \quad (3.199)$$

Відношення моментів інерції, обчислене в гідродинамічній і твердотільній моделях ядра, за малих деформацій має вигляд

$$\frac{F_{\text{hydr}}}{F_{\text{rig}}} \approx \frac{45}{16\pi} \beta_2^2 \approx 0.9 \beta_2^2, \quad \beta_2 << 1.$$
 (3.200)

Емпіричні значення моментів інерції, отримані підгонкою експериментальних ротаційних спектрів з малими спінами за допомогою формул (3.193), лежать між значеннями, які передбачені моделлю твердого тіла (3.197) і краплинною моделлю (3.198). Зокрема, у низькоенергетичних станах з $I \le 4 \div 6$ експериментальні значення $F_{\rm exp}$ приблизно вдвічі менші, ніж $F_{\rm rig}$, і в

п'ять разів більші, ніж величини F_{hydr} :

$$F_{\rm exp} \approx 0.5 F_{\rm rig} \approx 5 F_{\rm hydr}$$
. (3.201)

Зменшення моменту інерції порівняно з твердотільними значеннями зумовлено ефектами спарювання нуклонів, що приводить до зменшення майже вдвічі ефективної кількості частинок у системі.

Слід зазначити, що формули (3.193) були отримані за умови незалежності моменту інерції від повного кутового моменту ядра I. Насправді така залежність існує, оскільки в процесі обертання ядро розтягується внаслідок дії відцентрових сил, що призводить до збільшення моменту інерції, тому енергію обертання за великих значень I і $K \neq 1/2$ можна апроксимувати формулою

$$E_{I} = \frac{\hbar^{2}}{2F} I (I+1) - B [I (I+1)]^{2}, \quad B > 0.$$
 (3.202)

Відхилення від закону I(I+1) проявляються більш виразно, якщо замість залежності енергії E_I від I(I+1) вивчати залежність параметра \tilde{F} , який є аналогом моменту інерції ротатора класичної механіки, від аналога квадрата частоти обертання ω . Такі величини можна обчислити з експериментальних даних різними способами, що мають збігатися за великих значень кутових моментів, де параметри \tilde{F} і ω мають вищезгадану класичну інтерпретацію. Зазвичай параметр \tilde{F} та енергію $\hbar\omega$ визначають за формулами:

$$\tilde{F} = \frac{\left[I(I+1) - (I-2)(I-1)\right]}{E_I - E_{I-2}} = \frac{\left(2I - 1\right)}{E_I - E_{I-2}},$$

$$\hbar \omega = \frac{E_I - E_{I-2}}{2}.$$
(3.203)

У такий спосіб обчислена величина \tilde{F} збігається з моментом інерції $\tilde{F}_{cl} = \tilde{F}\hbar^2$ (в одиницях \hbar^2) ротатора з енергією

$$E_{I} = \frac{\hbar^{2} I(I+1)}{2\tilde{F}} \equiv \frac{I(I+1)}{2\tilde{F}}, \qquad (3.204)$$

яка за великих значень кутового моменту $I_{cl} = \hbar I \gg 1$ збігається з енергією

$$E_I^{cl} = \frac{I_{\rm cl}^2}{2\tilde{F}_I} = \frac{I_{\rm cl}\ \omega_{\rm cl}}{2}$$

обертання ротатора класичної механіки із частотою обертання ω_{cl} . Величина ω у (3.204) є аналогом частоти ω_{cl} :

$$\omega = \frac{2I - 1}{2\hbar\tilde{F}} \approx \frac{I}{\hbar\tilde{F}} = \frac{I_{\rm cl}}{F} = \omega_{\rm cl} \equiv \frac{2\partial E_{\rm cl}}{\partial I_{\rm cl}} , \qquad (3.205)$$

Із виразів (3.203) випливає співвідношення між $2\tilde{F}$ та $(\hbar\omega)^2$:

$$2\tilde{F} = a_I (\hbar \omega)^2$$
, ge $a_I = (2\tilde{F})^3 / (2I-1)^2$. (3.206)

Експериментальні дані для основної обертальної смуги ядра ¹⁵⁸ Ег представлені на рис. 3.17 у вигляді залежності E_I від I(I+1), а на рис. 3.18 – у вигляді залежності величини $2\tilde{F} \equiv 2F/\hbar^2$ від $(\hbar\omega)^2$. За невеликих значеннь спіну $I \leq 10$, як видно з рис. 3.18, момент інерції ядра ¹⁵⁸ Ег плавно (майже лінійно) збільшується зі зростанням квадрата частоти обертання: $a_I \approx \text{const}$ і $\tilde{F} \cong (2I-1)^{2/3}$. При I > 10 момент інерції збільшується настільки швидко, що частота обертання ядра $w \sim I/\hat{F}$ зменшується. Це призводить до відхилення кривої в протилежний бік. Такий тип залежності моменту інерції \tilde{F} від квадрата частоти називають ефектом бекбендинга (від англ. backbending – зворотний загін). Цей ефект зумовлений значною перебудовою внутрішньої структури ядра при великих кутових моментах.



для основної обертальної смуги ядра ¹⁵⁸ Ег





Співвідношення (3.193) визначають ротаційний енергетичний спектр несферичного ядра, коли воно розглядається як аксіально-симетричний ротатор. Такий енергетичний спектр не завжди узгоджується з експериментальними даними. У багатьох випадках цю невідповідність можна усунути, припустивши, що ядро має форму тривісного еліпсоїда (з ротаційною енергією вигляду (3.129)), обертання якого і визначають ротаційний спектр ядра. Такий підхід, який запропонували і розробили

О.С. Давидов і Г.Ф. Філіппов (1958 р.) та О.С. Давидов і О.О. Чабан (1960), дав змогу феноменологічно описати ряд закономірностей спектрів збуджених станів парно-парних ядер. Зокрема, спектр збуджених станів неаксіального ротатора має характерні особливості, а саме: існують так звані "аномальні" смуги обертання, яких немає в моделі аксіально-симетричного ядра і які пов'язані з можливістю обертань навколо різних осей еліпсоїда. У таких смугах одночасно присутні стани з парними та непарними значеннями спінів. Перша аномальна смуга утворюється рівнями зі спінами 2, 3, 4, 5, 6,...; друга – рівнями зі спінами 4, 5, 6, 7,...; третя – рівнями зі спінами 6, 7,... тощо. Стан зі спіном 2 першої аномальної смуги розташований або вище (при значенні параметра неаксіальності $\gamma < 22^{\circ}$), або нижче (за $\gamma > 23^{\circ}$), ніж стан зі спіном 4 в основній ротаційній смузі. Рівень зі спіном 3 завжди лежить вище рівня зі спіном 4 основної ротаційної смуги. У неаксіальному ядрі змінюється правило інтервалів (3.195). Наприклад, якщо $\gamma = 30^\circ$, то рівні основної ротаційної смуги неаксіального ядра задовольняють таке правило інтервалів:

 $E_2: E_4: E_6: E_8: E_{10}: \dots = 1: 2, 67: 5: 8: 11, 67: \dots$

Необхідно зауважити, що при неадіабатичному розгляді збуджень аномальні ротаційні смуги неаксіального ротатора насправді є складними ротаційно-вібраційними збудженнями (І. Фесслер, В. Грайнер, 1962–1964).

Останнім часом у реакціях з важкими іонами інтенсивно досліджувалася залежність обертальної енергії ядер від спінів у широкому інтервалі їхніх значень і вивчалися так звані надобертові ядра, тобто ядра в станах з великими значеннями спінів. Схематичне зображення узагальненої кривої такої залежності для ядер рідкісноземельних елементів ілюструє рис. 3.19. При невеликих значеннях $I \le 15 \div 20$ (область І) ядро має форму витягнутого еліпсоїда обертання з моментом інерції, на величину якого впливають парні кореляції надплинного типу (див. (3.201)). Зі збільшенням I відцентрові та коріолісові сили призводять до руйнування в ядрах парних кореляцій і при $I \ge 20 \div 25$ відбувається перехід ядерної речовини з надплинного стану в норма-

льний. Ядро набуває форми тривісного еліпсоїда, а моменти інерції збільшуються до своїх твердотільних значень (область II). В області III (I > 60) ядро дуже сильно обертається, дуже сильно деформується і має форму сплюснутого еліпсоїда обертання. За великих значень спінів I така форма енергетично вигідніша порівняно з випадком витягнутого еліпсоїда.



в області рідкісноземельних ядер

Ламану криву на рис. 3.19, що відповідає енергії обертання ядра за даного значення спіну, називають *іраст-лінією* (від швед. прикм. *yr*, найвищий ступінь якого *yrast* означає запаморочливий, приголомшений). Оскільки повна енергія ядра має бути більшою або дорівнювати обертальній енергії $E \ge E_I$, то іраст-лінія відповідає нижній межі можливих енергетичних станів ядра із фіксованим значенням спіну I. А саме, вздовж ірастлінії ядра вся енергія, що перевищує енергію основного стану, відповідає енергії обертання. Нижче іраст-лінії збуджених ядерних станів немає, і тому кажуть, що такі ядра холодні.

За $I \ge 85 \div 100$ ядро розтягується настільки, що стає нестійким щодо поділу на уламки. Це й є максимально можливими значеннями спіну ядра. На рис. 3.19 верхня крива відповідає бар'єру поділу ядра. За енергій, які лежать вище цієї кривої, ядро ділиться, отже, усі можливі збуджені енергетичні стани ядер лежать між іраст-лінією та кривою бар'єра поділу.

У цілому за допомогою узагальнених моделей різного типу (зі слабкою та сильною взаємодіями нуклонів з остовом) вдається на якісному рівні, хоча лише якісно, пояснити як низькорозміщені рівні у спектрах, так і великі значення квадрупольних моментів ядер.

3.11. Гігантські резонанси та їхня інтерпретація

Окрім вібраційних станів з низькими енергіями, зумовлених коливаннями нуклонів поверхні ядра, існують також й інші типи колективних збуджень, що зумовлені зміщеннями значних груп нейтронів відносно протонів. У таких коливаннях може брати участь велика кількість нуклонів, і тому їхні коефіцієнт жорсткості та енергія будуть значно більшими, ніж при поверхневих коливаннях, у яких беруть участь лише нуклони, що розташовані біля поверхні ядра. Високоенергетичні колективні стани називають *гігантськими резонансами*, оскільки вони приводять до кривої резонансного вигляду для ймовірності процесу поглинання γ -квантів ядрами. Максимум резонансної кривої фотопоглинання сферичним ядром відповідає енергії E_r гігантського резонансу, а її ширина обумовлена зв'язком гігантського резонанся ймовірність

 $(w_r = \Gamma_r / \hbar)$ його розпаду.

Уперше явище гігантського резонансу було відкрито при дослідженні поглинання електричних дипольних γ -квантів, тому відповідний збуджений стан ядра отримав назву *гігантський дипольний резонанс* (ГДР). Енергії гігантських дипольних резонансів лежать в інтервалі від $\approx 20 \text{ MeB}$ для легких ядер до $\approx 12 \text{ MeB}$ для важких ядер, а ширини – відповідно в межах значень від ≈ 7 до $\approx 4 \text{ MeB}$.

Електричний дипольний момент залежить від зміщень координат усіх протонів відносно нейтронів, тому гігантський дипольний резонанс можна інтерпретувати як колективний стан, що пов'язаний з одночасними коливаннями всіх протонів відносно всіх нейтронів.

Першу колективну модель, за допомогою якої було передбачено і якісно описано явище резонансного поглинання електричного дипольного випромінювання, запропонував А. Б. Мігдал (1944). У цій моделі ядро розглядалося як сукупність взаємно проникних стисливих протонної та нейтронної рідин. У такій моделі зовнішнє електричне поле викликає коливання протонної рідини відносно нейтронної та зміну

їхніх густин. Ядро, таким чином, можна розглядати як осцилятор, вимушені коливання якого збуджуються зовнішнім електричним полем. Резонанс імовірності поглинання γ -квантів виникає тоді, коли частота ω зовнішнього електричного поля збігається з власною частотою $\omega_r = E_r / \hbar$ осцилятора. Мігдал уперше передбачив і розглянув можливість вимушених коливаннь нейтронів відносно протонів. Енергії власних коливань пізніше розглянули М. Гольдхабер і Е. Теллер (1948), проаналізувавши два можливих варіанти колективних рухів протонів відносно нейтронів, які можуть приводити до формування гігантського дипольного резонансу з енергіями, що зменшуються зі зростанням A (рис. 3.20). Наведемо ці варіанти.

1. Протони і нейтрони розглядаються як дві рідини. Припускається, що нуклони на поверхні ядра займають фіксоване положення. Коливання протонів і нейтронів відбуваються тільки всередині ядра й означають зміну густин протонної та нейтронної рідин. У цьому випадку сила пружності коливань на одиницю маси буде пропорційною градієнтам змін густин рідин нуклонів. Можна очікувати, що потенціальна енергія для такого зміщення буде пропорційною максимальній зміні густини всередині ядра, яка за порядком величини обернено пропорційна радіусу ядра R_0 , а тому її градієнт, що визначає силу пружності,

буде пропорційним $1/R_0^2$. Таким чином, частота, що при гармонічних коливаннях має змінюватися як квадратний корінь із сили пружності, буде пропорційною $1/R_0$, тобто буде обернено пропорційною кубіч-

ному кореню з маси ядра: $\omega_r = E_r / \hbar \sim A^{-1/3}$. У подальшому цю гідродинамічну модель ядра розвинули Х. Штейнведель і Й. Йенсен (1950). Вона називається *моделлю Штейнведеля*—Йенсена.



Рис. 3.20. Схематичне зображення дипольних мод коливань в ядрах: а) модель Штейнведеля–Йенсена; б) модель Голдхабера–Теллера

2. У другій моделі, яка пізніше отримала назву *модель Гольдхабера-Теллера*, припускається, що колективні відносні коливання протонів і нейтронів у ядрі можна розглядати як коливання двох нестисливих і взаємопроникних сфер. Біля поверхні ядра протонна і нейтронна сфери зміщуються одна відносно одної на деяку відстань $x < r_{int}$, де r_{int} – радіус дії ядерних сил, тому сили пружності будуть силами, зумовленими взаємодією зміщених частин протонної та нейтронної сфер із нуклонами внутрішньої частини ядра.

Резонансну частоту ω_r осцилятора, як відомо, може визначити за формулою

$$\omega_r = \sqrt{k/M} \,, \tag{3.207}$$

де k – коефіцієнт пружності, M – маса осцилятора. При малих зміщеннях x кількість (оголених) нуклонів, що не перетинаються, а отже, відповідно і коефіцієнт пружності пропорційні поверхні ядра, тобто R_0^2 . Маса ядра пропорційна R_0^3 , тому маємо

$$E_r = \hbar \omega_r = \hbar \sqrt{\frac{k}{M}} = \text{const} \sqrt{\frac{R_0^2}{R_0^3}} = \text{const} A^{-1/6}$$
. (3.208)

Дотримуючись розгляду Гольдхабера і Теллера, знаходимо значення константи в цьому виразі з умови рівності при $x = r_{int}$ потенціальної енергії $U_G(x)$ зміщення нуклонів з положення рівноваги та мінімальної енергії $U_D(x)$, необхідної для роз'єднання нуклонів, які зміщуються при коливаннях. Якщо зміщення протонної рідини відносно нейтронної незначне і менше радіуса дії ядерних сил ($x < r_{int}$), то на кожний нуклон діє пружна сила повернення, що пропорційна x. Звідси маємо, що потенціальна енергія зміщення нуклонів з положення рівноваги набуває вигляду

$$U_G(x) = kx^2 / 2. (3.209)$$

За $x >> r_{int}$ кількість повністю роз'єднаних пар нуклонів дорівнює $4\pi R_0^2 \rho_0 x / 2$, де ρ_0 – густина протонів і нейтронів (вважаємо, що їхні густини однакові). Якщо U_0 – глибина ядерного потенціалу притягання, то енергія, необхідна для роз'єднання нуклонів, буде дорівнювати

$$U_D(x) = 2\pi R_0^2 \rho_0 x U_0 . \qquad (3.210)$$

Прирівнюючи вирази (3.209) і (3.210) при $x = r_{int}$ $(U_G(r_{int}) = U_D(r_{int}))$, знаходимо $k = 4\pi R_0^2 \rho_0 U_0 r_{int}$. Оскільки маса ядра M дорівнює $\frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_0 m$ і $R_0 = r_0 A^{1/3}$, то отримуємо

$$E_{r} \equiv E_{GT} = \hbar \sqrt{\frac{k}{M}} =$$

$$= \hbar \sqrt{\frac{3U_{0}}{r_{\text{int}}R_{0}m}} = \hbar \sqrt{\frac{3U_{0}}{r_{\text{int}}r_{0}m}} A^{-1/6} \cong 45 A^{-1/6} \text{ (MeB)}, \qquad (3.211)$$

де були використані такі значення констант: $r_0 = 1,2$ фм, $r_{int} = 2$ фм та $U_0 = 40$ MeB.

Відповідно до першої моделі колективного руху нуклонів у ядрах енергія гігантського дипольного резонансу пропорційна $A^{-1/3}$, а згідно з другою енергія E_r залежить від масового числа як $A^{-1/6}$. Оскільки у свій час експериментальних даних було мало, і з ними найкраще узгоджувалася залежність $E_r \sim A^{-1/6}$, то Гольдхабер і Теллер віддали перевагу другій моделі, у межах якої знайшли аналітичний вираз (3.211) для енергії гігантського резонансу. Подальші експериментальні дослідження показали, що в середніх і важких ядрах залежність енергії E_r від масового числа скоріше пропорційна $A^{-1/3}$, тому необхідно детально розглянути першу модель, що й зробили Штейнведель і Йенсен для сферичних ядер. Схематично моди колективного руху, що відповідають моделям Голдхабера–Теллера та Штейнведеля–Йенсена, зображені на рис. 3.20.

Згідно з гідродинамічною моделлю Штейнведеля-Йенсена ядро складається із протонної та нейтронної рідин з густинами протонів

 $\rho_{\rm p}(\vec{r},t)$ і нейтронів $\rho_{\rm p}(\vec{r},t)$, які змінюються в просторі та часі й гігантський дипольний резонанс, зумовлений зміною густин нейтронів і протонів, тобто локальною зміною кількості протонів і нейтронів за умови сталої повної густині нуклонів. При динамічному описі колективних вібрацій використовується гідродинамічний вираз для кінетичної енергії, який відповідає течії безвихрової рідини, а вираз для потенціальної енергії відносного руху двох рідин базується на уявленнях моделі рідкої краплі. Штейнведель і Йенсен припустили, що компонент $U_{\text{sym}}^{(\text{eq})} \equiv a_{\text{sym}} (A - 2Z)^2 / A = a_{\text{sym}} (N - Z)^2 / A, a_{\text{sym}} \equiv a_4$ у формулі Вейцзекера (1.17) для питомої енергії зв'язку, який залежить від різниці між кількістю протонів і нейтронів, можна розглядати, як рівноважний компонент потенціальної енергії відносного руху (потенціальної енергії симетрії) U_{svm}, що виникає при локальних зміщеннях протонів відносно нейтронів і протидіє такому зміщенню. Повний вираз для потенціальної енергії симетрії Штейнведель і Йенсен представили у вигляді інтеграла від локальних густин (далі використано розгляд И. Айзенберга і В. Грайнера):

$$U_{\rm sym} = a_{\rm sym} \int d\vec{r} \, \frac{\left(\rho_{\rm p}(\vec{r},t) - \rho_{\rm n}(\vec{r},t)\right)^2}{\rho_0} \, . \tag{3.212}$$

Цей вираз збігається з формулою для статичного значення енергії $U_{\text{sym}}^{(\text{eq})}$ у рівноважному випадку, коли повні густини нуклонів $\rho_{\text{p}}(\vec{r},t)$, $\rho_{\text{n}}(\vec{r},t)$ збігаються зі своїми статичними значеннями $\rho_{0}^{(\text{p})} = Z\rho_{0} / A$ і $\rho_{\text{n}}^{0} = N\rho_{0} / A$ (див. (3.24)).

У наближенні нестисливості ядерної речовини повна густина

$$\rho_0 = \rho_p(\vec{r}, t) + \rho_n(\vec{r}, t) \tag{3.213}$$

вважається сталою, а густини нуклонів відмінні від нуля у внутрішній області й дорівнюють нулю зовні ядра (тобто при $|\vec{r}| > R_0$ у найпростішому випадку сферичного ядра). Умова сталості густин дозволяє подати їх у вигляді

$$\rho_{\rm p}(\vec{r},t) = \rho_0^{\rm (p)} + \eta(\vec{r},t), \quad \rho_{\rm n}(\vec{r},t) = \rho_0^{\rm (n)} - \eta(\vec{r},t); \qquad (3.214)$$

$$\eta(\vec{r},t) \equiv \delta \rho_{\rm p}(\vec{r},t) = -\delta \rho_{\rm n}(\vec{r},t), \quad \rho_0 = \rho_0^{\rm (p)} + \rho_0^{\rm (n)}, \qquad 3.215$$

де $\delta \rho_{\rm p}(\vec{r},t)$, $\delta \rho_{\rm n}(\vec{r},t)$ – так звані перехідні густини відповідно протонів і нейтронів, тобто варіації їхніх густин відносно середніх значень. Функція відхилення $\eta(\vec{r},t)$ пропорційна перехідній густині $\rho^{(-)}(\vec{r},t)$, яка є різницею густин протонів і нейтронів відносно її середнього значення $\rho_0^{(-)}(\vec{r},t)$:

$$\rho^{(-)}(\vec{r},t) \equiv \rho_{\rm p}(\vec{r},t) - \rho_{\rm n}(\vec{r},t) = \rho_{\rm 0}^{(-)}(\vec{r},t) + \delta\rho^{(-)}(\vec{r},t); \qquad (3.216)$$

$$\rho_0^{(-)} \equiv \rho_p^{(0)} - \rho_n^{(0)} = \rho_0 \left(Z - N \right) / A, \quad \eta(\vec{r}, t) \equiv 2 \cdot \delta \rho^{(-)}(\vec{r}, t). \quad (3.217)$$

Збереження кількості нуклонів різного типу приводить до умови

$$\int d\vec{r} \,\eta(\vec{r},t) = 0. \qquad (3.218)$$

Необхідно зазначити, що від перерозподілу протонів залежить і кулонівська енергія, але її зміна набагато менша від зміни енергії симетрії, тому зазвичай її не враховують.

Введення функції відхилення $\eta(\vec{r},t)$ приводить до виразу для енергії симетрії (3.212):

$$U_{\rm sym} = U_{\rm sym}^{\rm (eq)} + U(\vec{r},t), \quad U(\vec{r},t) = \frac{2a_{\rm sym}}{\rho_0} \int d\vec{r} \,\,\eta^2(\vec{r},t). \tag{3.219}$$

Доданок, лінійний за η , зникає завдяки умові (3.218), а функцію $U(\vec{r},t)$ можна трактувати як потенціальну енергію вібрації густини.

Щоб знайти рівняння для визначення власних коливань густини також необхідно побудувати вираз для кінетичної енергії руху рідин нуклонів. Для цього використовують вираз класичної гідродинаміки для кінетичної енергії системи, що складається з двох рідин:

$$T = \frac{m}{2} \int d\vec{r} \left(\rho_{\rm p} \vec{v}_{\rm p}^2 + \rho_{\rm n} \vec{v}_{\rm n}^2 \right), \qquad (3.220)$$

де m – маса нуклона; $\vec{v}_{p}(\vec{r},t)$ і $\vec{v}_{n}(\vec{r},t)$ – локальні швидкості течій протонних і нейтронних рідин відповідно. Переходимо до відносної швидкості та швидкості течії центра мас:

$$\vec{\mathbf{v}}(\vec{r},t) = \vec{v}_{\mathrm{p}}(\vec{r},t) - \vec{v}_{\mathrm{n}}(\vec{r},t);$$

$$\vec{V}(\vec{r},t) = \left(\rho_{\rm p}(\vec{r},t)\vec{v}_{\rm p}(\vec{r},t) + \rho_{\rm n}(\vec{r},t)\vec{v}_{\rm n}(\vec{r},t)\right) / \rho_{\rm 0}. \qquad (3.221)$$

Вираз (3.220) для кінетичної енергії набуває вигляду

$$T = \frac{m}{2} \int d\vec{r} \left(\rho_0 \vec{V}^2 + \rho_{\rm red} \vec{v}^2 \right), \qquad (3.222)$$

де введена зведена густина

$$\rho_{\rm red}(r,t) = \frac{\rho_{\rm p}\rho_{\rm n}}{\rho_{\rm p} + \rho_{\rm n}} = \frac{\rho_0^{(\rm p)}\rho_0^{(\rm n)}}{\rho_0} + \frac{\rho_0^{(\rm n)} - \rho_0^{(\rm p)}}{\rho_0}\eta - \frac{\eta^2}{\rho_0}.$$
 (3.223)

Далі припускаємо, що середня швидкість V дорівнює нулю; останнє справедливо для ядер, що перебувають в основному стані й не рухаються. Оскільки відносна швидкість і перехідна густина мають однаковий порядок мализни, то в найнижчому наближенні тільки перший доданок у виразі (3.223) для зведеної густини дає внесок у кінетичну енергію, тоді отримуємо

$$T = \frac{m}{2} \frac{ZN}{A^2} \rho_0 \int d\vec{r} \, \vec{v}^2.$$
(3.224)

Для знаходження рівняння руху протон-нейтронної системи додержуємося розгляду Даноса і користуємося варіаційним принципом найменшої дії, або принципом Гамільтона, згідно з яким система рухається таким чином, щоб функція дії була мінімальна, тобто її варіація має дорівнювати нулю:

$$\delta \int dt \, L = 0 \,, \tag{3.225}$$

де L = T - U – лагранжіан системи. З урахуванням співвідношень (3.219) і (3.224) лагранжіан системи має вигляд

$$L = \frac{m}{2} \frac{ZN}{A^2} \rho_0 \int d\vec{r} \, \vec{v}^2 - \frac{4a_{\rm sym}}{\rho_0} \int d\vec{r} \, \vec{\eta}^2 \,. \tag{3.226}$$

Зазначимо, що при V = 0 швидкості течій нуклонів визначаються відносними швидкостями:

$$\vec{v}_{\rm p} = \frac{N}{A}\vec{v}, \quad \vec{v}_{\rm n} = \frac{Z}{A}\vec{v}.$$
 (3.227)

При отриманні рівнянь необхідно врахувати закон збереження кількості частинок, який приводить до рівнянь неперервності для густини нуклонів

$$\frac{\partial \rho_{\mathbf{p},\mathbf{n}}}{\partial t} + \nabla \left(\rho_{\mathbf{p},\mathbf{n}} \vec{v}_{\mathbf{p},\mathbf{n}} \right) = 0 \tag{3.228}$$

з граничною умовою, що потік крізь поверхню, яка обмежує систему, має зникати

$$\vec{r} \cdot \vec{v}_{p,n} \Big|_{|r|=R_0} = 0.$$
 (3.229)

Переписуючи рівняння неперервності для протонів, отримуємо з використанням (3.227) у нижчому порядку диференціальне співвідношення між функцією відхилення та відносною швидкістю

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \rho_{\rm p}}{\partial t} = -\nabla \left[\left(\rho_{\rm p}^{(0)} + \eta \right) \vec{v}_{\rm p} \right] \approx -\rho_{\rm p}^{(0)} \nabla \vec{v}_{\rm p} = -\frac{ZN}{A^2} \rho_0 \nabla \vec{v} , \quad (3.230)$$

тоді варіаційний принцип (3.225) набуває вигляду

$$\delta \int dt \int d\vec{r} \left(\frac{m}{2} \frac{Z N}{A^2} \rho \vec{v}^2 - \frac{4a_{\rm sym}}{\rho_0} \eta^2 \right) = 0.$$
 (3.231)

Виникає запитання, до яких змінних потрібно знаходити варіацію. Очевидно, що механічним ступеням свободи рідини відповідає зміщення частинок із часом, яке визначає як відносну швидкість потоку рідин нуклонів, так і варіацію густини, тобто рух кожного елемента потоку можна характеризувати залежним від часу положенням $\vec{s}(\vec{r},t)$, якщо початкове положення є $\vec{s}(\vec{r},t=0)$. Зміщення для протонів і нейтронів мають бути визначені незалежно, але в даному випадку вони пов'язані, тому швидкість можна подати за допомогою відносного зміщення, а саме:

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial t}, \quad \delta \vec{v} = \frac{\delta \partial \vec{s}}{\partial t}.$$
 (3.232)

Відносне відхилення густини η згідно з (3.230) має вигляд

$$\delta\eta = -\frac{ZN}{A^2}\rho_0\nabla\,\delta\vec{s}\;.\tag{3.233}$$

Обчислимо варіацію дії. Для цього підставимо вирази для $\delta \vec{v}$ і $\delta \eta$ у (3.231) і виконаємо одноразове інтегрування за частинами (за часом у першому й за простором у другому підінтегральних виразах), тоді

$$\delta \int dt L = \int dt \int d\vec{r} \left(\frac{m}{2} \frac{ZN}{A^2} \rho \vec{v} \, \delta \vec{v} - \frac{8a_{\text{sym}}}{\rho_0} \eta \, \delta \eta \right) =$$

$$= \int dt \int d\vec{r} \left(\frac{m}{2} \frac{ZN}{A^2} \rho \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} \, \delta \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} - 8a_{\text{sym}} \frac{ZN}{A^2} \eta \, \nabla \delta \vec{s} \right) =$$

$$= \int dt \int d\vec{r} \left(-\frac{m}{2} \frac{ZN}{A^2} \rho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} - 8a_{\text{sym}} \frac{ZN}{A^2} \nabla \eta \right) \delta \vec{s} = 0. \quad (3.234)$$

Зміщення в різних точках простору та часу незалежні, тому отримуємо рівняння

$$m\frac{ZN}{A^2}\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -8a_{\rm sym}\frac{ZN}{A^2}\nabla\eta. \qquad (3.235)$$

Взявши дивергенцію від цього рівняння і скориставшись співвідношенням

$$\frac{\partial \nabla \vec{v}}{\partial t} = -\frac{A^2}{ZN\rho_0} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \qquad (3.236)$$

що випливає з рівняння неперервності, знаходимо рівняння руху для η :

$$m\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 8a_{\rm sym}\frac{ZN}{A^2}\nabla^2\eta.$$
 (3.237)

Таким чином, перехідна густина є розв'язком хвильового рівняння

$$\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \nabla^2 \eta, \qquad (3.238)$$

що описує поширення звукових хвиль зі швидкістю и :

$$u^{2} = \frac{ZN}{A^{2}} \frac{8a_{\rm sym}}{m}.$$
 (3.239)

Наприклад, для $a_{\text{sym}} \cong 23 \text{ MeB}$ отримуємо $u \cong c/5$, де c – швидкість поширення світла. Розв'язок хвильового рівняння знаходимо за умови періодичної часової залежності варіації $\eta(\vec{r},t) = \overline{\eta}(\vec{r}) \exp(i\omega t)$, звідси отримуємо рівняння Гельмгольца:

$$\Delta \overline{\eta} + k^2 \overline{\eta} = 0, \quad k = -\frac{\omega}{u}. \tag{3.240}$$

Розв'язки цього рівняння мають вигляд добутку сферичних функцій Бесселя і сферичних гармонік з деякими фіксованими значеннями кутових моментів

$$\overline{\eta}(\vec{r}) = C_{\lambda} j_{\lambda}(kr) Y_{\lambda\mu}(\hat{r}),$$
 де C_{λ} – деяка стала. (3.241)

Гранична умова (3.229) зникнення швидкості через поверхню ядра не залежить від часу, й у випадку сферичного ядра її можна переписати за допомогою формули (3.235) у вигляді

$$\left. \vec{e}_r \nabla \overline{\eta} \left(\vec{r} \right) \right|_{r=R_0} = \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial r} \bigg|_{r=R_0} = \frac{\partial j_\lambda \left(k \, r \right)}{\partial r} \bigg|_{r=R_0} = 0 \,, \qquad (3.242)$$

де \vec{e}_r – одиничний орт у радіальному напрямку.

Таким чином, значення коефіцієнтів $k = k_n$, а отже і власних частот $\omega \equiv \omega_n = k_n u$, визначаються з умови рівності нулю похідних від сферичної функції Бесселя

$$\omega_n = u \frac{X_n}{R_0}, \quad j'_{\lambda}(X_n) = 0.$$
 (3.243)

Для дипольних коливань з $\lambda = 1$ найменше значення кореня дорівнює $X_{n=1} = 2,081576$, звідки $k_{n=1} \cong 2,08 / R_0$, тому енергію $E_r = \hbar \omega_{n=1} = \hbar u k_{n=1}$ найнижчого гігантського дипольного колективного стану можна записати у вигляді

$$E_r = E_{SJ} = \hbar \sqrt{\frac{8ZN}{A^2} \frac{a_{\text{sym}}}{m} \frac{2,08}{R_0}} = \sqrt{\frac{4ZN}{A^2}} 76,5A^{-1/3} \text{ (MeB)}, (3.244)$$

де було використано значення $R_0 = 1,2 A^{1/3}$ фм. Величина $\sqrt{4ZN / A^2}$ у цій формулі слабо залежить від масового числа, а при Z = N маємо

$$E_r \equiv E_{SJ} \cong 76,5A^{-1/3} \text{ (MeB)}.$$
 (3.245)

Згідно з експериментальними даними із фотопоглинання для ядер, поширених у природних умовах з $A \ge 50$ за не дуже високої енергії теплових збуджень ядер, такий вираз для енергії гігантського дипольного резонансу в середньому апроксимує значення E_r .

У гідродинамічній моделі Штейнведеля–Йенсена перехідна густина розподілу заряду у стані гігантського дипольного резонансу з найменшою енергією згідно зі співвідношеннями (3.215), (3.241) та (3.243) описується формулами

$$\delta \rho_{p}(\vec{r},t) \equiv \delta \rho_{p}^{(SJ)}(\vec{r},t) = \alpha_{SJ}(t) \ \delta \overline{\rho}_{p}^{(SJ)}(\vec{r}) ,$$

$$\delta \overline{\rho}_{p}^{(SJ)}(\vec{r}) = \rho_{0} j_{1}(k_{1}r) Y_{1\mu}(\hat{r}) ,$$

$$\alpha_{SJ}(t) = \alpha_{SJ}^{(0)} \exp(i E_{r} t / \hbar) , \quad k_{1} = \frac{2,08}{R_{0}}, \qquad (3.246)$$

де індекс μ може набувати трьох значень 0, ±1, які відповідають трьом виродженим стоячим хвилям уздовж напрямків ортів циклічної системи координат із хвильовим вектором, обернено пропорційним

радіусу ядра. У формулі (3.246) замість сталої C_{λ} з (3.241) введено сталу $\alpha_{SJ}^{(0)} = C_{\lambda} / \rho_0$. Усі інші перехідні густини визначаються перехіднюю густиною розподілу заряду за допомогою співвідношень (3.215) та (3.217):

 $\eta(\vec{r},t) = \delta \rho_{\rm p}(\vec{r},t), \ \delta \rho_{\rm n}(\vec{r},t) = -\delta \rho_{\rm p}(\vec{r},t), \ \delta \rho^{(-)}(\vec{r},t) = \delta \rho_{\rm p}(\vec{r},t)/2.$

Коливання нуклонів у моделі Штейнведеля-Йенсена можна інтерпретувати як ізовекторні об'ємні коливання ядерної матерії, які відповідають зміні спін-ізоспінового компонента $\rho_{ST}(\vec{r},t)$ густини у станах з двома нуклонами зі значеннями повного спіну S = 0 та ізоспіну T = 1. Оскільки нуклон може перебувати у двох спінових і двох ізоспінових станах (див. підрозд. 1.6 та 2.4), то загалом у двокомпонентній системі нуклонів можна ввести чотири типи густин, а саме: густин протонів $\rho_{n\uparrow}(\vec{r},t)$, $\rho_{n\downarrow}(\vec{r},t)$ і нейтронів $\rho_{n\uparrow}(\vec{r},t)$, $\rho_{n\downarrow}(\vec{r},t)$ зі спінами, напрямленими відповідно вздовж і проти осі квантування. Повні гуспротонів нейтронів дорівнюватимуть тини i $\rho_{\mathrm{p}}(\vec{r},t) = \rho_{\mathrm{p\uparrow}}(\vec{r},t) + \rho_{\mathrm{p\downarrow}}(\vec{r},t), \quad \rho_{\mathrm{n}}(\vec{r},t) = \rho_{\mathrm{n\uparrow}}(\vec{r},t) + \rho_{\mathrm{p\downarrow}}(\vec{r},t).$ Вони відповідають станам двох нуклонів з повним спіном S = 0, а різниця повних густин протонів і нейтронів збігається з ізоспіновою густиною $\rho_{S=0,T=1}(\vec{r},t)$ у нескінченній ядерній речовині

$$\rho^{(-)}(\vec{r},t) \equiv \rho_{\rm p}(\vec{r},t) - \rho_{\rm n}(\vec{r},t) = \rho_{S=0,T=1}(\vec{r},t).$$
(3.247)

Тому кажуть, що об'ємні коливання нуклонів, які супроводжують збудження гігантського дипольного резонансу в моделі Штейнведеля-Йенсена, відповідають повному ізоспіну T = 1. Такий гігантський резонанс називають *ізовекторним*, оскільки його збудження обумовлено відмінним від нуля значенням ізоспіну двох нуклонів ядерної матерії, а ізоспін є вектором в ізоспіновому просторі.

Густину розподілу заряду в стані гігантського дипольного резонансу згідно з моделлю Гольдхабера–Теллера обчислив Л. Тассі (1956). На відміну від гідродинамічної моделі Штейнведеля–Йенсена, у цьому випадку перехідна густина розподілу заряду зосереджена біля поверхні ядра й має вигляд

$$\begin{split} \delta \rho_{\rm p}(\vec{r},t) &\equiv \delta \rho_{\rm p}^{(GT)}(\vec{r},t) = \alpha_{GT}(t) \cdot \delta \overline{\rho}_{\rm p}^{(GT)}(\vec{r}) \\ \delta \overline{\rho}_{\rm p}^{(GT)}(\vec{r}) &= \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \, Y_{\rm l\mu}(\hat{r}), \end{split}$$

$$\alpha_{GT}(t) = \alpha_{GT}^{(0)} \exp(iE_r t / \hbar). \qquad (3.248)$$

Детальні експериментальні та теоретичні дослідження показали, що ізовекторний гігантський дипольний резонанс формується як об'ємними, так і поверхневими збудженнями. Загалом середні експериментальні значення енергій ГДР у всіх ядрах при не дуже високих енергіях внутрішніх (теплових) збуджень краще описуються виразом

$$E_r = 20,6 A^{-1/6} + 31,2 A^{-1/3} \text{ (MeB)},$$
 (3.249)

ніж (3.245).

Радіальну залежність перехідної густини розподілу заряду також можна подати у вигляді суми об'ємного $\delta \overline{\rho}_{\rm p}^{(SJ)}(\vec{r})$ (3.246) і поверхне-

вого $\delta \overline{\rho}_{\rm p}^{(GT)}(\vec{r})$ (3.248) компонентів

$$\delta\overline{\rho}_{\rm p}(\vec{r}) = c \left[\delta\overline{\rho}_{\rm p}^{(GT)}(\vec{r}) + \beta_{SJ} \,\delta\overline{\rho}_{\rm p}^{(SJ)}(\vec{r}) \right], \tag{3.250}$$

де *с* – деяка загальна стала; параметр β_{SJ} характеризує частку об'ємного компонента в густині. Згідно з результатами В. Майерса, В. Святецкі та ін. (1977), отриманими в межах краплинної моделі ядра, вираз для ваги моди Штейнведеля–Йенсена наближено має вигляд

$$\beta_{SJ} = 0,15A^{1/3}.$$
 (3.251)

Величина цього коефіцієнта зростає зі збільшенням масового числа і набуває значень від 0,6 до $\approx 0,9$ при зростанні *A* від 60 до 220. Зазначимо, якщо подати енергію ГДР у вигляді, що аналогічний виразу (3.250):

$$E_r = \tilde{c} \Big[E_{GT} + \beta_{SJ} E_{ST} \Big], \qquad (3.252)$$

з енергіями об'ємної та поверхневої мод згідно з виразами (3.221) і (3.245), то, порівнюючи цей вираз із систематикою (3.249), отримуємо $\beta_{ST} \simeq 0,9$, що для не дуже легких ядер якісно узгоджується з виразом (3.251).

У розглянутих вище найпростіших моделях не враховувалися сили тертя між нуклонними рідинами і гігантський резонанс описувався як стаціонарний стан. Урахування сил тертя приводить до в'язкості ядерною рідини, що веде до нестаціонарності колективного резонансного стану, а саме, до його розпаду із часом $\{\alpha_{SJ}(t), \alpha_{GT}(t)\} \sim \exp(-\Gamma_r t / 2\hbar)$, де Γ_r – ширина резонансу. Згідно з експериментальними даними середнє значення ширини розпаду ГДР

у сферичних холодних (з нульовою енергією внутрішніх (теплових) збуджень) ядрах можна подати у вигляді

$$\Gamma_r = 0,026 E_r^{1,91} \text{ (MeB)}.$$
 (3.253)

За допомогою гідродинамічної колективної моделі Штейнведеля-Йенсена збудження гігантських дипольних резонансів було успішно розглянуто й у важких деформованих ядрах. Для ядер, які мають форму аксіально-симетричного еліпсоїда, ізовекторні ГДР уперше теоретично вивчалися в роботах М. Даноса (1958) і К. Окамото (1959), а вирази для енергій ГДР у випадку неаксіальних еліпсоїдальних ядер отримав Є. В. Інопін (1960). Згідно зі співвідношеннями (3.244), (3.245) у сферичних ядрах існують три вироджені гігантські дипольні коливання, які відповідають стоячим хвилям уздовж трьох довільних напрямків зі зведеною довжиною хвилі, пропорційною радіусу ядра $\lambda_i = 1/k_i \sim R_0$. Тому за аналогією із цим випадком можна очікувати, що у випадку деформованих ядер з поверхнею у формі неаксіального еліпсоїда мають існувати три моди коливання, що відповідають стоячим хвилям уздовж трьох головних осей еліпсоїда зі зведеною довжиною хвилі $\lambda_i = 1/k_i \sim R_i$, де R_i – величина *i* -ї головної півосі еліпсоїда, тобто при збудженні ГДР будуть існувати три колективні стани із частотами $\omega_i \sim 1/R_i$, $i = 1 \div 3$. Детальні обчислення показали, що такі співвідношення дійсно виконуються. Зокрема, в аксіальносиметричних деформованих ядрах, що мають форму еліпсоїда обертання, існують дві групи гігантських дипольних колективних збуджень ізовекторного типу: одна мода збуджень відповідає коливанню вздовж осі симетрії еліпсоїда, а інша - двом виродженим коливанням у площині, перпендикулярній до осі симетрії. Відповідно до результатів М. Даноса (1958) енергії ізовекторних ГДР у таких ядрах можна подати у вигляді

$$E_{b} = \frac{E_{r}}{b} \Big[1 - 1,51 \cdot 10^{-2} \Big(a^{2} - b^{2} \Big) \Big];$$

$$E_{a} = \frac{E_{b}}{\Big[0,911 \frac{a}{b} + 0,089 \Big]},$$
(3.254)

де величини *a* і *b* – відносні півосі еліпсоїда вздовж осі обертання і в перпендикулярному напрямку:

$$a = R(\theta = 0) / R_0, \quad b = R(\theta = \pi / 2) / R_0,$$
 (3.255)

а $R(\theta) = R'_0(1 + \alpha_2 P_2(\cos \theta))$ – радіус ядра із формою еліпсоїда обертання (див. (1.51)). Звідси видно, що при малих деформаціях величина

розщеплення енергії ГДР пропорційна параметру деформації

 $E_a \cong E_r [1 - \alpha_2], \quad E_b \cong E_r [1 + 0.5\alpha_2], \quad E_b - E_a \cong 1.5\alpha_2 E_r$. (3.256) Окрім ізовекторних дипольних гігантських резонансів, які пов'язані з рухом протонів і нейтронів у протифазі, також можливі й інші типи гігантських коливань – монопольні, квадрупольні, октупольні тощо, мультипольність яких збігається зі значенням мультипольності перехідної густини. В ядрах також існують ізоскалярні мультипольні резонанси, що відповідають коливання у фазі протонів і нейтронів.

Теоретичні й експериментальні дослідження показують, що енергії ГДР більш стійки щодо внутрішніх (теплових) збуджень ядер, ніж поверхневі вібраційні коливання низьких енергій. Найбільш стійкими виявляються ізовекторні дипольні коливання. Енергії таких коливань адекватно описуються виразом (3.249) в ядрах з енергіями теплових збуджень до ≈ 2 MeB на один нуклон.

Задачі та завдання для самостійної роботи

3.1. Визначити залежність глибин нейтронного (V_0^n) і протонного (V_0^p) потенціалів від параметра нейтронної асиметрії I = (N - Z) / A в β -стабільних ядрах, користуючись моделлю ядерного фермі-газу.

Розв'язання: Глибини нуклонних потенціалів у ядрі, що складається із двокомпонентного фермі-газу, знаходимо з умови однаковості експериментальних значень енергій відривання нейтрона S_n і протона S_p від атомного ядра з їхніми теоретич-

ними значеннями, аналогічно до (3.20), маємо $V_0^n = S_n + \varepsilon_F^{(n)}$,

 $V_0^p = S_p + \varepsilon_F^{(p)}$, де $\varepsilon_F^{(n)}$, $\varepsilon_F^{(p)}$ – енергії Фермі для нейтронів і протонів:

$$\varepsilon_F^{(n)} = (2N / A)^{2/3} \varepsilon_F = (1 + I)^{2/3} \varepsilon_F,$$

$$\varepsilon_F^{(n)} = (2N / A)^{2/3} \varepsilon_F = (1 + I)^{2/3} \varepsilon_F.$$

Можна очікувати, що в β -стабільних ядрах енергії відокремлення нейтрона й протона матимуть близькі значення, в іншому випадку вищерозташовані нуклони мали б змогу переходити з нейтронного стану в протонний (і навпаки), та атомне ядро було б β нестабільним. Тому вважаємо, що $S_n \cong S_p \cong S$, і знаходимо

$$V_0^n \cong S + (1+I)^{2/3} \varepsilon_F \cong S + (1+2I/3)\varepsilon_F \cong V_0 + 2(V_0 - S)I/3,$$
$$V_0^p \cong V_0 + 2(V_0 + S)I/3,$$

де V_0 – глибина потенціалу, у якому перебувають нуклони відповідно до моделі однокомпонентного фермі-газу. Таким чином, згідно з моделлю фермі-газу в нейтронно-надлишкових ядрах нейтронна яма має бути глибшою за протонну.

3.2. Використовуючи наведені в табл. 3.2 однонуклонні рівні ядер, записати конфігурацію основного стану ядер ${}^{13}_6$ С, ${}^{39}_{19}$ К.

Розв'язання: Ядро ізотопу вуглецю ${}^{13}_6$ С складається із шести протонів і семи нейтронів. Згідно з табл. 3.2 в основному стані цього ядра відповідно до принципу Паулі нуклони заповнюють повністю першу оболонку $1s_{1/2}$, де містяться два протони, два нейтрони та одночастинковий рівень (підоболонка) $1p_{3/2}$ другої оболонки, де містяться чотири протони та нейтрони. Сьомий нейтрон перебуває у стані $1p_{1/2}$ Таким чином, повна конфігурація основного стану ядра вуглецю ${}^{13}_6$ С має вигляд $(1s_{1/2})^{2p2n}$ $(1p_{3/2})^{4p4n}$ $(1p_{1/2})^{1n}$, де за допомогою показника ступеня вказано кількість протонів і нейтронів у відповідних станах.

Для ядра калію $^{39}_{19}$ К склад ядра такий: Z = 19, N = 20 і конфігурація його основного стану має вигляд

$$\begin{array}{c} (1s_{1/2})^{2p2n} \ (1p_{3/2})^{4p4n} \\ (1p_{1/2})^{2p2n} \ (1d_{5/2})^{6p6n} \ (2s_{1/2})^{2p2n} (1d_{3/2})^{3p4n} \end{array}$$

3.3. Використовуючи оболонкову модель із феноменологічним розглядом спарювання, знайти спіни та парності ядер ${}^{13}_{6}$ C, ${}^{39}_{19}$ K.

Розв'язання: Ураховуємо те, що квантові числа станів визначаються квантовими числами неспарених нуклонів. Ядро ${}^{13}_6$ С має парну кількість протонів (6), які в основному стані ядра дають нульовий внесок у повний спін ядра і мають у сукупності позитивну парність, і сім нейтронів, шість з яких дають також нульовий внесок у спін ядра й мають позитивну парність. Стан останнього непарного сьомого нейтрона й буде визначати спін і парність ядра.

Згідно з результатами задачі 3.2, цей сьомий нейтрон перебуває в стані $1p_{1/2}$, тобто має орбітальний момент l = 1, повний момент j = 1/2 і парність $\pi = (-1)^{l=1} = -1$. Згідно з одночастинковою оболонковою моделлю і ядро має повний спін I = 1/2, і парність

 $\pi = -1$, що скорочено записується як $\frac{1}{2}^{-}$, або 1/2⁻.

В ядрі ${}^{39}_{19}$ К непарна кількість протонів (19) й останній непарний протон перебуває в стані $1d_{3/2}$, тобто має повний момент j = 3/2 і парність $\pi = (-1)^{l=2} = +1$. Тому повний спін I і парність π ядра ${}^{39}_{19}$ К в основному стані будуть такі: $I^{\pi} = 3/2 + .$

Зауважимо, що отримані значення спінів і парності для ядер ${}^{13}_{19}$ С, ${}^{39}_{19}$ К збігаються з експериментальними даними.

3.5. Довести, що наведений нижче спектр енергетичних станів ядра ¹⁶⁰₆₆Dy є основною ротаційною смугою:

I^{π}	0^+	2^{+}	4+	6+	8+
E_I , кеВ	0	86,79	283,82	581,08	967,2

3.6. Довести, що наведений нижче спектр енергетичних станів ядра $^{106}_{46}$ Pd , можна вважати вібраційним:

I^{π}	0^+	2^{+}	2+	0^+	4+
E_I , MeB	0	0,51	1,127	1,133	1,229

3.7. Знайти характеристики останніх одночастинкових рівнів, які заповнюються нейтронами та протонами в ядрах $^{32}_{19}$ K, $^{119}_{50}$ Sn. Використати одночастинкову оболонкову модель ядра.

216
Розділ 4

ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ ЯДЕР

4.1. Мультипольний характер ү-випромінювання

Ядра, що перебувають у збуджених станах, нестабільні та існують лише протягом обмеженого часу. Збуджені ядра розпадаються в різний спосіб (різними каналами) і переходять у стани з меншою енергією аж до основного стану ядра з нульовою енергією збудження. Як відомо з квантової механіки, енергія стану зі скінченним часом життя τ однозначно не фіксована, а має розкид ("невизначеність") ΔE , який пов'язаний з часом τ співвідношенням

$$\Delta E = -\frac{\hbar}{\tau} \equiv \hbar w \equiv \Gamma, \qquad (4.1)$$

де $w = 1/\tau$ – імовірність розпаду збудженого стану. Розкид енергії ΔE збудженого стану також називають його шириною $\Gamma \equiv \hbar w = \hbar/\tau$. Повна ширина збудженого стану обернено пропорційна часу його життя. Зменшення часу перебування ядра у збудженому стані приводить до збільшення його ширини. Якщо вважати, що процеси розпаду ядра різними способами не залежать між собою, то повна ймовірність або ширина дорівнює сумі парціальних імовірностей w_i або ширин Γ_i розпаду в усі можливі канали

$$w \equiv \sum_{i} w_{i}; \quad \Gamma \equiv \sum_{i} \Gamma_{i}. \tag{4.2}$$

За малих енергій збуджень ($U \simeq S_n \simeq 8 \,\mathrm{MeB}$), коли виліт частинок неможливий, головним каналом розпаду є електромагніт-

не випромінювання ядер. Такий найбільш універсальний канал розрядки збуджених станів називають *радіаційним*, а відповідну парціальну ширину розпаду – *радіаційною шириною* Γ_{γ} .

Оскільки різниці енергій ядерних станів у середньому перевищують сотні кілоелектрон-вольтів, що істотно більше за значення енергій електромагнітних переходів у атомах, то ще з часів відкриття розпаду ядер їхнє електромагнітне випромінювання було названо спеціальним терміном, а саме _ γвипромінюванням, а кванти цього випромінювання – γквантами. Разом з тим, у - та рентгенівське випромінювання і світло мають одне й те саме електромагнітне походження, а відрізняються лише величиною енергії (E_{γ}), яка визначає їхню часто-

ту ω і довжину хвилі λ_{γ} (хвильове число k_{γ}):

$$E_{\gamma} = \hbar \omega = p_{\gamma}c, \quad p_{\gamma} = \hbar k_{\gamma}, \quad k_{\gamma} = \frac{2\pi}{\lambda_{\gamma}} = \frac{1}{\lambda_{\gamma}},$$
$$\lambda_{\gamma} = \frac{2\pi\hbar c}{E_{\gamma}}, \quad \lambda_{\gamma} \cong \frac{1,24 \cdot 10^4}{E_{\gamma}(\text{eB})} \quad (\text{\AA})$$
(4.3)

Порівняння енергій електромагнітних хвиль з різними довжинами, наведено в табл. 4.1.

Випромінювання	Довжина хвилі, Å	Енергія	
Світло червоного кольору	7500	1,65 eB	
Світло фіолетового кольору	3900	3,18 eB	
Ультрафіолетове	1000	12,4 eB	
Рентгенівське	10	1,24 кеВ	
колективні переходи	0,12	100 кеВ	
одночастинкові переходи	0,01	1 MeB	

Таблиця 4.1. Довжини хвиль та енергії електромагнітного випромінювання різного типу

Згідно з загальною теорією електромагнітних процесів, γ випромінювання зумовлено зміною з часом розподілу зарядів і струмів у системі. Електромагнітні процеси в ядрах порівняно з електромагнітними процесами в атомних системах мають ряд характерних особливостей, що обумовлені ядерними силами. По-перше, ці процеси в цілому відбуваються з меншою інтенсивністю, ніж інші ядерні розпади, оскільки електромагнітна взаємодія на декілька порядків слабкіша за ядерну. По-друге, електромагнітні процеси в ядрі зумовлені як електромагнітною взаємодією, так і ядерною. Дійсно, під дією електромагнітної взаємодії змінюється енергія та імпульс нуклонів, але наступна перебудова ядра відбувається в результаті ядерної взаємодії. Третьою особливістю електромагнітних процесів є значна різниця у співвідношеннях між довжиною хвилі та енергіями γ -кванта і нуклона:

$$\hat{\lambda}_{\gamma} = \frac{\lambda_{\gamma}}{2\pi} \equiv k_{\gamma}^{-1} = \frac{\hbar c}{E_{\gamma}} \approx \frac{200}{E_{\gamma} (\text{MeB})} (\phi_{\text{M}}),$$
$$\hat{\lambda}_{N} = \frac{\lambda_{N}}{2\pi} \equiv k_{N}^{-1} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^{2}} E_{N}} \approx \frac{4.5}{\sqrt{E_{N} (\text{MeB})}} (\phi_{\text{M}}).$$
(4.4)

Видно, що за однієї й тієї самої енергії в області одного чи декількох мегаелектрон-вольтів зведена довжина хвилі γ -кванта λ_{γ} набагато більша за зведену довжину хвилі нуклона λ_N . За однакової довжини хвилі γ -кванта і нуклона їхні енергії значно відрізняються. Наприклад, рівність $\lambda_N = \lambda_{\gamma} = R_0 \approx 4,5 \, \text{фм}$, де R_0 – радіус ядра з масовим числом $A \approx 53$, виконується для нуклонів і γ -квантів з енергіями $\approx 1 \, \text{MeB}$ і $\approx 44 \, \text{MeB}$, відповідно.

Характер електромагнітного випромінювання сферичною системою радіуса R визначається параметром $k_{\gamma}R$. У випадку ядер R є радіусом ядра $R_0 = r_0 A^{1/3}$ ($r_0 = 1, 2 \text{ фм}$), звідси маємо

$$k_{\gamma}R_{0} = \frac{E_{\gamma}R_{0}}{\hbar c} = 6.1 \cdot 10^{-3} \cdot E_{\gamma}(\text{MeB}) \cdot A^{1/3}.$$
 (4.5)

Якщо виконується нерівність $k_{\gamma}R_0 \ll 1$, тобто $\lambda_{\gamma} \gg R_0$, то електромагнітне випромінювання можна розглядати в довгохвильовому наближенні. Зі співвідношення (4.5) видно, що таке наближення можна застосовувати для γ -переходів між ядерними станами, що відрізняються енергіями менш ніж на декілька мегаелектрон-вольтів. У цьому випадку, як і при розгляді взаємодії ядра із зовнішнім електромагнітним полем (див. підрозд. 1.7), випромінювання ядер може бути наведено у вигляді скінченної суперпозиції електромагнітних полів випромінювань різної мультипольності. Мультипольне випромінювання порядку λ називають 2^{λ} -польним і використовують такі назви: $\lambda = 1$ – дипольне випромінювання; $\lambda = 2$ – квадрупольне випромінювання; $\lambda = 3$ – октупольне випромінювання; $\lambda = 4$ – гексодекапольне випромінювання тощо.

Розрізняють мультипольні компоненти випромінювання електричного (E) і магнітного (M) типів. Електричне $E\lambda$ випромінювання зумовлено зміною розподілу зарядів, а магнітне $M\lambda$ випромінювання виникає завдяки зміні розподілу струмів. У довгохвильовому наближенні ряд мультипольного розкладу для потенціалів електромагнітного випромінювання швидко сходиться і зазвичай слід враховувати лише декілька відмінних від нуля доданків.

Оскільки кожний ядерний стан характеризується певним значенням повного кутового моменту й парності, то при γ -переходах між станами електромагнітне випромінювання мусить виносити з ядра фіксований момент кількості руху і характеризуватися певною парністю. Закони збереження вимагають, щоб різниці початкових і кінцевих квантових чисел, а саме, $I_i - I_f$, $M_i - M_f$, $\pi_i - \pi_f$, де I, M, π – спін, його проекція й парність стану, характеризували також і поле хвилі, що випромінюється. Для послідовного опису всіх характеристик γ -емісії необхідно використовувати квантову теорію електромагнітного випромінювання, у якій показано, що квантами електромагніт

ного поля є фотони, що рухаються зі швидкістю світла й мають нульову масу спокою, а окремі члени мультипольного розкладу відповідають станам вільного фотона з деякими фіксованими значеннями кутового моменту та парності. Такі стани фотона називають мультиполями. Доданку мультипольного розкладу порядку λ відповідає мультиполь, що має кутовий момент λ і парність π . Для вільного фотона можливими є стани з кутовими моментами $\lambda = 1, 2, 3...$ При цьому для кожного значення моменту фотона існує один стан з додатною парністю й один з від'ємною, що відповідають або електричним (Е), або магнітним (М) компонентам розкладу поля за мультиполями. Для назв мультиполів використовується така ж термінологія. як і для доданків мультипольного розкладу потенціалу взаємодії статичного електромагнітного поля. Кожний стан фотона із фіксованим моментом і парністю називають мультиполем відповідного ти*nv*, а саме: стан з кутовим моментом λ називають 2^{λ} -польним мультиполем; $\lambda = 1$ є диполем; $\lambda = 2$ – квадруполем; $\lambda = 3$ – октуполем тощо, як і в попередній термінології. Мультиполі з кутовим моментом λ i парністю $(-1)^{\lambda}$ належать до електричного типу випромінювання та позначаються символом $E\lambda$, а з парністю $(-1)^{\lambda+1}$ – до магнітних, і позначаються як $M\lambda$. Стани фотона з нульовим кутовим моментом ($\lambda = 0$) відсутні.

Користуючись квантовим описом електромагнітного поля, легко сформулювати правила відбору для спінів і парності ядерних станів, між якими відбуваються γ -переходи. Ці правила виникають безпосередньо із законів збереження повного моменту кількості руху і парності в системі ядро + фотон, а саме: оскільки фотон у стані з мультипольністю λ має кутовий момент $\vec{\lambda}$, то при його мультипольністі λ має кутовий момент $\vec{\lambda}$, то при його випромінюванні спіни початкового (\vec{I}_i) і кінцевого (\vec{I}_f) станів ядра задовольняють правило векторного додавання кутових моментів

$$\vec{I}_i = \vec{I}_f + \vec{\lambda} . \tag{4.6}$$

Тобто значення J_f мають належати інтервалу

$$\left|I_{i}-\lambda\right| \leq I_{f} \leq I_{i}+\lambda \,. \tag{4.7}$$

Із (4.7) випливає, що при заданих значень J_i та J_f можуть випромінюватись лише γ -кванти з мультипольностями

$$\left|I_i - I_f\right| \le \lambda \le I_i + I_f \,. \tag{4.8}$$

Проекції M_i , M_f моментів I_i , I_f , а також проекція μ кутового моменту фотона λ , пов'язані умовою $M_i - M_f = \mu$, яка випливає із закону збереження проекції повного кутового моменту.

Закон збереження парності вимагає, щоб парність π_i початкового стану дорівнювала добутку парності π_f кінцевого стану і парності π фотона:

$$\pi_i = \pi_f \cdot \pi \,. \tag{4.9}$$

Звідси для фотонів типів Еλ і Мλ мають виконуватися рівності:

$$E\lambda \Rightarrow \pi_i \cdot \pi_f = (-1)^{\lambda},$$

$$M\lambda \Rightarrow \pi_i \cdot \pi_f = (-1)^{\lambda+1}.$$
(4.10)

У табл. 4.2 наведено характеристики нижчих мультиполів і правил відбору, що випливають із (4.7), (4.9) і діють при їхньому випромінюванні чи поглинанні.

Зауважимо, що правило $\Delta I = 0$ не стосується станів $I_i = I_f = 0$, оскільки фотони з нульовим моментом відсутні, тобто перехід $0 \rightarrow 0$ абсолютно заборонений. Структура E0 мультиполя має кулонівське поле точкового заряду, тому дія кулонівського поля іноді трактується як процес, що відбувається з народженням деякого віртуального E0 кванта. Застосування правил відбору для γ -переходів продемонстровано на рис. 4.1.

Тип муль- типоля	Тип випромі- нювання	λ	π	Різниця спінів станів ΔI = I _i – I _f = = 0,±1,,±λ	Зміна Парнос- ті
<i>E</i> 1	Електричне дипольне	1	-1	0; ±1	Так
M1	Магнітне Дипольне	1	+1	0; ±1	Hi
<i>E</i> 2	Електричне квадруполь- не	2	+1	$0;\pm 1;\pm 2$	Hi
М2	Магнітне квадруполь- не	2	-1	$0;\pm 1;\pm 2$	Так
E3	Електричне октупольне	3	-1	$0;\pm 1;\pm 2;\pm 3$	Так
М3	Магнітне октупольне	3	+1	$0;\pm 1;\pm 2;\pm 3$	Hi

Таблиця 4.2. Правила відбору для *γ*-випромінювання різної мультипольності



Рис. 4.1. Приклади застосування правил відбору для у -переходів

4.2. Імовірність електромагнітних переходів

Для обчислення ймовірності електромагнітних переходів у ядрах можна використовувати теорію збурень при взаємодії поля з нуклонами ядра. Можливість використання такого підходу є наслідком слабкості електромагнітної взаємодії, що характеризується малою безрозмірною константою $e^2 / \hbar c \approx 1/137$. Вираз для ймовірністі переходу ядра з початкового стану $\psi_i(\{\vec{r}_j\}) \equiv \langle\{\vec{r}_j\}|i\rangle$ у кінцевий $\psi_f^*(\{\vec{r}_j\}) \equiv \langle f | \{\vec{r}_j\}\rangle$ з емісією фотона електричного ($\alpha = E$) чи магнітного ($\alpha = M$) типу з енергією $E_{\gamma} = \hbar \omega$ і кутовим моментом λ має вигляд

$$w_{if}(\alpha,\lambda,\mu) = \frac{8\pi}{\hbar} \frac{(\lambda+1)}{\lambda [(2\lambda+1)!!]^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2\lambda+1} |\langle f | \hat{\Omega}_{\lambda\mu}(\alpha) | i \rangle|^2, \quad (4.11)$$

де індекси *i* і *f* означають набори спінів, їхні проекцій, парності, енергій і деяких додаткових квантових чисел n_i та n_f , що характеризують початковий і кінцевий стани $(i \equiv I_i, M_i, \pi_i, E_i, n_i; f \equiv I_f, M_f, \pi_f, E_f, n_f); \quad \omega = E_{\gamma}/\hbar = (E_i - E_f)/\hbar$ – частота випромінювання; *с* – швидкість світла, а матричний елемент $\langle f | \hat{\Omega}_{\lambda\mu}(\alpha) | i \rangle$ у лабораторній системі координат має вигляд

$$\langle f | \hat{\Omega}_{\lambda\mu}(\alpha) | i \rangle \equiv \int \psi_f^*(\{\vec{r_j}\}) \hat{\Omega}_{\lambda\mu}(\alpha) \psi_i(\{\vec{r_j}\}) d\vec{r_1} \dots d\vec{r_A} . \quad (4.12)$$

Тут $\hat{\Omega}_{\lambda\mu}(\alpha)$ – оператор мультипольного переходу, який дорівнює оператору $\hat{Q}_{\lambda\mu}$ для електричних мультипольних переходів $E\lambda(\alpha = E)$ та оператору $\hat{M}_{\lambda\mu}$ для магнітних переходів $M\lambda(\alpha = M)$. Незалежні від спінів компоненти $\hat{Q}_{\lambda\mu}$ та $\hat{M}_{\lambda\mu}$ мають такий вигляд у лабораторній системі координат:

$$\hat{\Omega}_{\lambda\mu}(E) \equiv \hat{Q}_{\lambda\mu} = \sum_{j} e_{j}(\lambda) r_{j}^{\lambda} Y_{\lambda\mu}^{*}(\theta_{j}, \varphi_{j}) ,$$

$$\hat{\Omega}_{\lambda\mu}(M) \equiv \hat{M}_{\lambda\mu} = \mu_N \sum_j \frac{g_{e_j}}{\lambda + 1} \stackrel{\rightarrow}{\ell}_j \nabla_j (r_j^{\lambda} Y_{\lambda\mu}^*(\theta_j, \phi_j)), \qquad (4.13)$$

де підсумовування виконується за координатами всіх нуклонів; $\mu_N = e\hbar/mc$ – ядерний магнетон (див. підрозд. 1.7), а g_{e_j} – фактор Ланде для орбітального руху: $g_{e_j} = 1$ для протонів і 0 для нейтронів; $e_j(\lambda)$ – ефективний (кінематичний) заряд нуклона для переходів $E\lambda$:

$$e_{j}(\lambda) = \begin{cases} \frac{e}{A^{\lambda}} \Big[(A-1)^{\lambda} + (-1)^{\lambda} (Z-1) \Big] - \text{для протонів}, \\ eZ(-\frac{1}{A})^{\lambda} & - \text{для нейтронів} \end{cases}$$
(4.14)

в ядрі з A нуклонами і Z протонами. Ефективні кінематичні заряди враховують найпростіший колективний ефект, а саме, відносний рух нуклона й остова ядра, так званий ефект віддачі під дією електричного поля. Найбільш суттєво ефективний кінематичний заряд відрізняється від заряду вільного протона при дипольних переходах, де маємо

$$e_{j}(\lambda = 1) = \begin{cases} e \frac{N}{A} \approx \frac{e}{2} & -\text{протони,} \\ -e \frac{Z}{A} \approx -\frac{e}{2} & -\text{нейтрони.} \end{cases}$$
(4.15)

В інших випадках ефект віддачі малий і згідно з (4.15) можна покласти $e_j(\lambda \ge 2) \approx 1$ для ефективного кінематичного заряду протонів і $e_j(\lambda \ge 2) \approx Z/(-A)^{\lambda} \approx 0$ для нейтронів.

Отримаємо вирази (4.15). Урахуємо те, що дипольний оператор $\hat{Q}_{1\,\mu}$ пропорційний коваріантним компонентам векторного оператора дипольного моменту \vec{D} :

$$\vec{D} = e \sum_{j=1}^{Z} \vec{r}'_{j}$$
, (4.16)

Тут \vec{r}'_j – координати протонів у системі центра мас

$$\vec{r}_{j}' = \vec{r}_{j} - \vec{R}, \quad \vec{R} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^{A} \vec{r}_{j}.$$
 (4.17)

Після підстановки (4.17) у (4.16) отримуємо вираз для дипольного моменту

$$\vec{D} = e \frac{N}{A} \sum_{j_p=1}^{Z} \vec{r}_{j_p} - e \frac{Z}{A} \sum_{j_n=1}^{N} \vec{r}_{j_n} \equiv \sum_{j=1}^{A} e_j (\lambda = 1) \vec{r}_j$$
(4.18)

із зарядами $e_j (\lambda = 1)$ згідно з (4.15); \vec{r}_{j_p} і \vec{r}_{j_n} – координати протонів і нейтронів у лабораторній системі координат.

Зазвичай цікавою є повна ймовірність γ -переходу в одиницю часу $w(\alpha\lambda)$. Ця величина визначається підсумовуванням виразу (4.11) за магнітними квантовими числами M_i , M_f , μ і діленням результату на кількість $2J_i + 1$ можливих початкових станів із фіксованим значенням їхньої проекції M_i . Повна ймовірність γ -переходу в одиницю часу набуває вигляду

$$w(\alpha\lambda) = \frac{8\pi}{\hbar} \cdot \frac{(\lambda+1)}{\lambda [(2\lambda+1)!!]^2} k_{\gamma}^{2\lambda+1} B(\alpha\lambda), \ (1/c), \qquad (4.19)$$

де $k_{\gamma} = \omega/c$ – хвильове число (див. (4.3)). Величина *В* називається зведеною ймовірністю γ -переходу й дорівнює

$$B(\alpha\lambda) \equiv B(\alpha\lambda; I_i \to I_f) = \frac{1}{2I_i + 1} \sum_{M_i, M_f, \mu} |\langle f | \hat{\Omega}_{\lambda\mu}(\alpha) | i \rangle|^2, \quad (4.20)$$

де хвильові функції початкового $\langle \{\vec{r}_j\} | i \rangle = \langle \{\vec{r}_j\} | I_i M_i \rangle \equiv \psi_i(\{\vec{r}_j\})$ і кінцевого станів $\langle \{\vec{r}_j\} | f \rangle = \langle \{\vec{r}_j\} | I_f M_f \rangle \equiv \psi_f(\{\vec{r}_j\})$ у матричному елементі (4.12) залежать від значень спінів та їхніх проекцій:

$$\langle f | \hat{\Omega}_{\lambda\mu}(\alpha) | i \rangle \equiv \langle I_f M_f | \hat{\Omega}_{\lambda\mu}(\alpha) | I_i M_i \rangle.$$
(4.21)

Зведена ймовірність від проекцій вже не залежить. Величина $B(\alpha \lambda)$ має розмірність MeB· $\phi M^{(2\lambda+1)}$, коли енергії вимірюються в одиницях MeB. Зазвичай зведену ймовірність наводять у ви-

гляді $B(\alpha\lambda) = \overline{B}(\alpha\lambda) \cdot e^2$, де e – заряд протона. Тоді зведена ймовірність $\overline{B}(\alpha\lambda)$ вимірюється в одиницях $e^2 \cdot \phi M^{2\lambda}$. Між числовими значеннями ймовірностей $B(\alpha\lambda)$ і $\overline{B}(\alpha\lambda)$ існує співвідношення $B(\alpha\lambda) = 1,44 \cdot \overline{B}(\alpha\lambda)$ (1,44 = $(e^2/\hbar c) \cdot \hbar c$).

Інформація про структуру ядра міститься в матричних елементах зведеної ймовірності (4.20), а саме, у хвильових функціях ядерних станів. Усі інші множники у виразі для ймовірності (4.19) є лише статистичними факторами, які визначають фазовий простір, доступний при γ -переходах.

Для якісної оцінки значень зведеної ймовірності γ -випромінювання зазвичай використовують модель, яку запропонував В. Вайскопф. У ній, по-перше, вважається, що γ -переходи мають одночастинковий характер і зумовлені зміною стану одного протона, при цьому ефективні кінематичні заряди нуклонів не враховуються: $e_p(\lambda) \equiv e$, $e_n(\lambda) \equiv 0$. Водночас вважається, що завжди виконується закон збереження кутового моменту і при переході з мультипольністю λ орбітальні моменти початкового та кінцевого станів пов'язані співвідношенням $\vec{l}_i = \vec{l}_f + \vec{\lambda}$. Також припускається, що всі інтеграли за кутовими змінними приблизно дорівнюють одиниці. Як наслідок, маємо вираз для зведеної ймовірності електричних переходів

$$B(E\lambda) = \frac{e^2}{4\pi} \left| \int_0^\infty dr \ r^2 R_{n_f l_f}(r) r^\lambda R_{n_i l_i}(r) \right|^2, \qquad (4.22)$$

де $R_{nl}(r)$ – одночастинкова радіальна хвильова функція. Для оцінки інтеграла в (4.22) Вайскопф припустив, що радіальні функції всередині ядра сталі: $R_{nl}(r) = \Theta(R_0 - r) \cdot \text{const}$. Тоді з умови нормування

$$1 = \int_{0}^{R_0} r^2 R_{nl} \, dr = \text{const} \cdot \frac{R_0^3}{3}$$

для радіальної хвильової функції отримуємо такий вираз:

$$R_{nl}(r) = \left(\frac{3}{R_0^3}\right)^{\frac{1}{2}} \Theta(R_0 - r).$$
 (4.23)

Тоді зведена ймовірність Ел -переходів дорівнюватиме

$$B(E\lambda) = \frac{e^2}{4\pi} \left(\frac{3R_0^{\lambda}}{\lambda+3}\right)^2 \equiv B_w(E\lambda).$$
(4.24)

Величину $B_w(E\lambda)$ зазвичай приймають за одиницю вимірювання зведених імовірностей електричних переходів і називають *одиницею Вайскопфа*. Іноді замість одиниці Вайскопфа використовують так звану одночастинкову одиницю (від англ. *single particle unite*) $E\lambda$ -переходів:

$$B_{\rm s.p.}(E\lambda) \equiv (2\lambda+1)B_w(E\lambda) = \frac{2\lambda+1}{4\pi} \left(\frac{3}{3+\lambda}\right)^2 R_0^{2\lambda} e^2 \,. \tag{4.25}$$

При випромінюванні з мультипольностями $\lambda = 1, 2$ і 3 одиниці Вайскопфа мають такі числові значення ($R_0 = 1, 2 A^{1/3} \phi M$):

$$B_{w}(E1) = 6,45 \cdot 10^{-2} A^{2/3} e^{2} \phi m^{2},$$

$$B_{w}(E2) = 6 \cdot 10^{-2} A^{4/3} e^{2} \phi m^{4},$$

$$B_{w}(E3) = 6 \cdot 10^{-2} A^{2} e^{2} \phi m^{6}.$$
(4.26)

При $B(E\lambda) = B_w(E\lambda)$ імовірність переходу в одиницю часу (4.19) визначаєтся співвідношенням

$$w_{w}(E\lambda) = \alpha \frac{2(\lambda+1)}{\lambda [(2\lambda+1)!!]^{2}} \left(\frac{3}{3+\lambda}\right)^{2} \frac{E_{\gamma}}{\hbar} (k_{\gamma}R_{0})^{2\lambda} = \frac{4,4(\lambda+1)}{\lambda [(2\lambda+1)!!]^{2}} \left(\frac{3}{3+\lambda}\right)^{2} \left(\frac{E_{\gamma}}{197}\right)^{2\lambda+1} R_{0}^{2\lambda} \cdot 10^{21}, (c^{-1}),$$
(4.27)

де $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137,0388$ – стала тонкої структури; радіус ядра $R_0 = r_0 A^{1/3}$ вимірюється у фермі (фм), а енергія $E_{\gamma} = \hbar c k_{\gamma} = \hbar \omega$ – у мегаелектрон-вольтах (MeB) ($\hbar = 6,58 \cdot 10^{-22}$ MeB·c).

Аналогічним чином можна оцінити зведену ймовірність випромінювань магнітного $M\lambda$ мультиполя. Можна показати, що оцінка Вайскопфа $B_w(M\lambda)$ для такого випромінювання пов'язана з $B_w(E\lambda)$ співвідношенням

$$B_{w}(M\lambda) / B_{w}(E\lambda) = 10 \left(\frac{\hbar}{mcR_{0}}\right)^{2} = 0,307 / A^{2/3}.$$
(4.28)

Незважаючи на те, що формули (4.27) та (4.28) отримані в досить грубому наближенні, вони якісно передають основні закономірності змін інтенсивності радіаційних переходів довільної мультипольності, а тому широко використовуються при аналізі експериментальних даних як відносні одиниці ймовірності γ -переходів.

Користуючись оцінками Вайскопфа, розглянемо конкуренцію електричних і магнітних переходів. Із правил відбору (4.10) випливає, що радіаційні переходи типів $M\lambda$ та $E(\lambda+1)$ мають однакову парність, і тому можуть відбуватися одночасно. Разом з тим згідно з (4.19), (4.27) та (4.28) відношення цих імовірностей істотно залежить від енергії γ -квантів. При $R_0 = 1, 2A^{1/3} \phi M$ можна отримати такі оцінки для відношень імовірностей конкуруючих переходів

$$\frac{w_w(E\lambda)}{w_w(M(\lambda+1))} \approx \frac{10^6}{E_{\gamma}^2 (\text{MeB})}, \frac{w_w(M\lambda)}{w_w(E(\lambda+1))} \approx \frac{100}{E_{\gamma}^2 (\text{MeB})} A^{-2/3}, (4.29)$$

де були знехтувані множники, які плавно залежали від λ . Із (4.29) бачимо, що ймовірність $E\lambda$ -переходу зазвичай значно перевищує ймовірність $M(\lambda + 1)$ -переходів. При зменшенні A та енергії E_{γ} імовірність $M\lambda$ -випромінювання зростає порівняно з імовірністю $E(\lambda + 1)$ -випромінювання. Згідно з оцінками (4.29)

для середніх і важких ядер при енергії випромінювання порядку 1 MeB, значення відношення $w(M\lambda)/w(E(\lambda+1))$ приблизно дорівнює 10÷100. Однак у багатьох випадках експериментально спостережувані *E*2-переходи мають майже однакові інтенсивності з *M*1-переходами.

Імовірність γ -розпаду $w \equiv w_{\gamma}$ визначає період піврозпаду $T_{1/2}$ ядра відносно γ -випромінювання

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{w_{\gamma}} = \frac{0,693}{w_{\gamma}} \equiv \frac{4,57 \cdot 10^{-16}}{\Gamma_{\gamma} (\text{eB})} \quad (\text{c}^{-1}), \tag{4.30}$$

де $\Gamma_{\gamma} = \hbar w_{\gamma}$ – радіаційна ширина рівня. Як відомо, періодом піврозпаду (4.30) називається час, за який у результаті γ -переходів розпадеться половина початкової кількості збуджених ядер (див. 5/4.5). За наявності лише електричних переходів типу *Е* λ вираз (4.30), з урахуванням (4.27), набуває вигляду

$$\frac{1}{T_{1/2}(E\lambda)} = \frac{w_w(E\lambda)}{\ln 2} \cong 3.2 \cdot \frac{(1+1/\lambda)}{(1+\lambda/3)^2} \cdot \frac{E_{\gamma}(MeB)}{\left[(2\lambda+1)!!\right]^2} \left(k_{\gamma}R_0\right)^{2\lambda} \cdot 10^{19} \text{ (c}^{-1}\text{)},$$
(4.31)

де $k_{\gamma}R_0 \cong 6 \cdot 10^{-3} A^{1/3}E_{\gamma}$ згідно з (4.5).

За енергій $E_{\gamma} \approx 1$ MeB і для середніх ядер з $A \sim 100$ значення $k_{\gamma}R_0$ мале $k_{\gamma}R_0 \approx 2,8 \cdot 10^{-2}$, тому при зростанні мультипольності на одиницю ймовірність переходу (4.27) зменшується в $(k_{\gamma}R_0)^2 \approx 7,6 \cdot 10^{-4}$ разів, а період піврозпаду $T_{1/2}$ збільшується приблизно в 10^3 разів. Звідси зрозуміло, що γ -розпад збудженого ядра відбувається в основному за рахунок випромінювання γ -квантів з найменш можливими значеннями мультипольності з тих, що сумісні із законами збереження кутового моменту та парності, а саме зі значеннями

$$\lambda \equiv \lambda_{\min} = \left| I_f - I_i \right|, \quad \lambda \equiv \lambda_{\min} + 1 = \left| I_f - I_i \right| + 1. \tag{4.32}$$

Тобто спостерігається суперпозиція двох типів випромінювань з однаковою парністю, а саме:

 $E\lambda_{\min} + M(\lambda_{\min} + 1)$ and $M\lambda_{\min} + E(\lambda_{\min} + 1)$.

Відповідно до (4.29), якщо випромінювання з мультипольністю $\lambda_{\min} = |I_i - I_f|$ електричне, то магнітне випромінювання зазвичай не спостерігається. Якщо ж випромінювання з $\lambda_{\min} = |I_i - I_f|$ магнітне, то внесок електричного випромінювання ня може бути значним.

Тип переходу	Період піврозпаду, <i>T</i> _{1/2} (с)	Значення T _{1/2} (с) для A = 125 та E _γ = 0,1 MeB
<i>E</i> 1	$0,7\cdot 10^{-14}\cdot E^{-3}A^{-2/3}$	$2,3 \cdot 10^{-13}$
<i>E</i> 2	$0,9 \cdot 10^{-8} \cdot E^{-5} A^{-4/3}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$
<i>E</i> 3	$1,9 \cdot 10^{-8} \cdot E^{-7} A^{-2}$	12,9
<i>E</i> 4	$6,4\cdot 10^4 \cdot E^{-9} A^{-8/3}$	$1,7.10^{8}$
<i>E</i> 5	$2,9\cdot 10^{11}\cdot E^{-11}A^{-10/3}$	$2, 2 \cdot 10^{15}$
<i>M</i> 1	$2, 2 \cdot 10^{-14} \cdot E^{-3}$	$2 \cdot 10^{-11}$
M2	$3,1\cdot 10^{-8} \cdot E^{-5} A^{-2/3}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$
М3	$6,8\cdot 10^{-2}\cdot E^{-3}A^{-4/3}$	$1,1.10^{8}$
<i>M</i> 4	$2,1\cdot 10^5 \cdot E^{-9}A^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{10}$
M5	$9,5\cdot 10^{11} \cdot E^{-11} A^{-8/3}$	$1,9 \cdot 10^{17}$

Таблиця 4.3. Періоди піврозпаду згідно з моделлю Вайскопфа

Примітка: 1 год = 3600 с, 1 доба = $8,64 \cdot 10^4$ с, 1 рік $\approx 3,15 \cdot 10^7$ с (для порівняння).

Періоди піврозпаду для γ -переходів даної мультипольності (періоди піврозпаду для парціальних переходів), що розраховані згідно з моделлю Вайскопфа, наведено в табл. 4.3 ($r_0 = 1,2 \text{ фм}$). Аналіз значень у табл. 4.3 показує, що зокрема такі, радіаційні переходи великої мультипольності, як E4, E5, M4 і M5 є дуже повільними процессами, іншими словами, радіаційні переходи великої мультипольності сильно загальмовані.

Зауважимо, що оцінки ймовірностей електромагнітних переходів на основі одночастинкової моделі Вайскопфа не враховують реальну оболонкову структуру ядра. Її врахування приводить до сильного пригнічення одночастинкових *E*1-переходів між низькорозташованими одночастинковими станами ядер порівняно з оцінкою Вайскопфа. Дійсно, за низьких енергій $E_{\gamma} \le 2 \div 3$ МеВ стани, між якими відбуваються γ -переходи, розташовані настільки близько, що мають бути в межах однієї оболонки. Як зазначалося в табл. 4.2, при дипольних переходах можливі тільки такі зміни повного моменту ядра $\Delta I = 0, \pm 1$, при цьому також має змінитися парність хвильової функції. Якщо *E*1-переходи відбуваються через зміни стану одного нуклона, то повні кутові моменти ($I \equiv j$) і парність стану при вильоті γ кванта змінюються відповідно до співвідношень

$$\left|\Delta j\right| = 0, 1 \quad i \quad (-1)^{l_i + l_f} = -1, \tag{4.33}$$

і тому орбітальний момент має також змінюватися щонайменше на одиницю $\Delta l = 1$. Зауважимо, що в одночастинковій оболонковій моделі не існує близькорозташованих станів з такими змінами l і j (див. табл. 3.2). Зокрема, для ядер з кількістю протонів Z і нейтронів N менше 30-ти стани однієї й тієї самої оболонки мають однакову парність і $\Delta l \neq 1$. В ядрах з Z, N > 30спін-орбітальне розщеплення приводить до появи станів з $\Delta l = 1$ в одній і тій самій оболонці. Наприклад, у п'ятій оболонці рівень $h_{11/2}(l=5)$ розташований поблизу рівня $1g_{7/2}(l=4)$. Разом з тим, серед існуючих станів з $\Delta l = 1$ неможливо знайти пару рівнів з $|\Delta j| = 0$ або $|\Delta j| = 1$. Таким чином, у моделі ядерних оболо-

нок дипольне випромінювання γ -квантів низьких енергій ($E_{\gamma} \leq 3$ MeB), що зумовлене переходами між одночастинковими станами ядер з низькою енергією збудження $U \approx E_{\gamma}$, має бути відсутнім. Наведена Вайскопфом оцінка приводить до відмінних від нуля значень, тому що при її отриманні кутові інтеграли приймались рівними одиниці, і через це явно не враховувалися правила відбору за кутовими моментами. У реальних експериментах низькоенергетичні *E*1-переходи спостерігаються, але вони зазвичай загальмовані на декілька порядків порівняно з оцінкою Вайскопфа (4.31).

Зазвичай реальні збуджені стани ядер складаються з багатьох одночастинкових станів і низькоенергетичні *E*1-переходи між збудженими станами своїм походженням зобов'язані малим компонентам хвильових функцій, які вміщують суміш необхідних для цих переходів конфігурацій. Рівень загальмованості електричних дипольних станів між низькорозташованими станами показано на рис. 4.2, де наведено значення $lg(T_{1/2}E_{\gamma}^3A^{2/3})$ залежно від кількості нейтронів ($T_{1/2}(c)$, E_{γ} (MeB)). Величину десяткового логарифму $lg(T_{1/2}E_{\gamma}^3A^{2/3})$ часто називають зведеним часом житя *E*1-переходу.

Якщо використовувати для зведеної ймовірності $B(E\lambda)$ оцінку Вайскопфа, то зведений час життя має однакове значення для всіх ядер, а саме:

$$\lg(T_{1/2}E_{\gamma}^{3}A^{2/3}) \approx -14.$$
 (4.34)

Згідно з рис. 4.2 реальний зведений час життя випромінюючої системи значно більший, тому зведені ймовірності дипольних переходів на основні стани ядер майже на чотири порядки менше порівняно з оцінкою Вайскопфа.

Зауважимо, що експериментальна залежність $w(E1) \equiv w_{\exp}(E1)$ як функція енергії E_{γ} відрізняється від кубічної, що передбачається моделлю Вайскопфа; зокрема, $w_{\exp}(E1) \approx E_{\gamma}^5$ при $E_{\gamma} \approx 5$ MeB. Така залежність пояснюється тим, що в цій області енергій E1

γ-перехід не одночастинковий, а має колективний характер і обумовлений γ-розрядкою гігантських колективних збуджень (Д. Брінк, 1995; П. Аксель, 1962; див. підрозд. 3.11).



між низькорозташованими станами ядер як функція від кількості нейтронів для ядер біля лінії стабільності

Електричні квадрупольні переходи в ядрах також мають не одночастинковий характер. Зокрема, у середніх і важких ядрах імовірності E2-переходів між ротаційними станами на порядок або два більші за їхні одночастинкові оцінки. Великі значення ймовірностей γ -переходів між ротаційними станами вдалося пояснити за допомогою узагальненої моделі ядра (див. підрозд. 3.7). Формула для зведеної ймовірності таких переходів визначається із загального виразу для зведеної ймовірності (4.20), (4.21), де використовуються хвильові функції ротаційного руху та вираз для оператора квадрупольного моменту в просторі колективних змінних. Наприклад, формула для зведеної ймовірності аля зведеної ймовірності електричного квадрупольного переходу $I + 2 \rightarrow I$ для основної обертальної смуги парно-парних ядер має вигляд

$$B(E2; I+2 \to I) = \frac{15(I+1)(I+2)}{32\pi(2I+3)(2I+5)}e^2Q_0^2, \qquad (4.35)$$

де Q_0 – власний квадрупольний момент системи (див. підрозд. 1.7):

$$Q_0 = \frac{4}{e} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \int d\vec{r} \, \rho_p(r) r^2 Y_{20}(\hat{r}) \simeq \frac{3}{\sqrt{5\pi}} Z R_0^2 \beta_2.$$

Для ядер з непарним A ротаційні рівні утворюють смуги станів зі спінами I = |K|, |K|+1, |K|+2,..., з $|K| \neq 0$ та однаковою парністю. У цьому випадку для кожного рівня ротаційної смуги можливі два типи квадрупольних переходів $I \rightarrow I-1$ і $I \rightarrow I-2$. Зведена ймовірність переходу зі зміною спіну на одиницю, а саме, $I+1 \rightarrow I$, дорівнює

$$B(E2; I+1 \to I) = \frac{15}{32\pi} Q_0^2 e^2 \frac{K^2 (I+1-K)(I+1+K)}{I(I+1)(2I+3)(I+2)}.$$
 (4.36)

Імовірність переходу зі зміною спіну на дві одиниці $I + 2 \rightarrow I$ визначається формулою $B(E2; I + 2 \rightarrow I) =$

$$=\frac{15}{32\pi}Q_0^2e^2\frac{(I+1-K)(I+1+K)(I+2-K)(I+2+K)}{(I+1)(2I+3)(I+2)(2I+5)}.$$
 (4.37)

Велика несферичність розподілу заряду в деформованих ядрах приводить до великих значень квадрупольного моменту Q_0 , і тому до великих значень імовірності B(E2) порівняно з її одночастинковою оцінкою. Користуючись виразом (4.35) отримаємо співвідношення

$$\frac{B(E2; I+2 \to I)}{B(E2; I \to I-2)} = \frac{(I+1)(I+2)}{(I-1)I} \cdot \frac{(2I-1)(2I+1)}{(2I+3)(2I+5)}.$$
 (4.38)

Звідки для відношень зведених ймовірностей маємо такі значення:

$$\alpha_1 = \frac{B(E2; 4 \to 2)}{B(E2; 2 \to 0)} = 1,43; \quad \alpha_2 = \frac{B(E2; 6 \to 4)}{B(E2; 2 \to 0)} = 1,57.$$
(4.39)

Ці значення близькі до знайдених експериментально відповідних величин, які, наприклад, мають такі значення:

¹⁵²Sm -
$$\alpha_1 = 1,41$$
, $\alpha_2 = 1,63$;
¹⁵⁴Gd - $\alpha_1 = 1,51$, $\alpha_2 = 1,8$;
¹⁷⁶Yb - $\alpha_1 = 1,44$, $\alpha_2 = 1,41$.

Для ядер з непарним *А* відношення для ймовірностей *Е*2переходів має вигляд

$$\frac{B(E2; I \to I-1)}{B(E2; I \to I-2)} = \frac{2K^2(I-1)}{(I+1)(I-1+K)(I-1-K)}.$$
 (4.40)

Цей вираз також узгоджується з експериментальними даними. Співвідношення (4.38) – (4.40) називають *правилами Алаги*. Фактично вони є наслідком закону збереження повного кутового моменту при γ -переходах між станами відповідних ротаційних смуг.

Електричні квадрупольні переходи між вібраційним т основним станами ядра також прискорені порівняно з одночастинковими оцінками. Зведену ймовірність можна також обчислити за формулами (4.20) і (4.21), але при цьому необхідно використовувати хвильові функції гармонічного осцилятора та вираз для оператора мультипольного моменту в просторі параметрів динамічної деформації поверхні ядра. Виявляється, що в лінійному наближенні за колективними змінними можливі тільки електричні переходи з $\lambda \ge 2$ і лише між вібраційними рівнями, що відрізняються на один фонон. Іншими словами, $E\lambda$ -переходи між вібраційними станами за кількістю фононів характеризуються таким правилом відбору:

$$\Delta N_{\lambda} = \pm 1. \tag{4.41}$$

Зведена ймовірність $E\lambda$ -переходу $\lambda \ge 2$ між першим коливальним, тобто однофононним, та основним станами визначається формулою

$$B(E\lambda; N_{\lambda} = 1 \rightarrow N_{\lambda} = 0) = \left(\frac{3}{4\pi} ZeR_{0}^{\lambda}\right)^{2} \frac{\hbar}{2\sqrt{B_{\lambda}C_{\lambda}}} = \left(\frac{3}{4\pi} ZeR_{0}^{\lambda}\right)^{2} \frac{\hbar\omega_{2}}{2C_{2}},$$
(4.42)

де (як і в підрозд. 3.9) B_{λ} і C_{λ} – масовий параметр і коефіцієнт жорсткості.

У випадку електричних квадрупольних переходів формулу (4.41) можна записати через одночастинкове значення (4.25) у вигляді

$$B(E2; N_2 = 1 \to N_2 = 0) = \frac{25}{8\pi} \frac{Z^2 \cdot \hbar}{B_2 \omega_2} B_{\text{s.p}}(E2), \qquad (4.43)$$

де $B_{\rm s.p}(E2) = 9e^2 R_0^4 / (20\pi).$

З експериментальних даних для енергій $\hbar\omega_{2^+}$ перших вібраційних станів (2_1^+) і значень зведених імовірностей B(E2) можна визначити параметр жорсткості та масовий коефіцієнт. Знайдені значення масового параметра B_2 у середньому перевищують його гідродинамічне значення приблизно в 20 разів. Електричні E2-переходи з перших вібраційних станів 2_1^+ у парно-парних ядрах прискорені в (10÷20) разів порівняно з одночастинковою оцінкою. Відношення зведених імовірностей E2-переходів для найнижчих коливальних станів якісно узгоджуються з моделлю гармонічних коливань поверхні, а типові відхилення становлять (30÷50) %.

4.3 Ізомерні стани. Внутрішня та парна конверсії

Радіаційні переходи з великими мультипольностями та не дуже великими енергіями γ -квантів сильно загальмовані (див., напр., переходи E4, M4, E5 у табл. 4.3). Тому, якщо ядро перебуває в збудженому стані з енергією, близькою до енергії основного стану, і спіном, який значно відрізняється від спіну основного стану, то воно має значно більший час життя порівняно з γ -розпадом, оскільки перехід до основного стану буде можливим лише після вильоту γ -кванта високої мультипольності. Такий довгоживучий збуджений стан називають *ізомерним станом* ядра (ізомером основного стану (від грец. *isos* – рівний, однаковий, *meros* – частка). Ядра в ізомерних

станах позначають символом $\frac{A_m}{Z}X$. Ізомер і ядро в основному

стані $\binom{A}{Z}X$) утворюють ізомерну пару. Зауважимо, що ізомерний збуджений стан є метастабільним станом. Наприклад, ізотопи індію мають ізомерну пару з такими характеристиками:

¹¹⁵₄₉ In
$$\Rightarrow I^{\pi} = \frac{9}{2}^{-}, E_0 = 0$$
, основний стан,
¹¹⁵₄₉ In $\Rightarrow I^{\pi} = \frac{1}{2}^{-}, E_m = 335$ keB, ізомер; $T_{1/2} = 4,486$ год

У цьому випадку збудження може зніматися при випромінюванні γ -квантів типу M4, E5. Відповідні переходи дуже загальмовані ("заборонені") і, як наслідок, період піврозпаду індію в ізомерному стані виявляється макроскопічним і дорівнює приблизно 4,5 год.

Ядерну ізомерію відкрив О. Ган (1921). Подальші дослідження показали, що ізомерія не є рідкісним явищем і на сьогодні відомо більше сотні відносно стабільних ізомерів. Серед них є такі рекордсмени довголіття, як ізотоп нептунію $^{236}_{93}$ Np, що має декілька метастабільних станів, у т. ч. із часом життя $\tau \approx 5000$ років.

Досі вважалося, що за низьких енергій ядро розряджається лише випромінюванням γ -квантів. Однак існує й конкуруючий процес – внутрішня конверсія, роль якого збільшується зі зростанням мультипольності переходу та зі зменшенням його енергії. Явище внутрішньої конверсії полягає в тому, що енергія збудженого ядра передається одному з електронів його атомної оболонки. Оскільки енергії збудження ядер значно більші за енергії електроних станів, то в такому процесі випромінюються так звані конверсійні електрони. Оскільки енергія E_i збудженого рівня ядра є дискретною величиною, а значення енергії зв'язку ε_0 електрона в атомній оболонці дискретне, то спектр енергій конверсійних електронів є також дискретним

$$\varepsilon_i = E_i - \varepsilon_0 \,. \tag{4.44}$$

При експериментальному дослідженні внутрішньої конверсії за допомогою сучасних магнітних спектрометрів і напівпровід-

никових детекторів спостерігається спектр електронів конверсії у вигляді окремих ліній. Такі лінії відповідають вильоту електронів з K - , L - , M -та інших атомних оболонок.

Процес внутрішньої конверсії виникає за рахунок кулонівського електростатичного поля ядра, тоді як випромінювання γ квантів обумовлене наявністю поперечного електромагнітного поля. Саме тому внутрішня конверсія та випромінювання γ квантів є незалежними явищами. Оскільки конверсія являє собою додатковий канал розрядки ядерного збудження, то повний час життя збудженого рівня визначається як імовірністю w_{γ} випромінювання γ -квантів, так і ймовірністю $w_e(i)$ вильоту конверсійного електрона з деякої *i* оболонки атома:

$$\tau = w^{-1}, \quad w = w_{\gamma} + \sum_{i} w_{e}(i).$$
 (4.45)

Відношення ймовірностей конверсії та γ-випромінювання називається *коефіцієнтом внутрішньої конверсії* α :

$$\alpha \equiv \sum_{i} \alpha_{i}, \quad \alpha_{i} = w_{e}(i) / w_{\gamma}. \quad (4.46)$$

Унаслідок конверсії збільшується повна ймовірність розпаду рівня, і тому зменшується його період піврозпаду відносно переходів у стани з меншою енергією:

$$w = w_{\gamma}(1+\alpha); \quad T_{1/2} \equiv \frac{\ln 2}{w} = \frac{T_{1/2}^{(\gamma)}}{(1+\alpha)},$$
 (4.47)

де $T_{1/2}^{(\gamma)}$ – період піврозпаду за γ -каналом.

Як було зазначено, ү -кванти з нульовим кутовим моментом не

існують, і тому перехід $0^+ \rightarrow 0^+$ з випромінюванням γ -кванта заборонений, але він може відбутися внаслідок передачі енергії конверсійному електрону. Такі переходи називають E0-переходами. Очевидно, що для них не може бути введений коефіцієнт конверсії.

Коефіцієнти конверсії α залежать від енергії ядерних станів та мультипольності γ-переходів при випромінюванні. Наприклад, для ядер олова коефіцієнти конверсії мають такі значення:

 $\alpha(E2) = 5,03 \cdot 10^{-2}, \quad \alpha(M1) = 3,77 \cdot 10^{-2}, \quad E_i = 0,5 \text{ MeB};$ $\alpha(E2) = 6,00 \cdot 10^{-3}, \quad \alpha(M1) = 6,60 \cdot 10^{-3}, \quad E_i = 1,0 \text{ MeB}; \quad (4.48)$

Вимірювання абсолютних значень коефіцієнта конверсії або їх відношення для різних оболонок дає можливість визначення мультипольності γ -переходів. Водночас за енергій, більших за 1 МеВ, ця процедура ускладнюється завдяки малим значенням коефіцієнтів конверсії. Значення α , що наведені у формулі (4.48), характерні для всіх ядер.

Якщо енергія *Е* збудження ядра перевищує енергію, яка відповідає подвоєній масі електрона

$$E > 2m_e c^2 = 1,02 \text{ MeB},$$
 (4.49)

то стає можливим процес парної конверсії, у якому ядро втрачає збудження внаслідок випромінювання, водночас як електрона, так і позитрона. Такий процес інколи розглядають теоретично, як процес вильоту віртуального γ -кванта, який далі перетворюється на електрон-позитронну пару.

Зауважимо, що парна конверсія ніяк не пов'язана з наявністю атомної електронної оболонки ядра, і тому може відбуватися в ядрі без неї. Як і внутрішня конверсія, парна конверсія кількісно характеризується коефіцієнтом парної конверсії α_{π} :

$$\alpha_{\pi} = w_{\pi} / w_{\gamma} , \qquad (4.50)$$

де w_{π} – імовірність вильоту електрон-позитронної пари. Зазначимо, що відносна роль парної конверсії зростає зі збільшенням енергії, хоча її ймовірність зазвичай не велика $\alpha_{\pi} \sim 10^{-4}$. Високоенергетичні переходи між ядерними станами з $I_i = 0$ і $I_f = 0$ часто відбуваються за рахунок парної конверсії. Наприклад, таким є *E*0-перехід в ядрі ${}^{16}_{8}$ O з енергією 6,06 MeB.

Таким чином, вивчення енергій і ймовірностей електромагнітних переходів та визначення їхнього мультипольного складу дає значний матеріал для встановлення значень спінів і парності збуджених станів ядер, що дає можливість отримати інформацію про структуру ядра, перевірити методи їхнього опису за допомогою певних моделей і визначити значення параметрів моделей.

Задачі та завдання для самостійної роботи

4.1. Визначити найбільш імовірний шлях γ -переходів зі стану 8⁺ в основний стан для ядра ¹⁶⁰₆₆Dy з урахуванням переходів між станами основної ротаційної смуги:

I^{π}	0^+	2^{+}	4+	6+	8+
E_I , keB	0	86,79	283,82	581,08	967,2

Розв'язання: Для визначення мультипольностей λ і типів γ переходів необхідно врахувати закони збереження повного спіну системи ядро + електромагнітне поле та парності (див. (4.6) – (4.9)), а саме: при заданих значеннях спінів I_i , I_f станів, між якими відбуваються γ -переходи, можуть випромінюватись лише γ -кванти з мультипольностями λ зі значеннями $|I_i - I_f| \le \lambda \le I_i + I_f$, а тип випромінювання визначається законом збереження парності $E\lambda \Rightarrow \pi_i \cdot \pi_{\gamma} = (-1)^{\lambda}$; $\pi_{\gamma} = +1$.

Записуємо всі можливі переходи, їхні мультипольності й типи з вищого рівня на інші, використовуючи попередні співвідношення:

1) $\gamma \pi_{\gamma} = +1$, тобто можливі такі переходи:

електричні – *E*2, *E*4, *E*6, *E*8, *E*10, *E*12, *E*14; магнітні – *M*3, *M*5, *M*7, *M*9, *M*11, *M*13;

2) $8^+ \rightarrow 4^+ \rightarrow 4 \le \lambda \le 12$, $\pi_{\gamma} = +1$ і можливі переходи E4, E6, E8, E10, E12 та M5, M7, M9, M11;

3) $8^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 6 \le \lambda \le 10$, $\pi_{\gamma} = +1$ і можливі переходи *E*6, *E*8, *E*10 та *M*7, *M*9;

4) $8^+ \rightarrow 0^+ \rightarrow \lambda = 8$, $\pi_{\gamma} = +1 \rightarrow E8$.

Згідно з оцінками (4.29) найімовірнішими є електричні γ переходи з мінімальними значеннями мультипольностей, тому найбільш імовірним шляхом переходу з рівня 8⁺ на 0⁺ є

 $8^+ \to 6^+ \to 4^+ \to 2^+ \to 0^+$ з випромінюванням каскаду електричних квадрупольних (*E2*) γ -квантів.

4.2. Користуючись схемою збуджених станів ядра $^{146}_{64}$ Gd, визначити мультипольності γ -переходів і найбільш ймовірний шлях розпаду зі збудженого стану 5⁻ в основний стан:

I^{π}	0^+	3-	5-
E_I , MeB	0	1,58	2,66

Розв'язання:Записуємо всі можливі переходи, їхні мультипольності та типи з вищого рівня на інші, використовуючи закони збереження повного спіну та парності:

1) $5^- \to 3^- \to 2 \le \lambda \le 8$, $\pi_{\gamma} = +1$, тобто можливими є переходи електричні – *E2*, *E4*, *E6*,*E8* і магнітні – *M3*, *M5*, *M7*;

2) $5^- \rightarrow 0^+ \rightarrow \lambda = 5$, $\pi_{\gamma} = -1 \rightarrow E5$;

3) $3^- \rightarrow 0^+ \rightarrow \lambda = 3$, $\pi_{\gamma} = -1 \rightarrow E3$.

Згідно з оцінками (4.29) найімовірнішими є електричні γ -переходи з мінімальними значеннями мультипольностей, тому найбільш ймовірним шляхом переходу з рівня 5⁻ на 0⁺ є двокаскадний 5⁻ \rightarrow 3⁻ \rightarrow 0⁺ з випромінюванням двох γ -квантів *E*2 та *E*3.

4.3. Оцінити час піврозпаду ізомерного стану ${}^{107m}_{47}$ Ag ядра срібла із характеристиками $I^{\pi} = 7/2+$, $E_m = 93,13$ кеВ у припущенні, що він розпадається γ -переходами, для яких можна використовувати оцінки Вайскопфа. Порівняти результат з експериментальними даними ($T_{1/2} = 44, 3$ с). Спін I і парність π основного стану срібла такі: $I^{\pi} = 1/2 - .$

*Розв'язання:*Спочатку визначаємо всі можливі переходи, їхні мультипольності та типи, з метастабільного стану на основний, використовуючи закони збереження повного спіну та парності:

 $7/2+ \rightarrow I^{\pi} = 1/2- \rightarrow 3 \le \lambda \le 4$, $\pi_{\gamma} = -1$, тобто можливими є електромагнітні переходи *E*3 та *M*4, а найбільш імовірним гаммапереходом є *E*3. Користуючись результатами, наведеними в табл. 4.3, знаходимо таке значення періоду піврозпаду ізомерного стану:

$$T_{1/2} \cong 1.9 \cdot 10^{-2} \cdot E_{\gamma}^{-7} (MeB) / A^2(c) \cong 28 \text{ c}$$

4.4. Довести, що спектр збуджених станів ядра торію *γ* ротаційний, вказати найбільш імовірні *γ*-переходи зі стану 6⁺:

I^{π}	0^+	2^{+}	4 ⁺	6+
E_I , кеВ	0	58	187	378

4.5. Використовуючи схему рівнів ядра ${}^{16}_{8}$ О, визначити найбільш імовірний шлях розпаду збуджених станів 0^+_1 та 3⁻:

I^{π}	0^+	0_{1}^{+}	3-
E_I , MeB	0	6,03	6,13

4.6. Оцінити час піврозпаду ізомерного стану ${}^{111m}_{48}$ Cd ядра кадмію із характеристиками $I^{\pi} = 11/2 - , E_m = 396,2$ кеВ у припущенні, що він розпадається γ -переходами, для яких можна використовувати оцінки Вайскопфа (див. (4.31), (4.28)). Порівняти результат з експериментальними даними ($T_{1/2} = 48,3$ хв) та якісно пояснити причини розбіжностей. Спін I і парність π основного стану кадмію такі: $I^{\pi} = 1/2 + .$

Розділ 5

РАДІОАКТИВНИЙ РОЗПАД ЯДЕР З ВИЛЬОТОМ ЧАСТИНОК

5.1. Радіоактивність ядер

У попередньому розділі було розглянуто *γ*-випромінювання ядер. Із ядра також можуть вилітати одна або декілька частинок, а воно може розпадатися на великі уламки. Процес спонтанного розпаду ядра називається *радіоактивністю*. Таких перетворень зазнають нестабільні радіоактивні ядра.

При радіоактивному розпаді змінюється як заряд ядра Z, так і його масове число A. Цей процес схематично можна зобразити як $\frac{A}{Z}X \rightarrow \frac{A}{Z'}Y + a_1 + a_2 + ... + a_n, \qquad (5.1)$ де X – материнське ядро, Y – дочірнє ядро, a_i – інші частинки

де X – материнське ядро, T – дочрне ядро, a_j – інші частинки (серед останніх можуть бути γ -кванти й ядра, напр., $\frac{4}{2}$ He). Якщо масу частинок a_j можна порівняти з масою ядра Y, то йдеться не про утворення дочірніх ядер Y, а про розвал материнського ядра на уламки. Зазвичай радіоактивні процеси двочастинкові або тричастинкові, тобто n = 1 чи 2. Раніше радіоактивність поділяли на природну, що існує в природних умовах, і штучну, хоча принципової різниці між ними не існує.

Радіоактивність була першим ядерним процесом, який відкрила людина (А. Беккерель, 1896). Інколи розпад ядер, що перебувають у збуджених станах, не відносять до явищ радіоактивності. У цьому випадку γ-випромінювання не належить до радіоактивних процесів. Зауважимо, що під радіоактивністю розуміють не будь-який процес розпаду, а стабілізований процес, що відбува-

ється за досить великий проміжок часу. На практиці до радіоактивних ядер належать ядра, час життя яких триває від дуже великих значень до тих, що перевищують на декілька порядків характерний час прольоту ($\cong 10^{-21}$ с). Наприклад, час життя радіоактивного урану ²³⁸ U дорівнює 5·10⁹ років.

Необхідною умовою існування радіоактивного розпаду є його енергетична можливість, яка полягає в тому, що: має бути додатною кінетична енергія продуктів розпаду, яка визначає умову позитивності енергії розпаду Q, що дорівнює різниці мас початкових і кінцевих ядер в енергетичних одиницях:

$$Q = [m_X - m_Y - \sum_{j=1}^n m_{a_j}]c^2.$$
(5.2)

Тому маса радіоактивного ядра завжди перевищує сумарну масу продуктів розпаду

$$m_X > m_Y + \sum_{j=1}^n m_{a_j}$$
 (5.3)

Процеси з додатною енергією розпаду називаються *екзотермічними*, і радіоактивність є прикладом такого процесу. Радіоактивний ізотоп постійно виділяє енергію, і тому його температура завжди вища за температуру оточуючого середовища.

Радіоактивні ядра можуть утворюватися різними шляхами, зокрема так:

1) унаслідок первинного синтезу хімічних елементів сонячної системи;

2) у ланцюгу перетворень, що виникають при розпаді материнських ядер;

 унаслідок дії космічних променів і дії первинного радіоактивного випромінювання на стабільні ядра;

4) при бомбардуванні стабільних ядер прискореними частинками або іншими ядрами.

Існують *дві основні причини*, що приводять до великих значень часу життя радіоактивних ядер, тобто до *стабілізації радіоактивного розпаду*, а саме:

1) наявність сил, що заважають розпаду. Наприклад, виліт позитивно заряджених частинок (протони, дейтрони, α-

частинки тощо) сильно пригнічується кулонівськими силами відштовхування. Збільшення часу життя ядра за рахунок кулонівських сил може здаватися парадоксальним, оскільки будь-які сили відштовхування між вільними частинками намагаються виштовхнути заряджену частинку із системи, тобто зменшити, а не збільшити час розпаду. Пояснення цього парадоксу полягає в тому, що на заряджену частинку в ядрі діє середнє поле, що формується ядерною і кулонівською взаємодіями. Як наслідок, поблизу поверхні ядра існує кулонівський потенціальний бар'єр, який частинка подолати не може, якщо вона рухається за законами класичної механіки й має енергію, нижчу від енергії бар'єра. У такому випадку розпад можливий лише за рахунок тунельного проникнення частинки через бар'єр, що описується законами квантової механіки (див. підрозд. 5.5). За малої ймовірності такого розпаду, час життя може бути дуже великим;

2) іншою причиною великих значень часу життя радіоактивних ізотопів може бути дуже мала інтенсивність взаємодії, за рахунок якої відбувається розпад. Наприклад, спостерігається у випадках, коли процес радіоактивного розпаду енергетично можливий, але внаслідок різних заборон не може відбуватися за рахунок сильної чи електромагнітної взаємодії. Описана ситуація реалізується в так званих β -перетвореннях, у яких беруть участь електрони та позитрони, нейтрино й антинейтрино. Такі процеси зумовлені слабкою взаємодією, інтенсивність якої приблизно на шість порядків менша від інтенсивності сильної взаємодії. Мала інтенсивність електромагнітної взаємодії є також однією з причин досить тривалого (у деяких випадках) перебігу процесу γ -розпаду.

У табл. 5.1 представлено основні типи радіоактивних перетворень, а також вказано "правило зсувів" ΔZ і ΔA (зміни заряду і маси материнського ядра після радіоактивного розпаду) та схематично зображено процеси і типи взаємодії, що відповідають за цей розпад. Символи *S*, *E* та *W* означають відповідно сильну електромагнітну та слабку взаємодії. Звернемо увагу на те, що поняття нейтронної радіоактивності не існує. Це можна пояснити тим, що через відсутність заряду нейтрона час життя

збуджених систем, що виникають після розпаду нейтрона й випромінюють нейтрино, дуже малий.

Правила зсуву для A та Z дозволяють згрупувати природні радіоактивні елементи в чотири великі родини, або радіоактивні ряди, ланцюги. Спочатку ці правила для ланцюгів α - та β -розпаду були встановлені емпірично. Сформулюємо їх.

Усі ядра з масовими числами A > 209 нестабільні щодо α розпаду. Будь-яке таке ядро переходить у стабільне (A < 209) шляхом кількох послідовних перетворень. Серед них обов'язковим є α -розпад, оскільки саме він змінює масове число, хоча частина ядер розпадатиметься внаслідок β -перетворень. Останнє пояснюється тим, що при вильоті з ядра α -частинки (два протони і два нейтрони) масове число A зменшується і збалансоване співвідношення між числами Z та N порушується. Ядро виходить за межі області β -стабільності, яка згідно із (1.16) задається співвідношенням $N/Z \cong 0.98 + 0.0155 A^{2/3}$, а потім повертається до неї внаслідок β -розпаду, що відбувається з перетворенням нейтрона на протон і випромінюванням електрона й антинейтрино.

Тип перетворен- ня	Процес	ΔZ	ΔA	Тип взаємодії
α-розпад	${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}$ He	-2	-4	S + E
β- перетворен- ня:		±1	0	W
βрозпад (електрон- ний)	$ \begin{array}{l} {}^{A}_{Z}X \rightarrow^{A}_{Z+1}Y + e^{-} + \overline{v}_{e} \\ \left(\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{p} + e^{-} + \overline{v}_{e} \right) \end{array} $	+1	0	W
β+ -розпад (позитрон- ний)	$ \begin{array}{l} {}^{A}_{Z}X \rightarrow^{A}_{Z-1}Y + e^{+} + \nu_{e} \\ \left(p \rightarrow n + e^{+} + \nu_{e} \right) \end{array} $	-1	0	W
е – (К) поглинання	${}^{A}_{Z}X + e^{-} \rightarrow^{A}_{Z-1}Y + v_{e}$	-1	0	W
γ -випромі- нювання	${}^{A}_{Z}X^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma$	0	0	Ε
Спонтанний поділ	${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A'}_{Z'}Y + {}^{A-A'}_{Z-Z'}\tilde{Y}$	~ Z / 2	~ A / 2	S + E
Протонна радіоактив- ність	${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-1}_{Z-1}Y + p$	-1	-1	S + E
Двопротонна радіоактив- ність	${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-2}_{Z-2}Y + \mathbf{p} + \mathbf{p}$	-2	-2	S + E

Таблиця 5.1. Основні типи радіоактивних перетворень

Проміжні ядра можуть утворюватися у збуджених станах і переходити в стани з меншою енергією, випромінюючи γ -квант, але такі процеси не супроводжується зміною ізотопу. Однак, якщо якесь материнське ядро зазнає послідовних α - та β -розпадів, то для кожного з дочірніх ядер залишок від поділу їхніх масових чисел на чотири буде однаковим. Це пов'язано з

248

тим, що при α -розпаді масове число A змінюється на 4, а при β - та γ -випромінюваннях не змінюється. Унаслідок цього всі незбуджені природні радіоактивні ядра з $Z \leq 100$, які розпадаються з вильотом α -, β -, γ -частинок, групуються в чотири родини, для кожної з яких масові числа задаються однією із таких формул:

$$A = 4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3,$$
 (5.4)

де n – деяке натуральне число і n > 51.

Радіоактивні ряди відіграють важливу роль у прикладних дослідженнях. Основні відомості про них наведено в табл. 5.2. Остання родина в табл. 5.2 отримала свою назву завдяки тому, що попередні до актинію елементи $^{23}_{91}$ Pa, $^{231}_{90}$ Th та $^{235}_{92}$ U були відкриті пізніше. Нептуній, який є родоначальником другого ряду, відносно мало стабільний, і у складі земної кори він не зберігся. Родину нептунію спочатку передбачили теоретично, і лише потім його структуру реконструювали в лабораторії (Г. Сіборг, А. Гіорсо, 1950).

Родина	A	Початковий нук- лід	T _{1/2} , років	Кількість перет- ворень	Кінцевий Нуклід
Торію	4n	$^{232}_{90}{ m Th}$	1,4.1010	12	$^{208}_{82}$ Pb
Нептунію	4n+1	²³⁷ ₉₃ Np	2,2.106	13	²⁰⁹ ₈₃ Bi
Урану	4n+2	²³⁸ ₉₂ U	4,5·10 ⁹	18	$^{206}_{82}$ Pb
Актинія	4n+3	²³⁵ ₉₂ U	7.108	16	²⁰⁷ ₈₂ Pb

Таблиця 5.2. Родини радіоактивних елементів

Кожний радіоактивний ряд може мати ядра з більшими значеннями зарядів і масових чисел, ніж вказані в табл. 5.2, але вони мають порівняно невеликий час життя, а тому в природі майже не зустрічаються. Як відомо, усі елементи з Z > 92 мають загальну назву — *трансуранові елементи*. Елементи з Z > 100 також називають *трансфермієвими*.

Трансуранові елементи були синтезовані штучно, їхнє послідовне вивчення розпочалося в 40-х роках. Першим було синтезовано нептуній з Z = 93 (Е. Макміллан, П. Абельсон, 1940). Інші трансуранові елементи з $Z = 93 \div 98$ були отримані при опроміненні урану (або вже синтезованих елементів) потужними потоками нейтронів від ядерних реакторів. При цьому спочатку утворювалася деяка комплексна система (ядро + нейтрон), і лише потім надлишок нейтронів перетворювався на протони внаслідок β -розпаду. Америцій вперше було синтезовано за допомогою такого ланцюга перетворень:

$$n + {}^{239}_{94} Pu \rightarrow {}^{240}_{94} Pu + \gamma, \quad n + {}^{240}_{94} Pu \rightarrow {}^{241}_{94} Pu + \gamma$$
$${}^{241}_{94} Pu \rightarrow {}^{241}_{95} Am + e^{-} + \tilde{v}_{e}.$$
(5.5)

Ізотопи ейнштейнію (*Z* = 99) і фермію (*Z* = 100) спочатку були відкриті при аналізі продуктів термоядерних вибухів.

Основною причиною нестабільності трансуранових елементів зі значеннями зарядів до $Z \cong 100 \in \alpha$ -розпад, а для трансфермієвих елементів істотним є спонтанний поділ, внесок якого збільшується зі зростанням заряду ядра. Для відомих на сьогодні нуклідів із $Z = 106 \div 107$ це основний тип розпаду. Зі збільшенням заряду ядра (табл. 5.3) час життя ядер зменшується, що надзвичайно ускладнює проблему синтезу та ідентифікації надважких елементів, як з погляду фізики, так і техніки. Багато досягнень (див. підрозд. 3.5) в області синтезу трансуранових елементів значною мірою зобов'язані запропонованому Ю. Ц. Оганесяном (1973) методу так званого холодного, або магічного синтезу, за яким як початкові ядра в реакціях, що застосовують для синтезу елементів, необхідно обирати або магічні ядра, або близькі до них. Такий підхід призводить до утворення складених ядер з меншою енергією збудження і дає змогу на-

дійніше ідентифікувати кінцеві ядра-продукти (детальний аналіз пошуку та досягнень в області синтезу трансуранових елементів наведено в § 94 підручника Д.В. Сивухіна).

-						
Z	Символ	Назва	Кількість ізотопів	A	$T_{1/2}$	
93	Np	Нептуній	12	237	$2,2 \cdot 10^{6} \mathrm{p}.$	
99	Es	Ейнштейній	13	254	250 дн.	
104	Ku	Курчатовій	8	260	0,1 c	

Таблиця 5.3. Періоди напіврозпаду деяких радіоактивних ізотопів

5.2. Основні закони радіоактивного розпаду

Дослідження показують, що радіоактивність є статистичним процесом. Неможливо передбачити, коли саме розпадеться певне нестабільне ядро, при цьому, однакові ядра можуть розпадатися за різні проміжки часу. Із метою опису статистичних закономірностей зазвичай використовують поняття ймовірності тих чи інших подій, тому як характеристики радіоактивного розпаду природно ввести ймовірність λ-розпаду ядра за одиницю часу. Радіоактивний розпад є властивістю самого атомного ядра, тому залежить тільки від його внутрішнього стану. Неможливо вплинути на процес радіоактивного розпаду, що обумовлений наявністю ядерних сил, не змінивши стану атомного ядра. Зовнішні умови (температура, тиск, зовнішнє магнітне поле, хімічний стан елемента тощо) слабо впливають на стан ядра. По-перше, унаслідок того, що для перебудови ядерних станів необхідна значна енергія; по-друге, тому що ядро захищається від зовнішніх впливів електронною оболонкою. У результаті імовірність λ -радіоактивного розпаду майже не залежить від часу, тому її також називають сталою радіоактивного розпаду для даного виду радіоактивності. У деяких випадках спостерігається дуже слабка залежність λ від зовнішніх умов, наприклад, для електронного поглинання (К-поглинання).

Практична незалежність величини λ від часу виявляється в тому, що різні моменти часу ні чим не відрізняються один від одного ймовірністю розпаду ядра. Атомні ядра "не старіють" у процесі свого існування і для них не існує поняття віку. Тому вони можуть розпадатися, тобто "вмирають", лише випадково.

Знайдемо основний закон радіоактивного розпаду. Нехай у момент часу t існує велика кількість N радіоактивних ядер і за проміжок часу dt з них розпадається в середньому dN ядер, тоді відповідно до визначення величини λ як імовірності розпаду за одиницю часу маємо

$$dN = -\lambda N dt . \tag{5.6}$$

Знак "мінус" у рівнянні (5.6) означає, що загальна кількість радіоактивних ядер із часом у процесі розпаду зменшується. Після інтегрування диференціального рівняння (5.6) знаходимо його розв'язок, який є основним законом радіоактивного розпаду

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} , \qquad (5.7)$$

де N_0 – кількість радіоактивних ядер у довільно вибраний початковий момент часу t_0 ($t_0 = 0$). Згідно із цим співвідношенням кількість радіоактивних ядер, що не розпалися, зменшується за експоненціальним законом. Зауважимо, що основний закон радіоактивного розпаду (5.7) є статистичним законом, тобто належить до середніх величин і виконується лише за достатньо великої кількості ядер. Він визначає середню кількість радіоактивних ядер на момент часу t, тобто ту середню кількість, що не розпалася на момент часу t. Стала розпаду λ також визначає й дві інші величини, що характеризують інтенсивність процесу радіоактивності, а саме, період піврозпаду $T_{1/2}$ і середній час життя ядра τ . *Періодом піврозпаду* називають час, за який кількість радіоактивних ядер зменшиться вдвічі, тобто $N(T_{1/2}) = N_0 / 2$. Відповідно до (5.7) маємо

$$N_0 / 2 = N_0 \cdot \exp(-\lambda T_{1/2})$$
 i $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$. (5.8)
Середній час життя τ відповідно до визначення математичного середнього пов'язаний зі щільністю ймовірності w(t) того, що він належить інтервалу від t до t + dt, виразом

$$\tau = \int_{0}^{\infty} tp(t)dt, \quad \int_{0}^{\infty} p(t)dt = 1.$$
 (5.9)

Очевидно, що щільність ймовірності p(t) пропорційна кількості ядер dN(t)/dt, які розпадаються в інтервалі часу $t \div t + dt$, оскільки саме вони визначають середній час життя. З урахуванням умови нормування ймовірності маємо

$$p(t) = \operatorname{const} \cdot \frac{dN(t)}{dt} = \frac{dN(t)/dt}{\int_{0}^{\infty} \frac{dN(t')}{dt'} dt'} = \lambda \cdot e^{-\lambda t}.$$
 (5.10)

Звідси отримуємо, що середній час життя радіоактивного ядра обернено пропорційний сталій розпаду

$$\tau = \lambda \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} t dt = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \approx 1,44 \cdot T_{1/2}.$$
 (5.11)

Ураховуючи (5.8), основний закон радіактивного розпаду (5.7) можна подати у степеневому вигляді

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-t \ln 2/T_{1/2}} = \frac{N_0}{2^{t/T_{1/2}}}$$

Звідси маємо, що кількість ядер, які ще не розпалися до часу t у n разів більшого за період піврозпаду ($t = nT_{1/2}$), менша від початкової в 2^n разів.

Зауважимо, що при розпаді багатьох радіоактивних елементів утворюються ядра, які також радіоактивні й можуть розпадатися. Такий складний багатоступеневий розпад, що вміщує послідовність простих радіоактивних розпадів, у випадку природної радіоактивності може мати до 15-ти проміжних перетворень. Для прикладних застосувань важливо знати залежність від часу кількості радіоактивних елементів, що утворюються на попередніх стадіях. Розглянемо випадок двоступеневого розпаду, коли внаслідок розпаду материнських ядер типу 1 зі сталою розпаду λ_1 утворюються дочірні ядра типу 2 зі сталою розпаду λ_2 , які,

у свою чергу, розпадаються й утворюють стабільні ядра типу 3. Схематично такий двоступеневий процес має такий вигляд: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$. У цьому випадку зміна кількості N_1 ядер типу 1 і кількості N_2 ядер типу 2 визначаються системою рівнянь

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \qquad \frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1.$$
(5.12)

Ці рівняння мають простий зміст: кількість ядер 1 зменшується за рахунок їхнього розпаду, а кількість ядер 2 зменшується за рахунок їхнього власного розпаду та збільшується за рахунок розпаду ядер 1. Очевидно, кількість стабільних ядер типу 3 поповнюється лише за рахунок розпаду ядер типу 2:

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2. \tag{5.13}$$

Розв'язок рівняння для $N_1(t)$ задається виразом (5.7), а розв'язок рівняння для $N_2(t)$ можна легко знайти методом варіації сталих. Припустимо, що в початковий момент часу $t_0 = 0$ маємо N_{10} материнських ядер, а ядер типу 2 і 3 немає

$$N_1(0) = N_{10}, \quad N_2(0) = N_3(0) = 0.$$
 (5.14)

З таких початкових умов розв'язок системи (5.12) має вигляд

$$N_1 = N_{10}e^{-\lambda_1 t}, \quad N_2 = N_{10}\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$
(5.15)

З урахуванням (5.13) кількість стабільних ядер типу З у момент часу *t* така:

$$N_{3}(t) = \lambda_{2} \int_{0}^{t} dt' N_{2}(t') = N_{10} \left(1 + \frac{\lambda_{1}}{\lambda_{2} - \lambda_{1}} e^{-\lambda_{2}t} - \frac{\lambda_{2}}{\lambda_{2} - \lambda_{1}} e^{-\lambda_{1}t}\right) .(5.16)$$

Звідси видно, що сталі розпаду λ_1 і λ_2 є основними величинами, які визначають складний радіоактивний розпад.

Тепер розглянемо випадок, коли період піврозпаду материнських ядер значно більший за період піврозпаду дочірніх ядер

$$T_{1/2}^{(1)} = \frac{\ln 2}{\lambda_1} \gg T_{1/2}^{(2)} = \frac{\ln 2}{\lambda_2} \Longrightarrow \lambda_1 \ll \lambda_2.$$
 (5.17)

Вважатимемо, що ядра розпадаються в інтервалі часів $T_{1/2}^{(2)} \ll t \ll T_{1/2}^{(1)}$. У такому випадку, що реалізується на практиці, кількість материнських ядер упродовж довгого часу t майже не змінюється, а кількість ядер типу 2 збільшується. Дійсно, згідно з (5.15) для моментів часу $t \ll T_{1/2}^{(1)}$ величина $\lambda_1 t \ll 1$, тобто маємо

$$N_1(t) \cong N_{10}, \quad N_2(t) \cong \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10}(1 - e^{-\lambda_2 t}).$$
 (5.18)

Співвідношення (5.18) вказує на те, що кількість радіоактивних дочірніх ядер збільшується із часом, а для часів $t > T_{1/2}^{(2)}$ наближається до свого граничного значення

$$N_2(t \gg T_{1/2}^{(2)}) \cong \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_{10} = \text{const} \cong \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_1(t \ll T_{1/2}^{(1)}).$$
 (5.19)

Зокрема, для моментів часу $t > 10 \cdot T_{1/2}^{(2)}$ співвідношення (5.19) виконується з точністю до 99,9 %. Зазвичай воно записується у формі

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 \tag{5.20}$$

і має назву *ідеальної* (*радіоактивної*) *рівноваги*. Співвідношення (5.20) означає, що в інтервалі часів $T_{1/2}^{(2)} \ll t \ll T_{1/2}^{(1)}$ кількість розпадів в одиницю часу дочірньої речовини $\lambda_2 N_2$ дорівнює кількості розпадів материнської речовини $\lambda_1 N_1$, і тому згідно з (5.12) кількість дочірніх ядер типу 2 не змінюється ($dN_2 / dt = 0$). Зовні ця ситуація виглядає так, що нібито не існує ніякого розпаду материнського ядра становить близько 100 років, співвідношення ідеальної рівноваги називають *рівнянням вікової рівноваги*.

Прикладом послідовного розпаду двох радіоактивних речовин є перетворення радію на радон:

²²⁶₈₈ Ra
$$\rightarrow \frac{222}{86}$$
 Rn $+\frac{4}{2}$ He, $\frac{222}{86}$ Rn $\rightarrow \frac{218}{84}$ Po $+\frac{4}{2}$ He, (5.21)
 $T_{1/2}^{(1)}(\frac{226}{88}$ Ra) = 1600 років, $T_{1/2}^{(2)}(\frac{222}{86}$ Rn) = 3,8 діб.

У цьому випадку виконується умова $T_{1/2}^{(1)} \gg T_{1/2}^{(2)}$, і тому для моментів часу $T_{1/2}^{(2)} \ll t \ll T_{1/2}^{(1)}$ розв'язок системи рівнянь (5.11) можна записати у вигляді (5.18). Вікова рівновага (5.20) між радієм і радоном встановлюється за кілька тижнів (\cong 40 діб).

Можливість стабільного утворення дочірніх ізотопів з необхідним типом і характеристиками розпаду широко використовується в медицині для діагностики, яка виконується за допомогою радіоактивних препаратів. Зазвичай використовується процес так званої робочої рівноваги: деяка кількість материнських ядер відіграє роль "генератора", що безперервно породжує дочірні радіоактивні ядра з потрібним типом розпаду та хімічними властивостями. Далі спеціальні сепаратори дозволяють відокремити їх від інших компонентів і одразу використовувати. Класичним прикладом такого процесу може бути утворення технецію з молібдену:

⁹⁹₄₂ Mo
$$\rightarrow_{43}^{99m}$$
 Tc + $e^- + \tilde{v}_e$; ^{99m}₄₃ Tc \rightarrow_{43}^{99} Tc + γ ,
 $T_{1/2}(^{99}_{42}$ Mo) $\approx 2,8$ днів, $T_{1/2}(^{99m}_{43}$ Tc) $\approx 6,0$ год. (5.22)

Ядра нестабільного технецію ^{99m}₄₃ Tc широко використовуються в медицині. Вони легко входять до складу різних молекул, і тому зручні для застосування в діагностиці, наприклад, для визначення просторової концентрації молекул, з якими вони об'єднуються.

5.3. Одиниці радіоактивності. Активність джерел радіоактивного випромінювання

Активність A радіоактивного джерела, яке складається із N ядер, визначається кількістю розпадів за 1 с, і у випадку одноступеневого розпаду вона дорівнює

$$A = \lambda N \equiv 0,693 \frac{N}{T_{1/2}}, \ \frac{1}{c}.$$
 (5.23)

Ця величина характеризує сумарну інтенсивність випромінювання радіоактивного джерела. Активність (5.23) джерела згідно із законом радіоактивного розпаду (5.6) дорівнює зміні кількості ядер джерела

$$A = \lambda N = -\frac{dN}{dt} \,. \tag{5.24}$$

Активність радіоактивного препарату з періодом піврозпаду $T_{1/2}$ для одноступеневого розпаду змінюється за експоненціальним законом. Дійсно, з (5.7) і (5.24) маємо

$$\frac{dA}{dt} = \lambda \frac{dN}{dt} = -\lambda A \implies A = A_0 \cdot e^{-0.693 \frac{t}{T_{1/2}}}.$$
 (5.25)

Зазвичай в експерименті вимірюють повну активність, яка визначається випромінюванням усіх ядер у ланцюгу послідовного розпаду материнського ядра. При багатоступеневому розпаді повна активність дорівнює сумі активності кожного з ядер, що розпадається

$$A = \sum_{i} \lambda_i N_i . \tag{5.26}$$

За одиницю вимірювання активності приймається 1 розпад за секунду. Така одиниця активності називається *бекерелем* (Бк, англ. *becquerel* (Bq)). Ця одиниця вимірювання надзвичайно мала, а тому частіше використовуються більші, але кратні їй величини мега- та гігабекерель:

$$1 \text{ M}\text{B}\kappa = 10^6 \text{B}\kappa$$
, $1 \text{ }\Gamma\text{B}\kappa = 10^9 \text{ }\text{B}\kappa$. (5.27)

Згідно з визначенням активності (5.23) при заданій активності джерела необхідна кількість препарату зменшується зі зменшенням його періоду піврозпаду. Раніше активність вимірювалась в одиницях Кюрі (Кі, або Сі, англ. *curie*). Згідно з останнім визначенням цієї одиниці активність в 1 Кі має будь-яке джерело, у якому виникає $3,7\cdot10^{10}$ розпадів за секунду, тобто маємо таку відповідність між різними одиницями активності:

1 Ki =
$$3, 7 \cdot 10^{10}$$
 BK = 37 ГБK; 1 BK = $0, 27 \cdot 10^{-10}$ Ki. (5.28)

Зауважимо, що активність у 1 Кі приблизно відповідає активності 1 г радію (точніше активність 1 г радію дорівнює 0,989 Кі). Зазвичай радіоактивні препарати на основі ${}^{60}_{27}$ Со, що використовуються в медицині для радіотерапії, мають активність від 4 до 40 ГБк, тобто 0,1÷1 Кі. Істотно більшу активність мають джерела, що використовуються для проведення хімічних аналізів зразків. Їхня активність може становити близько 10⁶ ГБк ≈ 2,7·10⁴ Кі. Атомна бомба з еквівалентом 20 кт (кілотонн) тринітротолуолу через 1 хв після вибуху створює активність ≈ 7,4·10¹³ ГБк ≈ 2·10¹² Кі.

Для кількісної оцінки дії будь-якого іонізуючого випромінювання в опроміненій речовині користуються термінами: поглинена доза та експозиційна доза (або доза опромінення). Поглинена доза (D) – це енергія (\mathcal{E}_n) іонізуючого випромінювання, що поглинається деякою одиницею маси *m* опроміненої речовини

$$D = \frac{\varepsilon_n}{m}.$$
 (5.29)

Починаючи з 1953 р., поглинена доза вимірювалася в радах (від англ. *radiation absorbed dose*, rad). За 1 рад приймалася поглинена доза, що відповідає поглиненій енергії 100ерг на 1 г опроміненої речовини:

1 рад =
$$100 \frac{\text{ерг}}{\Gamma} = 10^5 \frac{\text{ерг}}{\kappa\Gamma} = 0,01 \frac{\text{Дж}}{\kappa\Gamma}.$$
 (5.30)

На сьогодні в системі СІ за одиницю поглиненої енергії прийнято *грей* (Гр, англ. *Gray* (Gy)) – одиниця, яка в 100 разів більша, ніж 1 рад: 1Гр=1Джр/1кг=100 рад.

Поглинена доза визначає енергію, що поглинається одиницею маси речовини за довільний проміжок часу. Поглинена доза, що відповідає одиниці часу, називається *потужністю поглиненої дози*:

$$P = \frac{D}{t}, \quad \Gamma p/c, \tag{5.31}$$

де *t* – час поглинання енергії дози (тобто час дії опромінення).

Можливість випромінювання іонізувати повітря характеризується експозиційною дозою, або дозою опромінення (*X*):

$$X = \frac{q}{m},\tag{5.32}$$

де q – величина заряду, що виникає при іонізації повітря деякою масою m. Відношенням дози опромінення до часу опромінення називається *потужністю дози опромінення*.

За одиницю експозиційної дози в системі СІ прийнято таку інтенсивність рентгенівського випромінювання, або γ -випромінювання з $E_{\gamma} \le 0,2$ МеВ, яка приводить до появи в 1 кг сухого повітря іонів із сумарним зарядом кожного знака в 1 кулон (1 Кл/кг). Разом з тим, на практиці дозу опромінення зазвичай вимірюють у рентгенах (Р); 1 Р – це доза рентгенівського випромінювання, або гамма-випромінювання з енергією до 200 кеВ, при якій сумарний заряд іонів (додатних або від'ємних), що виникає в 1 см³ сухого повітря за нормальних умов, дорівнює одній одиниці заряду в системі одиниць СГС ($\frac{1}{10 \cdot c}$ кулонів, $c = 3 \times 10^8$ м/с – швидкість світла). Маса 1 см³ повітря за нормальних умов (температура – 0⁰ С, тиск – 760 мм рт. ст.) дорівнює 1,293 · 10⁻³ г, а заряд у $\frac{1}{10 \cdot c}$ Кл дорівнює заряду в 2,082 · 10⁹

парах одновалентних юнів у 1см³ такого повітря. Тому дія експозиційної дози в 1 Р відповідає утворенню в повітрі кількості одновалентних іонів, що визначається співвідношенням

$$1P = 2,082 \times 10^9 \frac{\text{пар 10HIB}}{\text{см}^3(\text{повітря})} = 1,61 \times 10^{12} \frac{\text{пар 10HIB}}{\text{г(повітря)}}.$$
 (5.33)

Середнє значення енергії, що використовується для утворення однієї пари одновалентних іонів, дорівнює 34 eB, і тому середня енергія (тобто середня поглинена доза), що приводить до іонізації з експозиційною дозою в 1 Р, визначається співвідношеннями

$$1P \Longrightarrow 1,61 \times 10^{12} \times 34 \times 1,602 \times 10^{-12} = 87,7 \frac{\text{epr}}{\Gamma \text{ (повітря)}}$$
(5.34)

Значення 87,7 ерг/г (повітря) називається енергетичним еквівалентом рентгена. Порівнюючи останнє значення з визначенням (5.30) одиниці 1 рад, маємо у випадку проходження рентгенівського випромінювання, або γ -випромінювання з енергією до 200 кеВ крізь повітря за нормальних умов співвідношення 1 рад=1,14 Р.

Величина експозиційної дози залежить від інтегрального потоку іонізуючого випромінювання, але їхнє співвідношення не просте, воно залежить як від типу випромінювання, так і від його енергії. Для рентгенівських і γ -променів з енергіями E_{γ} від 70 кеВ до 2 МеВ з точністю до 15 % виконується просте співвідношення

$$1P = \frac{2 \times 10^9 (\phi \text{отон/c})}{E_{\gamma} (\text{MeB})}.$$
 (5.35)

Дослідження (вимірювання, розрахунки) характеристик іонізуючого випромінювання розглядає спеціальний розділ фізики, який має назву ядерна дозиметрія. Встановлено, що біологічна дія іонізуючого випромінювання залежить не лише від поглиненої дози, але й від типу (γ -промені, α - та β -частинки, нейтрони) та енергії. Коефіцієнт, який показує, у скільки разів біологічна дія даного виду випромінювання сильніша за дію γ -випромінювання $E_{\gamma} \leq 0,2$ MeB, називається коефіцієнтом відносної біологічної ефективності (КВБЕ) k, або коефіцієнтом якості випромінювання (табл. 5.4) Для оцінки впливу випромінювання на живі організми була введена спеціальна величина, а саме, еквівалентна доза.

Еквівалентнюю дозою поглиненого випромінювання *H* називають величину, яка дорівнює добутку поглиненої дози та коефіцієнта відносної біологічної ефективності

$$H = k \cdot D . \tag{5.36}$$

Таблиця 5.4. Коефіцієнти відносної біологічної ефективності (КВБЕ)

Тип випромінювання	k
γ -промені	1

та β-частинки	
α -частинки та протони	10
Теплові нейтрони	3
Швидкі нейтрони	10
Важкі ядра	20

У системі СІ за одиницю еквівалентної дози прийнято *зіверт* (Зв, англ. *Sievert* (Sv)), що відповідає дозі 1 Гр sз коефіцієнтом k = 1. На практиці для вимірювання еквівалентної дози поглиненого випромінювання частіше використовують позасистемну одиницю 1 бер, яка є 1/100 Зв: 1Зв=100 бер (до 1963 р. 1 бер визначався як біологічний еквівалент рентгену, зі скорочення цих слів і виникла назва; англ. *Roentgen equivalent of man* (Rem)). Одиниця 1 бер – це поглинена доза будь-якого типу випромінювання, яка створює в живому організмі такий самий ефект, що й поглинена доза в 1 рад рентгенівського випромінювання, або γ -випромінювання з енергією до 200 кеВ: 1 бер = 0,013в = 1 рад · k.

Таблиця 5.5. Характер дії доз випромінювання на людину

Випромінювання	Доза чи її потужність
Природний фон (космічне випромінювання, радіоактивність оточуючого середовища та тіла людини)	~ 0,1 бер/рік
Флюорографія	до 3÷5 бер
Доза, що призводить до загального опромінення всього тіла (променева хвороба, що призводить до смерті)	400 – 500 бер
Доза, що використовується в медицині (місцеве опромінення)	до 10000 бер

Механізм біологічної дії ядерного випромінювання обумовлений тим, що воно викликає іонізацію атомів і розпад молекул усередині біологічної тканини. Це призводить до змін і руйнування клітин, що може бути небезпечно для організму. Як відомо, великі дози радіоактивних випромінювань викликають важке захворю-

вання – променеву хворобу. Деякі дані про дози випромінювання наведено в табл. 5.5. За даними Міжнародної комісії з радіологічного захисту небезпечними вважаються дози, що перевищують 35 бер на рік, тобто ті, що перевищують природний фон більш як на два порядки.

5.4. α-розпад

Явище α -розпаду полягає в радіоактивному перетворенні ядер з вильотом ядер гелію (α -частинок):

$${}^{A}_{Z}X \to {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}\operatorname{He} + Q_{\alpha}, \ Q_{\alpha} > 0,$$
 (5.37)

де символом Q_{α} вказано енергію α -розпаду; коли материнське і дочірнє ядро перебувають в основних станах, то $Q_{\alpha} = (m_X - m_Y - m_{\alpha})c^2 = -S_{\alpha}$.

Основними характеристиками α -розпаду, як і будь-якого іншого радіоактивного процесу, є сукупність радіоактивних ядер, періоди їх піврозпаду та енергії частинок, що вилітають.

Зупинимось на основних емпіричних властивостях α-розпаду.

1. Відомо багато α -радіоактивних ядер, значна частина з яких має заряд Z > 83. Будь-яке ядро із цієї області розпадається з вильотом α -частинок, а якщо такий розпад не знайдено, то лише тому, що порівняно з іншими типами розпаду він малоймовірний. Той факт, що спонтанний α -розпад відбувається у важких ядрах випливає із закону збереження енергії. Дійсно, енергія зв'язку α -частинки дорівнює 28 МеВ, тобто 7 МеВ на нуклон. Тому α -розпад ядра буде енергетично можливим тоді, коли питома енергія зв'язку нуклона в ядрі становитиме менше, ніж 7 МеВ. Звідси зрозуміло, що спонтанний α -розпад можливий для достатньо важких ядер, у яких питома енергія зв'язку $\overline{B} \leq 7$ МеВ. Обчислення за напівемпіричною формулою Вейцзекера для енергій зв'язку показують, що питома енергія зв'язку нуклона стає меншою від 7 МеВ приблизно в області $A \ge 190$. Разом з тим, напівемпірична формула дає лише середню залеж-

ність енергії зв'язку від A та Z, і тому значення $\overline{B} < 7$ MeB можливі й в інших випадках.

2. Періоди піврозпаду α -активних ядер лежать у широких межах, наприклад, від $3 \cdot 10^{-7}$ с для $\frac{212}{82}$ Pb до $1, 4 \cdot 10^{17}$ років для $\frac{204}{82}$ Pb. Разом з тим, енергії α -частинок мають досить вузькі інтервали, а саме: $4 \div 9$ MeB7 MeB для важких ядер ($A \ge 210$) і $1 \div 4,5$ MeB для більш легких з $140 \le A \le 210$. Залежність періоду піврозпаду від енергії α -частинок описується емпіричним законом Гейгера–Неттола, який можна записати у вигляді

$$\ln T_{1/2} = -C + \frac{D}{\sqrt{E_{\alpha}}},$$
(5.38)

де C, D – константи, які майже не залежать від енергії. Для ядер із зарядами в інтервалі $Z = 60 \div 100$ – сталі C, D наближено можна подати у вигляді

$$C = 66, 6+3, 71 \cdot Z^{2/3} \sim 108 \div 147, 4, \quad D = 3, 7 \cdot Z \sim 161 \div 368.$$
 (5.39)

Спочатку закон Гейгера–Неттола, який був відкритий у 1911 р., мав вигляд співвідношення між періодом піврозпаду та середньою довжиною L пробігу α -частинки в газі $\ln T_{1/2} = a - b \ln L$. При записі цього закону у формі (5.38) враховано залежність довжини пробігу L від енергії α -частинки. Згідно із законом Гейгера–Неттола (5.38) період піврозпаду експоненціально залежить від енергії α -частинок. Наприклад, зменшення енергії на 1 % може привести до збільшення періоду піврозпаду в 10 разів, а зменшення енергії на 10 % може змінити $T_{1/2}$ на 2÷3 порядки.

Процес α -розпаду є суто квантовим процесом і його класичне тлумачення неможливе. Дійсно, розглянемо графік залежності потенціальної енергії V(r) α -частинки від відстані r від центра ядра (рис. 5.1).



Рис. 5.1. Потенціальна енергія α -частинки: E_a – енергія α -частинки, R – радіус ядра

Зовні ядра із зарядом Z на α -частинку діє лише кулонівське поле відштовхування, тому

$$V(r) = \frac{2(Z-2)}{r}e^2, \quad r > R_0.$$
(5.40)

Усередині ядра діють інтенсивні ядерні сили притягання й потенціальна енергія від'ємна; у грубому наближенні вона може бути апроксимована прямокутною ямою. На межі ядра потенціал сягає свого максимуму V_0 :

$$V_0 \equiv V(R) = \frac{2(Z-2)}{R_0}e^2 = 1,44\frac{2(Z-2)}{r_0A^{\frac{1}{3}}} \approx 2,4(Z-2)A^{-\frac{1}{3}}(\text{MeB}),(5.4)$$
1)

оскільки всередині ядра потенціальна крива різко спадає вниз. Таким чином, поблизу межі ядра існує кулонівський бар'єр, висоту якого можна оцінити із формули (5.41). Підставляючи в неї, наприклад, характеристики урану (Z = 92, A = 238, $r_0 = 1, 2 \, \text{фм}$), маємо

$$V_0 \approx 35 \text{ MeB.}$$
 (5.42)

Зауважимо, що α -частинки радіоактивного розпаду поширених у природі ядер мають енергії, що не перевищують 10 МеВ, тому, якби ми захотіли описати їхній виліт законами класичної механіки, вони залишалися б "замкненими" всередині ядра і ніякий α -розпад не існував би. Завдяки врахуванню квантових ефектів при описі руху α -частинки, а саме, її хвильових властивостей, виникла можливість описати проникнення (тунелювання) α -частинки крізь бар'єр (Г.А. Гамов та незалежно Р. Герні і Е. Кондон, 1928).

5.5. Елементарна теорія α-розпаду як тунелювання крізь бар'єр

Для обчислення ймовірності проходження частинки крізь бар' єр розглянемо задачу про рух частинки в полі одномірного прямокутного бар'єра шириною a і висотою V_0 , що перевищує енергію частинки E (рис. 5.2). Рух частинки описується рівнянням Шредінгера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + V(x)\Psi = E\Psi, \qquad (5.43)$$

яке в областях 1, 2 та 3 має вигляд

1.
$$\frac{d^{2}\Psi}{dx^{2}} + \frac{2m}{\hbar^{2}}E\Psi = 0,$$

2.
$$\frac{d^{2}\Psi}{dx^{2}} + \frac{2m}{\hbar^{2}}(E - V_{0})\Psi = 0,$$
 (5.44)
3.
$$\frac{d^{2}\Psi}{dx^{2}} + \frac{2m}{\hbar^{2}}E\Psi = 0.$$

2	c	-
2	o	Э



Рис. 5.2. Проходження частинки крізь одномірний прямокутний бар'єр

Введемо позначення

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}, \quad \chi = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}, \quad \eta = \frac{\chi}{k},$$
 (5.45)

тоді розв'язки рівнянь Шредінгера (5.44) у відповідних областях матимуть вигляд:

1.
$$\Psi_1 = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}, \quad -\infty < x < 0,$$

2. $\Psi_2 = A_2 e^{-\chi x} + B_2 e^{\chi x}, \quad 0 \le x \le a,$ (5.46)
3. $\Psi_3 = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}, \quad a < x < \infty.$

Для знаходження фізичної інтерпретації компонентів хвильових функцій визначимо напрямок руху частинок. Очевидно, що він збігається з напрямком вектора \vec{j} густини потоку частинок

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \vec{\nabla} \Psi^* - \Psi^* \vec{\nabla} \Psi) \equiv \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \frac{d}{dx} \Psi^* - \Psi^* \frac{d}{dx} \Psi) \cdot \vec{e}_x =$$

$$= -\frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}(\Psi \frac{d}{dx} \Psi^*) \cdot \vec{e}_x, \qquad (5.47)$$

де \vec{e}_x – одиничний вектор уздовж осі X. Для частинок із хвильовими функціями $\phi^{(\pm)} = \exp(\pm ikx)$ маємо

$$\vec{j}^{(\pm)} = -\frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}[\varphi^{(\pm)} \frac{d\varphi^{(\pm)*}}{dx}] = \pm \upsilon \vec{e}_x, \qquad (5.48)$$

де $\upsilon = p / m = \hbar k / m$ – швидкість частинки. Із цієї формули видно, що опис частинки хвильовою функцією у вигляді плоскої хвилі означає, що вона рухається ($\upsilon \neq 0$), а знак у показнику експоненти плоскої хвилі визначає напрямок її руху, а саме, компоненти хвиль Ψ_1 і Ψ_3 слід інтерпретувати таким чином:

1) $\phi_0^{(+)} \equiv A_1 e^{ikx}$ є спадною хвилею, яка відповідає руху частинки зліва від бар'єра з $x = -\infty$ до бар'єра зі значенням потоку

$$\vec{j}_0 = j_0 \vec{e}_x, \ j_0 = |A_1|^2 \ v;$$
 (5.49)

2) $\phi_r^{(-)} \equiv B_1 e^{-ikx}$ – відбита хвиля, яка відповідає руху частинок, відбитих від бар'єра з потоком

$$\vec{j}_r = -j_r \vec{e}_x, \quad j_r = |B_1|^2 \text{ u};$$
 (5.50)

3) $\phi_d^{(+)} \equiv A_3 e^{ikx}$ є хвильовою функцією частинок, що пройшли бар'єр і рухаються від бар'єра з потоком

$$j_d = j_d \vec{e}_x, \quad j_d = |A_3|^2 \text{ u};$$
 (5.51)

4) $B_3 e^{-ikx}$ відповідає хвилі, яка йде від нескінченності до бар' єра з потоком

$$\dot{j}_{inf} = -j_{inf}\vec{e}_{x}, \ j_{inf} = |B_3|^2 \upsilon.$$
 (5.52)

За умовами задачі потік *j*inf відсутній, звідки маємо

$$B_3 = 0$$
. (5.53)

Розв'язки $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3 \in$ частинами єдиної хвильової функції, і тому мають задовольняти умови неперервності функції та її похідних на межах бар'єра, так звані умови зшивання, тобто в точках x = 0 і x = a (рис. 5.2):

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0), \qquad \Psi_2(a) = \Psi_3(a); \Psi_1(0) = \Psi_2(0), \qquad \Psi_2(a) = \Psi_3(a).$$
(5.54)

де $\Psi'_{j}(z) = d\Psi_{j}(x)/dx$ – похідна при x = z. Ці умови зшивання приводять до систем рівнянь:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \\ A_1 - B_1 = -i\eta(B_2 - A_2), \end{cases}$$
(5.55)

та

$$\begin{cases} A_2 e^{-\chi a} + B_2 e^{\chi a} = A_3 e^{ika}, \\ A_2 e^{-\chi a} - B_2 e^{\chi a} = -\frac{i}{\eta} A_3 e^{ika}. \end{cases}$$
(5.56)

Узявши суму і різницю рівнянь (5.56), отримуємо

$$A_2 = \frac{1}{2}e^{ika}e^{\chi a}(1-\frac{i}{\eta})A_3; \qquad B_2 = \frac{1}{2}e^{ika}e^{-\chi a}(1+\frac{i}{\eta})A_3. \quad (5.57)$$

Підставивши ці вирази в систему рівнянь (5.55), приходимо до співвідношень

$$A_{1} = e^{ika} [ch\chi a + \frac{i}{2}(\eta - \frac{1}{\eta})sh\chi a]A_{3},$$

$$B_{1} = -\frac{i}{2}e^{ika}(\eta + \frac{1}{\eta})(sh\chi a)A_{3}.$$
(5.58)

Бачимо, що коли існує падаюча хвиля, тобто при $A_1 \neq 0$, коефіцієнти A_3 та B_1 завжди відмінні від нуля. Оскільки величина A_3 визначає ймовірність знаходження/перебування частинки зовні бар'єра, то умова $A_3 \neq 0$ означає, що з погляду квантової механіки завжди існує ймовірність знайти частинку, яка налітає на бар'єр, у будь-якій точці простору зовні бар'єра.

Кількісно ймовірність відбиття та проходження частинки через бар'єр характеризується коефіцієнтом R відбиття та коефіцієнтом D проходження або прозорості бар'єра. *Коефіцієнтом відбиття* (від англ. *reflection coefficient*) називається відношення абсолютного значення густини потоку j_r у відбитій хвилі до густини спадного потоку j_0 :

$$R \equiv \frac{j_r}{j_0} = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2.$$
 (5.59)

Коефіцієнтом проходження D (від англ. transmission coefficient), або коефіцієнтом прозорості бар'єра (від англ. barrier transparency), називається відношення абсолютних значень густин потоків j_d , j_0 у хвилях, що пройшли бар'єр і падають на нього

$$D = \frac{j_d}{j_0} = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2.$$
 (5.60)

Окрім коефіцієнта *D* часто вводять так званий коефіцієнт проникності бар'єра *P* (від англ. penetration factor) як відношення ймовірності $|\phi_d^{(+)}(a)|^2 \equiv |\psi_3(a)|^2$ знайти частинку зовні бар'єра до інтенсивності $|\phi_0^{(+)}(0)|^2$ хвилі (5.51), що падає на бар'єр:

$$P \equiv \left| \frac{\varphi_d^{(+)}(a)}{\varphi_0^{(+)}(0)} \right|^2 = \left| \frac{\psi_3(a)}{\varphi_0^{(+)}(0)} \right|^2.$$
(5.61)

У випадку, коли частинка рухається вільно в областях 1 та 3, її швидкість у цих областях однакова, а значення коефіцієнтів проникності (*P*) і прозорості (*D*) бар'єра збігаються

$$P = D = |A_3 / A_1|^2 . (5.62)$$

Зі співвідношень (5.58) маємо

$$D^{-1} = \left| \frac{A_1}{A_3} \right|^{-2} = \operatorname{ch}^2 \chi a + \frac{1}{4} (\eta - \frac{1}{\eta})^2 \operatorname{sh}^2 \chi a,$$

$$R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{B_1}{A_3} \right|^2 \cdot \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 = \frac{D}{4} (\eta + \frac{1}{\eta})^2 \operatorname{sh}^2 \chi a,$$
(5.63)

оскільки ch² χa – sh² χa = 1:

$$D = 1/(1+\alpha), \quad R = D\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{4}(\eta + \frac{1}{\eta})^2 \operatorname{sh}^2 \chi a.$$
 (5.64)

Видно, що коефіцієнти R і D задовольняють співвідношення R + D = 1, яке відображає закон збереження кількості частинок або рівність одиниці ймовірності перебування частинки в усьому координатному просторі.

Оскільки коефіцієнт $D \neq 0$, то бар'єр завжди буде прозорим незалежно від його висоти і ширини. Явище проходження час-

тинок з енергією, що менша від висоти бар'єра, через бар'єр називається *тунельним ефектом*. Тунельний ефект повністю зумовлений хвильовими властивостями частинок.

У квазікласичному наближенні $\hbar \rightarrow 0$ (фактично у випадку високих або широких бар'єрів) виконується нерівність

$$\chi a \equiv a \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} (V_0 - E) \gg 1.$$
 (5.65)

Тому $\exp(\chi a) \gg 1$, $\operatorname{sh}\chi a \simeq \exp(\chi a) / 2$ і вираз для *D* спрощується та набуває вигляду

$$D \equiv P = \overline{D}_0 \exp(-2a\chi) \equiv \overline{D}_0 \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}a\right\},\qquad(5.66)$$

де

$$\overline{D}_0 = \left(\frac{4\eta}{1+\eta^2}\right)^2 \equiv 16\frac{E}{V_0}\left(1-\frac{E}{V_0}\right).$$

Вираз (5.66) справедливий лише за енергій E, нижчих від бар' єра $V_0(E < V_0)$, оскільки при $E = V_0$ перестає виконуватись умова (5.65). Коли $E = V_0$, тобто $\eta = 0$, то із загальної формули (5.64) отримуємо

$$D = 1 / \left(1 + \frac{1}{4} (ka)^2 \right) < 1.$$
 (5.67)

Співвідношення (5.66) називається формулою Гамова. Очевидно, що ймовірність тунельного ефекту буде помітною лише в тих випадках, коли коефіцієнт *D* не дуже малий, тобто, коли значення величини $\chi a \equiv \sqrt{2m(U_0 - E)a}/\hbar$ не дуже велике. Згідно з (5.66) імовірність проникнення бар'єра буде більш високою в частинках меншої маси, а при переході до класичної фізики $\hbar \to 0$ коефіцієнт прозорості бар'єра, як і очікувалось, прямує до нуля.

Формулу (5.66) для коефіцієнта проходження прямокутного бар'єра можна узагальнити на випадок бар'єра V(x) довільної форми (рис. 5.3). Для цього представимо площу, обмежену кривою V(x), прямокутниками із шириною $\Delta x \ll 1$. У квазікласичному наближенні для кожного *i*-го прямокутника з координата-

ми основи $x_i^*, x_i^* + \Delta x$ коефіцієнт проходження (проникності) D'_i можна апроксимувати виразом (5.66) з деяким множником \overline{D}'_i :



Із визначення (5.60) випливає, що коефіцієнт проникності D усього бар'єра приблизно дорівнює добутку коефіцієнтів проникності для dcix елементарних бар'єрів $D \cong \prod D'_i$. Саме тому по-

казники експоненти у формулі для повного коефіцієнта *D* додаються:

$$D \sim \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\sum_{i} \Delta x_{i}\sqrt{2mV(x_{i})-E}\right\},\$$

і після заміни відповідної суми в показнику експоненти на інтеграл маємо

$$D \equiv P = D_0 \exp\left\{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m[V(x) - E]} dx\right\},$$
 (5.69)

де координати x_1 (початок бар'єра для частинки із заданою енергією) і x_2 (кінець бар'єра) визначається з умови

$$V(x_1) = V(x_2) = E. (5.70)$$

Координати x_1 , x_2 називаються *точками повороту* і визначають дозволені межі класичного руху частинки; відповідно до класичної механіки рух частинок можливий лише в областях $E > V(x_1), V(x_2)$. Формулу (5.69) можна отримати й при розгляді руху частинок у квазікласичному наближенні.

Користуючись виразами (5.69) і (5.70), можна записати вираз для коефіцієнта проникності сферичного бар'єра. Дійсно, проникність сферичного бар'єра частинкою з кутовим моментом lвизначається її радіальним рухом, який описується радіальним рівнянням Шредінгера такого ж виду, як і у випадку одновимірного руху, але з ефективною потенціальною енергією $V_l(r)$ у вигляді суми потенціальної V(r) і відцентрової енергії $\hbar^2 l(l+1)/2mr^2$. Зрозуміло, що коефіцієнт проходження сферичного потенціалу V(r) залежить від кутового моменту l руху частинки та у квазікласичному наближенні має вигляд, аналогічний (5.69), із заміною одновимірного потенціалу на ефективний потенціал, та інтегруванням за радіальною координатою:

$$P = D \equiv P_{l} = D_{0}e^{-G_{l}(E)};$$

$$G_{l}(E) = \frac{2}{\hbar} \int_{r_{1}}^{r_{2}} dr \sqrt{2m[V_{l}(r) - E]},$$
(5.71)

де D_0 – деяка константа, а

$$V_l(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$$
(5.72)

– ефективна потенціальна енергія з урахуванням відцентрової енергії руху. Вираз $G_l(E)$ називається показником Гамова. Інтегрування в (5.71) виконується у внутрішній області бар'єра, а значення точок повороту r_1 , r_2 для потенціалів з обмеженими значеннями похідних визначаються з умов

$$V_l(r_1) = V_l(r_2) = E$$
. (5.73)

Для потенціалів у вигляді сходинки величина r_1 означає початкове (внутрішнє) значення координати бар'єра, а $r_2 - \mathbf{i}\mathbf{i}$ кінцеве (зовнішнє) значення.

Як відомо, стала розпаду $\lambda \in$ величиною, що обернено пропорційна середньому часу τ життя радіоактивного ядра (див. вираз (5.11)), і визначає середню ймовірність розпаду в одиницю часу. Для її наближеного обчислення треба помножити проникність бар'єра P_l на множник, який є добутком імовірності w_{α} утворення α -частинки всередині ядра і частоти її появи на поверхні бар'єра, тобто частоти ν її зіткнень зі стінками ядра $\lambda = P_l \cdot w_{\alpha} / \tau_{\alpha}$. У нульовому наближенні вважають, що $w_{\alpha} \cong 1$, а частоту зіткнень оцінюють, як величину, обернену до часу $\tau_{\alpha} = 2R_0/\upsilon_{\alpha}$, при якій α -частинка швидкості υ_{α} проходить відстань, що дорівнює діаметру ядра, тому $\lambda = P_l \cdot v_{\alpha} / 2R_0$.

З урахуванням (5.71) та (5.72) і для потенціалу, що зображений на рис. 5.1, вираз для сталої розпаду з вильотом α -частинки набуває вигляду

$$\lambda_l = \lambda_l^{(0)} \exp\{-G_l\}, \qquad \lambda_l^{(0)} = \frac{\upsilon_\alpha}{2R_0} D_0, \qquad (5.74)$$

де показник Гамова G_l дорівнює

$$G_{l} = \left(\frac{8m_{\alpha}}{\hbar^{2}}\right)^{1/2} \int_{R_{0}}^{r_{2}} \left(V_{l}(r) - E_{\alpha}\right)^{1/2} dr,$$

$$V_{l}(r) = \frac{2(Z-2)e^{2}}{r} + \frac{\hbar^{2}}{2m_{\alpha}} \frac{l(l+1)}{r^{2}},$$
(5.75)

а r₂ є розв'язком рівняння

$$V_l(r_2) = E_\alpha , \qquad (5.76)$$

 E_{α} і m_{α} – енергія і маса α -частинки. Якщо α -частинка вилітає з нульовим кутовим моментом, то $V_l(r_2) \equiv 2(Z-2)e^2 / r_2 = E_{\alpha}$ і показник Гамова дорівнює

$$G_{l=0} = \left[\frac{8m_{\alpha}E_{\alpha}r_{2}}{\hbar^{2}}\right]^{1/2} \int_{R_{0}}^{r_{2}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{2}}\right)^{1/2} dr, \qquad r_{2} = \frac{2(Z-2)e^{2}}{E_{\alpha}}.$$
 (5.77)

Введемо нову змінну $x = (r/r_2)^{1/2}$, тоді маємо

$$G_0 = \left[\frac{2m_{\alpha}E_{\alpha}}{\hbar^2}\right]^{1/2} 4r_2 \int_{x_0}^1 \sqrt{1-x^2} dx, \ x_0 = \sqrt{R_0/r_2}.$$
 (5.78)

Виконуючи інтегрування, знаходимо

$$G_0 = \left[\frac{2m_{\alpha}E_{\alpha}}{\hbar^2}\right]^{1/2} 4r_2 \frac{1}{2} [x\sqrt{1-x^2} - \arccos x]|_{x_0}^1$$

або

$$G_0 = \left(\frac{16(Z-2)e^2m_{\alpha}r_2}{\hbar^2}\right)^{1/2} \left[\arccos\left(\frac{R_0}{r_2}\right)^{1/2} - \left(\frac{R_0}{r_2} - \frac{R_0^2}{r_2^2}\right)^{1/2}\right].(5.79)$$

Якщо енергії α -частинок значно менші від кулонівського бар'єра $V_0 \equiv 2(Z-2)e^2 / R_0 \gg E_{\alpha}$, тобто відповідно до (5.77) при $r_2 \gg R_0$ вираз у квадратних дужках спрощується:

$$\left[\arccos\left(\frac{R_0}{r_2}\right)^{1/2} - \left(\frac{R_0}{r_2} - \frac{R_0^2}{r_2^2}\right)^{1/2}\right] \approx \frac{\pi}{2}, \qquad (5.80)$$

тоді отримуємо

$$G_0 = \frac{4\pi (Z-2)e^2}{\hbar (2E_\alpha / m_\alpha)^{1/2}}.$$
 (5.81)

Ураховуючи (5.74), отримуємо вираз для сталої розпаду при вильоті α -частинок з нульовим орбітальним моментом

$$\lambda = \lambda_0^{(0)} \exp\left[-\frac{4\pi (Z-2)e^2}{\hbar (2E_\alpha / m_\alpha)^{1/2}}\right].$$
 (5.82)

Це співвідношення є не що інше, як закон Гейгера–Неттола (див. підрозд. 5.4), записаний для сталої розпаду. Дійсно, після логарифмування (5.82) і врахування співвідношення (5.8),

 $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$, маємо закон Гейгера–Неттола у звичайному вигляді (5.38), а саме:

$$\ln T_{1/2} = -C + \frac{D}{\sqrt{E_{\alpha}}},$$
 (5.83)

де період піврозпаду обчислюється в секундах, енергія – у мегаелектрон-вольтах, а

$$C = -\lg \frac{\ln 2}{\lambda_0^{(0)}} = \ln(0, 72\upsilon_{\alpha}D_0) - \ln R_0,$$

$$D = 4\pi (Z - 2)e^2 \left(\frac{m_{\alpha}}{2\hbar^2}\right)^{1/2} \approx 4Z .$$
(5.84)

Спробуємо оцінити вплив орбітального моменту на проникність α -частинок. При $l \neq 0$ показник Гамова G_l (5.75) можна записати у вигляді

$$G_{l} = \left[\frac{8m_{\alpha}E_{\alpha}}{\hbar^{2}}\right]^{1/2} \int_{R_{0}}^{r_{2}} \left(\frac{r_{2}}{r} - 1 + \frac{\alpha}{r^{2}}\right)^{1/2} dr, \qquad (5.85)$$

де $\alpha = \hbar^2 l(l+1) / (2m_{\alpha}E_{\alpha})$. Для важких ядер і при не дуже великих значеннях *l* доданок α / r^2 буде значно меншим, ніж перші два, тоді в підінтегральному виразі можна виконати таке перетворення:

$$\left(\frac{r_2}{r} - 1 + \frac{\alpha}{r^2}\right) = \left(\frac{r_2}{r} - 1\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2} \left(\frac{r_2}{r} - 1\right)^{-1}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{r_2}{r} - 1\right)^{1/2} + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{r^2} \left(\frac{r_2}{r} - 1\right)^{-1/2}.$$
(5.86)

Звідси знаходимо вираз для показника Гамова *G*_l при вильоті α -частинки з відмінним від нуля орбітальним моментом

$$G_l = G_0 + \Delta G_l \,, \tag{5.87}$$

де

$$\Delta G_l = \left(\frac{2\hbar^2}{m_{\alpha}E_{\alpha}}\right)^{1/2} \frac{l(l+1)}{r_2^2} \left(\frac{r_2}{R_0} - 1\right)^{1/2}.$$
 (5.88)

Для прикладу обчислимо G_0 і ΔG_l за формулами (5.79), (5.88) для ядра з Z = 92 і A = 234 та для $E_{\alpha} = 0,5$ MeB. Обчислення дають $G_0 \approx 16,6$; $\Delta G_1 \approx 0,14$; $\Delta G_2 \approx 0,21$, тобто при невеликих значеннях l величина ΔG_l мала і період піврозпаду зростає зі зростанням кутового моменту через збільшення ефективного бар'єра ядра.

Квантова теорія α -розпаду, яка трактує його як тунельний процес, коректно описує всю сукупність експериментальних даних. Оскільки коефіцієнт *С* формули Гейгера–Неттола (5.83) залежить від радіуса ядра R_0 , то вивчення періодів піврозпаду α частинок дає непрямий метод визначення розмірів ядер. За допомогою цього методу отримано таке середнє значення для радіусів альфа-радіоактивних ядер:

$$R_0 = r_0 A^{1/3}, \qquad r_0 = 1,57 \pm 0,015 \text{ } \text{фM}.$$
 (5.89)

Із деяких ядер вилітають α -частинки з різними значеннями кінетичної енергії. У цьому випадку спостерігається тонка структура α -спектрів. Як приклад у табл. 5.6 і на рис. 5.4 наведено енергії та інтенсивності α -частинок, які утворюються при розпаді ядер ²¹²Ві. Пояснення появи тонкої структури α -спектра дає рис. 5.4, з якого видно, що тонка структура спектра обумовлена α -розпадом з утворенням дочірнього ядра не тільки в основному, але й збуджених станах. Далі ядро зі збуджених станів переходить в основний стан зазвичай за рахунок випромінювання γ квантів. Зазначимо, що при розрахунках імовірності α -розпаду необхідно явно враховувати закон збереження повного кутового моменту та парності, якщо спіни основних станів материнського й дочірнього ядер суттєво відрізняються (див. задачу 5.5).

Таблиця 5.6. Значення енергій та інтенсивностей α -частинок при розпаді ядер ²¹²Ві

Позначення випромінювання	E _α MeB	Відносна інтенсивність (%)
α_0	6,090	27,2
α_1	6,050	70,0
α2	5,764	1,7
α3	5,621	0,1
α_4	5,601	1,0
α ₅	5,480	0,01
α ₆	5,31	0,001
α ₇	5,298	0,0001

Емпіричні криві залежності періоду піврозпаду від енергії E_{α} для α -переходів між основними станами парно-парних ядер у цілому добре узгоджуються із законом Гейгера–Неттола. Такі α -переходи називаються *дозволеними*. Значення періоду піврозпаду для α -переходів у непарних ядрах і між збудженими станами парно-парних ядер виявляються на два-три порядки меншими, ніж у випадку α -переходів між основними станами парно-парних ядер. Тому такі α -переходи умовно називають *забороненими*. Відношення періоду піврозпаду ядра для забороненого α -переходу до відповідної середньої величини, що дається законом Гейгера–Неттола, називається *фактором*, або *коефіцієнтом заборони*. Цей фактор характеризує зменшення ймовірності даного типу α -розпаду порівняно з імовірністю α -переходу між основними станами парно-парних ядер за однакових енергій розпаду.



Рис. 5.4. Тонка структура α -спектра ядра ²¹²Ві

У розглянутій нами теорії α -розпаду припускалося, що α частинки вже існують у ядрі. Насправді це не так, але ймовірність w_{α} утворення α -частинки в ядрі можна розглянути тільки за допомогою квантових багаточастинкових теорій. Ця ймовірність залежить від ефекту об'єднання нуклонів у пари. Зокрема, α -розпад відбувається значно швидше, якщо α -частинки утворюються з нуклонних пар, а не з неспарених нуклонів. У першому випадку α -розпад називається *сприятливим*, у другому – *несприятливим*.

5.6. β - перетворення

Явища β -розпаду полягають у спонтанному розпаді ядра, що приводить до зміни його заряду на одиницю за сталої кількості нуклонів. До таких процесів належить випромінювання ядром електрона e^- й антинейтрино v_e чи позитрона e^+ й нейтрино

 v_e , або ж поглинання ядром одного з електронів атомної оболонки (зазвичай *K*-оболонки) з випромінюванням нейтрино v_e :

$$\beta^{-}: \qquad {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + e^{-} + \nu_{e},$$

$$\beta^{+}: \qquad {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + e^{+} + \nu_{e},$$

$$K: \qquad {}^{A}_{Z}X + e^{-} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + \nu_{e}.$$
(5.90)

Зазначимо, що α -розпад є процесом багатонуклонним, а β розпад є явищем переважно внутрішньонуклонним і відбувається внаслідок β -перетворень окремих нуклонів, а саме, процесів:

$$\beta^{-}: \quad \mathbf{n} \to \mathbf{p} + e^{-} + \mathbf{v}_{e}, \quad T_{1/2} = 10,24 \text{ xB},$$

$$\beta^{+}: \quad \mathbf{p} \to \mathbf{n} + e^{+} + \mathbf{v}_{e}, \quad (5.91)$$

$$K: \quad \mathbf{p} + e^{-} \to \mathbf{n} + \mathbf{v}_{e}.$$

Зауважимо, що β-розпад вільного протона заборонено законом збереження енергії, але він є дозволеним процесом всередині ядра. До β-перетворень з вильотом електронів і позитронів також приводять реакції поглинання нейтрино та антинейтрино нуклоном:

Узагальнюючи, можна сказати, що до β -розпаду належать такі процеси радіоактивних перетворень атомних ядер, у яких нейтрон переходить у протон або навпаки, з утворенням частинок, які називаються *лептонами* (e^- , e^+ , v_e , v_e), тобто легкі частинки (від грец. *leptos* – тонкий, легкий). Процес β -розпаду зумовлений наявністю слабкої взаємодії. Ці процеси, зумовлені слабкою взаємодією. Після β -перетворення ядро не змінює своє масове число, але його заряд змінюється на одиницю $\Delta Z = \pm 1$. Зазначимо, що лептони мають спін 1/2 і також характеризуються деяким особливим квантовим числом, що називається *лептонним зарядом*, або *лептонним числом*. Дослідження показу-

ють, що в усіх процесах кількість лептонів мінус кількість їхніх античастинок зберігається.

Із закону збереження енергії випливає, що сумарна кінетична енергія лептонів при β-розпадах подається такими виразами (приймаючи, що масою нейтрино та енергією віддачі ядра можна знехтувати):

$$T_{\beta^{+}} \equiv T_{e^{+}, \max} =$$

$$= M(Z, A) - M(Z + 1, A - 1) - m_{e}c^{2} = M_{AT}(Z, A) - M_{AT}(Z + 1, A - 1),$$

$$T_{\varepsilon} \equiv T_{v_{e}, \max} =$$

$$= M(Z, A) - M(Z - 1, A + 1) + m_{e}c^{2} = M_{AT}(Z, A) - M_{AT}(Z - 1, A + 1).$$
(5.93)

Тут $M_{\rm AT}(Z, A)$ – енергія спокою атома після нехтування різницею енергій зв'язку електронів атома, тобто

$$M_{\rm AT}(Z,A) \equiv M(Z,A) + Zm_e c^2$$

де M(Z, A) – повна енергія спокою ядра (див. підрозд. 1.4) (маса ядра в одиницях енергії).

Очевидно, що β -розпад енергетично можливим, коли відповідні сумарні кінетичні енергії більші нуля. Кінетичні енергії T_{β^+} , T_{β^-} ϵ також і максимально можливими кінетичними енергіями відповідно для електронів і позитронів, що вилітають при β -розпаді. Із формул (5.93) також видно, що, на відміну від β^+ -розпаду, процес поглинання електронів існує й тоді, коли маса дочірнього ядра більша за масу материнського ядра на енергію $\leq m_e c^2 \approx 0.5$ MeB. У випадку відмінної від нуля маси нейтрино максимальна енергія $T_{e^{\pm}, \text{ max}}$ зменшується на енергію спокою нейтрино.

Енергія, що виділяється в одному акті β -розпаду, змінюється в досить широких межах, наприклад, від ~ 20 кеВ при розпаді тритію ³₁H до 13,4 MeB при розпаді ізотопу бора ¹²₅B:

$${}^{3}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{3}_{2}\text{He} + e^{-} + \bar{v}_{e} + 20$$
 кеВ, $T_{1/2} \approx 12,3$ років,
 ${}^{12}_{5}\text{B} \rightarrow {}^{12}_{6}\text{C} + e^{-} + \bar{v}_{e} + 13,4$ МеВ, $T_{1/2} \approx 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ c.}$

Процеси β -розпаду зумовлені слабкою взаємодією, і тому можуть бути досить повільними. Наприклад, ядро ${}^{10}_4$ Ве зазнає електронного β -розпаду з періодом піврозпаду $T_{1/2} \approx 1,5 \cdot 10^6$ років, перетворюючись на стабільне ядро ${}^{10}_5$ В. Ядро ${}^{13}_7$ N зазнає позитронного розпаду з $T_{1/2} \approx 10$ хв, перетворюючись на стабільне ядро ${}^{13}_6$ С. Ядро ${}^{37}_{18}$ Аг, захоплюючи електрон атомної оболонки (*K*-поглинання), перетворюється на ядро ${}^{37}_{17}$ Сl протягом періоду піврозпаду $T_{1/2} \approx 35$ діб. Деякі ядра можуть зазнавати декількох типів β -перетворень.

Деякий час був відомий лише один тип β-перетворень, а саме, β – розпад, який розглядався як процес типу

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + e^{-} \tag{5.94}$$

і називався β -розпадом. У 1914 р. Дж. Чедвік відкрив, що електрони, які утворюються при β -розпаді, мають неперервний енергетичний спектр, тобто можуть вилітати з довільними кінетичними енергіями T_e в інтервалі від 0 до $T_{e,max}$. Це і призвело до необхідності перегляду схеми розпаду (5.94).

Типову форму енергетичного спектра dN_e / dT_e , тобто кількості електронів, що вилітають в одиницю часу, та інтервал енергії $dT_e \ll 1$ у межах від T_e до $T_e + dT_e$ зображено на рис. 5.5. Загальними властивостями всіх β -спектрів є їхня неперервність, наявність максимуму та максимальної енергії, після якої спектр обривається.

Особливості β -спектра і правила відбору за спінами між станами при β -розпаді стали основою гіпотези, яку висунув В. Паулі (1930), про виникнення в цьому розпаді нейтральної частинки з дуже малою (можливо нульовою) масою та спіном 1/2, яка вилітає разом з електроном. Саме в такому випадку будуть виконуватися закони збереження енергії та моменту кількості руху. Оскільки спектр збуджених станів материнського ядра дискретний, то саме перерозподіл сумарної енергії між

електронами та ще однією частинкою може призвести до неперервного спектра β -частинки з утворенням відповідного материнського ядра. Використовуючи сучасні позначення, процес (5.94) записується як ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + e^{-} + \overline{\nu}_{e}$ і називається β^{-} розпадом. Нейтральна частинка, що вилітає, називається *антинейтрино*.



Рис. 5.5. Типова форма енергетичного В -спектра

Тільки в 1953 р. у роботі з використанням пучків нейтронів атомних реакторів (С. Рейнес, К. Коуен) вдалося зареєструвати процес поглинання антинейтрино:

$$\bar{\mathbf{v}}_e + \mathbf{p} \to \mathbf{n} + e^+, \tag{5.95}$$

який безпосередньо й довів існування нейтрино.

Розглянемо форму спектра dN_e / dT_e електронів β -розпаду. Як бачимо, він є добутком повної кількості N_0 -розпадів ядер і ймовірності dw / dT_e вильоту електрона в одиничний інтервал енергії в одиницю часу

$$\frac{dN_e}{dT_e} = N_0 \frac{dw}{dT_e}.$$
(5.96)

Величина dw/dT_e визначається ймовірністю $dw(\vec{p},\vec{k})/dpd\Omega_p d\vec{k}$ вильоту електрона й антинейтрино з імпульсами в інтервалах від

p до p + dp і від \vec{k} до $\vec{k} + d\vec{k}$ в елемент тілесного кута $d\Omega_p$ вильоту електрона, а саме:

$$\frac{dw}{dT_e} = \frac{dw(p)}{dp} p'_{T_e}, \qquad p'_{T_e} \equiv \frac{dp}{dT_e}, \qquad (5.97)$$

$$\frac{dw(p)}{dp} = \int d\Omega_p \, d\vec{k} \, \frac{dw(\vec{p}, \vec{k})}{dp d\Omega_p d\vec{k}} \,. \tag{5.98}$$

Спочатку знайдемо ймовірність $dw(\vec{p},\vec{k})$ вильоту електрона й антинейтрино з імпульсами, значення яких містяться в об'ємах $d\vec{p}$ і $d\vec{k}$. Уперше таку ймовірність обчислив Е. Фермі (1934). Він розглянув β-розпад як процес переходу нуклона з одного зарядового стану в інший з випромінюванням лептонів унаслідок слабкої взаємодії. Згідно з такою інтерпретацією βрозпаду, користуючись теорією збурень за слабкою взаємодією (з деяким потенціалом V_W), імовірність $dw(\vec{p},\vec{k})$ вильоту електрона та антинейтрино є добутком квадрата матричного елемента $< f |V_W|i>$ переходу між початковим (|i>) і кінцевим (< f |) станами та кількості $\Delta\Gamma_{\beta} = d\vec{p} / (2\pi\hbar)^3 \cdot d\vec{k} / (2\pi\hbar)^3$ можливих кінцевих станів лептонів з імпульсами в інтервалах $d\vec{p}$ і $d\vec{k}$:

$$dw(\vec{p},\vec{k}) = (2\pi/\hbar) | < f | V_W | i > |^2 \delta(T_{\max} - T_e - ck) \Delta \Gamma_\beta \equiv$$
$$\equiv D\delta(T_{\max} - T_e - ck) p^2 dp d\Omega_p d\vec{k} , \qquad (5.99)$$

тому

$$\frac{dw(\vec{p},k)}{dpd\Omega_p d\vec{k}} = Dp^2 \delta(T_{\max} - T_c - ck).$$
(5.100)

Тут і в (5.99) $D = (2\pi/\hbar) | < f | V_W | i > |^2 / (2\pi\hbar)^6$; $d\Omega_k$ – елемент тілесного кута вильоту нейтрино; за допомогою узагальненої δ -функції $\delta(T_{\text{max}} - T_e - ck)$ ураховується закон збереження енергії $T_{\text{max}} = T_e + ck$, де вважається, що маса спокою антинейтрино дорівнює нулю, і тому його кінетична енергія дорівнює *ck*.

Значення похідної p'_{T_e} у формулі (5.97) отримуємо з релятивістського співвідношення між кінетичною енергією електрона та його імпульсом

$$T_e = c\sqrt{p^2 + m_e^2 c^2} - m_e c^2 \,.$$

Звідки маємо $p^2 = T_e(T_e + 2m_ec^2) / c^2$ та

$$\frac{dp}{dT_e} \equiv p'_{T_e} = (T_e + m_e c^2) / (c^2 p).$$
(5.101)

Припустимо, що величина *D* стала, тоді відповідно до (5.98) і (5.100) маємо

$$\frac{dw(p)}{dp} = Dp^2 \int d\Omega_p d\Omega_k \delta(T_{\text{max}} - T_e - ck)k^2 dk$$

Користуючись властивостями δ -функції, виконаємо в цьому виразі інтегрування за імпульсом k:

$$\int \delta (T_{\max} - T_e - ck) k^2 dk = (T_{\max} - T_e)^2 / c^3$$

Знайдемо співвідношення для β-спектра у випадку нейтрино з нульовою масою

$$N(T_e) = \frac{dN_e}{dT_e} = N_0 \overline{B} c \ p (T_e + m_e c^2) (T_{\max} - T_e)^2 =$$
$$= N_0 \overline{B} \sqrt{T_e (T_e + 2m_e c^2)} (T_e + m_e c^2) (T_{\max} - T_e)^2, \quad (5.102)$$

де $\overline{B} = 16\pi^2 D / c^4$. У випадку вильоту позитронів їхній спектр також має вигляд (5.102). Ця формула значно спрощується у випадках дуже малих і дуже великих енергій вильоту β -частинок. У нерелятивістському наближенні малих енергій вильоту ($T_e \ll m_e c^2 \approx 0.5$ MeB) отримуємо

$$N(T_e) \sim \sqrt{T_e} (T_{\text{max}} - T_e)^2, \quad T_e \ll m_e c^2 \cong 0.5 \,\text{MeB},$$
 (5.103)

а в ультрарелятивістському випадку ($T_e \gg m_e c^2 \approx 0.5 \text{ MeB}$) маємо

$$N(T_e) \sim T_e^2 (T_{\text{max}} - T_e)^2, \ T_e \gg m_e c^2.$$
 (5.104)

У формулах (5.102) – (5.104) фактор D, а тому і \overline{B} , вважалися сталими. У такому наближенні нехтується дія кулонівського

поля між ядром та β -частинкою після її вильоту з ядра. Цей ефект можна врахувати, виділивши із функції \overline{B} деяку функцію ($\Phi(Z,T_e)$), яка визначає дію кулонівського поля й явно обчислюється. Тобто вираз для розподілу β -частинок (електронів і позитронів) за енергіями T_e у випадку вильоту антинейтрино (нейтрино) з нульовою масою спокою має такий вигляд (т. зв. дозволена форма бета-спектра)

$$N(T_e) \equiv \frac{dN_e}{dT_e} \equiv (5.105)$$

= $N_0 B \sqrt{T_e (T_e + 2m_e c^2)} (T_e + m_e c^2) (T_{\max} - T_e)^2 \Phi(Z, T_e),$

де $B = \overline{B} / \Phi(Z, T_e)$ – коефіцієнт, що залежить від структури ядра. Якісно вплив кулонівського поля можна оцінити з таких міркувань. При електронному розпаді кулонівська взаємодія електрона з ядром є взаємодією притягання, яка прагне зменшити енергію електрона, що вилітає. При позитронному розпаді навпаки, кулонівська взаємодія позитрона з ядром відштовхувальна, що відповідно прискорює рух позитрона, тому в результаті кулонівської взаємодії β^- -спектри збагачуються, а β^+ -спектри збіднюються частинками низьких енергій, як це й показано на рис. 5.6.



Рис. 5.6. Вплив кулонівського поля ядра на β-спектр. За низьких енергій суцільна крива відповідає гіпотетичному випадку незарядженого ядра з Z = 0

У нерелятивістському наближенні $\Phi(Z, T_e) = 2\pi |x| / (1 - \exp(-2\pi x))$, де $x = \pm Z_f e^2 / \hbar \upsilon_e$;

знак "+" використовується для електронів, а "-" для позитронів, υ_e – швидкість β -частинки на нескінченній відстані від ядра, Z_f – атомний номер дочірнього ядра.

Параметр *B* у формулі (5.105), окрім сталої, що характеризує інтенсивність слабкої взаємодії, може також залежати від енергії, від взаємних орієнтацій спінів і від кута між імпульсами β частинки та нейтрино. Залежність величини *B* від енергії T_e виникає внаслідок загальних властивостей слабких взаємодій і особливостей структури ядра. У першому випадку залежність *B* від T_e слабка, $B \approx \text{const}$ й однакова в будь-якому розпаді, зокрема і при розпаді вільного нейтрона. У другому випадку $B \approx \text{const}$ лише при β -розпаді вільного нейтрона й для таких перетворень, при яких не змінюються стани нуклонів у ядрі. В інших випадках функція $B = B(T_e)$, а тому і форма β -спектра, буде різною для ядер з різним характером структури станів.

Форма спектра, що зображена на рис. 5.5, адекватно описусться формулою (5.102) (або (5.105) з $\Phi = 1$ і $B \approx \text{const}$). Згідно з (5.103) і (5.104) за малих енергій спектр пропорційний $T_e^{1/2}$, а за великих енергій ($T_{\text{max}} - T_e$)². Розподіл (5.102) зникає на межах і має максимум при енергії приблизно $T_e \approx T_{\text{max}} / 3$. Спектри вигляду (5.105) з $B \approx \text{const}$ називаються *дозволеними*. Якщо β -спектр має іншу форму, то його називають *забороненим*. Відхилення спектра від дозволеного свідчить про вплив структури ядра на β -спектр.

Нагадаємо, що при доведенні формули (5.105) вважалося, що маси спокою антинейтрино $m_{\overline{v}}$ і нейтрино m_v дорівнюють нулю. Якби нейтрино (антинейтрино) мало хоча б маленьку, але скінченну масу спокою, то форма дозволеного β-спектра суттєво змінилася б поблизу максимального значення T_{max} кінетичної енергії β-частинки. При $m_v = m_{\overline{v}} = 0$ крива форми спектра на його межі з $T_e \rightarrow T_{\text{max}}$ зменшується до нуля як парабола, а при ненульовій масі ця крива підходила б до осі абсцис під деяким кутом (рис. 5.7). Окрім того, максимальна енергія була б

меншою від енергії спокою нейтрино. Ці особливості проявилися б тим більше, чим більшим є значення m_v . Експериментальні дослідження форми спектра поблизу T_{max} , зокрема при β розпаді тритію, показали, що в межах похибок сучасних експериментів маса нейтрино близька до нуля ($m_{\overline{v}} = 0$).



з різними значеннями маси нейтрино

Вираз (5.105) дає змогу обчислити сталу β -розпаду λ , і тим самим період піврозпаду β -процесів з дозволеною формою спектра. Очевидно, що значення λ збігається з відносною кількістю ядер, які розпалися в одиницю часу з вильотом β -частинок усіх можливих енергій, тобто

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{1}{N_0} \int_0^{T_{\text{max}}} N(T_e) dT_e = Bf(T_{\text{max}}, Z), \qquad (5.106)$$

де $f(T_{\max}, Z)$ – деяка складна, але відома функція T_{\max} і Z.

В ультрарелятивістському випадку з $T_{\text{max}} \gg m_e c^2 \cong 0,5 \text{ MeB}$ і при $\Phi(Z, T_e) = 1$ підстановки (5.104) у (5.106) та інтегрування маємо

$$f(T_{\max}, Z) = T_{\max}^5 \int_0^1 dx \, x^2 \, (1-x)^2 = \frac{1}{30} T_{\max}^5 \,. \tag{5.107}$$

Таку залежність імовірності розпаду в одиницю часу отримуємо для багатьох розпадів за рахунок слабкої взаємодії, і вона назива-

ється правилом Сарджента. Співвідношення (5.107) означає, що час життя β -активних ядер швидко зменшується зі зростанням максимальної енергії β -частинок, але ця залежність від енергії не така сильна, як при α -розпаді. Досвід показує, що досить точними виявляються такі наближення (неточність у lg *f* менше 0,3 для 0 < Z < 100 і для 0,1 MeB $< T_{\text{max}} < 10$ MeB) (див. книгу Г. Фридлендера, Дж. Кеннеді, Дж. Міллера, розд. 8):

Звернемо увагу на те, що згідно з (5.106), якщо відомий період піврозпаду $T_{1/2}$, то можна знайти й значення коефіцієнта B:

$$B = \frac{\ln 2}{fT_{1/2}} \,. \tag{5.109}$$

Оскільки величина *В* може змінюватися від ядра до ядра через вплив їхньої структури на розпад, то величина $fT_{1/2}$ саме й є характеристикою такого впливу. Величина $fT_{1/2}$ називається *зведеним періодом піврозпаду*, а її значення змінюється в межах багатьох порядків, тому β -перетворення ядра зазвичай класифікують за значеннями $\ln(fT_{1/2})$. Переходи, у яких $\ln(fT_{1/2}) \approx 5$ називають *нормально дозволеними*. За таких β -перетворень відбувається слабка перебудова ядра або за рахунок зміни ізоспіну всього ядра (при незмінних інших квантових числах нуклона, що зазнає β -розпад), або за рахунок переорієнтації спіну нуклона відносно орбітального моменту. Переходи, у яких $\ln(fT_{1/2}) \approx 2,5 \div 3,0$, називають *наддозволеними*. При таких переходах сумарний кутовий момент частинок, що вилітають, дорівнює нулю, а структура ядра зазвичай не змінюється.

Зауважимо, що дозволені переходи класифікують і за значенням повного спіну лептонів, що вилітають. Дійсно, електрон і антинейтрино є частинками з напівцілими спінами s = 1/2, і тому повний спін *S* пари $e^- + \overline{v}_e$ ($e^+ + v_e$) може мати два зна-
чення: 0 і 1. Якщо S = 0 (спіни e^- і \overline{v}_e (e^+, v_e) антипаралельні), то перехід називається ферміївським. Таким, наприклад, є розпад вільного нейтрона і тритію. Якщо S = 1 (спіни e^- і \overline{v}_e (e^+, v_e) паралельні), то такий перехід називається *переходом* Гамова-Теллера. Наведена класифікація важлива при встановленні правил відбору за кутовим моментом. Правила відбору для ферміївських переходів записуються у вигляді

$$\Delta I = 0, \quad \pi_i = \pi_f \,, \tag{5.110}$$

тобто при таких переходах спіни та парності станів ядер не змінюються. Правила відбору для переходів Гамова–Теллера мають вигляд

$$\Delta I = 0, \pm 1, \, \pi_i = \pi_f \tag{5.111}$$

у всіх випадках, окрім так званих 0-0-переходів, коли спіни станів початкового й кінцевого ядер дорівнюють нулю. В останньому випадку переходи Гамова–Теллера строго заборонені. У співвідношеннях (5.110), (5.111) враховано, що при дозволених переходах орбітальний момент частинок, що вилітають, дорівнює нулю, тому парність не змінюється.

Різні правила відбору за кутовими моментами для ферміївських переходів і переходів Гамова–Теллера обумовлені різним типом слабкої взаємодії. У нерелятивістському наближенні для β -розпаду з вильотом електрона взаємодія ферміївського типу пропорційна ізоспіновому оператору τ_- (див. підрозд. 2.4) знищення нейтронного та народження протонного станів: *K*, а для переходу Гамова–Теллера взаємодія також залежить від компонентів спінової матриці Паулі σ_{α} (див. підрозд. 1.6): $V_W \equiv V_{GT} \sim \sigma_{\alpha} \tau_-$. Прикладом чистого переходу Гамова– Теллера є розпад ізотопу гелію

$${}_{4}^{6}\text{He} \rightarrow {}_{3}^{6}\text{Li} + e^{-} + \overline{v}_{e}.$$
 (5.112)

Справді, парність у цьому процесі не змінюється, а $\Delta J = 1$, оскільки спіни ядер ⁶₄He, ⁶₃Li дорівнюють відповідно 0 та 1. Приналежність переходу (5.112) до дозволених підтверджується тим, що його графік Фермі (див. (5.113)) є прямою лінією.

Переходи зі значеннями $\ln(fT_{1/2}) \ge 9$ називаються забороненими переходами зі ступенями заборони різних порядків: $\ln(fT_{1/2}) \approx 9$ – першого; $\ln(fT_{1/2}) \approx 15$ – другого; $\ln(fT_{1/2}) \approx 18$ – третього. Наявність заборонених переходів пов'язана із сильним зменшенням імовірності β -розпаду при збільшенні значення сумарного орбітального моменту l_{Σ} пари електрон + антинейтрино (або $e^+ + v_e$). Якщо спіни початкового й кінцевого ядер сильно відрізняються за величиною, то згідно із законом збереження повного моменту кількості руху частинки мають вилітати з помітними значеннями l_{Σ} . Імовірність вильоту частинок зі зростанням кутових моментів значно зменшується, що сильно пригнічує розпад і приводить до виникнення заборонених переходів. Саме значення сумарного орбітального моменту l_{Σ} електрона та антинейтрино (або $e^+ + v_e$) й є порядком заборони переходу.

При дослідженнях відхилень форми β-спектра від дозволеного зазвичай користуються так званим графіком Фермі (або Кюрі), коли по осі абсцис відкладено енергію електрона (позитрона) β-розпаду, а по осі ординат – значення функції:

$$F(T_e) = \sqrt{\frac{dN_e}{dT_e}} \frac{1}{\sqrt{c \, p \, (T_e + m_e c^2)}} \equiv \frac{\sqrt{dN_e/dT_e}}{T_e^{1/4} (T_e + 2m_e c^2)^{1/4} \, (T_e + m_e c^2)^{1/2}}.$$
(5.113)

Із формул (5.105) і (5.113) у випадку дозволеного розпаду в деякий один стан випливає, що графік величини $F(T_e)$ є прямою лінією, яка перетинає вісь абсцис при $T_e = T_{\text{max}}$:

$$F(T_e) \sim (T_{\max} - T_e).$$
 (5.114)

Такий вигляд, наприклад, має графік розпаду Фермі вільного нейтрона. Відхилення графіка Фермі від прямої лінії свідчить про відхилення реального β-процесу від дозволеного та наявність каскадних β-розпадів. У випадку складного спектра, що складається із декількох дозволених розпадів на різні енерге-

тичні рівні, графік Фермі матиме прямолінійну ділянку за великих енергій електронів, яка відповідає розпаду на основний стан ядра. Для одиничного забороненого розпаду графік Фермі відрізняється від прямої лінії. Досліджуючи її кривизну можна встановити ступінь заборони переходу. Графік Фермі можна розділити на прості складові та визначити порядок заборони кожної з них. Ці дані важливі для дослідження структури ядер, тому що за їхнею допомогою можна встановити енергії та спіни збуджених станів ядра, а також отримати інформацію про поведінку нуклонів усередині ядра.

Бета-активні ядра більш поширені, ніж α -активні. Ізотопи, що розпадаються з вильотом β -частинок, існують майже для кожного хімічного елемента. Відповідно до напівемпіричної формули Вейцзекера (див. підрозд. 1.4) за даного значення масового числа A стабільне ядро належить лінії β -стабільності й має заряд $Z_{\beta} = A/(1,98+0,0155A^{2/3})$ з можливо невеликим розкидом значень Z в обидва боки за рахунок індивідуальних властивостей ядер. При $Z \neq Z_{\beta}$ ядра нестабільні щодо β -розпаду, а при зсуві з лінії β -стабільності відбуваються такі процеси:

а) в області $Z < Z_{\beta}$ ядра мають надлишок нейтронів, і тому нестабільні щодо β -розпаду;

б) в області $Z > Z_{\beta}$ ядра мають надлишок протонів і схильні до β^+ -розпаду, а також електронного захоплення.

Зі збільшенням надлишку нуклонів даного типу ядра можуть стати нестабільними щодо їхнього вильоту. Такі ядра називають ядрами на лінії нестабільності (англ. drip-line). Ядра нестабільні щодо розпаду на нейтрони називають ядрами на лінії нейтронної нестабільності (англ. neutron drip-line), а ядра нестабільні щодо протонного розпаду називають ядрами на лінії протонної нестабільності (англ. proton drip-line).

У випадках, коли виліт β + -частинки енергетично можливий, існує й інший процес, який конкурує з ним. Це процес поглинання електронів атомної оболонки (електронне поглинання (ЕП), англ. *electron capture*). Найближче до ядра розміщені елек-

трони *К*-оболонки, тому ймовірність їхнього поглинання значно вища, аніж для електронів, що розташовані далі від ядра й мають більш високі квантові числа, тому процес поглинання електронів атомної оболонки називається *К*-поглинанням, або *К*-захопленням. У такому процесі (див. Рис.5.8) також спостерігається характеристичне рентгенівське випромінювання, що виникає після заповнення електроном однієї з вищих атомних орбіт вакансії на *К*-оболонці. Також зазначимо, що згідно з (5.93) процес *К*-поглинання може відбутися і при забороні β^+ -розпаду.



Рис. 5.8. Поглинання орбітального електрона атомної оболонки

Функцію f_K , що визначає ймовірність K-поглинання^м в одиницю часу $\lambda_K = B \cdot f_K$ (див. (5.106)), можна обчислити за формулою, яка подібна до (5.108), а саме:

$$\lg f_K = 2,0 \, \lg T_{\max} - 5,6 + 3,5 \, \lg(Z_f - 1) \,. \tag{5.115}$$

Зауважимо, що при $T_{\max} < 0.5$ MeB і за великих значень Z_f похибки обчислень за цією формулою можуть бути досить великими.

Завдяки однаковим початковим і кінцевим станам ядер для β+ -розпаду та електронного поглинання (у випадку їхньої од-

ночасності) відношення сталих розпаду $\lambda_K / \lambda_{\beta^+}$ (щонайменше для дозволених переходів) не має залежати від ядерного матричного елемента й дорівнювати f_K / f_{β^+} . Значення цих відношень загалом зростає зі зменшенням енергії розпаду (прямуючи до нескінченності за енергією розпаду $\leq 2m_e c^2$, коли виліт позитрона стає неможливим) і зі збільшенням Z. Останнє зумовлено зростанням імовірності перебування орбітального електрона (особливо K -електрона) в області ядра та зростанням ролі кулонівського поля, що зменшує ймовірність вильоту позитронів низьких енергій. Експериментальні дослідження відношення конкуруючих процесів електронного поглинання та позитронного розпаду дають можливість перевіряти теоретичні уявлення про процес β -розпаду.

Таким чином, у β -перетвореннях беруть участь процеси, що зумовлені як слабкою, так і сильною ядерною взаємодією. З одного боку, елементарний акт будь-якого β -перетворення є внутрішньонуклонним процесом, з іншого, β -розпад залежить від характеристик ядерного стану нуклона. Окрім того, під час β розпаду ядро перебудовується, як того вимагають закони збереження. Зрозуміло, що такі подвійні фактори виникнення β перетворень значно ускладнюють їхній теоретичний опис.

Зазначимо, що в останні десятиріччя дуже інтенсивно розвивається "нейтринна фізика", де було зроблено багато відкриттів. Відповідно до сучасних уявлень про елементарні частинки та їхню взаємодію у природі, окрім розглянутих вище двох лептонів - електрона й електронного нейтрино (тут використано узагальнену термінологію, що включає частинки й античастинки), існують чотири типи лептонів, а ще саме: мюон $\mu^{-}(m_{\mu}=105,66 \text{ MeB})$, мюонне нейтрино ν_{μ} і таон (тау-лептон) τ^{-} (m_{τ} =1776,99 MeB) та відповідне йому таонне нейтрино v_{τ} . Мюонне нейтрино було відкрито в 1960 р. (М. Шварц, Л. Ледерман, Дж. Штейнберг, Нобелевська премія 1988 року), тау-лептон – у 1975 р. (М. Перл, Нобелевська премія 1995 року), зареєструвати тау-лептон вперше вдалось у 2000 р. (Національ-

на лабораторія ім. Е. Фермі, Чикаго). Як уже заначалось, лептони беруть участь у слабких взаємодіях, які на 10⁶ слабкіші за сильну взаємодію між нуклонами, а їхній радіус дії дуже малий ~ 10^{-3} фм. Слабка взаємодія зумовлена обміном проміжними W^{\pm} та Z бозонами.

Згідно з масою важких лептонів шість лептонів утворюють три групи по два лептони (кажуть дуплету, або покоління), один з яких нейтральний, а другий – заряджений: e^- , v_e ; μ^- , v_{μ} ; τ^- , v_{τ} . Лептони різних груп відрізняються своєю гравітаційною взаємодією, що зумовлено різницею їхніх мас. Нейтрино з різних груп також називають *ароматами нейтрино*.

Кожній групі лептонів відповідає своє лептонне число: відповідно електронне L_e , мюонне L_{μ} і τ -лептонне L_{τ} . Ці числа дорівнюють L=+1 для лептонів і L=-1 для антилептонів. Їхня сума становить загальне лептонне число $L = L_e + L_{\mu} + L_{\tau}$.

До недавна нейтрино вважалися безмасовими частинками. Однак накопичується все більше теоретичних аргументів і експериментальних вказівок на користь існування у них скінченної маси. Між нейтрино з нульовою та найменшою скінченною масою існує принципова різниця як з погляду теорій, що їх описують, так і їхніх проявів у мікросвіті та фізиці космосу. Прямі експерименти з вимірювання мас нейтрино до цього часу визначають лише верхні границі можливих значень цих мас (2007, http://pdg.lbl.gov): $v_e < 2$ eB, $v_{\mu} < 0,19$ MeB, $v_{\tau} < 18,2$ MeB.

Виявляється, що за скінченних і різних мас нейтрино можливі (хоча й не обов'язкові) нейтринні осциляції, тобто періодичні перетворення нейтрино одного типу на інший (тобто переходами між нейтрино різних ароматів, або змішування нейтрино). Зараз різними науковими групами отримані переконливі вказівки на існування осциляцій нейтрино, тобто і наявність у нейтрино маси, а саме: осциляції вдається описати, якщо вважати, що існують три деяких початкових масових стани нейтрино v_1 , v_2 , v_3 , а спостережувані аромати нейтрино v_e , v_{μ} , v_{τ} є їхньою сумішшю. Такий підхід уже використовується не тільки для

опису існуючих експериментів з нейтрино, але і при плануванні майбутніх експериментів.

Задачі та завдання для самостійної роботи

5.1 Знайти кількість ядер, що розпалася в 1 г радіоактивного фосфору $^{32}_{15}$ P за 7 діб. Період піврозпаду радіоактивного фосфору становить 14,5 діб.

Розв'язання: відповідно до основного закону радіоактивного розпаду (5.7) кількість ядер $\Delta N(\tau)$, що розпалася за час τ , дорівнює

$$\Delta N(\tau) \equiv N(\tau) - N_0 = N_0(1 - \exp(-\lambda \tau)) =$$

= $N_0(1 - \exp(-\tau \ln 2 / T_{1/2})) = N_0(1 - 2^{-\tau/T_{1/2}})$

Для обчислення початкової кількості ядер використаємо той факт, що кількість речовини в 1 молі речовини дорівнює значенню числа Авогадро $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$ 1/моль, а маса молю фосфору дорівнює 32. Звідки має-

мо $N_0 = 6,023 \cdot 10^{23} / 32 \cong 1,9 \cdot 10^{22}$, тому

 $\Delta N \equiv 1,9 \cdot 10^{22} \cdot (1 - 2^{-7/14,5}) \cong 5,4 \cdot 10^{21}$, тобто 28,4 % від початкової кількості.

5.2 Визначити вік стародавніх дерев'яних кладок, що були знайдені при розкопках, якщо питома активність ізотопу вуглецю ¹⁴C, що утворюється лише в період росту дерева, у золі кладок становить: а) 0,2; б) 0,4; в) 0.7; від значень питомої активності золи свіжозрубаних дерев ($T_{1/2}$ (¹⁴C) = 5700 років).

Розв'язання: відповідно до закону радіоактивного розпаду $N = N_0 \cdot e^{-t \ln 2/T_{1/2}}$, тому частка ядер, що розпалися за час t, від початкової кількості становить $\eta(t) = N(t) / N_0 = \exp(-t \ln 2 / T_{1/2})$. Звідки маємо, що вік t визначається виразом $t = -T_{1/2} \cdot \ln \eta(t) / \ln 2$, і для значень η з умови задачі отримаємо (у роках): 1) $t \cong 13200$, 2) $t \cong 7500$, 3) $t \cong 1800$.

5.3 Пояснити, чому більшість α -розпадів відбувається з переходом на основний стан дочірнього ядра. У яких випадках імовірність розпаду з переходом у збуджений стан більше ймовірності розпаду з переходом у основний стан? Пояснити, чому ймовірність вильоту α -частинок із переходом ядра ${}^{212}_{83}$ Ві $(I_i^{\pi_i} = 1^-)$ з основного стану в основний стан ядра

 $^{208}_{81}$ Tl ($I_{f_0} = 5, \pi_{f_0} = +1$) менша від імовірності переходу в його перший збуджений стан

2

$$^{08}_{81}$$
Tl ($I_{f_1} = 4, \pi_{f_1} = +1, E_f = 40 \text{ keB}$).

Розв'язання: імовірність α -розпаду залежить від енергії α частинки та її відносного орбітального моменту l_{α} , причому значення ефективного потенціального бар'єра

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu_{\alpha}} \frac{l_{\alpha}(l_{\alpha}+1)}{r^2}$$

збільшується зі збільшенням l_{α} . Тому у випадках з $l_{\alpha} = 0$ імовірність α -розпаду залежить лише від енергії α -частинки і зростає зі збільшенням її енергії. Виявляється, що при α -розпаді вісмуту орбітальний момент α -частинки відмінним від нуля. Дійсно, значення l_{α} визначаються законами збереження повного кутового моменту та парності $|I_i - I_f| \le l_{\alpha} \le I_i + I_f$, $\pi_i = \pi_f \pi_{\alpha} = \pi_f (-1)^{l_{\alpha}}$. Власна парність α -частинки дорівнює 1, тому для переходу (α_0) на основний стан $l_{\alpha_0} = 4;5;6$ і з умови $\pi_i = -\pi_{f_0}$ отримуємо, що мінімальне значення орбітального моменту для такого переходу дорівнює п'яти $l_{\alpha_0,\min} = 5$. Для переходу α_1 на перший збуджений стан орбітальний момент має менше значення $l_{\alpha_1} = 3$. У результаті для переходів на основний стан ефективний бар'єр зростає значно більше, ніж зменшується енергія переходу, і ймовірність α -переходу на основний стан материнського ядра.

5.4. Які хімічні елементи утворюються при таких радіоактивних розпадах:

1) ${}^{44}_{19}K(\beta^-);$ 2) ${}^{131}_{63}Eu(p);$ 3) ${}^{76}_{32}Ge(2\beta^-);$ 4) ${}^{192}_{81}Tl(\beta^+);$ 5) ${}^{146}_{52}Sm(\alpha)?$

5.5. Знайти вираз (5.15) для кількості ядер першого материнського ядра, що утворилися у випадку триступеневого радіоактивного розпаду.

5.6. Користуючись співвідношеннями (5.96) – (5.98), отримати вираз для спектра β-розпаду з урахуванням маси антинейтрино.

Розділ 6

ЗАГАЛЬНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ ЯДЕРНИХ РЕАКЦІЙ

6.1. Основні поняття та визначення

Ядерною реакцією називають будь-який процес взаємодії частинок, який починається зіткненням двох чи декількох мікрочастинок. Мікрочастинками називають будь-які елементарні або складні частинки, наприклад, нуклон, електрон, важкі іони, а також γ -кванти. При зближенні до відстаней розміру ядра частинки, що мають зіткнутись, починають вступати в інтенсивну ядерну взаємодію, унаслідок чого можуть утворюватися дві або більше частинки, що розлітаються в різних напрямках. Під час ядерної реакції відбуваються перерозподіли енергії та імпульсу, які супроводжуються утворенням частинок, що вилітають з області взаємодії. Наприклад, ядерна реакція виникає після бомбардування ядер деякої речовини потоком прискорених частинок: протонів, α -частинок, нейтронів тощо. В таких експериментах більш важка частинка нерухома, а на неї налітає інша частинка. Нерухому частинку називають *ядром-мішенню*.

На сьогодні відомі різні ядерні реакції й існують різні підходи щодо їхньої класифікації. Розглянемо деякі з них. Наприклад, залежно від типу налітаючих частинок, їх класифікують на реакції під дією нейтронів, під дією заряджених частинок (α частинок, протонів, дейтронів, електронів), важких іонів, γ квантів (фотоядерні реакції) тощо. У фотоядерних реакціях на ядро діє електромагнітне поле, але вони також належать до ядерних реакцій, оскільки електромагнітна взаємодія відбувається

і в області ядра, де існує ядерна взаємодія, яка приводить до перебудови структури ядра.

Ядерні реакції класифікують залежно від характеру перетворень в ядрах: непружне розсіяння з переходами на збуджені стани ядра-мішені; радіаційне поглинання (захоплення), коли енергію забирає γ -випромінювання, а виліт частинок стає неможливим; кулонівське збудження, коли ядру передається енергія кулонівського поля частинки, що налітає; процеси поділу; ядерний синтез; реакції передачі нуклонів тощо. Слід зазначити, що кулонівське збудження також належить до ядерних реакцій, тому що під час цього процесу, незважаючи на те, що заряджена частинка, яка взаємодіє з ядром, не проникає в нього, відбувається зміна внутрішнього стану ядра. Реакції поділу важких ядер і термоядерні реакції синтезу зазвичай розглядаються окремо, оскільки вони приводять до значної перебудови ядер з виділенням великої кількості енергії.

Ядерні реакції також можуть класифікувати залежно від масових чисел ядер-мішеней, а саме, як реакції на легких ($A \le 50$), середніх ($50 \le A \le 100$) і важких ($A \ge 100$) ядрах. Ядерні реакції також розрізнюють за величиною енергії налітаючих частинок: розрізняють області малих (E < 1 кеВ), низьких ($1 \text{ кеВ} \le E \le 1 \text{ МеВ}$), середніх ($1 \text{ МеВ} < E \le 100 \text{ МеВ}$), значних (100 МеВ < E < 1 ГеB), високих (1 ГеB < E < 500 ГеB) і надвисоких ($E \ge 500 \text{ ГеB}$) енергій.

Ядерні реакції також поділяються на класи залежно від моделей взаємодії між частинками, що зіштовхуються; у теорії ядерних реакцій такі моделі називаються *механізмами ядерних реакцій*. Із загальнофізичної точки зору вивчення ядерних реакцій необхідне, щоб отримувати інформацію про процеси, що відбуваються під час перебудови ядер, про характеристики основних та збуджених станів ядер, і про властивості ядерних сил. Із прикладної точки ядерні реакції мають важливе значення при використанні звільненої внутрішньої енергії ядер для виробництва ядерних ізотопів, при вивченні дії ядерного випромінювання на матеріали тощо.

Найбільш поширеними є бінарні ядерні реакції, під час яких зіштовхуються дві частинки. Для ядерних реакцій бінарного ти-

пу, коли на початку реакції і в її кінці, є дві частинки, прийнято такі позначення

$$a + X \rightarrow b + Y$$
, also $X(a,b)Y$, (6.1)

де вважається, що частинка a налітає на ядро X, унаслідок чого утворюється ядро Y і частинка b.

Загалом зіткнення частинок a та X може супроводжуватись реакціями різного типу:

$$a + X \rightarrow \begin{cases} X + a & , \\ X^* + a & , \\ Y + b & , \\ Z + b + c & , \\ ... & . \end{cases}$$
(6.2)

Процес X(a,a)X, під час якого не змінюється склад і внутрішні стани частинок називається *пружним розсіянням*. Процеси $X(a,a)X^* \equiv X(a,a')X$, що відбуваються зі зміною внутрішнього стану ядра мішені, але зі збереженням складу кожної із частинок, називається *непружним розсіянням*. Непружне розсіяння відбувається зі збудженням ядра-мішені та зміною за рахунок цього кінетичної енергії налітаючої частинки a. Під час непружних процесів спостерігається перерозподіл нуклонів у ядрах і утворення нових частинок.

Початкові і кінцеві стани в реакціях характеризують заданням типу частинок, енергії відносного руху та набором інших квантових чисел, що відповідають за їхній внутрішній стан і відносний рух. Кожний із шляхів перебігу реакції, що відповідає індивідуальному набору характеристик системи і має певну ймовірність реалізації, називається *каналом реакції*. Про частинки a та X перед зіткненням кажуть як про такі, що належать до вхідного каналу. Результат зіткнення відповідає вихідному каналу. Пружне розсіяння називають також пружним каналом реакції.

Історично першою спланованою ядерною реакцією була реакція (α, р) на азоті, яку провів Е. Резерфорд у 1919 р.:

$${}^{4}_{2}$$
He + ${}^{14}_{7}$ N \rightarrow p + ${}^{17}_{8}$ O abo 14 N(α , p) 17 O.

Реакція (α, n) привела Дж. Чедвика у 1932 р. до відкриття нейтрона:

$${}^4_2\mathrm{He} + {}^9_4\mathrm{Be} \rightarrow n + {}^{12}_6\mathrm{C}$$
 ado ${}^9\mathrm{Be}(\alpha,n){}^{12}\mathrm{C}$

При дослідженні продуктів реакції (α , n): ${}^{4}_{2}$ He + ${}^{27}_{13}$ Al \rightarrow n + ${}^{30}_{15}$ P,

тобто 27 Al(α ,n) 30 P, була вперше досліджена штучна радіоактивність (І. та Ф. Жоліо-Кюрі, 1934), а саме, перетворення фосфору на кремній:

$$^{30}_{15} P \rightarrow^{30}_{14} Si + e^+ + v_e (T_{1/2} \approx 2,5 xB).$$

6.2. Закони збереження в ядерних реакціях

Ядерні реакції є різновидом фізичних процесів, і тому, як і будь-який фізичний процес, вони можуть відбуватися лише при виконанні всіх необхідних законів збереження. Якщо конкретна реакція дозволена законами збереження, то вона обов'язково відбувається з деякою відмінною від нуля ймовірністю. Вихідні канали, що спостерігаються в ядерних реакціях, називають *відкритими*, зокрема, пружний канал завжди відкритий. Коли утворення якогось вихідного каналу заборонено хоча б одним законом збереження, то даний канал не спостерігається, і його називають *закритим*. Подібна ситуація може, наприклад, виникнути при фотоядерній реакції, що відбувається з поглинанням γ -кванта за умови малих значень його енергії. Для таких реакцій вихідні канали з вильотом нуклонів можуть бути закритими, оскільки для відриву нуклона від ядра його енергія збудження має перевищувати енергію відриву ($\simeq 7 \div 8$ MeB у важких ядрах).

Експериментальні дослідження ядерних процесів виявили, що в усіх без винятку випадках виконується збереження електричного та баріонного зарядів, згідно з яким відповідні сумарні заряди продуктів реакції дорівнюють сумарним зарядам початкових частинок. Закон збереження електричного заряду означає, що електричний заряд будь-якого вихідного каналу має дорівнювати заряду вхідного каналу, наприклад, для реакції X(a,b)Y:

$$Z_a + Z_X = Z_b + Z_Y, (6.3)$$

де Z_q – атомний (порядковий) номер ядра типу q (q = a, b, X, Y) в одиницях заряду протона, наприклад, для електрона $Z_e = -1$. Наприклад, із закону збереження (6.3) маємо, що в реакціях (p,n) електричний заряд дочірнього ядра зростає на одиницю: ${}^{A}_{Z}X + p \rightarrow n + {}^{A}_{Z+1}Y$, а в реакціях (n,p) навпаки, зменшується на одиницю.

Баріонний заряд нуклонів дорівнює +1 і значенню –1 для їх античастинок; для електронів і фотонів баріонний заряд дорівнює нулю. За енергій, нижчих від порогової (~ 3ГеВ), антинуклони в ядерних реакціях не народжуються, і закон збереження баріонного заряду для ядерних реакцій означає, що сумарна кількість нуклонів не змінюється. Збереження електричного заряду (для ядер – атомного номера Z) і баріонного заряду B (для ядер у реакціях з енергіями <3 ГеВ – масового числа A) дозволяє легко побудувати конкретну схему реакції. За енергій >3 ГеВ стає можливим народження нуклон-антинуклонних пар $N_{\rm nucl}$, $\tilde{N}_{\rm nucl}$. У цьому випадку зберігається не кількість нуклонів, а різниця кількості нуклонів та антинуклонів $(N_{\rm nucl} - \tilde{N}_{\rm nucl})$.

Під час ядерної реакції вплив зовнішніх збурень і детектуючої апаратури на частинки незначний завдяки великій інтенсивності ядерної взаємодії. Можна вважати, що в області ядерної взаємодії частинки утворюють замкнену систему, і тому виконуються закони збереження енергії, імпульсу, моменту кількості руху, парності та інших величин, які є інтегралами руху для даної системи за відсутності зовнішніх полів.

В ядерних реакціях можуть брати участь ядра з різного складу та масами. Звідси зрозуміло, що закон збереження енергії в ядерних реакціях необхідно формулювати з урахуванням можливої зміни енергії зв'язку ядер та їхньої енергії збудження. Наприклад, закон збереження енергії для бінарної реакції X(a,b)Y

у випадку нерелятивістського руху частинок має вигляд

$$T_{\alpha} + E_{a}^{*} + E_{X}^{*} = T_{\beta} + E_{b}^{*} + E_{Y}^{*}, \qquad (6.4)$$

де T_{α} – сума кінетичних енергій ядер *a* та *X* до зіткнення (тобто сума енергій за межами області ядерної взаємодії), а T_{β} – сума кінетичних енергій ядер *b* і *Y* після зіткнення; $E_a^*, E_X^*, E_b^*, E_Y^*$ – повні енергії частинок у стані спокою відповідно у вхідному (E_a^*, E_X^*) і вихідному (E_b^*, E_Y^*) каналах. Для ядра типу $_Z^A R$ енергія E_R^* у стані спокою є сумою енергії збудження ядра U_R та енергії $M(Z, A)c^2$, що відповідає його масі спокою:

$$E_{R}^{*} = U_{R} + M(Z, A)c^{2},$$

$$M(Z, A)c^{2} = (m_{p}Z + m_{n}(A - Z))c^{2} - B_{R},$$
(6.5)

де B_R – енергія зв'язку ядра R, а U_R – енергія його збудження, що відраховується від енергії основного стану. Якщо ядро R – нуклон, то в нерелятивістському випадку енергії збудження та зв'язку дорівнюють нулю

$$B_R = U_R = 0, \quad R = p, n$$

Поява енергій зв'язку в законі збереження енергії зумовлена зміною структури і складу ядер у ядерних реакціях. Зазвичай закон збереження енергії переписують у більш простому вигляді шляхом введення енергій відділення S_{aC} , S_{bC} частинок a,b від складеного ядра C = a + X = b + Y. Таке ядро внаслідок закону збереження баріонного заряду за енергій $T_{\alpha} < 3$ ГеВ складається з однакової кількості нуклонів для будь-якого каналу розпаду. Енергії відділення частинок a і b від складеного ядра C визначаються як (див. підрозд. 1.4):

$$\begin{cases} S_{aC} = B_C - B_a - B_X, \\ S_{bC} = B_C - B_b - B_Y, \end{cases}$$
(6.6)

де B_C – енергія зв'язку нуклонів у складеному ядрі C із

$$_{C} = A_{a} + A_{X} \equiv A_{b} + A_{Y}$$

нуклонами і зарядом $Z_C = Z_a + Z_X \equiv Z_b + Z_Y$. Енергії S_{aC} , S_{bC} легко обчислити за таблицями мас ядер. З урахуванням формул (6.5) і (6.6) закон збереження енергії (6.4) можна переписати у вигляді

$$T_{\alpha} + S_{aC} + U_a + U_X = T_{\beta} + S_{bC} + U_b + U_Y, \qquad (6.7)$$

або

$$T_{\beta} = T_{\alpha} + Q_{\alpha\beta} \,, \tag{6.8}$$

де величина

$$Q_{\alpha\beta} = Q + (U_a + U_X) - (U_b + U_Y),$$

$$Q = S_{aC} - S_{bC} = B_b + B_Y - B_a - B_X,$$
(6.9)

визначає різницю кінетичних енергій руху частинок у вихідному та вхідному каналах і називається *енергією каналів* α і β , або тепловим ефектом (теплотою) каналів α і β .

Якщо значення кінетичної енергії T_{α} таке, що енергія каналу T_{β} , яка обчислена за (6.8), виявляється від'ємною, то канал закритий. У цьому випадку реакція з вхідним каналом α і вихідним каналом β відсутня. Якщо $T_{\beta} > 0$, то канал реакції β відкритий, а реакція (α , β) можлива, що характеризує передачу енергії з початкового каналу α у кінцевий канал β .

Зазвичай в експериментах налітаюча частинка і ядро-мішень перебувають у своїх основних станах $U_a = U_X = 0$; такий вхідний канал позначаємо як α_0 . Природно, що експериментаторам важливо знати мінімальну кінетичну енергію T_{α_0} частинки a, яка необхідна для виникнення реакції X(a,b)Y, незалежно від характеристик вихідного каналу, за яким вилітає частинка b. Згадана мінімальна енергія відповідає такому каналу, коли частинка, що вилітає, і кінцеве ядро перебувають в основних станах $U_b = U_Y = 0$. Позначимо такий канал як β_0 . Енергія каналів α_0 і β_0 :

$$Q_{\alpha_0 \beta_0} \equiv Q = S_{aC} - S_{bC} \equiv B_b + B_Y - B_a - B_X =$$

 $= [M(Z_a, A_a) + M(Z_X, A_X) - M(Z_b, A_b) - M(Z_Y, A_Y)]c^2, (6.10)$

що є різницею мас частинок на початку та в кінці реакції, називається енергією, або тепловим ефектом (теплотою) реакції X(a,b)Y. Згідно з (6.8) вона визначає максимальну кінетичну

енергію ($T_{\beta_0} \equiv T_{bY}$), яку може мати вилітаюча частинка та залишкове ядро

$$T_{\beta_0} \equiv T_{bY} = T_{\alpha_0} + Q$$
, (6.11)

де T_{α_0} – кінетична енергія вхідного каналу, коли частинка *а* та ядро *X* перебувають у своїх основних станах.

Реакція X(a,b)Y можлива лише за додатної сумарної кінетичної енергії у вихідному каналі $T_{\beta} > 0$ або згідно з (6.11) лише у випадку, коли енергія налітаючої частинки перевищує значення -Q:

$$T_{\alpha} > -Q \,. \tag{6.12}$$

Така реакція називається *екзотермічною*, якщо Q > 0 та *ендотермічною* за Q < 0. Відповідно до (6.12) маємо, що екзотермічні реакції можуть відбуваються і за нульової кінетичної енергії в початковому каналі, але ендотермічні реакції порогові й можливі лише за

$$T_{\alpha} > |Q|. \tag{6.13}$$

Пружне розсіяння є процесом з нульовою енергією реакції, а тому відбувається завжди при зіткненні частинок.

Енергію Q' = -Q часто вводять у позначення реакції, записуючи, наприклад, реакцію X(a,b)Y у вигляді $a + X \rightarrow b + Y + Q'$. Прикладом екзотермічної реакції є реакція злиття двох дейтронів d(d, n)*t*:

 ${}^{2}_{1}\text{H} + {}^{2}_{1}\text{H} \rightarrow n + {}^{3}_{2}\text{He}$ або d + d \rightarrow n + t + Q', (6.14) у якій енергія вивільнюється у вигляді кінетичної енергії продуктів реакції (Q' = 3,266 MeB). Ще більше енергії виділяється під час реакції злиття дейтрона з тритієм d(t,n) α :

$${}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow \mathrm{n} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \text{ afo } \mathrm{d} + \mathrm{t} \rightarrow \mathrm{n} + \alpha + Q', \qquad (6.15)$$

де Q' = 17,6 MeB, що становить 0,5 % енергії спокою частинок. Обидва ці процеси належать до реакцій синтезу легких елементів і використовуються у штучних джерелах нейтронів, що отримали назву генераторів нейтронів. До сильно екзотермічних реакцій належать, наприклад, і реакції вимушеного поділу важ-

ких ядер під дією нейтронів; у таких реакціях енерговиділення сягає ~ 200 MeB на ядро.

Розглянемо роль закону збереження імпульсу на прикладі реакції X(a,b)Y, маємо

$$\vec{P}_a + \vec{P}_X \equiv \vec{P}_C = \vec{P}_b + \vec{P}_Y,$$
 (6.16)

де \vec{P}_a, \vec{P}_b – імпульси відповідно налітаючої та вилітаючої частинок; \vec{P}_X, \vec{P}_Y – імпульси материнського та дочірнього ядер; \vec{P}_C – повний імпульс частинок.

При дослідженні зіткнення двох частинок або ядер зазвичай використовують дві системи координат: лабораторну (систему L), у якій одна із частинок до розсіяння нерухома (ядро-мішень X), а інша рухається щодо неї; і систему центра інерції (систему C), у якій нерухомим є спільний центр інерції частинок, що зіштовхуються. Схематичне зображення процесу взаємодії двох частинок у різних системах наведено на рис. 6.1.



Рис. 6.1. Зіткнення частинок *a* та *X*: а) *L*-система; б) *C*-система; v_j^L, v_j^C – швидкості частинки *j* у *L*- та *C*-системах

Закон збереження імпульсу має вигляд (6.16) у довільній системі координат. За визначенням у *L*-системі в цих рівняннях треба покласти, що

$$\vec{P}_X = 0, \qquad (6.17)$$

а в С-системі

$$\vec{P}_C = \vec{P}_a + \vec{P}_X = 0.$$
 (6.18)

Згідно з (6.18) і законом збереження імпульсів у системі центра інерції частинки у вхідному каналі рухаються назустріч одна одній; після розсіяння вони розлітаються в протилежні напрямки з рівними за модулем, але з протилежно спрямованими імпульсами $\vec{P}_b = -\vec{P}_Y$.

У нерелятивістському наближенні кінетичні енергії T_{α} і T_{β} руху частинок, що входили до закону збереження енергії (див. (6.4), (6.7), (6.8)), мають такий вигляд:

$$T_{\alpha} = \frac{P_a^2}{2m_a} + \frac{P_X^2}{2m_X} = \varepsilon_{\alpha} + E_C, \quad T_{\beta} = \frac{P_b^2}{2m_b} + \frac{P_Y^2}{2m_Y} = \varepsilon_{\beta} + E_C, \quad (6.19)$$

де ε_{α} , ε_{β} – енергії відносного руху в каналах α , β ; E_C – енергія руху центра мас:

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\vec{p}_{\alpha}^2}{2\mu_{\alpha}}, \quad \varepsilon_{\beta} = \frac{\vec{p}_{\beta}^2}{2\mu_{\beta}}, \quad E_C = \frac{\vec{P}_C^2}{2M}, \quad M = m_a + m_X = m_b + m_Y \quad (6.20)$$

Тут \vec{p}_{α} , \vec{p}_{β} і μ_{α} , μ_{β} – відносні імпульси та зведені маси частинок у каналах α , β :

$$\vec{p}_{\alpha} = \frac{\mu_a}{m_a} \vec{P}_a - \frac{\mu_a}{m_x} \vec{P}_X, \quad \vec{p}_{\beta} = \frac{\mu_{\beta}}{m_b} \vec{P}_b - \frac{\mu_{\beta}}{m_Y} \vec{P}_Y,$$

$$\mu_{\alpha} = \frac{m_a m_X}{m_a + m_X}, \quad \mu_{\beta} = \frac{m_b m_Y}{m_b + m_Y}.$$
(6.21)

...

У системі центра мас $E_C = 0$ і зі співвідношень (6.19) маємо, що кінетична енергія в довільному каналі збігається з кінетичною енергією відносного руху в даному каналі; наприклад, у вхідному

$$T_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha} \equiv \frac{\mu_a}{2} \left(\frac{\vec{P}_a}{m_a} - \frac{\vec{P}_X}{m_X} \right)^2.$$
(6.22)

Звідси отримуємо, що енергія відносного руху пов'язана з кінетичною енергією $E_{\alpha}^{L} = \vec{P}_{a}^{2} / 2m_{a} \equiv (\vec{P}_{a}^{L})^{2} / 2m_{a}$ налітаючої частинки в лабораторній системі координат (6.17) співвідношенням

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{m_X}{m_a + m_X} E_{\alpha}^L \,. \tag{6.23}$$

Мінімальна кінетична енергія налітаючої частинки в лабораторній системі координат, починаючи з якої реакція стає енергетично можливою, називають *порогом реакції* (E_{nop}^L). Відповідно до (6.12), (6.13) та (6.23) енергія порогу екзотермічної реакції дорівнює нулю, а ендотермічної

$$E_{\rm nop}^{L} = \frac{m_a + m_X}{m_X} |Q| \,. \tag{6.24}$$

,

Якщо не враховувати внутрішні ступені свободи частинок, що зіштовхуються, то правила переходу від L-системи до Cсистеми аналогічні тим, що розглядаються в класичній механіці. Оскільки система центра мас рухається в лабораторній системі координат зі швидкістю

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}_C}{m_a + m_X} = \frac{\vec{P}_a + \vec{P}_X}{m_a + m_X} = \frac{\vec{P}_a^L + \vec{P}_X^L}{m_a + m_X} = \frac{m_a \vec{V}_a^L}{m_a + m_X}$$

то виміряний на експерименті кут розсіяння θ_L у лабораторній системі відліку відрізняється від кута розсіювання θ у системі центра мас і $\theta > \theta_L$. Із законів збереження енергії та імпульсу можна отримати такі співвідношення між кутами θ і θ_L для реакції X(a,b)Y:

$$\operatorname{tg} \theta_L = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \gamma}, \quad \gamma = \left(\frac{m_a m_b}{m_X m_Y} \frac{\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha + Q'}\right)^{\frac{1}{2}},$$
 (6.25)

або

$$\cos \theta_L = \frac{\cos \theta + \gamma}{\sqrt{1 + 2\gamma \cos \theta + \gamma^2}} \,. \tag{6.26}$$

При пружному розсіянні частинок Q = 0 і $\gamma = m_a \ / \ m_X$.

Зі співвідношення (6.25) маємо, що за $\gamma < 1$ кут розсіяння θ_L у лабораторній системі координат монотонно зростає від 0 до π , якщо в тому самому інтервалі зростає й кут θ . За $\gamma > 1$ кут розсіяння θ_L завжди менший від $\pi/2$. За $\gamma = 1$ кут розсіяння завжди у два рази менший від кута розсіяння в системі центра мас $\theta_L = \theta/2$.

При пружному розсіяння двох нуклонів однакової маси з (6.21), (6.23) і (6.25) отримуємо такі вирази для зведеної маси, кінетичної енергії відносного руху ε_{α} і кута розсіяння в *C*-системі:

$$\begin{cases} m_a = m_X = m ,\\ \mu_{\alpha} = \frac{m_a m_X}{m_a + m_X} = \frac{m}{2} ,\\ \theta = 2\theta_L ,\\ \epsilon_{\alpha} = \frac{1}{2} E_a^L . \end{cases}$$
(6.27)

Як бачимо, тільки половина повної енергії нуклона в лабораторній системі є його енергією руху відносно центра інерції, а решта енергії є кінетичною енергією руху центра мас.

В ядерних реакціях маса налітаючої частинки зазвичай набагато менша від маси ядра-мішені. У такому випадку центр інерції майже збігається з координатою ядра-мішені, тому енергія відносного руху ε_{α} мало відрізняється від енергії налітаючої частинки в лабораторній системі, а кути розсіяння майже збігаються, тобто

$$\begin{cases} m_X \gg m_a, \ \gamma \ll 1, \\ \mu_\alpha \cong m_a, \\ \theta \cong \theta_L, \\ \varepsilon_\alpha \cong E_a^L. \end{cases}$$
(6.28)

Іншими словами, можна вважати, що за умови $m_X \gg m_a$ система центра мас збігається з лабораторною системою.

Закони збереження енергії та імпульсу визначають так звану кінематику ядерних реакцій, під якою розуміють сукупність значень енергій і кутів розльоту частинок (або імпульсів), а також обмеження на ці величини, що накладаються законами збереження.

Розглянемо кінематичні обмеження, які існують у лабораторній системі координат для бінарної реакції, якщо всі частинки перебувають у своїх основних станах. Згідно із законами збереження енергії (6.11) та імпульсу (6.16), (6.17) маємо

 $E_a^L + Q = E_b^L + E_Y^L$, $E_\alpha^L = \vec{P}_a^2 / 2m_a$, $\vec{P}_a = \vec{P}_b + \vec{P}_Y$, (6.29) де для спрощення запису верхній індекс L у позначеннях імпульсів у лабораторній системі координат опущено. Із закону збереження імпульсів отримуємо

$$\vec{P}_Y^2 = \left(\vec{P}_a - \vec{P}_b\right)^2 = \vec{P}_a^2 + \vec{P}_b^2 - 2P_a P_b \cos\theta_L = = 2m_a E_a^L + 2m_b E_b^L - 4\sqrt{m_a m_b E_a^L E_b^L} \cos\theta_L ,$$

звідси

$$E_Y^L = \vec{P}_Y^2 / 2m_Y = \frac{m_a}{m_Y} E_a^L + \frac{m_b}{m_Y} E_b^L - 2\frac{\sqrt{m_a m_b} E_a^L E_b^L}{m_Y} \cos\theta_L + \frac{1}{m_Y} E_b^L + \frac{1}{m_Y} E_b$$

Після підстановки цього виразу у закон збереження енергії (6.29) знаходимо співвідношення

$$Q = \left(1 + \frac{m_b}{m_Y}\right) E_b^L - \left(1 - \frac{m_a}{m_Y}\right) E_a^L - \frac{2}{m_Y} \sqrt{m_a m_b E_a^L E_b^L} \cos\theta_L, (6.30)$$

яке визначає можливі значення енергій і кутів розльоту частинок у лабораторній системі координат для реакції X(a,b)Y. Звідки отримуємо вираз для можливих значень енергії в кінцевому каналі (b) за даних E_{α}^{L} та θ_{L} :

$$E_b^L = \frac{m_a m_b E_a^L}{(m_b + m_Y)^2} \{ \cos \theta_L \pm \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta_L + (m_b + m_Y)^2}} \{ \cos \theta_L \pm \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta_L + (m_b + m_Y)[(m_Y - m_a)E_a^L + m_Y Q] / (m_a m_b E_a^L)}} \}^2.$$

Якщо в останній формулі другий доданок під коренем додатний або дорівнює нулю, то перед коренем береться знак "+" і величина кута θ_L може набувати всіх значень від 0 до π . Якщо ж другий доданок під коренем від'ємний, то значення кута θ_L обмежено областю гострих кутів від 0 до θ_{max}^L , для яких корінь дійсний. У цьому випадку при даному куті θ_L величина E_b^L може мати або два значення, або жодного.

Завдяки залежності енергії E_b^L вилітаючої частинки від кута θ_L стає можливим виліт частинок з різними енергіями, у той час як бомбардуючі частинки мають однакову енергію. Ця обставина широко застосовується, наприклад, у генераторах нейтронів, у яких використовують реакції d(d,n)t, d(t,n) α ((6.14), (6.15)) для отримання потоків моноенергетичних нейтронів різних енергій.

6.3. Ефективні перерізи розсіяння і реакцій

Кількісною характеристикою ймовірності здійснення (або інтенсивності) ядерної реакції є величина, яка називається *ефективним перерізом*. При визначенні перерізу зазвичай виходять з припущення про адитивність подій, які відбуваються на окремих ядрах мішені, що має макроскопічні розміри. При цьому вважають, що окремі ядра речовини є незалежними центрами розсіяння, а внески від розсіяння на окремих ядрах некогерентні. Із досвіду відомо, що в усіх ядерних реакціях, окрім випадку розсіяння дуже повільних нейтронів на кристалах (з довжиною хвилі нейтронів, що перевищує розмір їхньої ґратки), це припущення виправдовується.

У найпростіших випадках експерименти з дослідження реакцій зводяться до того, що на деяке ядро напрямляють частинки і вивчається розподіл частинок, що вилітають. Схематично таку геометрію експерименту зображено на рис. 6.2. На нерухому мішень, яка складається із частинок типу 2, падає паралельний пучок частинок типу 1. Частинки 1 та 2, зіштовхуючись, всту-

пають у реакцію $1+2 \rightarrow 3+4$, унаслідок якої з мішені вилітають частинки 3. Детектор вимірює кількість частинок типу 3 на відстані r і достатньо віддалений від розташованої на початку координат мішені, причому відстань r значно перевищує область дії ядерної взаємодії. В експерименті вимірюється кількість частинок ΔN , що перетинають за час Δt елемент поверхні dS із нескінченно малим елементом тілесного кута $d\Omega$, під яким видно цю поверхню $dS = r^2 d\Omega$.



Рис. 6.2. Схематичне зображення експерименту взаємодії частинок з реєстрацією частинок типу 3

У результаті досліджень знаходять величину, яка визначає кількість частинок $\Delta N / \Delta t$, що пролітають за 1 с через поверхню dS. Ця величина називається *диференційним перерізом розсіяння* $\sigma(\theta, \varphi) = \frac{d\sigma}{d\Omega}$ і дорівнює відношенню кількості розсіяних частинок, які вилітають під кутами θ і φ у межах тілесного кута $d\Omega$ до падаючих, за умови, що в 1 с через одиничну поверхню проходить одна частинка падаючого пучка. Позначимо j_{α} як кількість частинок, що падає за 1 с на 1 см² площі мішені, розташованої перпендикулярно до осі пучка. Тоді коефіцієнт пропорційності $\sigma(\theta, \varphi)$ між кількістю $\Delta N / \Delta t$ частинок, що влітають за одиницю часу в елемент тілесного кута $d\Omega$, під яким

видно площадку dS, і густиною потоку падаючих частинок j_{α} , і є диференціальним перерізом розсіяння або реакції:

$$\Delta N / \Delta t = \sigma(\theta, \varphi) \cdot j_{\alpha} \cdot d\Omega .$$
(6.31)

Оскільки величини j_{α} і $\Delta N / \Delta t$ мають розмірності $[j_{\alpha}] = cm^{-2} \cdot c^{-1}$ та $[\Delta N / \Delta t] = c^{-1}$, то диференціальний переріз розсіяння $\sigma(\theta, \phi)$ має розмірність площі. Саме тому цю величину і назвали перерізом розсіяння. Залежність диференціального перерізу від кутів θ та ϕ називається *кутовим розподілом*. Полярний кут θ відносно траєкторії падаючого пучка називають *кутом розсіяння*. Інтеграл від $\sigma(\theta, \phi)$ за тілесним кутом у всьому просторі називається *інтегральним перерізом розсіяння*, або *перерізом розсіяння*

$$\sigma = \int \sigma(\theta, \phi) d\Omega \equiv \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \,. \tag{6.32}$$

Інтегральний переріз має просту фізичну інтерпретацію, тобто його можна розглядати як площу поверхні мішені, поперечної до пучка, влучення в яку з достовірністю призводить до реакції. Значення перерізів для різних реакцій різні. Масштаб величини σ можна оцінити таким чином. Припустимо, що ядро є сферою радіуса R, а лінійні розміри налітаючих частинок набагато менші від його радіуса. Припустимо далі, що кожне зіткнення частинки з ядром приведе до ядерної реакції, тоді можна очікувати, що переріз реакції дорівнюватиме площі перерізу ядра

$$\sigma \equiv \sigma_{\text{reom}} = \pi R^2 \,. \tag{6.33}$$

Радіуси легких ядер з $A \cong 10$ за порядком величини дорівнюють 1 фм = 10^{-13} см, а важких ³ $A \cong 200-10$ фм = 10^{-12} см. Згідно з оцінкою (6.33) маємо, що перерізи розсіяння можуть бути величинами масштабу $10^{-26} - 10^{-24}$ см², тому в ядерній фізиці та фізиці елементарних частинок за одиницю вимірювання перерізів приймають спеціальну одиницю – *барн*:

1б = 1барн =
$$10^{-24}$$
 см² = 100 фм²,
1мб = 1мілібарн = 10^{-3} б = 10^{-27} см² = $0,1$ фм²,
1мкб = 1мікробарн = 10^{-6} б = 10^{-30} см² = 10^{-4} фм².

Диференціальний та інтегральний перерізи розсіяння залежать від енергії налітаючої частинки. Інтегральний переріз як функція енергії ε_{α} відносного руху у вхідному каналі називається *функцією збудження*. Інтегральний переріз характеризує інтенсивність реакції і відповідно до формул (6.31) та (6.32) визначає ймовірність *w* за одиницю часу перебігу реакції під дією потоку падаючих частинок:

$$w = \mathbf{\sigma} \cdot \boldsymbol{j}_{\alpha}, \mathbf{c}^{-1}. \tag{6.34}$$

Очевидно, що інтегральні величини σ та w не залежать від вибору системи координат. Диференціальний переріз, на відміну від інтегрального, залежить від такого вибору. Співвідношення між диференціальними перерізами розсіяння в лабораторній системі (σ_L) і системі центра інерції (σ) визначається з очевидної умови про те, що кількості частинок, розсіяних у відповідні один одному елементи тілесних кутів у двох системах відліку мають бути однаковими й не залежати від системи, тобто

$$\frac{d\sigma_L}{d\Omega_L} d\Omega_L = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega, \qquad (6.35)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\frac{d\sigma_L(\theta_L, \varphi_L)}{d\Omega_L} \cdot \sin\theta_L \cdot d\theta_L \cdot d\varphi_L = \frac{d\sigma(\theta, \varphi)}{d\Omega} \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi, \quad (6.36)$$

де $\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \sigma(\theta, \phi)$ – диференціальний переріз у *C*-системі з полярним і азимутальним кутами θ, ϕ . Диференціюючи вираз (6.26), знаходимо співвідношення між $\sin \theta_L \cdot d\theta_L \equiv -d \cos \theta_L$ і $\sin \theta \cdot d\theta \equiv -d \cos \theta$. Після врахування рівності $\phi_L = \phi$ отримуємо з (6.36) співвідношення між перерізами розсіяння в лабораторній системі та системі центра інерції:

$$\sigma_L(\theta_L, \varphi_L) = \frac{\left(1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|1 + \gamma \cos\theta\right|} \sigma(\theta, \varphi) .$$
(6.37)

Як бачимо з (6.37) та (6.28), якщо маса налітаючої частинки значно менша від маси ядра, тобто $\gamma \ll 1$, то диференціальні перерізи в *L* - та *C* -системі збігаються.

Як було зазначено, при фіксованому вхідному каналі можливі реакції з різними вихідними каналами. Зазвичай необхідно знати переріз реакції деякого конкретного типу. Такий переріз називається *парціальним перерізом* і позначається як σ_i . Залежно від характеру ядерної реакції кажуть про переріз пружного розсіяння σ_{el} , переріз непружного розсіяння σ_{in} і перерізи різних реакцій. Суму всіх парціальних перерізів називають *повним ефективним перерізом* $\sigma_t = \sum_i \sigma_i$. З усіх можливих взаємодій виділяють пружне розсіяння і повний переріз подають у вигляді

$$\Sigma$$

$$\sigma_{\rm t} \equiv \sum_{i} \sigma_{\rm i} = \sigma_{\rm el} + \sigma_{\rm r} \ . \tag{6.38}$$

Зауважимо, що це співвідношення фактично є визначенням ефективного перерізу реакції σ_r , куди входить і непружне розсіяння. Переріз реакції з вхідним каналом α і вихідним β зазвичай позначають як $\sigma_{\alpha\beta}$. Цей парціальний переріз пов'язаний з імовірністю $w_{\alpha\to\beta}$ за одиницю часу переходу з каналу α у β під дією падаючих частинок з густиною потоку j_{α} співвідношенням (6.34), а саме, $w_{\alpha\to\beta} = \sigma_{\alpha\beta} \cdot j_{\alpha}$. Як наслідок, якщо ймовірність переходу $w_{\alpha\to\beta}$ відома, то переріз $\sigma_{\alpha\beta}$ переходу з каналу α у β можна знайти як

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{w_{\alpha \to \beta}}{j_{\alpha}}.$$
(6.39)

Зазвичай диференціальний парціальний переріз $\sigma_{\alpha\beta}$ обчислюють, використовуючи означення (6.31), у якому кількість

 dN_{β}/dt розсіяних в одиницю часу частинок у каналі β записують у вигляді добутку густини j_{β} частинок, розсіяних у каналі β , на елемент поверхні $dS = r^2 d\Omega$ на великих відстанях від радіуса R області ядерної взаємодії, тобто

$$\sigma_{\alpha\beta}(\theta,\phi) \cdot d\Omega = \frac{dN_{\beta} / dt}{j_{\alpha}} = \frac{j_{\beta}}{j_{\alpha}} dS = \frac{j_{\beta}r^2 d\Omega}{j_{\alpha}}, \ r \gg R.$$
(6.40)

Слід зазначити, що в експерименті, зображеному на рис. 6.1, процес розсіяння вважався стаціонарним. При такому описі розсіяння припускається, що існує неперервний потік частинок, який після взаємодії з центром розсіяння переходить у неперервний потік розсіяних частинок. Задача розсіяння в такій постановці полягає в обчисленні потоку j_{β} розсіяних частинок на

нескінченній відстані від центра розсіяння як функції потоку j_{α} падаючих частинок. Переріз обчислюють за формулами (6.40) після розрахунку j_{α} і j_{β} . Такий підхід тотожний задачі про розсіяння хвиль у класичній фізиці. Єдина відмінність полягає в тому, що квантова хвильова функція є хвилею ймовірності.

Можливий також інший нестаціонарний підхід, який полягає у відстеженні за зміною із часом початкового квантового стану системи α і визначенні ймовірності його переходу $w_{\alpha\to\beta}$ у кінцевий стан β за одиницю часу. Це суто квантовий підхід. Він застосовується не тільки в порівняно простій задачі про взаємне розсіяння двох частинок, взаємодія яких характеризується деяким потенціалом, але й при розсіянні на мішенях, що мають складну будову, а також у системах квантових полів. Такий нестаціонарний підхід дозволяє описати й індивідуальний акт розсіяння однієї мікрочастинки на іншій. Він також більш загальний, ніж стаціонарний підхід, і тому його можна використовувати й у таких нестаціонарних процесах, де ймовірність переходу залежить від часу.

Різницю між стаціонарним і залежним від часу нестаціонарним підходами до розсіяння спробуємо пояснити завдяки класичній аналогії. Нехай зі шланга б'є вода. Перекриємо її шлях важ-

ким каменем. Зіткнувшись із каменем, потік води розлетиться на всі боки. Якщо вода тече достатньо довго, то картина стаціонарна і її можна сфотографувати з такою невеликою різкістю, що положення кожної з краплин води перекривається. Таке фото буде показувати незмінну із часом картину розсіяння падаючої води каменем і символізуватиме стаціонарний підхід до розсіяння. Інший, залежний від часу підхід, – це спостереження за окремою краплинкою води, що вилітає зі шланга. При цьому будемо відмічати рух краплі протягом певного часу при розсіянні.

Стаціонарний підхід може використовуватись лише до стаціонарних процесів розсіяння, для яких можливо визначити незалежну від часу ймовірність переходу $w_{\alpha\to\beta}$ в одиницю часу з початкового каналу α у кінцевий β . У такому випадку перерізи можна обчислювати як за допомогою формули (6.39), так і виразу (6.40). Це є наслідком рівняння неперервності, яке зв'язує зміну в часі ймовірності розташування системи в деякій точці простору та потоку частинок. Наприклад, для однієї частинки маси *m*, що рухається в дійсному потенціалі, рівняння неперервності в диференціальній формі має вигляд

$$\frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r},t) = 0, \qquad (6.41)$$

де $\operatorname{div}_{\vec{j}} \equiv \partial j_x / \partial x + \partial j_y / \partial y + \partial j_z / \partial z$ – оператор дивергенції, $\rho(\vec{r},t) = |\psi(\vec{r},t)|^2$ – густина ймовірності розташування частинки в точці \vec{r} у момент часу t; $\psi(\vec{r},t)$ – хвильова функція частинки, що задовольняє рівняння Шредінгера. Вектор, що визначається співвідношенням

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{i\hbar}{2m} \Big(\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi \Big),$$

є вектором густини потоку ймовірності. Останнє є результатом інтерпретації інтегрального вигляду виразу (6.41), а саме:

$$-\frac{\partial P(t)}{\partial t} = \oint_{S} j_{r} dS, \qquad P(t) = \int_{V} \rho(\vec{r}, t) d\vec{r},$$

$$j_{r} = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \frac{\partial}{\partial r} \psi^{*} - \psi^{*} \frac{\partial}{\partial r} \psi \right),$$
 (6.42)

який отримуємо після інтегрування (6.41) за об'ємом і використання теореми Гаусса–Остроградського. Співвідношення (6.42) визначає, як змінюється із часом імовірності перебування частинки в деякому об'ємі V, обмеженому поверхнею S. Величина $\rho(\vec{r},t)$ є густиною частинок, і тому величину j_r необхідно розглядати як перпендикулярний до поверхні середній потік частинок, що пролітають через одиничну площу в 1 с (напр., через площу 1 см², якщо частинка міститься в 1 см³). Згідно з виразом (6.42) зміна ймовірності відбувається внаслідок вильоту частинок з потоком j_r у радіальному напрямку. Інтеграл від j_r (нормальної складової вектора \vec{j} по поверхні в одиницю часу. Тому ймовірність того, що частинка після розсіяння в одиницю часу перетне поверхню dS, дорівнює

$$w = j_r dS \,. \tag{6.43}$$

Зауважимо, що густина потоку ймовірності \vec{j} , як це безпосередньо випливає з її визначення, завжди обертається на нуль, якщо стан системи описується дійсною хвильовою функцією ψ . Це, наприклад, означає, що для зв'язаних станів потоки відсутні, тому що хвильові функції зв'язаних станів дійсні з точністю до сталого фазового множника.

Повний переріз σ_t взаємодії частинок з ядрами-мішені також можна знайти, вимірюючи відношення інтенсивностей потоків частинок до та після їхнього зіткнення з мішенню. Дійсно, нехай на поверхню плоскої мішені товщиною x налітає паралельний пучок моноенергетичних частинок, швидкість яких перпендикулярна до поверхні мішені, й окремі ядра речовини є такими незалежними центрами розсіяння, що внески від розсіяння на окремих ядрах є некогерентним. Після реакцій частинки вибувають із пучка. На глибині x потік частинок зменшується до

деякого значення I(x). Зменшення потоку dI у прошарку dxпропорційне виходу реакції $\sigma_t N dx$ і потоку I(x): $dI = -\sigma_t N I(x) dx$. Тут N – густина ядер у речовині, а від'ємний знак вказує на послаблення потоку частинок у прошарку. Після інтегрування цього рівняння маємо закон ослаблення паралельного пучка у плоскій мішені

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-N\sigma_t x}, \qquad (6.44)$$

де $I_0 = I(x = 0)$ – інтенсивність пучка частинок, що падає на мішень.

Таким чином, потік частинок зменшується за експонентою зі збільшенням товщини мішені, а швидкість зменшення потоку частинок залежить від добутку кількості ядер у 1 см³ N і перерізу σ_t . Такий добуток отримав назву *повний макроскопічний переріз* $\Sigma_t : \Sigma_t = \sigma_t N$, а величина σ_t називається *мікроскопічним перерізом*. Оскільки розмірність густини N обернено пропорційна розмірності об'єму, то на відміну від мікроскопічного перерізу, який має розмірність площі, макроскопічний переріз Σ_t має розмірність оберненої довжини.

Існує експериментальний метод вимірювання повних перерізів, у якому використовується закон ослаблення інтенсивності потоку частинок. Якщо виміряти потоки частинок I_0 і I(x), які падають на мішень товщини Δ і виходять з неї, то з рівняння (6.44) маємо такий вираз:

$$\sigma_{t} = -\frac{\ln[I(\Delta) / I_{0}]}{N \Delta}$$
(6.45)

для визначення повних перерізів ядерних реакцій. Величина $T = I(\Delta) / I_0$ отримала назву коефіцієнт пропускання, а сам метод визначення перерізів – метод пропускання.

6.4. Стаціонарний опис пружного розсіяння безспінових частинок

Розглянемо пружне розсіяння за допомогою стаціонарного підходу на прикладі розсіяння безспінової частинки масою m на силовому центрі з потенціалом $V(\vec{r})$ скінченного радіуса дії R:

$$V(\vec{r}) \equiv V(\vec{r})\theta(R-r). \qquad (6.46)$$

Така задача відповідає взаємодії частинки з ядром мішені з масою, яка значно перевищує масу *m*, і тому центр тяжіння можна вважати таким, що збігається із центром ядра.

Помістимо нерухомий розсіювальний центр у початок координат і за напрямок потоку падаючих частинок приймемо вісь Z. На великій відстані від розсіючого центра падаюча частинка рухається вільно, тому її хвильова функція має вигляд плоскої хвилі¹

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \varphi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) = e^{ik_0\vec{r}} = e^{ikz}, \ \vec{k}_0 = k\vec{e}_z,$$
(6.47)

де \vec{e}_z – орт уздовж осі Z. Ця функція є розв'язком рівняння Шредінгера для вільного руху

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi + E\phi = 0 \tag{6.48}$$

із хвильовим числом $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$, яке пов'язане з імпульсом руху частинки *p* співвідношенням $p = \hbar k$. Функція ϕ нормована так, що густина потоку падаючих частинок дорівнює швидкості υ її руху в напрямку *Z*. Дійсно, використовуючи (6.43), знаходимо

¹ Тут і далі для спрощення запису нормувальний множник *C* при плоскій хвилі вибрано таким, що дорівнює одиниці. Зауважимо, що для збереження правільної розмірності величин $|\phi|^2$ і \vec{j} значення *C* має бути обернено пропорційним кореню з довільного об'єму L^3 ($C = L^{-3/2}$), у якому рухається частинка, з подальшим його прямуванням до нескінченності.

$$\vec{j} = j\vec{e}_z = \vec{e}_z \frac{\hbar}{2mi} \left(\phi_{\vec{k}_0}^* \frac{\partial}{\partial z} \phi_{\vec{k}_0} - \phi_{\vec{k}_0} \frac{\partial}{\partial z} \phi_{\vec{k}_0}^* \right) = \vec{e}_z \frac{\hbar k}{m} = \vec{e}_z \frac{p}{m} = \vec{e}_z \upsilon. (6.49)$$

Поблизу силового центра частинка взаємодіє з полем і розсіюється, унаслідок чого вигляд її хвильової функції змінюється і на досить великих відстанях $r \gg R$ разом з плоскою хвилею (6.47) існує розсіяна хвиля. Оскільки потік розсіяних частинок напрямлений від центра розсіяння, то рух розсіяних частинок буде описуватися сферичною розбіжною хвилею

$$\psi_{\text{out}} = f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}, \qquad (6.50)$$

де $f(\theta, \phi)$ – амплітуда сферичної хвилі, яка називається *амплітудою розсіяння* і залежить від кутів θ , ϕ . Радіальна функція e^{ikr} / r у виразі (6.50) забезпечує додатний потік розсіяних частинок, який обернено пропорційний квадрату радіуса r. Саме тому стає можливим реєстрація на великих відстанях (незалежної від відстані r) сталої кількості частинок, яка проходить через елемент сферичної поверхні $dS = r^2 d\Omega$, що пропорційна квадрату радіуса сфери.

Повна хвильова функція, що описує рух налітаючих і розсіяних частинок на великих відстанях від центра розсіяння, дорівнює суперпозиції плоскої падаючої (6.47) і сферичної розбіжної (6.50) хвилі

$$\Psi = e^{ik_0 z} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r \gg R.$$
(6.51)

Згідно зі співвідношенням (6.40) для обчислення диференціального перерізу нам необхідно розрахувати потоки падаючих і розсіяних частинок. Густина потоку падаючих частинок (6.49) дорівнює швидкості частинок v. Згідно з (6.43) і (6.50) знаходимо вираз для радіальної густини потоку в розбіжній хвилі

$$j_r \equiv \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi_{\text{out}}^* \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\text{out}} - \psi_{\text{out}} \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\text{out}}^* \right) = \frac{\upsilon}{r^2} |f(\theta, \phi)|^2 . \quad (6.52)$$

Відповідно до (6.40) диференціальний переріз визначає відношення розсіяного потоку (6.52) до падаючого (6.49):

$$\frac{d\sigma(\theta,\phi)}{d\Omega} \equiv \sigma(\theta,\phi) = \lim_{r \to \infty} \frac{j_{\beta}r^2}{j_{\alpha}} = |f(\theta,\phi)|^2.$$
(6.53)

Таким чином, диференціальний переріз залежить від амплітуди розсіяння, яка характеризує поведінку хвильової функції на великих відстанях.

Ураховуючи те, що повна хвильова функція задовольняє рівняння Шредінгера із взаємодією

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + \left[E - V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = 0 , \qquad (6.54)$$

знайдемо загальне співвідношення між амплітудою розсіяння та потенціалом $V(\vec{r})$. Запишемо розв'язок цього рівняння Шредінгера, що задовольняє граничну умову (6.51), у формі інтегрального рівняння

$$\psi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) + \int G_0(\vec{r}, \vec{r}') \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r'}) \psi(\vec{r'}) d\vec{r'}, \qquad (6.55)$$

де функція $\varphi \in$ розв'язком рівняння Шредінгера (6.48) за відсутності взаємодії $(\Delta + k^2)\varphi = 0$ і має вигляд плоскої хвилі (6.47).

Функція $G_0(\vec{r},\vec{r}')$ є функцією Гріна, що задовольняє рівняння Шредінгера без взаємодії (6.48) з точковим джерелом, а саме:

$$(\Delta + k^2)G_0(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$
(6.56)

Рівняння (6.54) отримало назву *рівняння Ліппмана-Швінгера*. Розв'язок (6.56), що відповідає розбіжним хвилям, має вигляд

$$G_0(\vec{r},\vec{r'}) \equiv G_0^{(+)}(\vec{r},\vec{r'}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp[ik|\vec{r}-r'|]}{|\vec{r}-\vec{r'}|}, \qquad (6.57)$$

тому формулу (6.56) можна переписати як

$$\Psi(\vec{r}) = e^{ik_0 z} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r} - r'|}V(\vec{r'})\Psi(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} d\vec{r'} \equiv \Psi^{(+)}.$$
(6.58)

Розглянемо далі інтеграл, який міститься в рівнянні (6.58), і знайдемо його значення на великих відстанях r. Визначимо поняття великих відстаней для даного випадку. Для потенціалу скінченного радіуса дії (6.46) область значень $|\vec{r'}|$, у якій підінтег-

ральна функція відмінна від нуля, має розміри R, тобто $|\vec{r}'| \leq R$. У даному випадку природно називати відстані великими, для яких $|\vec{r}| \gg R$. Зауважимо, що такі відстані існують і для взаємодій V(r), які не мають вигляду ступінчастої функції (6.46), але таких, що достатньо швидко спадають з відстанню. Звідси маємо, що при обчисленні інтеграла з (6.58) на великих відстанях, завжди виконується умова $r \gg r'$. Розкладемо $|\vec{r} - \vec{r'}|$ у ряд, тоді маємо

$$|\vec{r} - \vec{r'}| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r'})^2} \approx \sqrt{\vec{r}^2 - 2\vec{r}\vec{r'}} \approx r - \vec{r'} \cdot \vec{n}, \quad \vec{n} = \vec{r} / r. \quad (6.59)$$

Підставляючи цей розклад у (6.58) при r >> R, знаходимо

$$\Psi(\vec{r}) = \varphi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) - \frac{me^{ik\vec{r}}}{2\pi\hbar^2 r} \int e^{-i\vec{k}\vec{r}'} V(\vec{r'}) \Psi(\vec{r'}) d\vec{r'}, \qquad (6.60)$$

де, як і раніше, $\phi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) = \exp(ik_0\vec{r}) = \exp(ikz)$, а

$$\vec{k} = k\vec{n} , \qquad (6.61)$$

є хвильовим вектором \vec{k} частинки після розсіювання. Цей вектор характеризує напрямок поширення розбіжної сферичної хвилі й напрямлений уздовж радіус-вектора \vec{r} . Зазначимо, що в падаючій хвилі $\phi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) = \exp(i\vec{k}_0\vec{r}) = \exp(ikz)$ хвильовий вектор напрямлений уздовж осі Z. Порівняння (6.60) з (6.51) доводить, що асимптотична поведінка хвильової функції з розбіжною сферичною хвилею має загальний вигляд (6.51) з амплітудою розсіяння

$$f(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d\vec{r} \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \phi_{\vec{k}} \left| V \right| \psi \rangle,$$

$$\phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) = e^{-i\vec{k}\vec{r}},$$
(6.62)

де знаком "*" позначено операцію комплексного спряження.

Зазначимо, що задача про рух двох частинок з масами m_1 і m_2 , взаємодія між якими залежить лише від відносної координати $\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$, після переходу в систему центра мас зводиться до руху частинки з ефективною зведеною масою

 $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. Тому після заміни *m* на μ та ототожнення кута θ з полярним кутом у системі центра мас, а енергією Відносного руху ε , формула (6.62) буде визначати амплітуду розсіяння двох частинок у системі центра мас:

$$f(\theta,\phi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d\vec{r} \equiv -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \phi_{\vec{k}} \left| V \right| \psi \rangle. \quad (6.63)$$

Для обчислення амплітуд розсіяння за допомогою формули (6.63) необхідно знати хвильову функцію $\psi(\vec{r})$ або вміти розрахувати. Цю функцію можна знайти або як розв'язок диференціального рівняння Шредінгера (6.54) з граничною умовою (6.55), або як розв'язок інтегрального рівняння (6.54). Таке обчислення $\psi(\vec{r})$ і $f(\theta, \phi)$ зазвичай пов'язане з суттєвими математичними труднощами, тому в теорії розсіяння широко застосовуються наближені методи.

6.5. Наближення Борна для амплітуд розсіяння

Одним із базових методів обчислення хвильових функцій і амплітуд розсіяння є метод послідовних наближень. В основі цього методу лежить припущення, що енергію взаємодії $V(\vec{r})$ можна розглядати як мале збурення. У таких випадках інтегральне рівняння Ліппмана–Швінгера (6.55) можна розв'язати методом ітерацій (послідовних наближень); у результаті

$$\Psi = \sum_{N=0}^{\infty} \Psi^{(N)}, \qquad (6.64)$$

$$\psi^{(0)} = \varphi_{\vec{k}_0}, \ \psi^{(N)} = \frac{2\mu}{h^2} \int G_0 V \psi^{(N-1)} d\vec{r}', \ N \ge 1,$$
(6.65)

тобто

$$\Psi(\vec{r}) = \varphi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') \varphi_{\vec{k}_0}(\vec{r}') d\vec{r}' + \dots \quad (6.66)$$

Підставимо (6.66) у (6.63) й отримаємо вираз для амплітуди розсіяння у вигляді ряду за кількістю зіткнень (взаємодій):

$$f(\theta, \varphi) = f_{A}(\theta, \varphi) + \left(\frac{\mu}{2\pi\hbar^{2}}\right)^{2} \int \varphi_{\vec{k}}^{*}(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}) V(\vec{r}') \varphi_{\vec{k}_{0}}(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}' + \dots$$
(6.67)

$$f_{\rm E}(\theta,\phi) = f_{\rm E}(\vec{k}_0,\vec{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) V(\vec{r}) \phi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) d\vec{r} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int V(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \phi_{\vec{k}} \left| V \right| \phi_{\vec{k}_0} \rangle,$$
(6.68)

де вектор $\vec{q} = \vec{k}_0 - \vec{k}$ називають зміною хвильового вектору, або вектором зіткнень, а відповідний йому імпульс $\vec{p} = \hbar \vec{q}$ – вектором передачі імпульсу. Такий метод обчислення $f(\theta, \phi)$ отримав назву метод послідовних наближень Борна. Якщо ряд збігається і враховуються тільки перші N доданків, а інші відкидаються, то отримане значення амплітуди розсіяння називається N-м борнівським наближенням. Вираз (6.68), що відповідає першому борнівському наближенню, має назву формула Борна, або борнівське наближення. У цьому наближенні замість хвильової функції у використовується її нульове наближення, а саме, падаюча плоска хвиля $\phi_{\vec{k}_0}$.

Модуль вектора зіткнень \vec{q} залежить від кута розсіяння θ між напрямками руху частинки у вхідному (\vec{e}_z) і вихідному (\hat{n}) каналах: $\hat{n} \cdot \vec{e}_z = \cos \theta$. Із рис. 6.3 маємо, що $\vec{k} \cdot \vec{k}_0 / k^2 \equiv$ $\hat{n} \cdot \vec{e}_z = \cos \theta$, тому для модуля \vec{q} отримуємо:

$$q = \sqrt{\vec{q}\vec{q}} = \sqrt{(\vec{k} - \vec{k}_0)(\vec{k} - \vec{k}_0)} = k\sqrt{(\hat{n} - \vec{e}_z)(\hat{n} - \vec{e}_z)} = k\sqrt{\hat{n}^2 + \vec{e}_z^2 - 2\,\hat{n}\cdot\vec{e}_z} = k\sqrt{2(1 - \cos\theta)} = 2k\sin\frac{\theta}{2}.$$
(6.69)


Рис. 6.3. Напрямки хвильових векторів до (\vec{k}_0) і після (\vec{k}) пружного розсіяння

Якщо потенціал $V(\vec{r})$ не залежить від кутів, тобто є сферичносиметричним $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|)$, то в (6.68) можна виконати інтегрування за кутами вектора \vec{r} внутрішніх координат при фіксованому q, тоді маємо

$$f_{\rm B}(\theta,\phi) \equiv f_{\rm B}(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty V(r) r^2 dr \int_0^\pi e^{iqr\cos\theta'} \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' =$$

$$= -\frac{\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) r^2 dr \cdot \int_{-1}^1 e^{iqry} dy = -\frac{2\mu}{q\hbar^2} \int_0^\infty V(r) r\sin(qr) dr \quad .$$
(6.70)

Звідси видно, у сферично-симетричних потенціалах амплітуда розсіяння не залежить від азимутального кута.

Згідно з (6.53) диференціальний переріз пружного розсіяння частинок у першому борнівському наближенні має вигляд

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\rm E}(\theta)|^2 = \frac{4\mu^2}{q^2\hbar^2} |\int_0^\infty V(r)r\sin(qr)dr|^2 \,. \tag{6.71}$$

Зауважимо, що при доведенні формули (6.71) ми не враховували принцип Паулі, і тому вираз (6.71), строго кажучи, можна застосовувати лише при розсіянні нетотожних частинок.

Для швидкої збіжності рядів послідовних наближень (6.66) і (6.67) необхідно, щоб перше наближення $\psi^{(1)}$ до хвильової функції було б малим порівнянно із хвильовою функцією нульового наближення $\psi^{(0)} = \varphi_{\vec{k}_0}$, тобто має виконуватися нерівність

 $|\psi^{(1)}| \ll |\psi^{(0)}|$. Дослідження показують, що за деяких умов перше борнівське наближення можна використати за будь-яких енергій. Аналітичні оцінки умов його виконання для потенціалу у вигляді сходинки з радіусом дії *R* були отримані у двох граничних випадках, а саме, у випадку розсіяння частинок повільних енергій

$$\varepsilon \ll \frac{\hbar^2}{\mu R^2} \tag{6.72}$$

та у випадку розсіяння швидких частинок з енергіями

$$\varepsilon \gg \frac{\hbar^2}{\mu R^2} \,. \tag{6.73}$$

При розсіянні повільних частинок умова застосування формули Борна (6.68) набуває вигляду

$$\frac{\hbar^2}{\mu R^2} \gg |\overline{V}|, \qquad (6.74)$$

де \overline{V} – середнє значення потенціальної енергії взаємодії в області R:

$$\overline{V} = \frac{1}{R^3} \int r^2 V(\vec{r}) dr d\Omega.$$
(6.75)

Оскільки щодо порядку величина $\hbar^2 / \mu R^2$ дорівнює мінімальній глибині потенціальної ями радіуса R, при якій виникає зв'язаний стан, то умова застосування формули Борна при розсіянні повільних частинок енергій (6.72) має просту інтерпретацію, а саме: як кінетична, так і середня потенціальна енергії взаємодії частинки мають бути малими порівняно з мінімальною потенціальною енергією, за якої утворюється зв'язаний стан

$$\frac{\hbar^2}{\mu R^2} \gg \varepsilon, \overline{V}$$

За великої енергії частинки (6.73) область застосування формули Борна значно ширша $\hbar \upsilon \gg |V| R$.

У випадку кулонівського поля потенціал

$$V(\vec{r}) \equiv V_c(r) = \pm \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}, \qquad (6.76)$$

спадає так повільно, що неможливо ввести поняття ефективного розміру взаємодії R. Для такої взаємодії можна показати, що формула Борна буде справедлива для швидкостей частинок, що задовольняють умову

$$\hbar \upsilon \gg Z e^2. \tag{6.77}$$

Кулонівський потенціал є дальнодіючим і асимптотика хвильової функції в такому потенціалі не має вигляду плоскої та розсіяної хвиль. Разом з тим виявляється, що й при розгляді розсіяння в кулонівському полі, можна користуватися методом борнівського наближення з плоскими хвилями, якщо замінити кулонівський потенціал на так званий екранований кулонівський потенціал

$$V_c(r) \Rightarrow V_{\alpha}(r) = \pm \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} e^{-\alpha r}, \qquad (6.78)$$

а і в кінці обчислень покласти $\alpha \rightarrow +0$.

Обчислимо диференційний переріз розсіяння двох частинок, що взаємодіють за законом Кулона, використовуючи перше борнівське наближення з екранованою кулонівською взаємодією. У такому наближенні амплітуда розсіяння (6.70) має вигляд

$$f_{\rm b}(\theta) = \mp \frac{2\mu e^2 Z_1 Z_2}{q\hbar^2} \lim_{\alpha \to 0} \int_0^\infty e^{-\alpha r} \sin(qr) dr =$$

= $\mp \frac{\mu e^2 Z_1 Z_2}{\hbar^2} \lim_{\alpha \to 0} \int_0^\infty e^{-\alpha r} \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iq} dr = \mp \frac{2\mu e^2 Z_1 Z_2}{\hbar^2 q^2} = (6.79)$
= $\mp \frac{\mu e^2 Z_1 Z_2}{2\hbar^2 k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}},$

де враховано співвідношення (6.69). Знайдемо вираз для диференціального перерізу розсіяння (6.71) кулонівським полем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_b(\theta)|^2 = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\mu \upsilon^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}.$$
 (6.80)

Як бачимо, формула (6.80) збігається із формулою Резерфорда для перерізу розсіяння заряджених частинок, яка була отримана в класичній механіці. Хоча вираз (6.80) для перерізу знайдено в першому борнівському наближенні, але, як виявляється, він є точним, і всі наступні борнівські наближення змінюють лише фазу амплітуди розсіяння $f(\theta)$, у той час як її модуль, який саме й визначає переріз розсіяння, залишається незмінним. Зазначимо, що формула (6.80) не містить сталої Планка \hbar , формально саме це й приводить до того, що результати, отримані методами квантової та класичної фізики, збігаються.

6.6. Метод парціальних хвиль у теорії розсіяння. Фазові зсуви

Якщо потенціал поля, у якому відбувається розсіяння, має сферичну симетрію, то момент кількості руху є інтегралом руху (див. розд. 2), і тому частинка в станах, що відповідають різним значенням кутового моменту, розсіюється незалежно. У цьому випадку падаючу хвилю, для врахування законів збереження кутового моменту та парності, зручно представити у вигляді суперпозиції так званих парціальних хвиль, які відповідають фіксованим значенням орбітального кутового моменту. Зокрема, парціальним розкладом хвильової функції вільного руху частинки, яка має вигляд плоскої хвилі, є

$$\varphi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta), \qquad (6.81)$$

де l – момент кількості руху, θ – кут між векторами \vec{k} та \vec{r} , $P_l(x)$ – поліноми Лежандра, а $j_l(kr)$ – регулярні сферичні функції Бесселя, які були визначені в розд. З. Ураховуючи те, що на великих відстанях сферична функція Бесселя зводиться до простого виразу, а саме:

$$j_l(kr) \cong \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr}, \quad kr \gg l_s$$

асимптотичне значення (6.81) можна подати у вигляді

$$\varphi_{\vec{k}}(\vec{r}) \simeq (kr)^{-1} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1)i^l \chi_l^{(0)}(r) P_l(\cos\theta), \qquad (6.82)$$

де

$$\chi_l^{(0)}(r) = \sin(kr - l\pi/2) = \frac{i}{2} \left\{ e^{-i(kr - l\pi/2)} - e^{i(kr - l\pi/2)} \right\}.$$
 (6.83)

Обчислення радіального компонента густини потоку, подібні до проведених нами при обчисленні (6.52), дають таке: другий доданок у фігурних дужках (6.83) відповідає розбіжним від центра сферичним хвилям, а перший доданок – збіжним хвилям. Отже, кожна парціальна хвиля розкладу (6.81) на великих відстанях від центра є суперпозицією розбіжної від центра та збіжної до центра сферичних хвиль. Розв'язок рівняння Шредінгера (6.56), що описує розсіяння частинки у сферичному потенціалі, також можна шукати у вигляді суперпозиції парціальних хвиль вигляду (6.81), а саме:

$$\psi(r) = (kr)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i^l \chi_l(r) P_l(\cos\theta).$$
 (6.84)

Оскільки поліноми Лежандра Р₁ пропорційні сферичним функ-

ціям $Y_{l0}(\theta)$: $P_l(\cos\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l0}(\theta)$, а функція $Y_{l0}(\theta)$ є власною функцією оператора кутового моменту (див. підрозд. 3.5), то хвильова функція $\chi_l(r)$ описує радіальний рух частинки в стані з фіксованим кутовим моментом *l*. Зазначимо, що для запису функції (6.84) у довільній системі координат необхідно використати теорему додавання

$$P_{l}(\cos\theta) = \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^{*}(\theta_{1}, \phi_{1}) Y_{lm}(\theta_{2}, \phi_{2}), \qquad (6.85)$$

де θ – кут між напрямками векторів \vec{k} і \vec{r} , що характеризуються кутами θ_1, ϕ_1 та θ_2, ϕ_2 .

На відміну від випадку зв'язаних станів, які мають дискретний спектр енергій, при розсіянні частинок енергія додатна і може мати довільні неперервні значення, тому кажуть, що хвильова функція задачі розсіяння належить неперервному спектру, а не дискретному. Переходячи в рівнянні Шредінгера (6.54) до сферичної системи координат (див. підрозд. 3.5) і використовуючи розклад (6.84), отримаємо радіальне рівняння Шредінгера

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2\right] \chi_l(r) = \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} \chi_l(r), \qquad (6.86)$$

якому задовольняє радіальна функція $\chi_l(r)$. Для однозначного визначення $\chi_l(r)$ у задачі розсіяння ця функція має задовольняти відповідні граничні умови. По-перше, повна хвильова функція $\psi(r)$ має бути скінченною при r = 0, тому радіальна функція має задовольняти граничну умову

$$\chi_l(0) = 0. (6.87)$$

Зауважимо, що за цієї умови можна отримати наближений вираз для радіальної функції біля центра взаємодії. Дійсно, якщо $r \rightarrow 0$, потенціал V(r) змінюються не швидше ніж 1/r, то в цій області за умови (6.87) рівняння (6.86) переходить у рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\chi_l(r) = 0, \qquad (6.88)$$

з якого випливає, що при $r \rightarrow 0$:

$$\chi_l(r) \sim r^{l+1}$$
. (6.89)

Другу граничну умову можна отримати з таких міркувань: у задачі розсіяння розв'язки рівняння (6.86) мають бути відмінними від нуля в будь-якій точці простору й такі, що на великих відстанях від центра вони будуть суперпозицією розбіжної та збіжної хвиль. Взаємодія із силовим полем згідно з (6.51) і (6.60) змінює тільки розбіжну хвилю, але не збіжну, тому в асимптотичній області радіальна функція $\chi_l(r)$ повинна мати вигляд

$$\chi_{l}(r) = \frac{i}{2} \left\{ e^{-i(kr - l\pi/2)} - S_{l} e^{i(kr - l\pi/2)} \right\} =$$

$$= \sin(kr - l\pi/2) + \frac{i}{2} (-i)^{l} (1 - S_{l}) e^{ikr}, \quad kr \gg l.$$
(6.90)

Коефіцієнт S_l , що визначає у (6.90) зміну амплітуди хвилі, яка розбігається від центра, залежить від енергії відносного руху й називається діагональним елементом матриці розсіяння із фіксованим орбітальним моментом l. Підставляючи (6.90) у (6.84) і використовуючи (6.81), (6.85) та вираз $f(\theta) = [\psi - \varphi_{\vec{k}_0}] r e^{-ikr}$ для амплітуди розсіяння через асимптотику ψ , згідно з (6.51) знаходимо співвідношення для амплітуди розсіяння у вигляді розкладу за парціальними хвилями

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1-S_l) P_l(\cos\theta) \,. \tag{6.91}$$

Таким чином, розв'язуючи рівняння (6.86) за умов (6.89), (6.90) і неперервності радіальної хвильової функції та її першої похідної в усіх точках координатного простору, можна знайти матричні елементи матриці розсіяння S_l , яка визначає амплітуду розсіяння. Зазначимо, що розсіяння у сферичносиметричному потенціалі не залежить від азимутального кута.

Елементи матриці розсіяння можна подати у вигляді $S_l = e^{2i\delta_l}$. У випадку дійсного потенціалу величини δ_l дійсні (див. підрозд. 7.1) і називаються *фазовими зсувами*, або *фазами* розсіяння. За таких умов маємо

$$S = e^{2i\delta_l} = 1 + e^{2i\delta_l} - e^{i\delta_l - i\delta_l} = 1 + 2ie^{i\delta_l} \sin \delta_l .$$
 (6.92)

Оскільки експоненціальна функція від уявного аргументу періодична, то матриця розсіяння (6.92) і фазові зсуви неоднозначно пов'язані між собою. Іншими словами, значення фази розсіяння можуть лежати в інтервалі $[0,\pi]$ або в інтервалі $[-\pi/2, \pi/2]$. Для визначеності скористуємось інтервалом

$$\delta_l \in [0,\pi] . \tag{6.93}$$

Оскільки для розсіяння вперед ($\theta = 0$) поліноми Лежандра дорівнюють одиниці, то з (6.91) випливає простий зв'язок між уявною частиною амплітуди розсіяння вперед f(0) і дійсними частинами елементів матриці розсіяння

Im
$$f(0) = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - \operatorname{Re} S_l)$$
. (6.94)

За допомогою (6.91) і (6.92) диференціальний переріз пружного розсіяння (6.53) можна записати через фази розсіяння

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 =$$
(6.95)

$$=\frac{1}{k^2}\sum_{l,l'}(2l+1)(2l'+1)P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)\sin\delta_l\sin\delta_{l'}\cos(\delta_l-\delta_{l'}),$$

де множник $\cos(\delta_l - \delta_{l'})$ визначає інтеграцію парціальних хвиль. Оскільки $P_{l=0}(x) = 1$, то з (6.95) видно, якщо в розсіянні беруть участь тільки *s*-хвилі (l = 0), то диференціальний переріз не залежатиме від кута розсіяння, тобто є ізотропним, і дорівнює

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sin^2 \delta_0}{k^2} \,. \tag{6.96}$$

Якщо в розсіянні беруть участь хвилі з декількома значеннями l, то згідно з (6.95) диференціальний переріз розсіяння залежить від інтерференції хвиль з різними значеннями l. Наприклад, якщо в розсіянні беруть участь s - i p-хвилі, що відповідають l = 0 і 1, то

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} =$$

$$= \frac{1}{k^2} \Big[\sin^2 \delta_0 + 6\sin \delta_0 \sin \delta_1 \cos(\delta_0 - \delta_1) \cos \theta + 9\sin^2 \delta_1 \cos^2 \theta \Big].$$
(6.97)

Із (6.97) видно, що за відсутності інтерференції *s* - та *p* -хвиль, тобто, коли $\cos(\delta_0 - \delta_1) = 0$, спостерігається симетрія розсіяння вперед і назад щодо кута 90⁰ у системі центра мас, а інтерференція хвиль призводить до порушення такої симетрії.

Якщо розсіяння характеризується невеликою кількістю відмінних від нуля фаз розсіяння, то, вивчаючи диференціальний переріз розсіяння як функцію кута θ , можна за допомогою (6.95) обчислити фази розсіяння. Така обробка експериментальних даних має назву *фазового аналізу перерізу розсіяння*.

Інтегруючи вираз (6.95) для диференціального перерізу за кутами *θ* і враховуючи умову ортогональності поліномів Лежандра

$$\int P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1}\delta_{ll'}$$

отримаємо вираз для інтегрального перерізу пружного розсіяння у вигляді суми парціальних перерізів σ_l із фіксованими значеннями l:

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l , \qquad (6.98)$$

де

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) |1 - S_l|^2.$$
(6.99)

Множник 2l + 1 у (6.99) є статистичною вагою l-ї парціальної хвилі, яка визначає кількість станів, що розрізняються магнітним квантовим числом *m* орбітального руху. Із (6.99) випливає, що максимальне можливе значення парціального перерізу пружного розсіяння досягається при $S_l = -1$ і дорівнює

$$(\sigma_l)_{\max} = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \,. \tag{6.100}$$

За малих значень k (тобто і малих енергіях) ця величина може значно перевищувати "геометричне" значення перерізу $\sigma_{\text{геом}} = \pi R^2$ (див. (6.33)).

Згідно з (6.94) і (6.92) маємо, що уявна частина амплітуди розсіяння вперед дорівнює

Im
$$f(0) = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - \operatorname{Re} S_l) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\sin^2 \delta_l$$
. (6.101)

Порівнюючи (6.101) з виразами (6.98) і (6.99), бачимо, що за відсутності інших процесів інтегральний переріз пружного розсі-

яння пропорційний уявній частині амплітуди розсіяння

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(0) = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l} (2l+1) (1 - \operatorname{Re} S_l) .$$
 (6.102)

Це співвідношення називається оптичною теоремою.

Зауважимо, що застосування методу парціальних хвиль особливо зручне в разі, коли сили взаємодії, що визначають потенціальну енергію V(r), мають малий радіус дії R або спадають швидше за 1/r. У такому випадку в розсіянні частинок братиме участь тільки скінченна кількість парціальних хвиль. Дійсно, на частинку з орбітальним моментом l з боку розсіювального центра діє відцентрова сила відштовхування з потенціальною енергією $V_l(r) = \hbar^2 l(l+1)/(2\mu r^2)$, яка є потенціальним бар'єром для частинки, що рухається на відстані r. Із квазікласичних міркувань зрозуміло, що частинка може перебувати лише в області, де її кінетична енергія $\varepsilon = \hbar^2 k^2 / 2\mu$ перевищує енергію бар'єра $V_l(r)$. Тому найбільш імовірно, що частинка буде рухатися на відстанях r, які задовольняють нерівність

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \ge \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2},$$
(6.103)

а саме, на відстанях з $r^2 \ge l(l+1) / k^2 \equiv b^2$. Звідки маємо, що відстань

$$b = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k} \tag{6.104}$$

слід вважати відстанню максимального зближення частинки з кінетичною енергією $\varepsilon = \hbar^2 k^2 / 2\mu$ та орбітальним моментом l. На відстанях r < b діє відцентровий бар'єр і ймовірність знайти частинку з енергією ε та орбітальним моментом l дуже мала.

Якщо радіус дії ядерного потенціалу R менший від деякого значення $b_m = \sqrt{l_m(l_m + 1)} / k$, то частинки з орбітальними моментами $l \ge l_m$ майже не потрапляють у область дії потенціалу та не беруть участь у розсіянні. Таким чином, у розсіянні в основному беруть участь парціальні хвилі з l, що задовольняють нерівність

$$b \le R$$
 aloo $\sqrt{l(l+1)} \le kR$. (6.105)

З погляду класичної механіки відстань b у (6.105) є прицільним параметром частинки з кутовим моментом L, тобто параметр b є відстанню від центра потенціалу взаємодії до траєкторії падаючої частинки. Дійсно, значення кутового моменту L частинки, що прямолінійно рухається з прицільним параметром b, дорівнює $L = bp = \hbar kb$; тобто $b \equiv L/\hbar k$ за визначенням. Згідно з квантовою механікою $L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$, і тому величина b у (6.104) є прицільним параметром, а співвідношення (6.105) означає, що в зіткненні беруть участь лише частинки з прицільними параметрами, меншими від радіуса ядра:

$$b = \frac{L}{\hbar k} \cong \frac{l}{k} \le R \,. \tag{6.106}$$

За значень l = 0 (b = 0) зіткнення називається центральним, або лобовим, а за значень $l \ge 1$ – нецентральним. Із (6.105) маємо, що при зіткненнях повільних частинок з $kR \ll 1$, тобто із зведеною довжиною хвилі $\lambda \equiv 1/k \gg R$, у розсіянні беруть участь тільки *s*-хвилі (l = 0), тому відмінною від нуля є лише фаза розсіяння δ_0 . У цьому випадку згідно з (6.96) та (6.99) диференціальний переріз ізотропний і має вигляд

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma_0}{4\pi} \le \frac{1}{k^2} \,, \tag{6.107}$$

де $\sigma_0 = 4\pi \sin^2 \delta_0 / k^2$ – інтегральний переріз розсіяння для *s*-хвилі, який може значно перевищувати площу ядра.

6.7. Резонанси потенціального розсіяння. Час затримки частинки в області взаємодії

Перерізи, як і фази розсіяння, залежать від енергії відносного руху є. Як видно з (6.99), парціальний переріз розсіяння буде максимальним при $S_l \equiv \exp(2i\delta_l) = -1$, тобто при $\delta_l = \pi/2$. Такі максимуми в перерізах називаються *резонансами*. Припускаючи,

що біля резонансу з енергією E_r можна обмежитись лише лінійною залежністю фаз розсіяння δ_l , маємо

$$\delta_{l}(\varepsilon) \cong \frac{\pi}{2} + (\varepsilon - E_{r}) \left. \frac{d\delta_{l}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = E_{r}} = \frac{\pi}{2} - \frac{(E_{r} - \varepsilon)}{\Gamma_{r} / 2},$$

$$\Gamma_{r} \equiv 2 \left(\frac{d\delta_{l}}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon = E_{r}}^{-1}.$$
(6.108)

Величина Γ_r визначає форму перерізу біля резонансу й називається шириною резонансу. Зазвичай вона залежить і від значення орбітального моменту. Якщо значення Γ_r велике, то резонанс називають широким, якщо мале, то вузьким. В околі резонансу маємо

$$\operatorname{tg}\delta_{l} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{(E_{r} - \varepsilon)}{\Gamma_{r}/2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{E_{r} - \varepsilon}{\Gamma_{r}/2}\right) \approx \frac{\Gamma_{r}/2}{(E_{r} - \varepsilon)}.$$
 (6.109)

Отже, фазу в околі резонансу можна записати в такому вигляді:

$$\delta_l(\varepsilon \simeq E_r) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\Gamma_r/2}{E_r-\varepsilon}\right)$$

i

$$S_{l}(\varepsilon \simeq E_{r}) = e^{2i\delta_{l}} = \frac{e^{i\delta_{l}}}{e^{-i\delta_{l}}} = \frac{\cos\delta_{l} + i\sin\delta}{\cos\delta_{l} - i\sin\delta_{l}} =$$
$$= \frac{1 + i\operatorname{tg}\delta_{l}}{1 - i\operatorname{tg}\delta_{l}} = \frac{E_{r} - \varepsilon + i\Gamma_{r}/2}{E_{r} - \varepsilon - i\Gamma_{r}/2} = 1 + \frac{i\Gamma_{r}}{E_{r} - \varepsilon - i\Gamma_{r}/2}. \quad (6.110)$$

Із (6.109) та $\delta_l(\varepsilon \simeq E_r)$ випливає, що при зміні енергії в резонансній області від $\varepsilon < E_r$ до $\varepsilon > E_r$ фаза розсіяння змінюється на π . Іншими словами, якщо за енергій, менших від резонансного значення, фаза δ_l близька до нуля, то за енергій, більших за резонансне значення, вона сягає значення π . У резонансі фаза дорівнює $\pi/2$.

Підставляючи вираз (6.110) у (6.99), отримаємо таку формулу для перерізу пружного розсіяння:

$$\sigma_l = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \left| 1 - S_l \right|^2 = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\Gamma_r^2}{(\varepsilon - E_r)^2 + (\Gamma_r^2/4)}.$$
 (6.111)

Цей вираз називається формулою Брейта–Вігнера і визначає переріз розсіяння частинок за наявності ізольованого резонансу.

Для визначення характеру явищ, що виникають при проходженні частинки через область взаємодії з енергією, близькою до резонансної, розглянемо детальніше процес пружного розсіяння частинок з ядром. Для цього розглянемо залежну від часу радіальну хвильову функцію $\chi_l(r,t)$. Відповідно до залежного від часу рівняння Шредінгера у стаціонарному стані з енергією $\varepsilon = \hbar \omega$ маємо $\chi_l(r,t) = \chi_l(r) \exp(-i\omega t)$, де згідно з (6.90) в асимптотичній області зовні взаємодії маємо

$$\chi_l(r,t) \simeq e^{-i\omega t} \left[e^{-i(kr - l\pi/2)} - S_l e^{i(kr - l\pi/2)} \right], \qquad (6.112)$$

де $S_l = \exp(i2\delta_l)$ – матриця розсіяння.

В експерименті енергія налітаючої частинки завжди має певний розкид енергій $\Delta \varepsilon$, тому розглянемо хвильовий пакет, що є суперпозицією станів (6.112) у випадку деякого вузького діапазону енергій $\Delta \varepsilon$ поблизу середнього значення $\varepsilon_0 = \hbar^2 k_0^2 / 2\mu$. Нехай амплітуда A(k) внесків станів (6.112) у хвильовий пакет $\psi_l \in \phi$ ункцією вигляду сходинки з відмінним від нуля та сталим значенням A у вузьких межах від $k_0 - \Delta k / 2$ до $k_0 + \Delta k / 2$, тобто

$$\Psi_{l}(r,t;k_{0}) = A \int_{k_{0}-\Delta k/2}^{k_{0}+\Delta k/2} \chi_{l}(r,t) dk . \qquad (6.113)$$

Порівняємо амплітуди збіжної та розбіжної хвиль у хвильовому пакеті (6.113). Позначимо $\xi = k - k_0$ і розкладемо частоту $\omega = \varepsilon/\hbar$ і фазу розсіяння δ_l у ряд Тейлора поблизу k_0 , тоді маємо

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2\mu} \simeq \omega_0 + \frac{d\omega(k_0)}{dk} \xi = \omega_0 + \upsilon_0 \xi,$$

$$\delta_l(k) \simeq \delta_l^{(0)} + \frac{d\delta_l(k_0)}{dk} \xi = \delta_l^{(0)} + \upsilon_0 \hbar \frac{d\delta_l(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon = \hbar \omega_0} \cdot \xi,$$

(6.114)

де

$$\omega_0 = \hbar k_0^2 / 2\mu, \quad \delta_l^{(0)} = \delta_l(k_0), \, \upsilon_0 = \hbar k_0 / \mu.$$

Підставляючи (6.112) з (6.114) у (6.113), знаходимо явний вираз для хвильового пакета ψ_l :

$$\psi_l = e^{-i\omega_0 t} \left[B_{\rm in}(r,t) e^{-i(k_0 r - l\pi/2)} - B_{\rm out}(r,t) e^{2i\delta_l^{(0)}} e^{i(k_0 r - l\pi/2)} \right].(6.115)$$

Амплітуди збіжної хвилі B_{in} , що відповідає вільному руху, і розбіжної хвилі B_{out} , що спотворюється взаємодією, мають вигляд

$$B_{\rm in}(r,t) = 2A \frac{\sin[(r+\upsilon_0 t)\Delta k/2]}{r+\upsilon_0 t},$$

$$B_{\rm out}(r,t) = 2A \frac{\sin[(r-\upsilon_0 t')\Delta k/2]}{r-\upsilon_0 t'}, \ t' = t - \tau_d (\varepsilon = \varepsilon_0), \ (6.116)$$

де

$$\tau_d(\varepsilon) = +\frac{2}{\upsilon_0} \frac{d\delta_l}{dk} = +2\hbar \frac{d\delta_l}{d\varepsilon} = -i\hbar S_l^{-1} \frac{dS_l}{d\varepsilon} = -i\hbar \frac{d\ln S_l}{d\varepsilon}.$$
 (6.117)

Із цих співвідношень видно, що взаємодія приводить не тільки до появи фазового множника $\exp(2i\delta_l^{(0)})$ у розсіяній хвилі, але й до відставання на час τ_r максимального значення в амплітуді B_{out} розбіжної хвилі порівняно з вільним рухом. Дійсно, свого максимального значення амплітуда розбіжної хвилі B_{out} тепер досягає в точці $r = \upsilon_0 t' = \upsilon_0 (t - \tau_d(\varepsilon_0))$, а за відсутності взаємодії – у точці $r = \upsilon_0 t$, тобто розсіяний хвильовий пакет затримується на час $\tau_d(\varepsilon_0)$ в області взаємодії. Цей час має назву часу затримки називається формулою Вігнера.

За відсутності взаємодії максимальний час τ_0 перебування частинки, що рухається з енергією ε_0 у внутрішній області сфери радіуса R, дорівнює

$$\tau_0 = (2R + k_0^{-1}) / \upsilon_0, \qquad 6.118)$$

де доданок k_0^{-1} , який є довжиною хвилі де Бройля, частинки і враховує її хвильові властивості.

Згідно з (6.108) і (6.117), якщо енергії близькі до резонансного значення, то $\delta_l(\varepsilon \approx E_r) = \operatorname{arctg}(\Gamma_r / (2(E_r - \varepsilon)))$ і маємо такий вираз для часу затримки в околі ізольованого резонансу:

$$\tau_d(\varepsilon) = 2\hbar \frac{d\delta_l}{d\varepsilon} = \frac{\Gamma_r^2}{(\varepsilon - E_r)^2 + (\Gamma_r/2)^2} \tau_r, \ \tau_r = \hbar/\Gamma_r.(6.119)$$

Тут τ_r є середнім часом життя системи у стані із хвильовою функцію, що загасає за експонентою $|\Psi_r(r,t)|^2 \sim \exp\{-t/\tau_r\}$ на відстанях r > R, які перевищують радіус взаємодії, за часів тривалістю t > r/v.

У випадках, коли час τ_r значно більший за час $\tau_0 = (R + \lambda) / \upsilon$ перебування частинки біля ядра за відсутності взаємодії $\tau_r \gg \tau_0$, система довгий час не буде розпадатись. Тому кажуть, що вона перебуває у квазістаціонарному (резонансному) стані із часом життя τ_r .

Задачі та завдання для самостійної роботи

6.1. Обчислити енергії порогів (n, p) реакцій за участі нерелятивістських нуклонів на ядрах $^{99}_{42}$ Мо та $^{100}_{43}$ Tc.

Розв'язання: згідно із формулами (6.24) і (6.9) енергія порогу екзотермічної бінарної реакції X(a,b)Y за участю нерелятивістських частинок дорівнює нулю, а ендотермічної ($Q \le 0$):

$$E_{\text{nop}} = |Q| \frac{m_a + m_X}{m_X} = E_{\text{nop}} = |Q| \frac{A_a + A_X}{A_X},$$

де $m_j = m_{a.o.m.} \cdot A_j$ – маса частинки j = a, X з кількістю нуклонів A_j , а $Q = S_{aC} - S_{bC} \equiv B_b + B_Y - B_a - B_X$ – енергія (енергетичний вихід) реакції, яка дорівнює різниці енергій відділення частинок від проміжної складеної системи C = a + X = b + Y. Із таблиць

енергій зв'язку ядер беремо значення енергій відділення (в одиницях MeB): реакція ${}^{92}_{42}$ Mo $(n, p) {}^{99}_{41}$ Nb – $C = {}^{100}_{42}$ Mo, $S_{nC} = 8,30$, $S_{pC} = 11,22$; реакція ${}^{100}_{43}$ Tc $(n, p) {}^{100}_{42}$ Mo – $C = {}^{101}_{43}$ Tc , $S_{nC} = 8,55$, $S_{pC} = 7,43$. Звідки знаходимо, що реакція на ізотопі технецію ${}^{100}_{43}$ Tc екзотермічна (Q = 1,12 MeB), а на ізотопі молібдену ${}^{92}_{42}$ Mo – ендотермічна (Q = -2,92 MeB) з енергією порогу $E_{пор} = 292/99 = 2,95$ MeB.

6.2. Знайти переріз σ_t реакції поглинання нейтронів ядрами міді, якщо вихід цієї реакції, тобто частка $Y = (I_0 - I(\Delta)) / I_0$ нейтронів, які зазнали взаємодії з ядрами-мішені та вибули з пучка є $Y = 3, 2 \cdot 10^{-2}$, а товщина плоскої мішені з міді дорівнює $\Delta = 0,1$ см.

Розв'язання: переріз поглинання нейтронів знаходимо за допомогою формули (6.45):

 $σ_t = -\ln[I(\Delta)/I_0]/(N\Delta) = -\ln[1-Y]/(N\Delta) \cong Y/(N\Delta),$ де для мішені, що складається тільки з міді, $N = N_A \cdot \rho / A$ – густина ядер міді в речовині (кількість ядер у 1 ñì³); $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$ 1/моль – число Авогадро, ρ – густина міді в г/ ñì³ ($\rho = 8,89$ г/ ñì³), A – масове число (маса моля) ядер-мішені (для міді з урахуванням її ізотопного складу A = 63,5). Користуючись такими співвідношеннями, отримуємо

$$N = 8,89 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} / 63,5 = 8,43 \cdot 10^{22}$$
 ÿä./ñi³

та

$$\sigma_t \cong Y / (N \Delta) = 3,2 \cdot 10^{-2} / (8,43 \cdot 10^{23}) = 3,8 \cdot 10^{-24} \text{ m}^2 = 3,8 \text{ above}^2$$

6.3. Показати, що нейтрон із кінетичною енергією E_1 при лобовому пружному розсіянні з нерухомим ядром з масовим числом A втрачає енергію $\Delta E_1 = 4E_1 \cdot A / (A+1)^2$. Обчислити відповідну втрату енергії при зіткненнях нейтрона з ядрами водню, вуглецю та урану.

Розв'язання: використаємо закони збереження енергії та імпульсу в лабораторній системі координат. Згідно з (6.29) та умов задачі, при лобовому зіткненні знаходимо такі співвідношення для швидкостей частинок $\frac{v_1^2}{2} = \frac{Av^2}{2} + \frac{v_2^2}{2}$, $v_1 = Av - v_2$, де v_1 , v_2 - швидкості нейтрона до та після зіткнення, а v - швидкість ядра-мішені після зіткнення, і початкові співвідношення були скорочені на атомну одиницю мас ($m_n \cong m_u, m_{g_{\Pi}} \cong A m_u$). Після простих алгебраїчних перетворень першого рівняння з використанням другого отримуємо $v_1^2 - v_2^2 = (v_1 - v_2)(v_1 + v_2) = Av^2$, звідки $> v_1 - v_2 = v$. Знову використовуємо рівняння збереження імпульсу і знаходимо $v_1 = (A+1)v/2$, $v_2 = (A-1)v/2$, тобто $E_2 / E_1 \equiv (v_2 / v_1)^2 = [(A-1) / (A+1)]^2$. Звідси енергія, що втрачається нейтроном при лобовому зіткненні, дорівнює $\Delta E_1 \equiv E_1 - E_2 = 4E_1 \cdot A / (A+1)^2$. Бачимо, що при центральному зіткненні нейтрона з ядром водню (A = 1) нейтрон втрачає всю свою енергію; з ядром вуглецю (A = 12) – 28 %, а з ураном (A = 238) - 1.7 %.

Таким чином, зі збільшенням масового числа уповільнення нейтронів зменшується. Зазначимо, що втрата енергії при лобових зіткненнях максимальна, і при нецентральних зіткненнях вони зменшуються. Виявляється, що середня втрата енергії на одне зіткнення дорівнює половині свого максимального значення ΔE_1 .

6.4. Вписати частинки або ядра, що відсутні:

1) $_{19}^{39}$ K (p,γ) ?; 2) $_{63}^{153}$ Eu $(?,p)_{63}^{154}$ Eu,

3)? $(\alpha, d)^{77}_{33}$ As, 4) $^{192}_{81}$ Tl $(^{3}_{7}$ Li, $^{4}_{8}$ Be)?.

6.5. Обчислити енергії порогу реакцій (n, p) на ізотопах ${}^{14}_{7}$ N, ${}^{32}_{16}$ S і реакцій (n, α) на ізотопах ${}^{6}_{3}$ Li, ${}^{14}_{7}$ N.

6.6. У борнівському наближенні для амплітуди розсіяння $f(\theta, \phi)$ обчислити диференціальний переріз $\sigma(\theta, \phi)$ розсіяння

двох частинок, припускаючи, що взаємодія між ними описується такими точковими потенціалами:

1)
$$V(\vec{r}) = a \cdot \delta(r);$$

2) $V(\vec{r}) = a \cdot \delta(\vec{r}) \equiv a \cdot \delta(x)\delta(y)\delta(z), a = \text{const}.$

Розділ 7

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЯДЕРНИХ РЕАКЦІЙ

7.1. Аналіз парціальних хвиль при розсіянні з поглинанням

У попередньому розділі розглянуто процес пружного розсіяння. Зі зростанням енергії налітаючих частинок стають можливими непружні процеси, а саме: зіткнення та ядерні реакції. При цьому змінюється природа частинок, що зіштовхуються, і не зберігається кінетична енергія їхнього відносного руху. Це призводить до зменшення інтенсивності потоку частинок у пружному каналі. Базуючись на методі парціальних хвиль, можна досить просто одночасно описати і пружне зіткнення, і поглинання частинок, яке розглядається як процес вибування частинок із вхідного каналу незалежно від його причин. Зупинимось більш детально на такому підході. Для спрощення спін частинок не враховуватимемо і вважатимемо кулонівський потенціал екранованим. Обмежимо уявно центрально-симетричний центр розсіяння сферою радіуса *R*. Розглянемо асимптотичну поведінку хвильової функції, яка відповідає *l*-й парціальній хвилі на відстанях $r \gg R$, у таких випадках:

1) у початку координат відсутній центр розсіяння;

2) центр розсіяння розміщено в початку координат, але частинка зазнає лише пружних зіткнень;

3) у початку координат розташовано атомне ядро, на якому частинки і розсіюються, і поглинаються.

У першому випадку частинки рухаються вільно, а їхня хвильова функція є плоскою хвилею $\varphi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \exp(i\vec{k}\,\vec{r})$. Відповідно до (6.81) – (6.83) асимптотику функції можна подати таким чином:

$$\begin{split} \varphi_{\vec{k}}(\vec{r}) &= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{\sqrt{4\pi}}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^{\frac{1}{2}} i^{l} \chi_{l}^{(0)} Y_{l0}(\theta) => \\ &=> \frac{\sqrt{\pi}}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} i^{l+1} \left\{ J_{l}(kr) - O_{l}(kr) \right\} Y_{l0}(\theta) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{l,k}(r) Y_{l0}(\theta), \end{split}$$
(7.1)

де θ – кут між векторами \vec{k} та \vec{r} , а функції $J_l(kr)$ і $O_l(kr)$ мають вигляд

$$J_l(kr) = \frac{e^{-i(kr - l\pi/2)}}{r}, \ O_l(kr) = \frac{e^{i(kr - l\pi/2)}}{r}.$$
(7.2)

Функція $J_l(kr)$ відповідає частинкам, що рухаються з імпульсом $\hbar k$ і моментом $l\hbar$ уздовж радіуса до початку координат, тобто є збіжною хвилею. Дійсно, радіальна густина потоку частинок, що відповідає цій хвилі, дорівнює

$$j_{r,l} \equiv j_{r,l}^{(\text{in})} = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left\{ J_l^* \frac{\partial}{\partial r} J_l \right\} = -\frac{\upsilon}{r^2}.$$
 (7.3)

Знак "-" вказує на те, що частинки рухаються в напрямку, протилежному напрямку радіуса ядра; $\upsilon = \hbar k / m$ – швидкість частинки. Функція O_l є розбіжною хвилею та описує частинки, що виходять з початку координат з густиною потоку

$$j_{r,l} \equiv j_{r,l}^{\text{out}} = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left\{ O_l^* \frac{\partial}{\partial r} O_l \right\} = \frac{\upsilon}{r^2} \,. \tag{7.4}$$

Той факт, що обидва потоки частинок $j_{r,l}^{\text{in}}$ та $j_{r,l}^{\text{out}}$ мають однакові за абсолютною величиною значення, означає, що при проходженні через початок координат із частинками нічого не відбувається, а хвильова функція (7.1) дійсно відповідає незбуреній хвилі. При цьому повний потік частинок N_r , що рухаються в радіальному напрямку крізь сферу довільного радіуса r, буде дорівнювати нулю, оскільки згідно з (7.3) та (7.4) потоки час-

тинок, що рухаються з центра координат і до центра, однакові, але протилежні за знаком. Дійсно, використовуючи (7.1), (7.2) і враховуючи ортогональність сферичних функцій, для повного потоку частинок скрізь поверхню ядра маємо

$$N_{r} \equiv \int j_{r} dS = \int \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left\{ \varphi_{k}^{*} \frac{\partial}{\partial r} \varphi_{k} \right\} r^{2} d\Omega =$$

$$= \sum_{l} \left(N_{r,l}^{(out)} - N_{r,l}^{(in)} \right) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \pi \left(\frac{2l+1}{k^{2}} \right) \left[n_{l,r}^{(out)} - n_{l,r}^{(in)} \right],$$
(7.5)

де $n_{r,l}^{(\text{out})}$ та $n_{r,l}^{(\text{in})}$ – абсолютні значення потоків вільних частинок, що входять до сфери радіуса r через її поверхню та виходять з неї

$$n_{r,l}^{(\text{in})} \equiv -\int j_{r,l}^{(\text{in})} dS = -\frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left\{ J_l^* \frac{\partial}{\partial r} J_l \right\} 4\pi r^2 ,$$

$$n_{r,l}^{(\text{out})} \equiv \int j_{r,l}^{(\text{out})} dS = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left\{ O_l^* \frac{\partial}{\partial r} O_l \right\} 4\pi r^2 .$$
(7.6)

Підставляючи (7.3) і (7.4) у (7.6), отримаємо

$$n_{r,l}^{\text{in}} = 4\pi \upsilon, \quad n_{r,l}^{\text{out}} = 4\pi \upsilon,$$
 (7.7)

і тому згідно з (7.5)

$$N_r = 0$$
. (7.8)

Зауважимо, що в повний потік (7.5) доданки типу $J_l^* \cdot \partial O_l / \partial r$ та $O_l^* \cdot \partial J_l / \partial r$, які визначають інтерференцію вхідних і вихідних хвиль, внеску не дають.

Розглянемо можливі зміни амплітуд розбіжних і збіжних хвиль (7.2) за наявності центра розсіяння. У випадку тільки пружного зіткнення амплітуда парціальної збіжної хвилі $J_l(kr)$ не змінюється, оскільки збіжна хвиля описує потік частинок, що рухаються в початок координат і ще не взаємодіяли. Результат взаємодії має проявитись у доданку, пов'язаному з розбіжною хвилею O_l , що описує частинки, які виходять за межі області взаємодії. Зрозуміло, що при пружному зіткненні зберігаються як відносний імпульс $\hbar k$, так і кількість частинок. Потоки час-

тинок, що рухаються в початок координат і з нього, однакові за абсолютною величиною, а тому повний потік частинок, що пересікає сферу нескінченно великого радіуса, дорівнює нулю. Оскільки вхідний потік збігається з потоком вільних частинок, то загальний вираз для вихідного у випадку лише пружного розсіяння має вигляд

$$n_{r,l}^{\text{out}} = |S_l|^2 4\pi \upsilon = |S_l|^2 n_{r,l}^{\text{in}} , \qquad (7.9)$$

де модуль множника S_l нормований на одиницю

$$|S_l|^2 = 1$$
 also $|S_l| = 1$. (7.10)

Ці співвідношення враховують, що в асимптотичній області для пружного розсіяння амплітуди збіжної та розбіжної хвиль відрізняються одна від одної лише множником S_l , тому згідно з (7.1) і (7.9) в асимптотичній області $r \gg R$ хвильова функція при пружному розсіянні повинна мати вигляд

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{\sqrt{\pi}}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} i^{l+1} \left\{ J_l(kr) - S_l O_l(kr) \right\} Y_{l0}(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \psi_{k,l} Y_{l0}(\theta) .$$
(7.11)

Така картина пружного розсіяння повністю узгоджується з описом, наведеним у підрозд. 6.6, а функція (7.11) збігається з асимптотикою хвильової функції (6.84), (6.90), що описує пружне розсіяння з діагональними елементами матриці розсіяння S_l .

Умова (7.10) нормування модуля матриці розсіяння на одиницю виконується за наявності тільки пружного розсіяння й є частковим випадком співвідношення унітарності матриці розсіяння, яке призводить до обмежень значень матриці розсіяння в загальному випадку переходів між різними каналами (див. далі (7.75)). Умова унітарності є наслідком збереження потоків імовірності при взаємодії частинок і у випадку лише пружного зіткнення дає можливість записати елементи матриці через дійсні фази розсіяння (6.92).

Кількість пружно розсіяних частинок, а також інтегральний переріз пружного розсіяння для даного кутового моменту *l*, ви-

значається відношенням потоку частинок $n_{r,l}^{(+)}$, що відповідає розсіяній парціальній хвилі $\delta \psi_l$:

$$\delta \Psi_l \equiv \Psi_{l,k} - \varphi_{l,k} = a_l (1 - S_l) O_l(kr), \quad a_l \equiv \frac{\sqrt{\pi}}{k} \sqrt{2l+1} i^{l+1}, \quad (7.12)$$

до потоку частинок у падаючій хвилі $n_{r,l}^{(in)} = 4\pi \upsilon$. Оскільки

$$n_{r,l}^{(+)} \equiv \int \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left\{ \delta \psi_l^* \frac{\partial}{\partial r} \delta \psi_l \right\} dS = |a_l|^2 \cdot |1 - S_l|^2 \cdot 4\pi \upsilon,$$

то вираз для парціального перерізу пружного розсіяння σ_l має вигляд

$$\sigma_{\rm el}^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) |1-S_l|^2, \qquad (7.13)$$

а повний переріз пружного розсіяння дорівнює

$$\sigma_{\rm el} = \sum_{l} \sigma_{\rm el}^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l} (2l+1) |1-S_l|^2 \,. \tag{7.14}$$

Ці формули повністю збігаються з виразами, що були отримані в підрозд. 6.6 іншим методом.

Розглянемо асимптотичний вигляд хвильової функції та вигляд перерізу у випадку, коли центр розсіяння ще й поглинає частинки. Поглинання означає, що вихідних частинок стає менше, ніж вхідних, і тому коефіцієнт $|S_l|^2$, що визначає потік вилітаючих частинок, має бути меншим від одиниці. Схематично потоки частинок у цьому випадку показано на рис. 7.1.



Рис. 7.1. Схематичне зображення потоків частинок, що виникають при взаємодії з центром розсіяння: $N_{r,l}^{(\text{out})} \sim (2l+1) |S_l|^2 n_{r,l}^{(\text{in})}; N_{r,l}^{(\text{in})} \sim (2l+1) n_{r,l}^{(\text{in})}$

Очевидно, що парціальний переріз поглинання $\sigma_l^{(r)}$ дорівнює відношенню потоку частинок $\delta N_l \equiv N_{r,l}^{(+)} - N_{r,l}^{(-)}$, що вибувають із пучка, до потоку падаючих частинок з $n_{r,l}^{(in)} = 4\pi \upsilon$. Згідно з (7.5) і (7.6):

$$\delta N_l = \frac{\pi (2l+1)}{k^2} \left[n_{r,l}^{(\text{in})} - n_{r,l}^{(\text{out})} \right] = \frac{\pi (2l+1)}{k^2} \left(1 - \left| S_l \right|^2 \right) n_{r,l}^{(\text{in})}, \quad (7.15)$$

тоді

$$\sigma_{\rm r}^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1)(1-|S_l|^2) . \tag{7.16}$$

Цей переріз поглинання частинок називають *перерізом реакцій*, оскільки саме з реакціями, під якими розуміють довільне непружне зіткнення, пов'язано зменшення інтенсивності падаючого пучка. Повний переріз реакції отримуємо сумуванням парціальних перерізів

$$\sigma_{\rm r} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{\rm r}^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l} (2l+1)(1-|S_l|^2) \,. \tag{7.17}$$

Величина

$$T_l = 1 - \left| S_l \right|^2, \tag{7.18}$$

що визначає переріз реакції, називається коефіцієнтом проходження. Цей коефіцієнт є відношенням кількості поглинених частинок до повної кількості падаючих частинок з даними l та k, і його можна інтерпретувати як імовірність поглинання налітаючих частинок за даного l. Він визначає ймовірність перебігу непружних процесів, тобто реакцій.

Із (7.13) та (7.16) випливає, що переріз реакції дорівнює нулю, якщо $|S_l| = 1$, при цьому переріз пружного розсіяння може бути відмінним від нуля. Таким чином, хоча пружне розсіяння й можливе без поглинання, разом з тим реакції без розсіяння неможливі. Зауважимо, що парціальний переріз пружного розсіяння $\sigma_{el}^{(l)}$ залежить від фази комплексної величини S_l , у той час, як у вираз для $\sigma_r^{(l)}$ входить лише її модуль.

Як зазначено в підрозд. 6.6, максимум парціального перерізу $\sigma_{\rm el}^{(l)}$ пружного розсіяння досягається при $S_l = -1$ і відповідно до (6.100), (7.13) дорівнює $\sigma_{\rm el,\ max}^{(l)} = 4\pi(2l+1)/k^2$. Згідно з (7.16) за таких значень матриці розсіяння переріз реакцій дорівнює нулю

$$S_l = -1 \implies \sigma_r^{(l)} = 0. \tag{7.19}$$

Максимум парціального перерізу реакції (7.16) досягається за умови повного поглинання парціальної хвилі, тобто при $S_l = 0$ (або $T_l = 1$) і дорівнює

$$\sigma_{\rm r,\,max}^{(l)} = \pi \lambda^2 (2l+1), \quad \lambda = 1/k \,. \tag{7.20}$$

У цьому випадку $\sigma_{el}^{(l)} = \sigma_{r,\max}^{(l)}$. Таким чином, максимальне значення перерізу розсіяння в чотири рази перевищує максимальне значення перерізу реакції, цей ефект є результатом інтерференції збіжної та розбіжної хвиль при пружному розсіянні.

Повний переріз взаємодії σ_г частинки з ядром є сумою перерізів пружного розсіяння та реакцій і має вигляд

$$\sigma_{t} = \sigma_{el} + \sigma_{r} = \frac{\pi}{k^{2}} \sum_{l} (2l+1) \left[\left| 1 - S_{l} \right|^{2} + 1 - \left| S_{l} \right|^{2} \right] =$$

$$= \frac{2\pi}{k^{2}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - \operatorname{Re} S_{l}).$$
(7.21)

Формула (7.21) збігається з виразом (6.102) для повного перерізу, який ми отримали за відсутності реакцій.

Зазначимо, що за наявності реакцій модифікується оптична теорема (6.102), яка зв'язувала амплітуду розсіяння з перерізом розсіяння. Порівнюючи (7.22) з виразом (6.101) для амплітуди розсіяння вперед, знаходимо, що за наявності реакцій оптична теорема має вигляд

$$4\pi \lambda \operatorname{Im} f(0) = \sigma_{\mathrm{el}} + \sigma_{\mathrm{r}} \equiv \sigma_{\mathrm{t}}.$$
(7.22)

Іншими словами, уявна частина амплітуди розсіювання вперед визначає повний переріз взаємодії частинок з ядром.

Проілюструємо співвідношення між перерізами пружного розсіяння та реакції на прикладі абсолютно "чорного" ядра. У цьому випадку ядро розглядається як сфера радіуса R і вважається, що всі частинки, які рухаються з прицільними параметрами, меншими від радіуса ядра ($b \le R$), поглинаються ядром і призводять до реакцій. З урахуванням квазікласичного співвідношення (6.106) між прицільним параметром і кутовим моментом, а саме, b = l/k, ця модель математично формулюється таким чином

$$S_{l} = \begin{cases} 0, \ l \le l_{\max}, \\ 1, \ l > l_{\max}, \end{cases} \text{ afo } T_{l} = \begin{cases} 1, \ l \le l_{\max}, \\ 0, \ l > l_{\max}, \end{cases}$$
(7.23)

де $l_{\text{max}} = kR$, тоді з (7. 14) і (7. 17) маємо

$$\sigma_{\rm r} = \sigma_{\rm el} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{l_{\rm max}} (2l+1) = \frac{\pi}{k^2} \left[2 \frac{l_{\rm max}(l_{\rm max}+1)}{2} + (l_{\rm max}+1) \right] = (7.24)$$
$$= \frac{\pi}{k^2} (l_{\rm max}+1)^2 = \frac{\pi}{k^2} (kR+1)^2 = \pi (R+\lambda)^2.$$

Таким чином, перерізи пружного розсіяння і поглинання частинок абсолютно чорним ядром збігаються між собою, і при $R \gg \lambda$ повний переріз дорівнює подвоєному геометричному перерізу ядра

$$\sigma_{\rm t} = \sigma_{\rm el} + \sigma_{\rm r} = 2\pi R^2 \,. \tag{7.25}$$

Як випливає з (7.24), за малих енергій є «1, тобто за $\lambda \gg 1$, перерізи σ_r і σ_{el} значно перевищують площу перерізу ядра πR^2 . Експериментальні дослідження показують, що повний переріз σ_t взаємодії нейтронів з ядрами сягає свого асимптотичного значення (7.25) за енергій налітаючих нейтронів, більших або порядку 50 МеВ.

7.2. Оптична модель пружного розсіяння

Поглинання частинок можна описати, якщо ввести комплексний потенціал

$$V(r) = V_R(r) + iV_I(r), (7.26)$$

де V_R і V_I є відповідно дійсною та уявною частинами потенціалу. Уявна частина потенціалу V_I призводить до зміни кількості частинок біля центра розсіяння. Дійсно, у цьому випадку залежне від часу рівняння Шредінгера набуває вигляду

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_R + iV_I\right]\Psi.$$
(7.27)

Обчислимо зміну з часом густини ймовірності $\rho(\vec{r},t) = |\psi|^2$. Користуючись (7.27), маємо

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{j} - 2\frac{V_I}{\hbar}\rho , \qquad (7.28)$$

де $\vec{j} = i\hbar(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi)/(2m)$ – вектор густини потоку ймовірності.

Співвідношення (7.28) з $V_I = 0$ є стандартним рівнянням неперервності (6.41). Наявність уявної частини потенціалу призводить до зміни кількості частинок, які проходять через поверхню, що оточує центр розсіяння, причому ця зміна залежить від знака V_I . Справді, із виразу (7.28) видно, що за $V_I < 0$ кількість частинок зменшується (тобто можна вважати, що вони поглинаються ядром), а при $V_I > 0$ частинки народжуються, тобто їхня кількість буде збільшуватись.

Підхід, у якому взаємодія частинок з ядром описується комплексним потенціалом типу (7.26) з $V_I < 0$, що призводить до поглинання частинок, називається оптичною моделлю пружного розсіяння, а сам потенціал називається оптичним. Зауважимо, що розглянута модель абсолютно чорного ядра (7.23) відповідає нескінченному значенню уявної частини оптичного потенціалу $V_I \rightarrow -\infty$.

У 1954 р. Г. Фешбах, К. Портер і В. Вайскопф показали, що за допомогою моделі з комплексним потенціалом можна адекватно описати дані з розсіяння частинок низьких енергій. Зокрема, вони проаналізували дані з розсіяння нейтронів з енергіями від $\approx 0,05$ до ЗМеВ. При цьому одночасно вдалося описати диференціальні перерізи розсіяння як функції кутів, енергій і масових чисел для ядер з $A \le 238$, використовуючи простий потенціал прямокутної ями

$$V(r) = \begin{cases} -(V_0 + iW) = -V_0(1 + i\xi), & r \le R, \\ 0, & r > R = r_0 A^{1/3} \end{cases}$$
(7.29)

з параметрами $V_0 = 42 \text{ MeB}$, W = 1,26 MeB ($\xi = 0,03$), $r_0 = 1,45 \text{ фм}$.

Аналогічно класичному випадку поширення світла в середовищі із заломленням і поглинанням для частинки, що рухається

в ядерному середовищі з комплексним потенціалом, показник заломлення також набуває комплексного значення. Саме тому такий потенціал і названо оптичним.

Як приклад обчислимо показник заломлення частинки, що рухається в полі комплексного потенціалу у вигляді одновимірної прямокутної ями

$$V(x) = -(V_0 + iW)\theta(x_0 - x).$$
(7.30)

У цьому випадку стаціонарне рівняння Шредінгера

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (\varepsilon + V_0 + iW)\psi = 0$$
(7.31)

у внутрішній області *x* < *x*₀ має розв'язок у вигляді плоских хвиль

$$\Psi = e^{\pm ikx} \,, \tag{7.32}$$

де при $W_0 / (\varepsilon + V_0) \ll 1$ знак "+" відповідає розбіжним хвилям, а знак "-" відповідає хвилям, що рухаються до початоку координат. Хвильовий вектор k комплексний:

$$k = \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} [(\varepsilon + V_0) + iW] \right\}^{1/2}$$
(7.33)

і може бути записаним у вигляді дійсної та уявної частин

$$k = k_{\rm r} + iK_{\rm i} \,. \tag{7.34}$$

Використовуючи наближення $\varepsilon + V_0 \gg W$, яке для потенціалу такого типу (7.29) виконується в реальній ситуації, маємо

$$k_{\rm r} \equiv \frac{1}{\lambda_{\rm in}} \cong \left[\frac{2m}{\hbar^2}(\varepsilon + V_0)\right]^{1/2}, \quad K_{\rm i} \cong \frac{1}{2}\frac{W}{\varepsilon + V_0}k_r. \tag{7.35}$$

Звідси видно, що за енергій $\varepsilon \ll V_0 \simeq 50$ MeB дійсна частина хвильового числа k_r у внутрішній області ядра значно більша за модуль хвильового вектора $k_0 \equiv \left(2m\varepsilon/\hbar^2\right)^{1/2}$ зовні потенціалу, тобто довжина хвилі λ_{in} частинки всередині ядра значно менша від її довжини зовні ядра $\lambda \equiv 1/k_0$.

Згідно з (7.34) та фізичній інтерпретації оптичних явищ, в ядерному середовищі показник заломлення *n* є комплексним:

$$n = \frac{k}{k_0} = \left(\frac{\varepsilon + V_0 + iW}{\varepsilon}\right)^{1/2}.$$
 (7.36)

Його дійсна частина n_г наближено дорівнює

$$n_{\rm r} = k_{\rm r} / k_0 \equiv \hbar / \hbar_{\rm in} \cong \left(\frac{\varepsilon + V_0}{\varepsilon}\right)^{1/2}.$$
 (7.37)

Наприклад, у випадку розсіяння нейтрона комплексним потенціалом за значень $\varepsilon = 10 \text{ MeB}$, $V_0 = 40 \text{ MeB}$ і W = 10 MeB маємо

$$k_{\rm r} = 1,6 \ {\rm \phi M}^{-1}; \ K_{\rm i} = 0,1 k_{\rm r} \approx 0,16 \ {\rm \phi M}^{-1},$$

 $\hbar = 1,4 \ {\rm \phi M}; \ \hbar_{\rm in} = 0,65 \ {\rm \phi M}; \ n_{\rm r} = 2,2.$ (7.38)

Після підстановки (7.34) у (7.32) знаходимо, що розбіжний розв'язок рівняння Шредінгера (7.31) є хвилею

$$\psi = \exp(ik_{\rm r}x)\exp(-K_{\rm i}x) \tag{7.39}$$

з експоненціальним поглинанням і коефіцієнтом поглинання K_i . За визначенням, довжина загасання Λ імовірності $|\psi|^2 \sim \exp(-x/\Lambda)$ у координатному просторі є середньою довжиною пробігу частинки в ядерному середовищі. Згідно з (7.39) маємо

$$\Lambda = \frac{1}{2K_{\rm i}} = \frac{\varepsilon + V_0}{Wk_{\rm r}} = \frac{\varepsilon + V_0}{W} \hat{\lambda}_{\rm in} \,. \tag{7.40}$$

Для значень параметрів потенціалу (7.29), використаних при отриманні виразу (7.38), а саме: $V_0 = 40 \,\text{MeB}$ і $W = 10 \,\text{MeB}$, довжина пробігу нуклона з енергією $\varepsilon = 10 \,\text{MeB}$ у п'ять разів перевищує довжину його хвилі в ядерному середовищі

$$\Lambda = 50\lambda_{\rm in} = 32\,\phi{\rm M}\,. \tag{7.41}$$

Зазвичай для нейтронів використовують такий загальний вираз для оптичного потенціалу:

V(r) =

$$= -V_0 f(r; R_0, a_0) - iW_{\text{vol}} f(r; R_V, a_V) - iW_{\text{surf}} g(r; R_S, a_S) + V_{ls}(r),$$
(7.42)

де радіальний формфактор $f(r; R_j, a_j)$ має вигляд функції Фермі, що зосереджена в об'ємі ядра

$$f(r; R_j, a_j) = \left[1 + \exp\left(\frac{r - R_j}{a_j}\right)\right]^{-1}.$$
 (7.43)

Формфактор $g(r; R_S, a_S)$ зосереджений на поверхні й вибирається або у вигляді функції Гаусса

$$g(r; R_S, a_S) = \exp\left[-\frac{(r-R_S)^2}{a_S^2}\right],$$

або похідної від функції Фермі (7.43):

 $g(r;R_S,a_S) =$

$$= -4a_S \frac{d}{dr} f(r; R_S, a_S) = 4 \exp\left(\frac{r-R}{a_S}\right) \left[1 + \exp\left(\frac{r-R}{a_S}\right)\right]^{-2} . (7.44)$$

Компонент V_{ls} – спін-орбітальна взаємодія, при якій зазвичай також враховується можливість поглинання $V_{ls}(r) =$

$$=\frac{\lambda_{\pi}^{2}}{r}\left[V_{SO}\frac{d}{dr}f(r;R_{VSO},a_{VSO})+iW_{SO}\frac{d}{dr}f(r;R_{WSO},a_{WSO})\right](\vec{\sigma}\cdot\vec{l}),$$

де $\lambda_{\pi} = 1/k_{\pi} = \hbar/m_{\pi}c$ – зведена (комптонівська) довжина хвилі π -мезона ($\lambda_{\pi}^2 \cong 2, 0 \ \text{фM}^2$); $\vec{\sigma}$, \vec{l} – вектори спінових матриць Паулі та оператора кутового моменту. У цих виразах параметри середніх радіальних розмірів ядра R_j беруться у вигляді $R_j = r_{0j}A^{1/3}$; параметри дифузностей a_j визначають швидкість зміни потенціалів у поверхневій області ядра. Множник $V_0 \in$ глибиною дійсної частини потенціалу, і його значення наближається до величин, що використовуються для розрахунків зв'язаних станів. Амплітуди $W_{\rm vol}$, $W_{\rm surf}$ визначають глибину уявної частини потенціалу. Для опису розсіяння заряджених частинок вводять також доданок, що враховує кулонівську взаємодію.

Оптичний потенціал характеризується об'ємним поглинанням, якщо формфактор для уявної частини береться у вигляді функції Фермі, і поверхневим поглинанням, коли використовується або функція Гаусса, або похідна від функції Фермі.

Наприклад, експериментальні дані про інтегральні перерізи розсіяння нейтронів з енергіями 1÷25 МеВ можна адекватно описати за допомогою оптичного потенціалу з поверхневим поглинанням, що має такі значення параметрів (потенціал Вілмора-Ходгсона):

$$V_0 = 47,01 - 0,267\varepsilon - 0,00118\varepsilon^2;$$

$$W_{\text{surf}} = 9,25 - 0,053\varepsilon; W_{\text{VOL}} = V_{\text{SO}} = W_{\text{SO}} = 0;$$

$$r_0 = 1,322; a_0 = 0,66; r_{\text{S}} = 1,266; a_{\text{S}} = 0,48,$$

(7.45)

де є – енергія нейтрона в системі центра мас. Тут глибини потенціалів і енергія наведені в мегаелектрон-вольтах (MeB); а радіуси ядра та дифузності – у фермі (фм).

Слід зауважити, що оптична модель широко застосовується для опису взаємодії з ядрами не лише нуклонів, але й складних частинок. З її допомогою можна описати диференціальні та інтегральні перерізи пружного розсіяння нуклонів і легких іонів. Вона також дозволяє обчислити сумарну величину перерізів усіх реакцій, тобто дає змогу описати відтік частинок із вхідного каналу, як процес їхнього поглинання ядром.

7.3. Резонансна структура перерізів розсіяння та реакцій. Формула Брейта—Вігнера для перерізів розсіяння і реакцій

У підрозд. 6.6 розглянуто поведінку перерізу пружного розсіяння σ_{el} в околі свого максимального значення. Було продемонстровано, що σ_{el} має вигляд кривої Брейта–Вігнера (6.111). Дослідження реакцій, викликаних нейтронами низьких енергій, показали, що не лише перерізи пружного розсіяння, але й перерізи реакції залежно від енергії мають вигляд кривих з макси-

мумами. Максимуми відповідають досить вузьким інтервалам енергій, а перерізи мають чіткий резонансний характер.

Розглянемо резонансну структуру перерізів пружного розсіяння та реакцій на простому прикладі зіткнення з нульовим відносним орбітальним моментом (*s*-розсіяння з l=0) частинок і ядер, які мають нульовий спін. Між частинкою та ядром діють короткодіючі ядерні сили. Вважаємо, що ядерну взаємодію можна апроксимувати деякими сферично-симетричними потенціалами з радіусом *R*. В області r > R ядерна взаємодія відсутня і відповідно до (7.11), (7.2) хвильова функція відносного руху частинки та ядра має такий асимптотичний вигляд:

$$\psi(r) = a \frac{u(r)}{r}; \quad a = \frac{i}{2k}; \quad k = 1/\hbar = \sqrt{2\mu\epsilon}/\hbar;$$

$$u(r) = e^{-ikr} - S_0 e^{ikr}; \qquad S_0 \equiv S_{l=0}(\epsilon),$$
(7.46)

де S₀ – матриця розсіяння парціальної хвилі з нульовим орбітальним моментом.

Запишемо вираз для S_0 через значення хвильової функції та її похідної на межі потенціалу (такий підхід називають методом граничних умов). Хвильова функція та її похідна визначають такі неперервні фізичні величини, як густина ймовірності та густина потоку, тому вони також мають бути неперервними функціями для довільних значень координат. Тому на межі взаємодії має виконуватись співвідношення

$$\psi_{\rm in}(R) = \psi(R); \quad \frac{d}{dr} \psi_{\rm in} |_{r=R} \equiv \psi_{\rm in}'(R) = \psi'(R),$$
(7.47)

де $\psi_{in}(R)$ та $\psi'_{in}(R)$ – значення внутрішньої хвильової функції та її похідної з внутрішнього боку області ядерної взаємодії. Рівності (7.47) означають, що мають бути неперервними та безрозмірними логарифмічними похідними f_{in} , f_{out} , які будуються в точці r = R, із хвильових функцій усередині та зовні потенціалу

$$f_{\rm in}(\varepsilon) = R \left\{ \frac{d(r\psi_{\rm in}) / dr}{r\psi_{\rm in}} \right\}_{r=R},$$

$$f_{\rm out}(\varepsilon) = R \left\{ \frac{d(r\psi) / dr}{r\psi} \right\}_{r=R} = \frac{R}{u(R)} u'(R),$$

$$f(\varepsilon) = f_{\rm in}(\varepsilon) = f_{\rm out}(\varepsilon).$$
(7.49)

Використовуючи формули (7.46), матрицю розсіяння S_0 можна подати у вигляді функції логарифмічної похідної від $f(\varepsilon)$, тоді маємо

$$if(\varepsilon) = x \frac{e^{-ix} + S_0 e^{ix}}{e^{-ix} - S_0 e^{ix}}, \qquad x = kR, \qquad (7.50)$$

звідки

$$S_0(\varepsilon) = -e^{-2ix} \frac{x - if(\varepsilon)}{x + if(\varepsilon)}.$$
(7.51)

У випадках розсіяння з поглинанням виконується нерівність $|S_0| < 1$, тому функція $f(\varepsilon)$ комплексна. Відокремимо в логарифмічній похідній дійсну (f_0) та уявну (-h) частини

$$f(\varepsilon) = f_0(\varepsilon) - ih(\varepsilon), \qquad (7.52)$$

тоді

$$S_0 = -e^{-2ix} \frac{(x-h) - if_0}{(x+h) + if_0}$$
(7.53)

Підставляючи формулу (7.53) у вираз (7.13) для перерізу пружного розсіяння, знаходимо

$$\sigma_{\rm el} = \frac{\pi}{k^2} \left| 1 - S_0 \right|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \left| \frac{e^{ix} \left[x \cos x - f \sin x \right]}{x + i f} \right|^2.$$
(7.54)

Після підстановки $\cos x = e^{-ix} + i\sin x$ і простих перетворень маємо

$$\sigma_{\rm el} = \frac{\pi}{k^2} \left| 1 - S_0 \right|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \left| \frac{x}{i(x+h) - f_0} + e^{ix} \sin x \right|^2.$$
(7.55)

Для перерізу реакцій (7.17) отримуємо

$$\sigma_{\rm r} = \frac{\pi}{k^2} (1 - \left| S_0 \right|^2) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{xh}{(x+h)^2 + f_0^2} \,. \tag{7.56}$$

Якщо функція f дійсна, тобто h = 0, то $|S|^2 = 1$ і $\sigma_r = 0$. У цьому випадку є лише пружне розсіяння, яке не супроводжується ніякими реакціями.

При відомій взаємодії можна обчислити перерізи розсіяння та реакцій за формулами (7.55), (7.56) після обчислення хвильових функцій усередині ядра та розрахунку логарифмічної похідної $f = f_{in}$. Користуючись деякими загальними властивостями функції $f(\varepsilon)$, отримаємо наближений вираз для перерізів біля їхніх максимумів. Оскільки наявність реакцій означає, що $\sigma_r > 0$, то з (7.56) маємо h(r) > 0. Унаслідок цієї умови переріз має максимальне значення випадку, коли у $f_0(\varepsilon = E_r) = \text{Re} f(\varepsilon = E_r) = 0$. Корінь цього рівняння E_r називають резонансною енергією. В околі резонансної енергії функцію $f_0(\varepsilon)$ можна розкласти в ряд за ступенями $(\varepsilon - E_r)$ та обмежитися першим доданком розкладу

$$f_0(\varepsilon) = \left(\frac{df_0}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon = E_{\rm r}} (\varepsilon - E_{\rm r}).$$
(7.57)

Введемо позначення

$$\Gamma_{\rm el} = -\frac{2x}{\left(\frac{df_0}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=E_r}}; \ \Gamma_{\rm r} = -\frac{2h}{\left(\frac{df_0}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=E_r}}; \ \Gamma = \Gamma_{\rm el} + \Gamma_{\rm r}.$$
(7.58)

Покажемо, що для комплексних потенціалів з поглинанням похідна $(df_0 / d\varepsilon)$ з $\varepsilon = E_r$ від'ємна, тоді $\Gamma_{\rm el}$, $\Gamma_r > 0$. Для дійсних потенціалів h = 0 і $\Gamma_r = 0$. Після підстановок (7.57) та (7.58) у формули (7.55), (7.56) знаходимо вирази для перерізів реакцій і *s*-розсіяння в області, близькій до резонансної енергії

$$\sigma_{\rm r} = \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_{\rm el} \Gamma_{\rm r}}{\left(\epsilon - E_{\rm r}\right)^2 + \Gamma^2 / 4},\tag{7.59}$$

$$\sigma_{\rm el} = 4\pi \left| A_{\rm r} + A_{\rm p} \right|^2, \qquad (7.60)$$

де величина

$$A_{\rm r} \equiv \frac{1}{k} \frac{\Gamma_{\rm el} / 2}{\varepsilon - E_{\rm r} + i\Gamma / 2}$$
(7.61)

називається амплітудою резонансного (або внутрішнього) розсіяння в пружному каналі. Компонент

$$A_{\rm p} = \frac{1}{k} e^{ikR} \sin kR \tag{7.62}$$

називається амплітудою потенціального (або зовнішнього) розсіяння, оскільки ця частина повної амплітуди залежить лише від радіуса взаємодії та від енергії відносного руху є, що визначає хвильове число $k = \sqrt{2\mu\epsilon/\hbar^2}$. Величину A_p також називають амплітудою розсіяння на непроникливій сфері. Така назва обумовлена тим, що: якби ядро дійсно було абсолютно відбивальною сферою радіуса R, то для $r \ge R$ хвильова функція дорівнювала б нулю, а тому логарифмічна похідна прямувала б до нескінченності $f \to \infty$ і $A_r = 0$. Як наслідок переріз розсіяння був би обумовлений лише амплітудою A_p і дорівнював

$$\sigma_{\rm el} = 4\pi \left| A_{\rm not} \right|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 kR$$

або за повільних частинок з довжиною хвилі $\lambda = 1/k = \hbar/\sqrt{2\mu\epsilon} \gg R$, що значно перевищує радіус ядра, $kR \ll 1$ і

$$\sigma_{\rm el} \cong 4\pi R^2. \tag{7.63}$$

У загальному випадку вирази (7.60) – (7.62) для пружного *s* - розсіяння можна записати у вигляді

$$\sigma_{\rm el} = \frac{\pi}{k^2} \Biggl\{ 4\sin^2 kR + \frac{\Gamma_{\rm el}^2}{(\varepsilon - E_{\rm r})^2 + \Gamma^2 / 4} + \frac{4\Gamma_{\rm el} \cdot \sin kR}{(\varepsilon - E_{\rm r})^2 + \Gamma^2 / 4} \Biggl[(\varepsilon - E_{\rm r}) \cos kR - \Gamma \sin kR \Biggr] \Biggr\}.$$
(7.64)
Тут перший доданок описує потенціальне розсіяння, другий – резонансне розсіяння, а третій – інтерференцію між потенціальним і резонансним розсіянням.

В областях енергій, що майже не відрізняються від E_r , амплітуда резонансного *s*-розсіяння значно більша за амплітуду потенціального розсіяння, тому за таких енергій переріз пружного розсіяння буде визначатися квадратом резонансної амплітуди

$$\sigma_{\rm el} = \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_{\rm el}^2}{(\epsilon - E_{\rm r})^2 + \Gamma^2 / 4}.$$
 (7.65)

Для енергій $\varepsilon < E_r$ інтерференційний компонент у формулі (7.64) може мати від'ємний знак, що може привести до появи мінімуму на правому схилі від резонансного значення перерізу пружного розсіяння.

Таким чином, вирази (7.59) та (7.65) є узагальненням формули Брейта–Вігнера (6.111) на випадок розсіяння з поглинанням. Іноді їх називають дисперсійними формулами для ізольованого резонансного рівня. Із (7.59) та (7.65) видно, що для значень енергій $|\varepsilon - E_r| = \Gamma/2$ переріз зменшується вдвічі порівняно з їхнім максимальним значенням. Параметр Γ визначає ширину резонансної кривої, тому зазвичай його називають шириною резонансу. Цей параметр визначає середній час життя системи $\tau_r = \hbar/\Gamma$ (див. підрозд. 6.6). Величини Γ_{el} та Γ_r є парціальними ширинами, які пропорційні ймовірності відповідно до пружного та непружного зіткнень.

7.4. Матриця розсіяння

У попередніх підрозділах, де були розглянуті реакції як процес поглинання, ми зупинились на простих методах обчислення повного перерізу реакцій σ_r . Перейдемо тепер до більш детального опису всіх можливих бінарних реакцій, які виникають у зіткненнях двох частинок A_1 і A_2 :

$$A_{1} + A_{2} \rightarrow \begin{cases} A_{1} + A_{2}, \\ B_{1} + B_{2}, \\ C_{1} + C_{2}, \\ \dots \end{cases}$$

Бінарні реакції можна представити більш коспактно, якщо ввести індекс каналу α , що характеризує розбиття системи двох частинок на окремі невзаємодіючі фрагменти (див. підрозд. 6.1), а саме, як перехід з деякого початкового каналу α у кінцевий β :

$$X_{1\alpha} + X_{2\alpha} \to X_{1\beta} + X_{2\beta}, \qquad (7.66)$$

або спрощено, як перехід $\alpha \rightarrow \beta$. У таких позначеннях пружному зіткненню відповідає випадок $\beta = \alpha$. Частинки, що перебувають у різних станах збудження, розглядаються як різні, а пружне та непружне вважають приналежними до різних каналів реакції. При непружному розсіянні $\beta \neq \alpha$ і змінюються лише відносні швидкості частинок υ_{α} , υ_{β} :

$$\upsilon_{\alpha} = \frac{\hbar k_{\alpha}}{\mu_{\alpha}}, \quad \upsilon_{\beta} = \frac{\hbar k_{\beta}}{\mu_{\beta}}, \quad k_{\alpha} = \frac{\sqrt{2\mu_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}}}{\hbar}, \quad k_{\beta} = \frac{\sqrt{2\mu_{\beta}\varepsilon_{\beta}}}{\hbar}, \quad (7.67)$$

де k_{ρ} – хвильове число, ε_{ρ} – відносна енергія, а μ_{ρ} – зведена маса частинок у каналі $\rho = \alpha, \beta$. Індекс каналу $\rho = \alpha, \beta$ визначає всю сукупність характеристик ядер-фрагментів – їхній ізотопічний склад, внутрішні енергетичні стани, спін (I_i), парність (π_i) *i*-го фрагмента в даному енергетичному стані, один із компонентів проекцій спіну M_i . Такий набір характеристик позначаємо індексом n. До індексу каналу також входять і квантові числа, що визначають відносний рух фрагментів зовні ядерної взаємодії. У реакціях з утворенням пари фрагментів такий рух можна характеризувати в різний спосіб. Наприклад, можна опи-

сувати відносний рух плоскими хвилями, і тому стани характеризувати хвильовим вектором \vec{k} . У такому випадку для ідентифікації каналу вибирається набір квантових чисел

 $\{n(I_1I_2M_1M_2)\vec{k}\}\$ або $\{n(I_1I_2M_1M_2)S\nu\vec{k}\},\$ де S – значення сумарного спіну каналу \vec{S} :

$$\vec{S} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \tag{7.68}$$

з проекцією v, і для спрощення позначень не вказані парності станів.

Інша можливість полягає у використанні представлення, у якому стани мають визначений момент відносного руху l з проекцією m_l і вміщують у собі весь інтервал кутів. У такому випадку дуже просто проконтролювати закон збереження повного моменту кількості руху, а саме, мають зберігатися повні кутовий момент \vec{L} і парність π системи частинок, що розсіюються. Можливі дві схеми формування повного моменту кількості руху \vec{I} з утворенням або спіну каналу \vec{S} , або повного спіну у каналі налітаючої частинки $\vec{j} = \vec{l}_1 + \vec{l}$:

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{l} = \vec{S} + \vec{l} = \vec{j} + \vec{I}_2$$
(7.69)

У таких випадках канал характеризують або сукупністю квантових чисел

$${n(I_1 I_2 M_1 M_2) l m_l S v I M}$$
, abo ${n(I_1 I_2 M_1 M_2) l j m_j I M}$

де M – проекція повного моменту кількості руху, зазвичай на вісь Z, а для спрощення позначень в індексах каналів не вказують парність. Значення проекцій моментів кількості руху задовольняють співвідношення

$$M_1 + M_2 + m_l = v + m_l = m_i + M_2 = M.$$
(7.70)

Закон збереження парності (див. підрозд. 1.6) означає, що виконується рівність

$$\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot (-1)^l = \pi \,. \tag{7.71}$$

Зазначимо, що рух нуклонів у ядрі за оболонковою моделлю (див. підрозд. 3.5) визначається одночастинковими кутовими моментами $l, j = l \pm 1/2$ і проекцією m_j . В ядерних реакціях з нуклонами такому опису відповідає визначення каналу реакції за допомогою чисел $\{n(I_1 \ I_2 \ M_1 \ M_2) \ l \ j \ m_j \ IM\}$.

Існують загальні правила переходу між різними представленнями для опису каналів. Зрозуміло, що загальні результати теорії зіткнень не залежать від типу представлення. Розглянемо найпростіші бінарні реакції, а саме, пружне та непружне розсіяння частинок з нульовими спінами. У цьому випадку за межами ядерної взаємодії у вхідному каналі, який відповідає пружному розсіянню, мають бути як розбіжна, так і збіжна хвилі, а в непружних каналах мають бути тільки розбіжні хвилі. Як наслідок парціальний розклад асимптотики повної хвильової функції має такий вигляд:

$$\Psi(\vec{r},\{\vec{x}\}) = \frac{\sqrt{\pi}}{k_{\alpha}} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} i^{l+1} Y_{l0}(\theta) \times \left\{ J_{l}(k_{\alpha}r) \Phi_{\alpha}(\{\vec{x}\}) - \sum_{\beta} S_{\beta\alpha}^{l} \sqrt{\left(\frac{\upsilon_{\alpha}}{\upsilon_{\beta}}\right)} O_{l}(k_{\beta}r) \Phi_{\beta}(\{\vec{x}\}) \right\},$$
(7.72)

де r – відносна відстань між центрами мас частинок; $J_l(k_{\beta}r)$ і $Q_l(k_{\beta}r)$ – збіжна і розбіжна хвилі вигляду (7.2):

$$J_{l}(k_{\beta}r) = \frac{1}{r} \exp\left\{-i\left(k_{\beta}r - \frac{l\pi}{2}\right)\right\},$$

$$Q_{l}(k_{\beta}r) = \frac{1}{r} \exp\left\{i\left(k_{\beta}r - \frac{l\pi}{2}\right)\right\},$$
(7.73)

 $\Phi_{\beta}(\{\vec{x}\})$ – внутрішні хвильові функції частинок у каналі β , а $\{\vec{x}\}$ – сукупність координат частинок. Підсумовування за β у (7.72) виконується за всіма можливими каналами.

Величини $S_{\beta\alpha}^{l}$ у формулі (7.72) визначають амплітуду розбіжної хвилі в каналі β , і тим самим ефективний переріз $\sigma_{\alpha\beta}$ будь-якого процесу $\alpha \rightarrow \beta$. Коефіцієнти $S_{\beta\alpha}^{l}$ є матричними елементами матриці розсіяння (у даному випадку із фіксованим значенням орбітального моменту *l*). Цю матрицю також називають матрицею зіткнень, або *S*-матрицею. Для реакції з *N* відкритими каналами, $S_{\beta\alpha}^{l}$ є квадратною матрицею порядку *N*.

Для ермітової взаємодії між частинками, що зіштовхуються, виконується умова унітарності матриці розсіяння

$$\sum_{\gamma=1}^{N} S_{\gamma\alpha}^{I*} S_{\gamma\beta}^{I} = \delta_{\alpha\beta}; \qquad \hat{S}^{+} \hat{S} = \hat{S} \hat{S}^{+} = 1, \qquad (7.74)$$

де $S_{\beta\alpha}^{I}$ – матриця розсіяння при заданому значенні повного кутового моменту I (7.69); $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера; \hat{S} – оператор розсіяння з матричними елементами, що будуються на асимптотичних хвильових функціях ($|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$) у відповідних каналах і збігаються з величинами $S_{\beta\alpha}^{I}$: $\langle\beta|\hat{S}|\alpha\rangle \equiv S_{\beta\alpha}^{I}$. Зірочка "*"у (7.74) визначає операцію комплексного спряження, а знак "+" – ермітове спряження. У випадку бінарної реакції частинок із нульовими спінами повний кутовий момент збігається з орбітальним (I = l), а умова унітарності (7.7) має вигляд

$$\sum_{\gamma=1}^{N} S_{\gamma\alpha}^{l*} S_{\gamma\beta}^{l} = \delta_{\alpha\beta} .$$
 (7.75)

Як і при пружному розсіянні (7.10) умова унітарності (7.74), (7.75) має просту фізичну інтерпретацію, а саме, вона означає збереження повної ймовірності реалізації всіх можливих процесів у системі. Найпростіше це можна простежити, якщо скористатися тим, що величини $S_{\beta\alpha}^{I}$ є матричними елементами оператора \hat{S} , який переводить залежну від часу хвильову функцію системи до взаємодії $\psi_{i}(t \to -\infty)$ у хвильову функцію системи після взаємодії $\psi_{f}(t \to +\infty)$:

$$\Psi_f(t \to +\infty) = \hat{S} \Psi_i(t \to -\infty) . \tag{7.76}$$

Iз виразу (7.76) та умови збереження ймовірності $\psi_f \psi_f^+ = \psi_i \psi_i^+ = 1$

знаходимо співвідношення $\psi_f \psi_f^+ = \hat{S} \psi_i \psi_i^+ \hat{S}^+ = \hat{S} \hat{S}^+ = 1$, яке збігається з (7.74).

Умова (7.74) приводить до скорочення кількості незалежних параметрів, що визначають матрицю розсіяння. Матриця розсі-

яння є комплексною величиною і, якщо, наприклад, відкрито N каналів, то у загальному випадку вона може складатися із $2N^2$ дійсних параметрів. Співвідношення унітарності (7.74) накладає N(N+1)/2 зв'язків на її елементи, а тому лише N(3N-1)/2 із параметрів, що визначають матрицю розсіяння, будуть незалежними.

У випадку, коли між частинками діє лише сильна взаємодія, *S*-матриця інваріантна щодо обернення часу. Це приводить до такої умови симетрії між її елементами:

$$S^I_{\beta\alpha} = S^{\ I}_{-\alpha \ -\beta}, \qquad (7.77)$$

де від'ємні знаки в індексах означають зміну напрямків спінів на протилежні. Вираз (7.77) називають теоремою взаємності.

Якщо ж гамільтоніан системи є також інваріантним відносно просторових обертань, то матриця розсіяння не залежить від проекції спінів і буде симетричною

$$S^I_{\beta\alpha} = S^{\ I}_{\alpha\beta} \,. \tag{7.78}$$

•1

Якщо характеризувати відносний рух плоскими хвилями (7.1) з відповідними хвильовими векторами \vec{k} , то вираз (7.72) для асимптотики повної хвильової функції можна переписати у вигляді

$$\psi(\vec{r},\{\vec{x}\}) = e^{i\vec{k}_{\alpha}\vec{r}} \Phi_{\alpha}(\{\vec{x}\}) + \sum_{\beta} f_{\alpha \to \beta}(\vec{k}_{\alpha},\vec{k}_{\beta}) \frac{e^{i\vec{k}_{\beta}\vec{r}}}{r} \Phi_{\beta}(\{\vec{x}\}), \quad (7.79)$$

де $f_{\alpha \to \beta}(\vec{k}_{\alpha},\vec{k}_{\beta})$ – амплітуда розсіяння або реакції

$$f_{\alpha \to \beta}(\vec{k}_{\alpha}, \vec{k}_{\beta}) \equiv f_{\alpha \to \beta}(\theta) =$$

$$= \frac{i}{2k_{\alpha}} \sqrt{\frac{9_{\alpha}}{9_{\beta}}} \sum_{l} (2l+1) \left(\delta_{\alpha\beta} - S_{\beta\alpha}^{l}\right) P_{l}(\cos\theta).$$
(7.80)

Тут θ – кут розсіяння, тобто кут між напрямками хвильових векторів \vec{k}_{α} і \vec{k}_{β} ; P_l – поліноми Лежандра.

Використавши формулу (7.79), за аналогією з випадком пружного розсіяння (див. підрозд. 6.4 і 7.1) обчислимо густини радіальних потоків відносного руху у вхідному (j_{α}) і вихідному (j_{β}) каналах за межами взаємодії (вважатимемо, що взаємодія у вхідному каналі відсутня за сферою радіуса R_{α} , а у вихідному – радіуса R_{β}):

$$j_{\alpha} = \frac{\hbar}{2\mu_{\alpha}i} \left(\varphi_{\vec{k}_{\alpha}}^{*} \frac{\partial}{\partial r} \varphi_{\vec{k}_{\alpha}} - \varphi_{\vec{k}_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial r} \varphi_{\vec{k}_{\alpha}}^{*} \right) = \frac{\hbar k_{\alpha}}{\mu_{\alpha}},$$
$$j_{\beta} = \frac{\hbar}{2\mu_{\beta}i} \left(\psi_{\text{out},\beta}^{*} \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\text{out},\beta} - \psi_{\text{out},\beta} \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\text{out},\beta}^{*} \right) = \frac{\hbar k_{\beta}}{\mu_{\beta}} \frac{1}{r^{2}} \left| f_{\alpha \to \beta}(\vec{k}_{\alpha}, \vec{k}_{\beta}) \right|^{2},$$

де $\varphi_{\vec{k}_{\alpha}} = \exp(i\vec{k}_{\alpha}\vec{r})$ – хвильова функція відносного руху у вхідному каналі, а $\psi_{\text{out},\beta} = f_{\alpha\to\beta}(\vec{k}_{\alpha},\vec{k}_{\beta})e^{ik_{\beta}r}/r$ – розбіжна хвиля, яка описує відносний рух у вихідному каналі. Згідно з цими виразами та визначенням (6.40) отримуємо вираз для віднесеного до одиничного суцільного кута диференціального перерізу $\sigma_{\alpha\beta}(\theta,\varphi)$ переходу з каналу α у β :

$$\sigma_{\alpha\beta}(\theta,\phi) \equiv \lim_{r \gg R_{\alpha}, R_{\beta}} \frac{j_{\beta}r^{2}}{j_{\alpha}} = \frac{\vartheta_{\beta}}{\vartheta_{\alpha}} \left| f_{\alpha \to \beta}(\vec{k}_{\alpha}, \vec{k}_{\beta}) \right|^{2} \equiv \frac{\mu_{\alpha}}{\mu_{\beta}} \frac{k_{\beta}}{k_{\alpha}} \left| f_{\alpha \to \beta}(\vec{k}_{\alpha}, \vec{k}_{\beta}) \right|^{2}.$$
(7.81)

Після підстановки у формулу (7.81) співвідношення (7.80) маємо

$$\sigma_{\alpha\beta}(\theta,\phi) \equiv \sigma_{\alpha\beta}(\theta) = \frac{1}{4k_{\alpha}^2} \left| \sum_{l} (2l+1) \left(\delta_{\alpha\beta} - S_{\beta\alpha}^{l} \right) P_l(\cos\theta) \right|^2. \quad (7.82)$$

Інтегральний переріз $\sigma_{\alpha\beta}$ знаходимо з (7.82) після інтегрування за тілесним кутом

$$\sigma_{\alpha\beta} = \int \sigma_{\alpha\beta}(\theta, \varphi) d\Omega \,. \tag{7.83}$$

Ураховуючи ортогональність поліномів Лежандра, отримуємо вираз для інтегрального перерізу процесу $\alpha \to \beta$:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \pi \lambda_{\alpha}^2 \sum_{l} (2l+1) \left| \delta_{\alpha\beta} - S_{\beta\alpha}^l \right|^2, \qquad \lambda_{\alpha} = \frac{1}{k_{\alpha}}.$$
(7.84)

Відповідно до (6.38) повний переріз взаємодії частинки з ядром можна записати у вигляді суми двох доданків

$$\sigma_{\rm t} \equiv \sum_{\beta} \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\rm el} + \sigma_{\rm r} , \qquad (7.85)$$

де σ_{el} – переріз пружних процесів,

$$\sigma_{\rm el} = \pi \lambda_{\alpha}^2 \sum_{l} (2l+1) \left| 1 - S_{\alpha\alpha}^l \right|^2, \qquad (7.86)$$

а σ_r – переріз реакцій, що дорівнює сумі всіх непружних процесів

$$\sigma_{\rm r} = \pi \lambda_{\alpha}^2 \sum_{l} (2l+1) \sum_{\beta \neq \alpha} \left| S_{\beta \alpha}^l \right|^2 \,. \tag{7.87}$$

Згідно зі співвідношенням унітарності (7.75):

$$\sum_{\beta \neq \alpha} \left| S_{\beta \alpha}^l \right|^2 + \left| S_{\alpha \alpha}^l \right|^2 = 1 , \qquad (7.88)$$

а вираз (7.87) для перерізу реакцій набуває вигляду

$$\sigma_r = \pi \lambda_{\alpha}^2 \sum_{l} (2l+1) \left(1 - \left| S_{\alpha\alpha}^l \right|^2 \right).$$
(7.89)

Для повного перерізу (7.85) маємо

$$\sigma_{\rm t} = \sigma_{\rm el} + \sigma_{\rm r} = \sigma_{\rm r} = 2\pi\lambda_{\alpha}^2\sum_l (2l+1)\left(1 - \operatorname{Re}S_{\alpha\alpha}^l\right). \tag{7.90}$$

У цих формулах для перерізів статистичний фактор (2l+1) визначає кількість ступенів виродження стану із заданим орбітальним моментом за його проекцією.

Згідно з (7.86), (7.89) як переріз пружного розсіяння, так і повний переріз реакцій визначаються діагональними елементами матриці розсіяння. Саме завдяки цьому можливе їхнє одночасне обчислення за допомогою сферичної оптичної моделі розсіяння на комплексному потенціалі, яка дозволяє розраховувати лише діагональні елементи матриці розсіяння (див. підрозд. 7.2).

У випадку бінарної реакції частинок зі спінами загальний вигляд інтегральних перерізів не змінюється. Наприклад, у випадку, коли канал характеризується сукупністю квантових чисел

 $\{n(I_1 \ I_2 \ M_1 \ M_2) \ l \ j \ m_j \ I \ M\}$, вираз для інтегрального перерізу процесу $\alpha \to \beta$ з переходом у кінцевий стан ядер-фрагментів n_{β} за довільних характеристик відносного руху для систем інваріантних відносно обертань має вигляд

$$\sigma_{\alpha\beta} = (7.91)$$

$$\pi \lambda_{\alpha}^{2} \sum_{J,\pi=\pm 1} \sum_{l j} \sum_{l' j'} \omega_{l}(\pi_{1}\pi_{2}\pi) \omega_{l'}(\pi_{1'}\pi_{2'}\pi) g(I) \left| \delta_{n_{\alpha}n_{\beta}} \delta_{l l'} \delta_{j j'} - S_{n_{\beta}l' j'}^{I\pi} |_{n_{\alpha}l j} \right|^{2}$$

де штрихами позначено відповідні квантові числа, що належать вихідному каналу; $S_{n_{\beta}l'j' n_{\alpha}lj}^{I\pi}$ – матриця розсіяння для фіксованого значення повного кутового моменту I і парності π ; індекси n_{α} , n_{β} також містять парності ядер-фрагментів; статистичний фактор g(I) задається виразом

$$g(I) = \frac{2I+1}{(2I_1+1)(2I_2+1)}.$$
(7.92)

Підсумовування у формулі (7.91) слід виконувати лише для тих значень квантових чисел моментів кількості руху, які визначають власні значення операторів моментів кількості руху, що не суперечать закону збереження повного моменту кількості руху (7.69):

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{l} = \vec{j} + \vec{I}_2 = \vec{j}' + \vec{I}_2' = \vec{I}_1' + \vec{I}_2' + \vec{l}' \quad . \tag{7.93}$$

Порядок підсумовувань у формулі (7.91) може бути довільним, але квантові числа змінюються на одиницю й мають бути в інтервалах, що визначаються правилами додавання кутових моментів. Наприклад, коли відбувається зовнішнє підсумовування, як це показано в (7.91) за квантовим числом повного моменту I, то в сумах необхідно враховувати лише доданки, для яких виконуються співвідношення

$$I_{\min} \leq I < \infty, \quad |I - I_2| \leq j \leq I + I_2, \quad |j - I_1| \leq l \leq j + I_1, \\ |I - I_2'| \leq j' \leq I + I_2', \quad |j' - I_1'| \leq l' \leq j' + I_1.$$
(7.94)

Тут мінімальне значення повного моменту I_{\min} дорівнює нулю у випадку, коли величини I_1, I_2 одночасно парні або непарні та 1/2 у випадку, якщо тільки одне зі значень I_1, I_2 непарне. У випадку із зовнішнім підсумовуванням за орбітальним моментом відносного руху у вхідному каналі в сумах (7.91) необхідно враховувати лише доданки, що характеризуються такими значеннями квантових чисел:

$$0 \le l < \infty, \quad |l - I_1| \le j \le l + I_1, \quad |j - I_2| \le I \le j + I_2 \quad , \\ |I - I_2'| \le j' \le I + I_2', \quad |j' - I_2'| \le l' \le j' + I_2' \quad .$$
(7.95)

Закон збереження парності (7.70) додатково обмежує величини орбітальних моментів відносного руху значеннями, що задовольняють умову

$$\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot (-1)^l = \pi = \pi'_1 \cdot \pi'_2 \cdot (-1)^l \quad . \tag{7.96}$$

Співвідношення (7.96) можна записати в іншому вигляді. Помножимо його на парність π і врахуємо, що $\pi^2 = 1$, тоді отримаємо таку умову:

$$\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi \cdot (-1)^l = \pi'_1 \cdot \pi'_2 \cdot \pi \cdot (-1)^l = 1, \qquad (7.97)$$

яка обмежує можливі значення парності системи та значення моменту відносного руху.

Проекційні множники $\omega_l(\Pi)$ у виразі для перерізу (7.91) враховують закон збереження парності у формулі (7.97) і дорівнюють

$$\omega_l(\Pi) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \Pi \cdot (-1)^l \right\}.$$
(7.98)

Як і в перерізах пружного розсіяння і реакцій (див. підрозд. 7.3), у перерізах парціальних реакцій $\alpha \rightarrow \beta$ за деяких значень повного моменту *I* і парності π можуть спостерігатися резонанси. У випадку ізольованих резонансів аналогічно (7.59) можна показати, що в околі резонансу переріз $\sigma_{\alpha\beta}$ має вигляд кривої Брейта–Вігнера:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \pi \lambda_{\alpha}^2 g(I) \frac{\Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta}}{\left(\varepsilon - E_r\right)^2 + \left(\Gamma / 2\right)^2}, \qquad (7.99)$$

де Γ_{α} і Γ_{β} – ширини розпаду за вхідним і вихідним каналами, відповідно

$$\Gamma = \sum_{\beta'} \Gamma_{\beta'} \tag{7.100}$$

 – повна ширина резонансу; підсумовування виконується за всіма відкритими каналами зі значеннями *I*, π, що збігаються з резонансними.

Співвідношення (7.99) можна переписати таким чином:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\rm t}(\alpha) \ G_{\beta} \ , \qquad (7.101)$$

де $\sigma_t(\alpha) = \pi \lambda_\alpha^2 \Gamma_\alpha \Gamma / [(\varepsilon - E_r)^2 + (\Gamma / 2)^2]$ – повний переріз усіх можливих пружних та не пружних процесів, що відбуваються з вхідним каналом α :

$$\sigma_{t}(\alpha) = \sum_{\beta'} \sigma_{\alpha\beta'}, \qquad (7.102)$$

а G_{β} – відносна ширина (імовірність) розпаду за каналом β :

$$G_{\beta} = \Gamma_{\beta} / \Gamma . \tag{7.103}$$

Вираз (7.101) має просте фізичне тлумачення. Величину $\sigma_r(\alpha)$ слід інтерпретувати як переріз утворення складеного ядра, що утворилося в результаті взаємодії налітаючої частинки з ядром мішені, а величину G_в можна розглядати як імовірність вильоту частинки із такого ядра. Таким чином, співвідношення (7.101) означає можливість утворення деякого складеного ядра, а також незалежність процесів його утворення та розпаду. Уперше такий погляд на механізм ядерних реакцій запропонував Н. Бор (1936). Згідно з його міркуваннями внаслідок сильної ядерної взаємодії частинка, що влітає в ядро, миттєво передає свою енергію внутрішнім нуклонам і втрачає індивідуальність. Енергія частинки-снаряду рівномірно розподіляється між всіма нуклонами, тобто енергія, що припадає на одну частинку ядра, стає недостатньою для її вильоту. Це призводить до утворення деякого складеного довгоживучого компаунд-ядра з рівномірним розподілом енергії між нуклонами і яке може розпастися лише у випадках, якщо одна із частинок флуктуативно накопичить ене-

ргію, достатню для її вильоту. Як наслідок ядерну реакцію можна вважати такою, що відбувається у два етапи:

$$a + A \to C^* \to B + b . \tag{7.104}$$

На першому етапі утворюється компаунд-ядро C^* , яке далі розпадається на продукти ядерних реакцій. Компаунд-ядро також позначають як C^* , де зірочка "*" вказує на збуджений стан. Обидва етапи реакції незалежні в тому розумінні, що розпад компаунд-ядра залежить лише від його енергії, моменту кількості руху та парності, але не залежить від способу його утворення. Це означає, що згідно з гіпотезою Н. Бора переріз довільної реакції можна подати у вигляді, аналогічному (7.101), а саме, як добуток перерізу утворення компаунд-ядра на ймовірність його розпаду. Разом з тим експериментальні та теоретичні дослідження показали, що в загальному випадку не можна подати переріз реакцій у факторизованому вигляді (7.101).

7.5. Механізми ядерних реакцій з легкими частинками

Як було зазначено в підрозд. 7.2, процес, що відбувається при потраплянні частинки в ядро, у цілому можна описати за допомогою сферичної оптичної моделі, схожої з тими, які використовуються для опису оболонкової структури ядер, а саме, ядро розглядається як система нуклонів у деякій сферичній до ядра мішені потенціальній ямі. Оскільки ймовірність передачі енергії від частинки-снаряду відмінна від нуля, то до середнього ядерного потенціалу, у якому рухаються нуклони, необхідно додати уявну частину. У результаті маємо модель, яку називають *оптичною моделлю ядра* (див. підрозд. 7.2). Така модель успішно описує пружне розсіяння ы "поглинання" нуклонів ядрами, якщо під "поглинанням" розуміти будь-який процес, що не є пружним розсіянням. За її допомогою не можна детально відтворити резонанси компаунд-ядра, що виникають після "поглинання" повільних нейтронів, але можна описати загальну поведінку (грос-

структуру) перерізів, тобто середні за сусідніми резонансами величини. Якщо енергія настільки мала, що в процесі беруть участь тільки *s*-нейтрони, то в грос-структурі спостерігаються резонанси в тих випадках, коли в потенціальній ямі утворюється стояча хвиля. При переході до іншого граничного випадку – високих енергій і дуже сильного поглинання (напр., як це спостерігається в дослідах з α -частинками з енергіями близько 40 MeB) оптична модель передбачає картину розсіяння з максимумами та мінімумами у відповідних кутових розподілах, що дуже схожа на картину оптичного розсіяння чорними шарами. Таке передбачення підтверджується експериментальними дослідженнями.

Сферична оптична модель є потужним інструментом аналізу ядерних реакцій, разом з тим вона дозволяє аналізувати тільки повну ймовірність ядерних реакцій. Для отримання більш повної інформації необхідно розглянути механізм поглинання частинки ядром детальніше. Виявляється, що можна розглянути всі механізми ядерних реакцій з легкими частинками, якщо користуватися уявленням про незалежність руху частинок у середньому самоузгодженому полі й урахувати залишкову ядерну взаємодію (В. Вайскопф). Розглянемо в такій модифікованій моделі незалежного руху процеси, що відбуваються у випадку, коли частинка потрапляє в ядро і зіштовхується з однією з його складових частин. Деякі можливі процеси її взаємодії проілюстровано на рис. 7.2.

Частинка-снаряд, що налітає на ядро, може втратити частину своєї енергії, переводячи ядерну частинку в більш високий стан (рис. 7.2, (1)). Це може привести до непружного розсіяння, якщо у частинки залишається достатньо енергії для вильоту. Такий процес називається *прямим непружним розсіянням*, оскільки він зумовлений розсіянням тільки на одній частинці ядра. Частинка, яка налітає, може також передати енергію колективному руху, що приводить до зміни характеристики середнього поля (рис. 7.2, (2)); такий процес є також прямою взаємодією. На рис. 7.2, (3) зображено випадок, коли передана енергія достатньо велика для вибивання нуклона з ядра-мішені. Цей процес є також прямою ядерною реакцією. Принципово він не відрізняється від

процесу, зображеному на рис. 7.2, (1), але відбувається з обміном частинками, а тому називається *реакцією обміну*.





Частинка, що влітає в ядро, може втратити забагато енергії й залишиться зв'язаною всередині ядра. Її енергія може бути переданою нуклону, що перебуває у стані з малою енергією, і тому не може вилетіти з ядра (рис. 7.2, (4)). У результаті утворюється збуджена складена система частинка–снаряд+ядро-мішень. Стан такої складеної системи може бути таким, що шляхом внутрішніх зіткнень відбувається тільки подальше збудження нуклонів, причому енергія збудженої частинки в середньому зменшується так, що жодний із нуклонів не може вилетіти. Після багатьох зіткнень утворюється стан з великим часом життя та рівномірним розподілом енергії збудження між усіма нуклонами, який може розпастися лише тоді, коли одна із частинок флуктуативно накопичить у процесі випадкових зіткнень достатню енергію

для свого вильоту. Таку складену систему називають *складеним* ядром, або *компаунд-ядром*.

Складена система може розпастися без утворення компаундядра, а саме, протягом двох або більшої кількості зіткнень (рис. 7.2, (5)), якщо після процесів, зображених на рис. 7.2, (1), (2), нуклон-снаряд на своєму шляху зазнає зіткнень з іншим нуклонами та збудить їх таким чином, щоб існувала можливість вильоту нуклона-снаряду або інших частинок.

Рис. 7.2 пояснює, яким чином під час слабкої залишкової взаємодії між нуклонами ядра можливим є існування як прямих реакцій, так і процесів з утворенням складеного ядра. Як було вже зазначено, концепцію реакцій через стадію компаунд-ядра вперше сформулював Н. Бор у припущенні сильної взаємодії між усіма складовими частинами ядра. З появою ідеї про слабку залишкову взаємодію між нуклонами в ядрах схема Бора про утворення складеного ядра відійшла на другий план, а іноді стверджувалося, що всі ядерні реакції мають бути прямими, але, як видно з розгляду процесів на рис. 7.2, таке твердження не відповідає моделі слабкої взаємодії. У моделі слабкої взаємодії вважається, що прямі реакції існують, але разом з тим і не виключається, що час від часу додаткова енергія розподіляється між великою кількістю складових частин ядра, особливо, якщо ця енергія невелика. Як наслідок, виникає деякий складений стан з великим часом життя, який може бути значно більшим ніж той, що очікується на основі моделі сильної взаємодії.

Таким чином, згідно з розглядом Вайскопфа маємо такі уявлення про процес взаємодії частинки з ядром: спочатку частинка влітає в ядро і розсіюється комплексним потенціалом. При взаємодії частинки з ядром завжди існує ймовірність її поглинання, що вказує на її участь у першому зіткненні, яке приводить або до прямого непружного розсіяння, або до прямих реакцій. Друге зіткнення ще може викликати реакцію, але вже з меншою ймовірністю, оскільки енергія розподіляється між трьома частинками. Потім відбувається все більше і більше зіткнень, які майже не приводять до вильоту частинок, а до обміну енергією всередині ядра. Утворюється компаунд-ядро. Після багатьох таких обмінів одній із частинок (рідко тій самій, що влетіла в ядро)

вдається вилетіти. Складене ядро розпадається. Отже, концепція слабкої залишкової взаємодії приводить до можливості прямих реакцій, утворення компаунд-ядра, а також можливості вильоту частинок зі складеної системи на різних стадіях утворення компаунд-ядра. Останній тип реакцій називають прекомпаундом, або передрівноважними реакціями.

Із вищенаведеного випливає, що відносна ймовірність утворення складеного ядра зменшується зі збільшенням енергії частинки, що налітає на ядро. Дійсно, якщо ця енергія дуже велика, скажімо, більше 30 або 40 МеВ на нуклон, то енергія, яка може передатися частинці ядра, буде також значною, тому слід очікувати, що вже перші кілька зіткнень у результаті або прямої, або передрівноважної реакції призведуть до вильоту частинки. У таких випадках компаунд-ядро (тобто стан складеної системи, у якому енергія збудження розподілена між багатьма нуклонами так, що кожний з них не може вилетіти з ядра, поки який-небудь нуклон не отримає "аномально" велику енергію) може утворитися тільки після вильоту одного або більшої кількості нуклонів, і тому ймовірність його утворення не може бути значною.

У прямих реакціях енергія від частинки-снаряду до частинки, що вилітає, передається за характерний ядерний час прольоту $\tau_{\rm яд} = 10^{-22}$ с (див. підрозд. 1.2). За такий час частинка не встигає "забути" напрямок свого руху і кутовий розподіл продуктів прямих ядерних реакцій має асиметричний вигляд. Імовірність прямої реакції можна обчислити за допомогою квантовомеханічних методів, розглядаючи такий процес як зіткнення частинок у деякому середньому полі з поглинанням. Наприклад, якщо розглядати всі реакції як процес поглинання, то диференціальний переріз $\sigma_{\alpha\beta}$ прямого непружного розсіяння (рис. 7.2, (1)) можна обчислити за формулою (7.81), користуючись моди-

фікованим борнівським наближенням (див. підрозд. 6.5) до амплітуди розсіяння $f_{\alpha \to \beta}(\vec{k}_{\alpha}, \vec{k}_{\beta})$ вигляду

$$f_{\alpha \to \beta}(\vec{k}_{\alpha}, \vec{k}_{\beta}) = -\frac{\mu_{\beta}}{2\pi\hbar^2} \left\langle \varphi_{\vec{k}_{\beta}} \Phi_{\beta} \left| V \right| \psi_{\vec{k}_{\alpha}}^{(+)} \Phi_{\alpha} \right\rangle,$$
(7.105)

де $\psi_{\vec{k}_{\alpha}}^{(+)}$ – хвильова функція відносного руху частинки у сферич-

ному оптичному потенціалі з асимптотикою у вигляді плоскої та розбіжної хвиль. Такий метод обчислення амплітуди враховує вплив ядерної взаємодії на частинку-снаряд і називається наближенням Борна методу збурених (спотворених) хвиль (від англ. distorted wave Born approximation (DWBA)).

Більш точно описати внесок прямого механізму в пружне та непружне розсіяння можна за допомогою так званого методу зв'язаних каналів. При такому методі повна хвильова функція $\psi(\vec{r}, \{\vec{x}\})$ із заданою енергією відносного руху подається у вигляді розкладу за хвильовими функціями всіх станів залишкових ядер $\Phi_0(\{\vec{x}\})$:

$$\psi(\vec{r},\{\vec{x}\}) = \sum_{\rho} \psi_{\rho}^{(+)}(\vec{r}) \Phi_{\rho}(\{\vec{x}\}), \qquad (7.106)$$

Після підстановки цього розкладу в рівняння Шредінгера знаходять систему зв'язаних рівнянь для функцій відносного руху $\psi_{\rho}^{(+)}(\vec{r})$ і за допомогою граничних умов задачі розсіяння (7.72) обчислюють елементи матриці розсіяння.

У випадку вильоту двох нуклонів для опису прямого процесу зазвичай необхідно враховувати парні кореляції (див. підрозд. 3.6). Чим складніші частинки беруть участь у реакціях, тим більш складні кореляції руху нуклонів ядерної системи необхідно враховувати при розгляді прямих процесів. Зокрема, дослідження показали, що принаймні в легких ядрах нуклони з помітною ймовірністю об'єднуються в групи (кластери) типу α частинок. На такому підході базується модель нуклонних асоціацій, або кластерів, яка також часто називається єдиною моделлю ядра.

Характерний час перебігу ядерних реакцій з утворенням компаунд-ядра значно перевищує час прольоту нуклона через ядро. Наприклад, у випадку реакцій з нейтронами низьких енергій час життя компаунд-ядра може становити $10^{-16} \div 10^{-12}$ с, що набагато перевищує час прямих процесів. Значна різниця між часом утворення та розпаду компаунд-ядра призводить до того,

що ядро "не пам'ятає" своєї попередньої історії, і два ці етапи можна вважати незалежними. Частинка, що потрапляє в ядро, "забуває" напрямок свого руху, а кутовий розподіл вилітаючих частинок, що виявляється в системі центра мас, симетричний і майже ізотропний. Однак вигляд перерізу компаунд-процесів залежить від енергії збудження складеного ядра U:

$$U = \varepsilon_{\alpha} + S_{aC} , \qquad (7.107)$$

що складається з енергії відносного руху у вхідному каналі ε_{α} та енергії відділення S_{aC} частинки-снаряду від ядра C = a + A. Збуджені стани довільного ядра нестабільні з деякими ширинами розпаду Γ_i та із середнім значенням Γ . Зі зростанням енергії збудження змінюється енергетичний спектр ядра, а саме, змінюється співвідношення між середньою відстанню (D) між рівнями (рис. 7.3). За низьких енергій збуджень, менших від мінімального значення S_{min} енергії відділення частинок (частіше, нейтронів), зазвичай найбільш імовірним є радіаційний розпад. Такий розпад зумовлюється несильною електромагнітною взаємодією, його ймовірність мала й ядро з енергією збудження U < S_{min} можна вважати майже стабільним, а його енергетичні стани дискретними з відстанню між рівнями D ≫ Г. В області енергій $U \ge S_{\min}$ виникає можливість вильоту частинок, імовірність їхнього вильоту зумовлена сильною взаємодією і зазвичай значно перевищує ймовірність радіаційного розпаду. У такому випадку нехтувати ширинами розпаду не можна. Відповідний енергетичний спектр ядра з *D* > Г називають квазідискретним спектром, або випадком резонансів, що не перекриваються. Із подальшим збільшенням енергії збудження зростає фазовий об'єм, у який може вилетіти частинка, а також кількість доступних кінцевих станів залишкових ядер і кількість частинок, що вилітають. Це приводить до значного збільшення ширин розпаду, коли ширини розпаду дорівнюють або перевищують відстань між рівнями. Випадок з $\Gamma > D$ називають слабким перекриттям резонансів. Енергетичний спектр з Г » D називають квазі-неперервним, або випадком із сильним перекриттям резонансів.

В області квазідискретного спектра ($D > \Gamma$) процес утворення складеного ядра має резонансний характер, тому що з найбільшою ймовірністю ядро-мішень будуть поглинати частинки з енергіями, що відповідають значенням, близьким до резонансних енергій складеного ядра. Як наслідок, переріз утворення компаунд-ядра як функція енергії відносного руху матиме ряд гострих максимумів, що відповідають послідовному утворенню резонансних станів. Ці самі максимуми, що мають вигляд частоколу з вузьких резонансів, будуть проявлятися і в перерізах довільної реакції, що відбувається з утворенням даного компаундядра. Такі реакції називають резонансними, їх переріз можна подати у вигляді суми кривих Брейта–Вігнера (7.99).

В областях, де стани складеного ядра перекриваються, енергетичний спектр складеного ядра фактично неперервний. При цьому ніяких виділених значень енергій не існує й залежність перерізу утворення компаунд-ядра неістотно залежить від енергії налітаючих частинок. Це ж стосується і перерізів реакцій з утворенням компаунд-ядра. Реакції з плавною залежністю перерізів від енергії називаються нерезонансними. Компаунд-ядра з енергією збудження, що відповідає області неперервного спектра, можна характеризувати певною температурою (див. далі (7.109) – (7.111)), і тому зазвичай їх називають нагрітими ядрами.



Рис. 7.3. Схематичне зображення енергетичного спектра збудженого ядра

В області суцільного спектра резонанси перекриваються і гіпотеза про незалежність вхідного та вихідного каналів реакції може справджуватись лише всередньому. Дійсно, у такому випадку через перекриття резонансів за даної енергії частинкиснаряду збуджується велика кількість рівнів. Утворюється суміш багатьох станів з різними співвідношеннями фаз між амплітудами їхніх ширин. Ці фази можуть залежати від способу утворення ядра, тому не можна стверджувати, що ймовірність розпаду ядра даним способом не залежить від фаз. Разом з тим, можна сподіватися, що при збудженні великої кількості станів, інтерференційних компонентів розпаду за різними каналами буде багато. Вони матимуть різні знаки, а тому певною мірою компенсуватимуться. Спостережувані перерізи в даному випадку є деякими статистичними середніми величинами від внесків у процес розпаду великої кількості рівнів. Саме усереднення може призводити до відсутності інтерференції між вхідним та вихідним каналами, тому компаунд-ядерний механізм адекватний лише для опису середніх значень перерізів $<\sigma_{\alpha\beta}>$. За даних

квантових характеристик системи (енергії, повного спіну, парності) середній переріз матиме факторизований вигляд

$$<\sigma_{\alpha\beta}>=\sigma(\alpha)\cdot G_{\beta}, \quad \sum_{\beta}G_{\beta}=1, \quad \sigma(\alpha)=\sum_{\beta}<\sigma_{\alpha\beta}>, \quad (7.108)$$

де $\sigma(\alpha)$ є середнім перерізом утворення компаунд-ядра за вхідним каналом α , а G_{β} – середня ймовірності розпаду за вихідним каналом.

У випадку резонансів із сильним перекриттям, через випадковість фаз амплітуд ширин станів, усереднення виконується автоматично і спостерігаються самоусереднені перерізи. Для визначення перерізів, що відповідають механізму компаундядра в області слабкого перекриття, необхідно виконати додаткове усереднення перерізу $\sigma_{\alpha\beta}$ на інтервалі енергій $\delta E \gg D, \Gamma$, що вмішує багато рівнів. У реальних експериментах зазвичай таке усереднення виконується автоматично, оскільки енергії час-

тинок-снарядів завжди мають деякий розкид значень.

Уперше загальний вираз для обчислення перерізу компаундядерного процесу в області неперервного спектра як складеного, так і залишкового ядра, отримали В. Вайскопф і Д. Евінг (1940). Вони виходили з умови рівноваги між процесами утворення та розпаду складеного ядра і принципу детального балансу. Вважалося, що компаунд-ядро перебуває в стані термодинамічної рівноваги з деякою температурою T. У такому стані енергія збудження U (7.107) рівномірно розподілена між усіма збудженими нуклонами, а середня енергія, що припадає на один збуджений нуклон, дорівнює

$$\overline{\varepsilon} = \frac{U}{\overline{n}} \cong \frac{3}{2}T, \qquad (7.109)$$

де \overline{n} – найбільш імовірна кількість збуджених нуклонів за термодинамічної рівноваги. Згідно з моделлю збудженого фермігазу, подібній до тієї, що використовувалася в підрозд. 3.3:

$$\overline{n} \cong \sqrt{2gU} . \tag{7.110}$$

Тут $g = D_0^{-1} \cong (6 / \pi^2) (A / 15 \div A / 7) \approx (0,04 \div 0,09) A$ – середня густина одночастинкових рівнів у околі енергії Фермі в ядрі з A

нуклонами; D_0 – середня відстань між такими рівнями. Згідно з (7.109) і (7.110) енергія збудження й температура пов'язані співвідношенням

$$U \cong 2,25gT^2$$
. (7.111)

Вайскопф і Евінг показали, що частинки, які вилітають при розпаді компаунд-ядра, мають близький до максвеллівського розподілу за енергією характерний енергетичний спектр:

$$\frac{a < \sigma_{\alpha\beta} >}{d\varepsilon} \sim \varepsilon e^{-\varepsilon/T} \equiv P(\varepsilon) .$$
 (7.112)

Згідно з кінетичною теорією газів саме такий спектр мають молекули, що випаровуються з рідини, тому його називають спектром випаровування, а теорія Вайскопфа–Евінга отримала назву *модель випаровування*. Процес випаровування приводить до вильоту частинок переважно низьких енергій, середня енергія яких дорівнює

$$<\varepsilon>\equiv \int_{0}^{\infty} \varepsilon P(\varepsilon)d\varepsilon / \int_{0}^{\infty} P(\varepsilon)d\varepsilon = 2T.$$
 (7.113)

Вирази для обчислення перерізів компаунд-ядерних процесів з урахуванням законів збереження повного спіну, парності та (наближено) унітарності матриці розсіяння запропонували Л. Вольфенштейн (1951), В. Хаузер і Г. Фешбах (1952). Такий підхід має назву *meopis Baйскопфа–Евінга*. Його особливістю є точне врахування спектра дискретних станів залишкових ядер і їхніх квантових характеристик. Із різними модифікаціями підхід Хаузера–Фешбаха широко використовується в практичних розрахунках. Він якісно узгоджується з великою кількістю експериментальних даних, хоча існують і деякі розходження.

Уперше вплив кореляцій між ширинами розпаду складеного ядра врахував П. Молдауєр. У загальному випадку вирази для обчислень перерізів реакцій отримала група дослідників під керівництвом Г. Вайденмюллера (1975–1985). Зокрема, перший практичний метод обчислення перерізів реакцій, що базувався на числовому моделюванні елементів матриці розсіяння та узгоджувався з її унітарністю, розробили Г. Хофман, Я. Ріхерт, Я. Тепель і Г. Вайденмюллер (1975). Загальні аналітичні вирази

для перерізів отримали Я. Вербааршот, Г. Вайденмюллер і М. Цирнбауер (1985). Точний метод обчислення перерізів при інтерференції прямого та компаунд-ядерного механізмів реакцій започаткували К. Енгельбрехт і Г. Вайденмюллер (1973). Метод зводиться до переходу в простір деяких нових каналів, між якими будуть відсутні кореляції (перетворення Енгельбрехта– Вайденмюллера). Спрощений метод розрахунку перерізу компаунд-реакцій, що адекватно апроксимує експериментальні результати, і загальний метод обчислення перетворення Енгельбрехта–Вайденмюллера розробили С. М. Єжов і В. А. Плюйко (1984–1993).

Найпростішим випадком, коли необхідно враховувати кореляції між вхідним і вихідним каналами, є пружне розсіяння, де ці канали еквівалентні. Теоретично та експериментально показано, що в області сильного перекриття резонансів, урахування кореляцій збільшує переріз пружного розсіяння у два рази порівняно з теорією Вайскопфа–Евінга. Кореляції між вхідним і вихідним каналами також необхідно врахувати при невеликій кількості каналів розпаду (рис. 7.4). Після відкриття 4-5 непружних каналів впливом кореляцій зазвичай можна знехтувати.



Рис. 7.4. Вплнв кореляцій ширин на перерізи непружного розсіяння нейтронів ядрами ⁵⁶Ке.

Криві: суцільна – розрахунки з урахуванням кореляцій ширин; штрих-пунктирна – теорія Вайскопфа–Евінга

Уперше статистичну теорію вильоту частинок на передрівноважних стадіях утворення ядра (рис. 7.2, (4), (5)) запропонував Дж. Грифін (1966). Він використав такі положення:

1) кожну стадію утворення компаунд-ядра необхідно додатково характеризувати кількістю (*n*) збуджених квазічастинок (частинок і дірок, або "екситонів", за термінологією Грифіна);

 у кожному екситонному стані енергія збудження рівномірно розподіляється між збудженими екситонами (умова парціальної рівноваги);

3) процеси утворення екситонного стану та вильоту з нього частинок можна вважати незалежними, а ймовірність вильоту частинки з даного екситонного стану можна обчислити з умови рівноваги між процесами його утворення та розпаду. У результаті загальний вираз для перерізу прекомпаунд-реакцій має вигляд

$$<\sigma_{\alpha\beta}>=\sigma(\alpha)\cdot\sum_{n=n_0}^n\tau_n\cdot G_{\beta}^{(n)}$$
, (7.114)

де $\sigma(\alpha)$ – переріз утворення складеної системи частинка-снаряд + ядро-мішень; τ_n – час перебування складеної системи в стані з *n* екситонами; $G_{\beta}^{(n)}$ – імовірність в одиницю часу вильоту частинки з такого стану. Початкова кількість n_0 збуджених квазічастинок залежить від типу частинки-снаряду; у реакціях з нуклонами можна вважати $n_0 = 3$. У моделі Грифіна величина τ_n обчислювалася як час, що витрачається для переходу з початкового в *n*-й стан з послідовним збільшенням кількості екситонів на два за рахунок парних зіткнень між нуклонами. Більш досконалий метод розрахунку τ_n , що базується на кінетичному рівнянні для ймовірності заселення екситонних станів з урахуванням усіх можливих внутрішньоядерних переходів і вильоту частинок, започаткували К. Клайн, М. Блан (1971) та І. Рибанскі, П. Обложинскі, Е. Бетак (1973). Виліт складних частинок уперше

розглянуто в роботах К. Клайн (1972) та І. Рибанскі, П. Обложинскі (1973). Дослідження вильоту γ -квантів в екситонній моделі були започатковані в роботах В. А. Плюйка, Г. О. Прокопця (1978) та Е. Бетака та Я. Добеша (1979).

Однією з найважливіших особливостей вильоту частинок на прекомпаундних стадіях реакцій є збільшення частинок високих енергій порівняно з їхнім вильотом з компаунд-ядра. Дійсно, на передрівноважних стадіях кількість збуджених частинок менша від рівноважної. Звідси середня енергія $\overline{\epsilon} = U/n$ квазічастинки у стані з *n* екситонами буде більшою, ніж у стані термодинамічної рівноваги (7.109), і тому буде більшою середня енергія частинки, що вилітає. Типові спектри нейтронів і протонів у реакціях (n,n') і (n,p) на важких ядрах, що бомбардуються нейтронами енергії 14 МеВ, показано на рис. 7.5. Як бачимо, при енергіях збудження ~20 МеВ передрівноважна емісія приводить до значного збільшення кількості нуклонів високих енергій. На початкових етапах прекомпаунд-реакцій кутовий розподіл вилітаючих частинок асиметричний у системі центра мас.

Зауважимо, що у феноменологічних екситонних моделях зазвичай статистично враховуються як прямі процеси, що не пов'язані зі збудженням колективних станів (як на рис. 7.2, (1)), так і власне передрівноважні, коли до вильоту частинки енергія збудження рівномірно розподіляється між збудженими екситонами (рис. 7.2, (4)). Виявилося, що за енергій збудження ~20 МеВ емісія нейтронів з початкового стану з $n_0 = 3$ екситонами є на ≈ 80÷90% прямим непружним розсіянням (А.В. Ігнатюк, В.П. Лунєв, В.Г. Проняєв, 1975). Мікроскопічні теорії багатоступеневих ядерних реакцій з розділенням внесків прямих і передрівноважних процесів розроблено в роботах Х. Фешбаха, А. Кермана, С. Куніна (1980); Т. Тамури, Т. Удагави, Г. Ленске (1982); Г. Нішиокі, Г. Вайденмюллера та С. Іошиди (1988).



Рис. 7.5. Вплив прекомпаунд-емісії на спектр нейтронів (а) і протонів (б) у реакціях (n,n') і (n,p). Криві: суцільні – розрахунки з урахуванням передрівноважної емісії; штрих-пунктирні – випаровування з компаунд-ядра

Задачі та завдання для самостійної роботи

7.1. Визначити орбітальний момент нейтрона l_n (в одиницях \hbar) у реакції 9_4 Be $(\alpha, n) {}^{12}_6$ C у припущенні, що орбітальний момент α -частинки l_{α} дорівнює нулю.

Розв'язання: для визначення орбітального моменту нейтрона використовуємо закон збереження повного моменту кількості руху (7.93) і парності (7.95). Урахуємо, що спіни та парності ядер і частинок з даної реакції мають такі значення: $I_{\rm Be}^{\pi} = 3/2 -$, $I_{\alpha}^{\pi} = I_{\rm C}^{\pi} = 0 +$, $s_n^{\pi} = 1/2 +$. Тому закон збереження повного моменту кількості руху набуває вигляду $\vec{I}_{\rm Be} = \vec{s}_n + \vec{l}_n$, тобто $|I_{\rm Be} - s_n| \le l_n \le I_{\rm Be} + s_n$, і з ним узгоджуються тільки такі значення орбітального моменту: $l_n = 1, 2$. Згідно із законом збереження парності має виконуватися рівність $-1 = (-1)^{l_n}$. Це означає, що в даній реакції орбітальний момент нейтрона дорівнює одиниці $l_n = 1$.

7.2. Проаналізувати залежність від кінетичних енергій відносного руху частинок перерізу бінарних ядерних реакцій біля енергії порогу

для екзотермічних і ендотермічних реакцій у припущенні слабкої залежності амплітуди реакції від кінетичної енергії частинок.

Розв'язання: відповідно до формул (7.81), (7.67) диференціальний переріз бінарних реакцій із переходом з каналу α у β має вигляд

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\mu_{\alpha}}{\mu_{\beta}} \frac{k_{\beta}}{k_{\alpha}} w_{\alpha \to \beta} = \frac{\upsilon_{\beta}}{\upsilon_{\alpha}} w_{\alpha \to \beta},$$

де $\upsilon_{\gamma} = \sqrt{2\epsilon_{\gamma}/\mu_{\gamma}}$ – відносна швидкість руху частинок з ефективною масою μ_{γ} і кінетичною енергією ϵ_{γ} у каналі $\gamma\,,\,$ а $w_{\alpha \to \beta} = \int d\Omega \Big| f_{\alpha \to \beta}(\vec{k}_{\alpha}, \vec{k}_{\beta}) \Big|^2$ – проінтегрований за кутами квадрат амплітуди реакції. Згідно з умовами задачі залежність перерізу від кінетичної енергії визначається відношенням відносних швидкостей частинок у кінцевому та початковому каналах $\sigma_{\alpha\beta} \sim \frac{\upsilon_{\beta}}{\upsilon_{\alpha}}$. Спочатку розглянемо екзотермічні ядерні реакції $a + X \rightarrow b + Y + |Q|$ з енергією виходу Q > 0. У цьому випадку за низьких енергій частинки у вхідному каналі $\varepsilon_{\alpha} << Q$ швидкість частинки у вихідному каналі буде майже сталою $\upsilon_{\beta} \cong \sqrt{2Q/\mu_{\beta}}$, і переріз реакції буде обернено проповідносній швидкості рційним В початковому каналі: $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\text{const}}{\upsilon_{\alpha}} \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\alpha}}}.$

Зазначимо, що залежність перерізу екзотермічних реакцій підтверджується експериментальними даними із взаємодії повільних нейтронів з атомними ядрами й є важливою, зокрема в ядерній енергетиці при оптимізації вироблення енергії на атомних електростанціях з ядерними реакторами на повільних нейтронах. В ендотермічних реакціях $a + X \rightarrow b + Y - |Q|$ біля порогу реакції буде сталою енергія частинки у вхідному каналі $\upsilon_{\alpha} \cong \sqrt{2 |Q| / \mu_{\alpha}}$, а швидкість у вихідному каналі залежить від енергії порогу реакції $\upsilon_{\beta} \cong \sqrt{2(\varepsilon_{\alpha} - E_{nop})/\mu_{\beta}}$, тоді переріз реакції біля порогу буде мати вигляд: $\sigma_{\alpha\beta} = \text{const} \cdot \upsilon_{\beta} \sim \sqrt{\varepsilon_{\alpha} - E_{\text{пор}}}$. За умовою задачі для перерізу пруж-

ного розсіяння маємо $\sigma_{\alpha\alpha} \cong const$. Для фізичної інтерпретації цих

результатів перепишемо переріз реакції у вигляді $\sigma_{\alpha\beta} \sim \frac{\upsilon_{\beta}}{\upsilon_{\alpha}} = \frac{\tau_{\alpha}}{\tau_{\beta}}$, де

 $\tau_{\gamma} = R / v_{\gamma}$ час руху частинок в каналі γ в області взаємодії R. Звідки маємо, що переріз екзоенергетичної реакції біля порогу визначається часом $\tau_{\alpha} \sim 1 / v_{\alpha}$, який проводить частинка поблизу ядра у вхідному каналі, а для ендоенергетичної реакції – часом $\tau_{\beta} \sim 1 / v_{\beta}$, що проводить частинка поблизу ядра у вихідному каналі.

7.3 Проаналізувати залежності ширин розсіяння Γ_{el} і реакцій Γ_{r} від енергії частинки, що налітає, які б узгоджувалися з такими залежностями перерізів взаємодії частинки з ядром $\sigma_{el} \cong \text{const}$ і $\sigma_r \sim 1/\nu$, де ν – відносна швидкість частинки. Розглянути зіткнення частинок низьких енергій з утворенням вузького резонансу складеного ядра, коли перерізи описуються формулами Брейта–Вігнера (7.59), (7.64).

Розв'язання: згідно із формулами (7.59), (7.64) маємо

$$\sigma_{r} = \frac{\pi}{k^{2}} \frac{\Gamma_{e}/\Gamma_{r}}{(E - E_{r})^{2} + \Gamma^{2}/4},$$

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^{2}} \left\{ 4\sin^{2}kR + \frac{\Gamma_{el}^{2}}{(\varepsilon - E_{r})^{2} + \Gamma^{2}/4} + \frac{4\Gamma_{el} \cdot \sin kR}{(\varepsilon - E_{r})^{2} + \Gamma^{2}/4} \right\},$$

де $\Gamma = \Gamma_{\rm el} + \Gamma_{\rm r}$ – повна ширина резонансу, а E_r – його енергія; $k = \mu \cdot v / \hbar = \sqrt{2\mu\epsilon / \hbar^2}$ – хвильовий вектор відносного руху частинки зі зведеною масою μ та енергією ϵ . З урахуванням умови $\Gamma_{\rm r} << E_{\rm r}$ і за низьких енергій $\epsilon << E_r$, kR << 1 отримуємо такі залежності від швидкості:

$$\sigma_{\rm r} \cong \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_{\rm el} \Gamma_{\rm r}}{E_{\rm r}^2} \sim \frac{\Gamma_{\rm el} \Gamma_{\rm r}}{v^2},$$

а

-	~	0
3	ø	ð

$$\sigma_{\rm el} = \frac{\pi}{k^2} \left\{ 4(kR)^2 + \frac{\Gamma_{\rm el}^2}{E_r^2} - \frac{\Gamma_{\rm el} \cdot kR}{E_r^2} \left[E_r + \Gamma kR \right] \right\}$$
$$\sim a_1 + a_2 \frac{\Gamma_{\rm el}}{v} + a_3 \frac{\Gamma_{\rm el}^2}{v^2}$$

зі сталими a_j . Звідки знаходимо, що в низькоенергетичних реакціях, які відбуваються з утворенням вузького резонансу складеного ядра і сталим перерізом пружного розсіяння та залежністю 1/v для перерізу реакцій, ширина розсіяння буде зменшуватися з енергією $\Gamma_{\rm el} \sim v \sim \sqrt{\varepsilon}$, а ширина реакцій буде сталою $\Gamma_{\rm r} = {\rm const}$. Із задачі 7.2 видно, що такий випадок виникає для екзотермічних реакцій взаємодії повільних нейтронів з атомними ядрами, а саме: в області низьких енергій нейтронів, коли можливі тільки їхні розсіяння та радіаційне поглинання, ширина пружного розсіяння зменшується з енергією нейтрона, а радіаційна ширина майже стала, оскільки вона залежить від енергії збудження $U = S_n + \varepsilon \cong S_n$, яка визначається енергією відділення нейтронів при утворенні складеного ядра повільними нейтронами.

7.4. Визначити спін і парність проміжного складеного ядра в реакції $n + {}^7_4\text{Be} \rightarrow \alpha + \alpha$ у припущенні таких значень орбітальних моментів відносного руху частинок: $l_{\alpha}, l_p \leq 1$.

7.5. Визначити орбітальний момент нейтрона l_n у реакції радіаційного поглинання ${}^{115}_{49}$ In (n,γ) ${}^{116}_{49}$ In з випромінюванням *E*1 та *M*1 γ -квантів.

7.6. Довести рівняння неперервності (7.28) у випадку комплексного потенціалу (7.28) взаємодії частинки з ядром.

Розділ 8

ПОДІЛ АТОМНИХ ЯДЕР

8.1. Механізм поділу важких ядер. Модель рідкої краплини

Поділом ядер називається процес перетворення важкого ядра на декілька з меншими масами. Спрощено процес поділу, наприклад на два ядра, можна записати у вигляді

$$(Z,A) \to (Z_l,A_l) + (Z_h,A_h) + Q_f, \qquad (8.1)$$

де (Z, A) – материнське ядро, (Z_l, A_l) , (Z_h, A_h) – дочірні ядра (ядра-уламки), Q_f – енергія, що вивільнюється при поділі. Окрім ядер-уламків, при поділі випромінюються нейтрони, β -частинки $(e^{(\pm)})$, антинейтрино (нейтрино) (v_e, \overline{v}_e) і γ -кванти (γ), тому енергія Q_f складається з кінетичної енергії відносного руху уламків (E_T) та енергії, що уноситься іншими частинками; умовно її можна зобразити як $Q_f = E_T + v \cdot n + v_\beta \cdot e^+ + v_v \cdot \overline{v}_e + \gamma$, де явно вказані кількості випромінених нейтронів (v), β -частинок (v_β) і нейтрино (антинейтрино) (v_v).

Поділ енергетично можливий, якщо для деяких ядер-уламків A_l і A_h виконується нерівність

$$M(Z,A) > M(Z_l,A_l) + M(Z_h,A_h) \Longrightarrow Q_f > 0.$$
(8.2)

Умова (8.2) виконується, наприклад, для ядер на лінії β стабільності з масовими числами A > 110. Водночає поділ спостерігається не для всіх ядер. Це зумовлено тим, що уламки по-

ділу мають значний електричний заряд, і тому, коли енергія Q_f

менша від висоти бар'єра їхнього вильоту заважає кулонівський бар'єр.

Розрізняють спонтанний поділ ядер, що належить до радіоактивних перетворень, і вимушений, який відбувається під дією різних типів частинок (нейтронів, фотонів та ін.). Спонтанний поділ це самовільний (не вимушений зовнішніми чинниками) розпад ядер, що перебувають в основному енергетичному стані. Цей процес скорочено позначають літерами sf (від англ. spontaneous fission – спонтанний поділ). Вимушений поділ під дією частинок типу х є ядерною реакцією, і тому його позначають як реакцію (x, f). При такому поділі ядро, що утворюється під час реакції і згодом розпадається, перебуває у збудженому стані.

Уперше ядра-уламки з великими значеннями масових чисел спостерігали О. Ган та Ф. Штрасман (1938) при опроміненні нейтронами ядер урану. Фізичну інтерпретацію цього процесу, що є поділом ядра з утворенням елементів з меншою масою, уперше запропонували Л. Мейтнер та О. Фріш (1939). Вони ввели термін ядерний поділ, беручи до уваги подібність цього явища до поділу клітин у біології, і дали якісне пояснення цього процесу як зумовленого конкуренцією сил кулонівського відштовхування заряджених частинок у ядрі та поверхневого натягу. Спонтанний поділ відкрили Г. Фльоров і К. Петржак у 1940 р. У важких ізотопів з $Z^2 / A < 44,5$ спонтанний поділ є досить рідкісним явищем порівняно з α -розпадом. Наприклад, спонтанний поділ ядра ²³⁸ ₀U $(Z^2 / A = 35, 6)$ відбувається в 2.10⁶ разів рідше, ніж α -розпад.

Процес поділу ядра супроводжується глибокою перебудовою структури ядра, тому для його опису потрібно враховувати багаточастинкові кореляції, тобто колективні ступені свободи. Найпростішою колективною моделлю є краплинна модель ядра. Кількісну теорію поділу, що базується на розгляді ядра як краплини ядерної рідини, запропонували Н. Бор і Дж. Уілер та незалежно Я. І. Френкель (1939). Завдяки цій теорії вдалося побудувати простий і наочний механізм процесу симетричного поділу ядер.

Як вже зазначалося при розгляді масової формули (див. підрозд. 1.4), у цій моделі потенціальна енергія складається із трьох компонентів, а саме, об'ємної енергії, енергії поверхневого натягу E_S та електростатичної енергії E_C кулонівського відштовхування між протонами. Поверхнева енергія виникає внаслідок зменшення взаємодії між нуклонами на поверхні ядра: нуклони, що розташовані на поверхні, притягуються лише з внутрішнього боку ядра. Зрозуміло, що при цьому енергія поверхневого натягу вважається пропорційною площі поверхні ядра. Ядерна рідина майже нестислива, і тому вважається, що об'ємна енергія з деформацією не змінюється.

У краплинній моделі ядра поділ трактується як розрив краплини зарядженої рідини. При цьому, згідно з уявленнями класичної фізики, можливість поділу ядра на частини є прямим наслідком існування коливань його поверхні й зумовлена нестабільністю ядра відносно поверхневих коливань з великою амплітудою. За рахунок поверхневих коливань ядро може трохи розтягнутися. При розтягненні об'єм краплі залишається приблизно сталим, але повна площа поверхні збільшується. Іншими словами, можна вважати, що об'ємна енергія не змінюється, у той час як поверхнева енергія істотно зростає. При розтягненні середня відстань між нуклонами також зростає, тому електростатична енергія кулонівського відштовхування протонів зменшується. За малих деформацій зростання поверхневої енергії є більшим, ніж спадання електростатичної енергії, тому потенціальна енергія системи також збільшується (рис. 8.1):

$$E = E_{\rm S} + E_C \,. \tag{8.3}$$

Водночас існує границя збільшення поверхневої енергії. При розтягненні на відстань, трохи меншу від її значення, краплина має форму, схожу на гантель; подальше віддалення двох половин вже не приводить до збільшення поверхні. Кожний із фрагментів намагається набути сферичної форми, що призводить до ще більшого звуження шийки (перемички між фрагментами). Оскільки дві частини краплі із формою гантелі рухаються в різні боки, то кулонівська енергія продовжує зменшуватися, що призводить до зменшення швидкості зростання потенціальної енергії системи.



Рис. 8.1. Потенціальна енергія системи під час симетричного поділу як функція відстані між центрами мас продуктів поділу; E_0 – енергія основного стану ядра

При подальшому розтягненні шийка між гантелеподібними половинами краплини розривається та утворюються два ядра – продукти поділу, які вже не утримуються ні поверхневою, ні об'ємною силами. Відстань, на якій ядро розділяється на уламки називається *точкою розриву* (від англ. *scission point*). Після точки розриву відстань між фрагментами стає більшою за радіус дії короткодіючих ядерних сил. Кулонівське відштовхування примушує продукти поділу розлітатися в різні боки й зі збільшенням відстані між ними потенціальна енергія зменшується і неперервно переходить у кінетичну енергію уламків.

Розглянемо можливість кількісного опису симетричного поділу ядра за краплинною моделлю, припускаючи, що на першому етапі поділу ядро можна розглядати як еліпсоїд обертання. У цьому випадку зміну кулонівської та поверхневої енергій можна легко обчислити. Радіус $R(\theta, \phi)$, що визначає поверхню еліпсоїда обертання у внутрішній сферичній системі координат, має вигляд (див. підрозд. 1.5, 1.7):

$$R(\theta, \phi) = R_0'(\beta_2)(1 + \beta_2 \cdot Y_{20}(\theta, \phi)) \equiv R_0'(\alpha_2)(1 + \alpha_2 \cdot P_2(\theta)),$$

$$\alpha_2 = (5 / 4\pi)^{1/2} \beta_2 \cong 0,631 \cdot \beta_2,$$
(8.4)

де β_2 , α_2 – параметри квадрупольної деформації ядра; $Y_{20}(\theta, \phi)$, $P_2(\theta)$ – сферична гармоніка і поліном Лежандра другого ступеня (див. підрозд. 3.5); θ – полярний кут у внутрішній системі з віссю вздовж осі симетрії ядра; R_0' – параметр, що характеризує збереження об'єму ядра. Відповідно до (8.4) для великої півосі еліпсоїда a (що напрямлена вздовж осі симетрії) і малої – b (рис. 8.2) маємо такі вирази:

$$a = R(\theta = 0, \varphi) = R_0'(\alpha_2)(1 + \alpha_2),$$

$$b = R(\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi) = R_0'(\alpha_2)(1 - 0, 5 \cdot \alpha_2).$$
(8.5)



Рис. 8.2. Деформація ядра в процесі симетричного поділу

Умова нестисливості ядерної рідини приводить до збереження об'єму ядер незалежно від їхньої форми. Для ядер у вигляді еліпсоїда обертання цю умову запишемо як

$$V = \frac{4\pi}{3}ab^2 = \frac{4\pi}{3}R_0^3,$$

де $R_0 = r_0 \cdot A^{1/3}$ – радіус еквівалентного сферичного ядра. З ура-

хуванням (8.5) звідси знаходимо вираз для параметра R_0' :

$$R_0'(\alpha_2) = R_0 \left(1 - \frac{3}{4}\alpha_2^2 + \frac{1}{4}\alpha_2^3\right)^{-1/3} = R_0 \cdot \left(1 + \frac{\alpha_2^2}{4} - \frac{2\alpha_2^3}{12}\right).$$
(8.6)

За малих деформацій сили поверхневого натягу ядерної рідини відіграють роль пружних сил, що намагаються повернути

ядро до початкової сферичної форми. На противагу цьому кулонівське відштовхування двох додатних зарядів із центрами у фокусах еліпсоїда має приводити до збільшення деформації та розділення ядра на два уламки однакової маси, як це зображено на рис. 8.2.

Потенціальна енергія поверхневого натягу ядра $E_{\rm S}$ пропорційна площі $S(\alpha_2)$ його поверхні

$$E_{\rm S} = \sigma S(\alpha_2) \,, \tag{8.7}$$

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу. Як відомо, площа поверхні витягнутого еліпсоїда обертання з півосями *a* та *b* (8.5) дорівнює

$$S(\alpha_2) = 2\pi a b (\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}), \qquad (8.8)$$

де $\varepsilon = (\sqrt{a^2 - b^2}) / a$ – ексцентриситет еліпсоїда. Підставляючи співвідношення (8.4) у (8.8), отримуємо вираз для розкладу площі поверхні в ряд за α_2 :

$$S(\alpha_2) = S_0 \left(1 + \frac{2\alpha_2^2}{5} - \frac{4\alpha_2^3}{105} + ... \right), \quad S_0 = S(\alpha_2 = 0) = 4\pi R_0^2, \quad (8.9)$$

де S₀ – площа поверхні сфери. Згідно з (8.7) отримаємо вираз для перших двох доданків розкладу потенціальної енергії поверхневого натягу ядра за параметром деформації

$$E_{\rm S} = E_{\rm S}^{(0)} \left(1 + \frac{2\alpha_2^2}{5} - \frac{4\alpha_2^3}{105} \right), \quad E_{\rm S}^{(0)} = 4\pi R_0^2 \sigma = a_{\rm IIOB} A^{2/3}, \quad (8.10)$$

де $E_{\rm S}^{(0)}$ – енергія поверхневого натягу сферичного ядра, а величину $a_{\rm пов} = 4\pi r_0^2 \sigma$ можна ототожнити з коефіцієнтом a_2 при поверхневому компоненті масової формули Вейцзекера (1.17): $a_{\rm пов} \equiv a_2 = 17,8$ МеВ. Видно, що поверхнева енергія спочатку зростає зі збільшенням деформації, як її квадрат, а далі зменшується, тобто має вигляд потенціалу з бар'єром.

Загальний вираз для кулонівської енергії має вигляд

$$E_C = \frac{1}{2} \int d\vec{r} \rho_{\rm p}(\vec{r}) V(\vec{r}), \qquad (8.11)$$

де $\rho_{\rm p}(\vec{r})$ – густина розподілу протонів, а $V(\vec{r})$ – кулонівський потенціал взаємодії в точці \vec{r} одиничного заряду з протонами ядра

$$V(\vec{r}) = e^2 \int d\vec{r}' \rho_{\rm p}(\vec{r}') |r - r'|^{-1}. \qquad (8.12)$$

Для рівномірно зарядженого еліпсоїда після інтегрування вираз (8.11) матиме вигляд (Р. Берінджер, В. Кнокс, 1961):

$$E_C = E_C^{(0)} \cdot \frac{(1 - \varepsilon^2)^{1/3}}{2\varepsilon} \ln \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad E_C^{(0)} = \frac{3}{5} \frac{e^2 Z^2}{R_0} = a_{\text{кул}} \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$
 (8.13)

З урахуванням третього порядку за деформацією знаходимо

$$E_C = E_C^{(0)} \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{5} - \frac{4\alpha_2^3}{105} \right) , \qquad (8.14)$$

де $E_C^{(0)}$ – кулонівська енергія рівномірно зарядженої кулі, $a_{\text{кул}} = 3e^2 / 5r_0 = 0,864 / r_0 \text{ MeB}$ – параметр кулонівської взаємодії; наприклад, у масовій формулі Вейцзекера (1.17) використовується значення $a_{\text{кул}} \equiv a_3 = 0,71 \text{ MeB}.$

Порівняння виразів (8.10) і (8.14) показує, що за малих деформацій енергія поверхневого натягу $E_{\rm S}$ зростає швидше, ніж зменшується кулонівська енергія E_C , і в повній енергії утворюється потенціальний бар'єр. Сума поверхневої та кулонівської енергій (8.10), (8.14) має вигляд

$$E(\alpha_2) = E_0 + E_{def}(\alpha_2),$$
 (6.15)

де $E_0 = E_C^{(0)} + E_S^{(0)}$ – потенціальна енергія у сферичному ядрі; $E_{def}(\alpha_2)$ – зміна потенціальної енергії з деформацією, яка отримала назву повної енергії деформації ядра:

$$E_{\rm def}(\alpha_2) = E_S^{(0)}\left(\frac{2}{5}(1-x)\alpha_2^2 - \frac{4}{105}(1+2x)\alpha_2^3\right). \tag{8.16}$$
Величину x, що є відношенням кулонівської енергії до подвоєного значення поверхневої енергії в еквівалентному сферичному ядрі

$$x = \frac{E_C^{(0)}}{2E_S^{(0)}} = \frac{a_{\text{кул}}}{2a_{\text{пов}}} \frac{Z^2}{A},$$
(8.17)

називають *параметром подільності ядра* (від англ. conventional fissility parameter). Зазначимо, що співвідношення (8.16) дозволяє апроксимувати значення енергії деформації, що отримані без використання наближення еліпсоїдальних форм, з параметрами деформацій до $\alpha_2 \sim 0.6$.

Енергія деформації (8.16) складається із доданків другого та третього порядків за деформацією. Перший компонент домінує за малих значень α_2 , тобто біля сферичної поверхні. У цьому випадку при x < 1 енергія деформації збільшується з α_2 , і тому ядро є стабільним відносно малих деформацій, а при значеннях x > 1 ядро стає нестабільним. Енергія деформації також може бути від'ємною для достатньо великих значень α_2 і при x < 1.

Таким чином, при малих еліпсоїдальних деформаціях енергія деформації ядра спочатку зростає, але зі збільшенням α_2 за рахунок другого компонента в (8.16) може утворитися деякий енергетичний бар'єр E_f , який називають *бар'єром поділу*. Характер зміни енергії деформації $E_{def}(\alpha_2)$ залежить від знака похідної $dE_{def} / d\alpha_2$. Наприклад, для ядра урану $^{238}_{92}$ U величина $dE_{def} / d\alpha_2 > 0$, $E_{def}(\alpha_2)$ за малих α_2 зростає. При цьому крива зміни потенціальної енергії має вигляд, зображений на рис. 8.1.

Значення параметра деформації $\alpha_2 = \alpha_2^*$, що відповідає максимуму кривої потенціальної енергії (тобто задовольняє рівняння $dE_{def} / d\alpha_2 = 0$), називається *критичною деформацією*, або *сідловою точкою* (від англ. *saddle point*). Величина бар'єра поділу E_f дорівнює значенню енергії деформації в сідловій точці

 $E_f = E_{def}(\alpha_2^*)$. Процес руху ядра від сідлової точки до точки розриву називають *спуском ядра з бар'єра*.

Із (8.16) отримаємо координату сідлової точки, звідси маємо таке рівняння для визначення α_2^* :

$$dE_{\rm def}(\alpha_2^*) / d\alpha_2 = E_{\rm S}^{(0)} \left(\frac{4}{5}(1-x)\alpha_2^* - \frac{4}{35}(1+2x)\alpha_2^{*2}\right) = 0. \quad (8.18)$$

Тепер знаходимо значення параметра деформації в сідловій точці

$$\alpha_2^* = 7(1-x) / (1+2x) \tag{8.19}$$

і вираз для висоти бар'єра поділу

$$E_f \equiv E_{\text{def}}(\alpha_2^*) = q_f \cdot \frac{(1-x)^3}{(1+2x)^2} , \qquad (8.20)$$

де

$$q_f = \frac{98}{15} E_{\rm S}^{(0)} = \frac{98}{15} \cdot a_{\rm IIOB} \cdot A^{2/3} \cong 116,2933 \cdot A^{2/3}, \text{ MeB}.$$
 (8.21)

Відповідно до наближень, що були використані для знаходження (8.20), цей вираз є точним рівнянням при достатньо малих значень деформацій α_2^* , тобто згідно з (8.19) – для малих значень |1-x| (фактично для |1-x|, менших від ~ 0,4). Іноді параметр подільності x (8.17) подають у вигляді

$$x = \frac{X}{X_{\rm kp}},\tag{8.22}$$

де величини

$$X \equiv \frac{Z^2}{A}, \quad X_{\rm kp} \equiv 2\frac{a_{\rm IIOB}}{a_{\rm KVJI}} \tag{8.23}$$

називають параметром поділу і його критичним значенням. Вираз (8.20) для висоти бар'єра як функції параметра поділу має вигляд

$$E_f \equiv \tilde{q}_f \cdot \frac{(X_{\rm kp} - X)^3}{(X_{\rm kp} + 2X)^2},$$
 (8.24)

де

$$\tilde{q}_f = \tilde{q}_f / X_{\text{кр}} = \frac{49}{15} \cdot a_{\text{кул}} \cdot A^{2/3} \cong 2,319 \cdot A^{2/3}, \text{ MeB}.$$
 (8.25)

Різні дослідники використовують дещо неоднакові критичні значення параметра поділу, що лежать в інтервалі:

$$44,5 \le X_{\rm kp} < 51$$
. (8.26)

Наприклад, для значень $a_{\text{пов}} = 17,8 \text{ MeB}$ та $a_{\text{кул}} = 0,71 \text{ MeB}$ із формули Вейцзекера (1.17) маємо, що $X_{\text{кр}} = 2a_{\text{пов}} / a_{\text{кул}} = 50,141$. Як емпіричне критичне значення параметра поділу зазвичай використовують $X_{\text{кр}} = 44,5$.

Згідно з (8.20), (8.24) в області x < 1 ($x < x_{\rm kp}$) висота бар'єра E_f тим менша, чим більше значення параметра подільності ядра x, тобто чим більше значення параметра поділу $X = Z^2 / A$ порівняно з його критичним значенням $X_{\rm kp}$. Наявність потенціального бар'єра E_f робить процес поділу ядер малоймовірним як з погляду класичної фізики, так і квантової механіки. А саме, згідно з класичною фізикою ядро може ділитися лише за умови малоймовірних флуктуацій поверхні з великими значеннями параметрів деформації, що перевищують критичні значення. Згідно з уявленнями квантової механіки підбар'єрний розпад ядер зумовлений ефектом тунелювання (див. підрозд. 5.5) і його ймовірність спадає з висотою бар'єра за експонентою.

Якщо бар'єр поділу від'ємний або нульовий, то сферична форма ядра буде нестійкою й ядро миттєво поділиться. Відповідно до (8.20), (8.24) межа стійких відносно миттєвого симетричного поділу ядер (тобто ядер з $E_f > 0$) визначається такими значеннями параметрів подільності x і поділу X:

$$X = \frac{Z^2}{A} \le X_{\rm kp} \,, \quad x = X / X_{\rm kp} \le 1 \,. \tag{8.27}$$

Якщо $X = X_{\text{кр}}$ (x = 1), то бар'єр поділу дорівнює $E_f = 0$.

Критичні значення параметра поділу X більші за ті, що відповідають умові енергетичної можливості процесу поділу на два уламки, тобто умові

$$Q_f \equiv c^2 (M(Z, A) - M(Z_l, A_l) - M(Z_h, A_h)) > 0.$$
(8.28)

Розглянемо обмеження на значення параметра поділу, що виникають за умови (8.28). Припустимо, що ядро ділиться на два фрагменти з масовими числами kA та (1-k)A. Оскільки нуклони в ядрі розподілені майже рівномірно, то вважатимемо, що і протони в уламках розподілені як kZ та (1-k)Z, а тому в такій самій пропорції розподіляється й заряд. Згідно з (8.28) і визначенням енергій зв'язку (див. підрозд. 1.4) енергетичний вихід процесу поділу Q_f на два фрагменти буде додатним, якщо енергії зв'язку ядер задовольняють нерівність

$$B(kZ, kA) + B((1-k)Z, (1-k)A) > B(Z, A).$$
(8.29)

Звідси, використовуючи формулу Вейцзекера (1.17) з урахуванням об'ємної, поверхневої та кулонівської компонентів, знаходимо, що енергетичний вихід буде додатним для ядер із параметром поділу, що задовольняє нерівність

$$X = \frac{Z^2}{A} > X_{\rm kp} \frac{1}{2} \frac{(1-k)^{2/3} + k^{2/3} - 1}{1-k^{5/3} - (1-k)^{5/3}}.$$
(8.30)

Для симетричного поділу k = 0,5 без урахування сил симетрії оболонкових і парно-непарних ефектів у формулі Вайцзекера знаходимо умову енергетичної можливості виникнення процесу поділу

$$X > 0.35 X_{\rm KD} \in 15.6 \div 17.9 . \tag{8.31}$$

(8.32)

Таким чином, ядра з параметром поділу, меншими від $X_{\rm kp}$ і таким, що

$$0,35X_{\rm kp} < X < X_{\rm kp}$$

можуть спонтанно ділитися на симетричні уламки. Водночас їхній час життя буде тим більшим, чим меншим є значення параметра X через те, що з його зменшенням збільшується бар'єр поділу (8.24).

На рис. 8.3 наведено залежність параметра поділу від заряду ядер. Видно, що передбачувана границя стабільності ядер за $X_{\rm кp} = 44,5$ розташована між значеннями Z, приблизно рівними



110 та 120, що задовільно узгоджуються з експериментальними даними.

Рис. 8.3. Залежність параметра поділу $X = Z^2/A$ від заряду ядра. Максимальне значення відповідає критичному значенню параметра поділу, яке вважається таким, що дорівнює $X_{\rm kp} = 44,5$ (пунктирна лінія)

На рис. 8.4 наведено експериментальні дані залежності періоду піврозпаду спонтанного поділу ядер $T_{1/2}$ від параметра поділу. Видно, що період піврозпаду експоненціально збільшується зі зменшенням $X = Z^2 / A$, тобто зі збільшенням бар'єра поділу (8.24). Спонтанний поділ спостерігається, починаючи зі значень параметра $X = Z^2 / A$ приблизно рівних 35. Ядро ²³⁰Th має великий час життя відносно спонтанного поділу – понад 1,5·10¹⁷ років. Час життя ядра ²⁵⁶Fm дорівнює ~30 год.



гис. 8.4. залежність періоду напіврозпаду спонтанного поділу ядер від параметра поділу Z^2 / A

Уламки, що утворюються при поділі важких ядер, мають різні маси. Розподіл уламків поділу за масами зображують у вигляді графіка відносного виходу уламків з даною масою на один акт поділу залежно від масового числа уламка (т. зв. крива виходу мас). Для спонтанного поділу та поділу ядер з невеликою енергією збудження крива виходу мас має характерний двогорбий вигляд (рис. 8.5). Умова нормування розподілу мас обирається так, щоб сума виходів під кожним із піків (для важких і легких уламків) становила 100 %, тому повний вихід усіх мас на один акт умовно дорівнює 200 %.

Виходи уламків різних мас змінюються в широких межах: від 10^{-4} % на краях розподілу і 7 % в околі максимуму (рис. 8.5). Відносна кількість актів поділу $^{235}_{92}$ U (при його збудженні тепловими нейтронами), у яких утворюються два уламки однакової маси, становить 10^{-2} %, тоді як асиметричний поділ з розпадом на важкий і легкий уламки з найбільш імовірними масовими чис-

лами ($A_h \cong 139$, $A_l \cong 95$) відбувається в 7 % випадків, тобто в 700 разів частіше.





тепловими (~0,025 eB) і швидкими (14 MeB) нейтронами

Форма масового розподілу залежить як від масового числа ядра, що ділиться, так і від енергії збудження. При спонтанному й вимушеному поділах тепловими нейтронами наймовірнішим зазвичай є асиметричний поділ. При збільшенні маси ядра, що ділиться, максимуми в масовому розподілі уламків поділу починають зближатися, причому найбільш імовірна маса важкого уламка майже не змінюється ($A_h \approx 140$), а максимум, що відповідає середній масі легких уламків, рухається в бік більших мас ($A_l \approx 90 \Rightarrow 110$) (рис. 8.6, 8.7). Такий ефект можна пояснити впливом оболонкової структури ядра. На межі групи важких уламків міститься двічі магічне ядро ${}^{132}_{50}$ Sn. Утворення такої стабільної конфігурації задає положення нижньої межі масового розподілу важких уламків. Масовий розподіл легких уламків формується з тих нуклонів, що залишилися, і тому зростає зі збільшенням маси

материнського ядра. При збільшенні енергії збудження ядра вплив оболонкових ефектів зменшується, і тому зменшується провал між горбами, тобто розподіл стає більш симетричним (рис. 8.5, 8.7).



Рис. 8.6. Найбільш імовірні маси важкого та легкого уламків поділу залежно від маси материнського ядра

Експериментально визначити розподіл зарядів первинних уламків поділу важче, ніж розподіл мас, оскільки уламки розпадаються з випромінюванням β -частинок. У першому наближенні можна вважати, що середній питомий заряд уламків Z_i / A_i такий, як у материнського ядра Z / A, і розподіл $p(Z_i)$ зарядів Z_i уламків із масовим числом A_i можна подати у вигляді такої функції:

$$p(Z_i) = \exp\left(-\frac{(Z_i - \langle Z_i \rangle)^2}{c}\right),$$
 (8.33)

де стала $c = 0, 8 \div 1, 0$, а

$$\langle Z_i \rangle = A_i \cdot \frac{Z}{A}$$
 (8.34)

- середній заряд уламка.

Експериментально також спостерігається вимушений поділ ядер на три і чотири уламки. Зокрема, за низьких енергій збудження поділ на три приблизно однакові уламки є досить рідкісним явищем і спостерігається в ~ 10^{-6} разів рідше, ніж поділ на два уламки.



Рис. 8.7. Відносний вихід уламків спонтанного поділу ядер ²⁵²₉₈Cf, ²⁵⁶₁₀₀Fm, ²⁵⁷₁₀₀Fm і вимушеного поділу ядра ²⁵⁷₁₀₀Fm

Асиметрія масового спектра призводить до асиметрії енергетичного спектра уламків поділу. Із закону збереження імпульсу випливає, що $\vec{p}_{\rm h} + \vec{p}_{\rm l} \approx 0$, або $p_{\rm h} \cong p_{\rm l}$ з $p_a = \sqrt{2M_a E_a}$, і тому відношення кінетичних енергій легкого уламка $E_{\rm l}$ до важкого $E_{\rm h}$ приблизно обернено пропорційний відношенню їхніх мас

$$E_{\rm l} / E_{\rm h} = M_{\rm h} / M_{\rm l},$$
 (8.35)

де M_1 і M_h – маси легкого й важкого уламків, відповідно. Користуючись цим співвідношенням, можна з розподілу уламків за енергією (рис. 8.8) знайти розподіл за масами, і навпаки. Наприклад, якщо вважати, що повна кінетична енергія E_T (від англ. *total kinetic energy* (ТКЕ)) уламків поділу ядра $^{235}_{92}$ U становить

 $\approx 160 \text{ MeB}$, то для важких ядер-уламків максимум в енергетичному спектрі буде за енергій $E_{\rm h} = E_T M_1 / (M_1 + M_{\rm h}) \approx 65 \text{ MeB}$, а для легких уламків він зміститься до значень $E_1 = E_T M_{\rm h} / (M_1 + M_{\rm h}) \approx 95 \text{ MeB}$.



Рис. 8.8. Розподіл за енергією виходу уламків вимушеного поділу ядра ²³⁵₉₂U тепловими нейтронами

8.2. Вплив ядерних оболонок на енергію деформації. Метод оболонкового доданка Струтинського

Модель рідкої краплини не виключає асиметричного поділу. У цій моделі асиметричний поділ можна розглядати як поділ ядра, що має форму груші в сідловій точці. Водночас модель рідкої краплини кількісно не описує закономірності асиметричного поділу. Для пояснення асиметрії в розподілі мас уламків та обчислення значень висоти бар'єрів поділу необхідно обов'язково врахувати вплив оболонкової структури, що зумовлена рухом нуклонів в одночастинковому самоузгодженому потенціалі (див. підрозд. 3.4, 3.5). Наприклад, у надважких ядрах з Z > 102 краплинним значенням бар'єра поділу зазвичай можна знехтувати, і тоді реальна висота бар'єра визначатиметься ядерними оболонками.

Уперше оболонкові ефекти при обчисленні енергій бар'єрів поділу емпірично врахував В. Святецький (1956). Він знайшов, що експериментальні значення енергій порогів вимушеного по-

ділу ядер з 230<A<240 можна досить точно апроксимувати, якщо врахувати оболонковий компонент (δE_{shell}) масової формули, що визначає відхилення маси основного стану ядер від гладкої кривої Вейцзекера, а також включити парно-непарні ефекти. Відповідний вираз для енергій бар'єра поділу має вигляд (у мегаелектрон-вольтах):

$$E_{f} = 0,00395 \cdot (50,13 - \frac{Z^{2}}{A})^{3} - 0,166 \cdot (40,2 - \frac{Z^{2}}{A})^{2} + \Delta - \delta E_{\text{shell}},(8.36)$$
де
парно-парні ядра,
непарні за А ядра
непарно-непарні ядра
$$\Delta = \begin{cases} -1,12 - 0 \\ 0 - +1,12 - 0 \end{cases}$$

Феноменологічний вираз для обчислення оболонкового компонента в масах ядер, що базувався на аналізі експериментальних значень їхніх мас, запропонували В. Маєрс і В. Святецький (1965, 1966). Цей вираз має вигляд

$$\delta E_{\text{shell}} = C \cdot \left[\frac{F(N) + F(Z)}{(A/2)^{2/3}} - c \cdot A^{1/3} \right] \cdot D , \qquad (8.37)$$

де C = 5,8 МеВ, c = 0,325. Функція F(Y) з Y = N, Z залежить від магічних чисел (за які обираються однакові для нейтронів і протонів значення $Y_i = 2, 8, 14$ (або 20), 28, 50, 82, 126, 184, 258), і в інтервалі магічних чисел $Y_{i-1} \le Y < Y_i$ функція F(Y) дорівнює

$$F(Y) = 0.6 \cdot \left[\frac{Y_i^{5/3} - Y_{i-1}^{5/3}}{Y_i - Y_{i-1}} \cdot \left(Y - Y_{i-1}\right) - \left(Y^{5/3} - Y_{i-1}^{5/3}\right) \right].$$
(8.38)

Параметр *D* у формулі (8.37) характеризує вплив деформації ядра на оболонкові ефекти і обирається у вигляді

$$D = \left(1 - 2 \cdot \frac{\langle \Delta R^2 \rangle}{a^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\langle \Delta R^2 \rangle}{a^2}\right), \quad (8.39)$$

де $a = 0,444 \cdot r_0 \phi M$, а $<\Delta R^2 > -$ середнє за кутами відхилення радіуса $R(\theta, \phi)$ деформованого ядра від радіуса еквівалентного сферичного ядра R_0 :

$$<\Delta R^{2}>=\int \left(R(\theta,\phi)-R_{0}\right)^{2}d\Omega/(4\pi).$$
(8.40)

Такий метод обчислення δE_{shell} базується винятково на експериментальних даних. За його допомогою можна отримувати реалістичні результати лише для тих ядер, що перебувають в околі лінії β -стабільності, а тому характеризуються малими деформаціями порівняно зі значеннями в сідловій точці. Вирази (8.37) – (8.39) параметризують висоту бар'єра поділу, тобто енергію деформації ядер у сідловій точці, і без додаткових досліджень їх не можна використовувати для обчислення потенціальної енергії деформації на всіх етапах процесу поділу. Зокрема, при великих деформаціях множник D приводить до загасання оболонкового доданка (8.37) у сильно деформованих ядрах, що перебуває в протиріччі з розрахунками енергетичного спектра сильно деформованих ядер (див. підрозд. 3.8).

Кількісний метод розрахунку внеску оболонкових ефектів у повну енергію ядер з довільною деформацією, що використовує одночастинковий спектр нуклонів у заданому середньому ядерпотенціалі, уперше запропонував ному i дослідив В. М. Струтинський (1966). Цей підхід отримав назву метод оболонкового доданка (або оболонкова поправка) Струтинського. Він базується на припущенні, що осцилююча частина δE_{shell} повної енергії ядра Е, яка визначає відхилення Е від її значення (E_{LDM}) за моделлю краплини ядерної рідини, збігається з осцилюючою частиною ($\delta E_{\rm osc}$) повної енергії ($E_{\rm SM}$) оболонкової моделі, що обчислюється з використанням спектра одночастинкових станів у феноменологічному середньому ядерному

потенціалі, який описує властивості одночастинкових станів в околі енергії Фермі:

$$\delta E_{\text{shell}} = \delta E_{\text{osc}} \equiv E_{\text{SM}} - E_{\text{SM}}, \qquad (8.41)$$

де $\tilde{E}_{\rm SM}$ – деяке середнє значення повної енергії оболонкової моделі. Повна енергія системи $E_{\rm SM}$ в оболонковій моделі є сумою енергій частинок на одночастинкових рівнях ε_i . Наприклад, енергія $E_{\rm SM}$ основного стану системи з A тотожних ферміонів дорівнює

$$E_{\rm SM} = \sum_{i=1}^{A} \varepsilon_i \ . \tag{8.42}$$

Зауважимо, що для спрощення вираз наведено без урахування виродження одночастинкових станів. Формулу (8.42) можна переписати у стандартному для статистичної фізики вигляді, якщо ввести таку густину одночастинкових рівнів $g(\varepsilon)$, що величина $g(\varepsilon)d\varepsilon$ дорівнює кількості рівнів $dn(\varepsilon)$ в інтервалі енергій між ε та $\varepsilon + d\varepsilon$. Очевидно, що для цього випадку густина одночастинкових рівнів матиме вигляд

$$g(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(\varepsilon - \varepsilon_i). \qquad (8.43)$$

Згідно з принципом Паулі рівні заповнюються послідовно аж до деякого верхнього рівня з енергією Фермі λ ($\lambda \equiv \varepsilon_F$) (див. підрозд. 3.3). У збуджених системах параметр λ називають *хімічним потенціалом*. Його значення можна знайти з умови фіксування повної кількості нуклонів, яка в цьому випадку збігається з кількістю одночастинкових заповнених станів, тобто станів з енергіями $\varepsilon_i \leq \lambda$:

$$A = \sum_{i=1}^{A} 1 = \int_{-\infty}^{\lambda} g(\varepsilon) d\varepsilon . \qquad (8.44)$$

Враховуючи визначення (8.43), енергію основного стану (8.42) можна переписати у вигляді

$$E_{\rm SM} = \sum_{i=1}^{A} \varepsilon_i = \int_{-\infty}^{\lambda} \varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon. \qquad (8.45)$$

Зауважимо, що при використанні цих формул треба також врахувати виродження одночастинкових станів ядер (див. під-

розд. 3.3). Зокрема, при розгляді нейтронів і протонів у ядрі як тотожних нуклонів одночастинкові рівні будуть чотирикратно виродженими, а одночастинкова густина рівнів матиме в чотири рази більші значення, ніж за формулою (8.43).



Рис. 8.9. Однорідний а) і реалістичний б) спектри нуклонів у ядрах (цифрами 1 і 2 вказано групування рівнів в оболонки)

Плавний компонент енергії \tilde{E}_{SM} у (8.41) відповідає однорідному одночастинковому спектру (рис. 8.9) із плавною густиною $\tilde{g}(\varepsilon)$, яка визначається після усереднення реальної густини з ваговою функцією $\Phi_{\gamma}(x)$, що зосереджена на деякому інтервалі усереднення γ , який перевищує відстань між оболонками

$$\tilde{g}(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\gamma}(\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\gamma}) \cdot g(\varepsilon') d\varepsilon' \,. \tag{8.46}$$

Для того, щоб плавні величини не мали внеску від ядерних оболонок, інтервал усереднення обирають більшим, ніж відстань між оболонками. Аналогічно формулі (8.45) маємо вираз для обчислення енергії $\tilde{E}_{\rm SM}$:

$$\tilde{E}_{\rm SM} = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} \varepsilon \,\tilde{g}(\varepsilon) d\varepsilon \,, \qquad (8.47)$$

де хімічний потенціал $\tilde{\lambda}$ визначається з умови незмінності кількості нуклонів у ядрі

$$A = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} \tilde{g}(\varepsilon) d\varepsilon .$$
 (8.48)

Однорідність спектра означає, що його густина $\tilde{g}(\varepsilon)$ не повинна змінюватися внаслідок повторного усереднення:

$$\tilde{\tilde{g}}(\varepsilon) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\gamma}(\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\gamma}) \cdot \tilde{g}(\varepsilon') d\varepsilon' = \tilde{g}(\varepsilon) .$$
(8.49)

Ця умова призводить до обмежень на вигляд функції $\Phi_{\gamma}(x)$.

Зауважимо, що співвідношення (8.49) не може виконуватися для довільних функцій $\tilde{g}(\varepsilon)$, оскільки в такому разі $\Phi_{\gamma}(x)$ буде δ -функцією, що не приводить до усереднення. Окрім того, (8.49) не виконується для таких стандартних функцій усереднення, як функції Гаусса або Лорентца. Для реалістичних одночастинкових спектрів плавний компонент густини $\tilde{g}(\varepsilon)$ на інтервалі усереднення γ можна наближено представити поліномом ступеня 2*M* (зазвичай 2*M* = 2, 4, або 6). Неважко перевірити, що в цьому випадку умова (8.49) буде виконуватися для функції усереднення $\Phi_{\gamma}(x)$ у вигляді добутку вагової функції Гаусса w(x) на коригувальний поліном $p_M(x)$ степеня 2*M* :

$$\Phi_{\gamma}(x) = \frac{1}{\gamma} f_M(x), \ f_M(x) = w(x) \cdot p_M(x), \ w(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2), \ (8.50)$$

де коригувальний поліном має вигляд

$$p_M(x) = \sum_{m=0}^{M} a_{2m} \cdot \frac{d^{2m} w(x)}{dx^{2m}} / w(x) = \sum_{n=0}^{M} \tilde{a}_{2n} \cdot x^{2m},$$
$$a_{2m} = (-1)^m / (2^{2m} m!).$$
(8.51)

Коефіцієнти \tilde{a}_{2n} у (8.51) можна знайти перебудовою ряду з похідних від функцій Гаусса; для $M \le 3$ коригувальні поліноми дорівнюють

$$p_0(y) = 1$$
, $p_1(y) = \frac{3}{2} - y$, $p_2(y) = \frac{15}{8} - y(5 - y)/2$

$$p_{3}(y) = \frac{35}{16} + y \cdot \left[y \cdot \left(\frac{7}{4} - \frac{y}{6} \right) - \frac{35}{8} \right], \ y = x^{2} \equiv \left[\left(\varepsilon - \varepsilon' \right) / \gamma \right]^{2}.$$
(8.52)

Окрім умови незмінності плавної густина $\tilde{g}(\varepsilon)$ (8.49), при повторному усередненні для фіксованого значення M має виконуватися умова незалежності середнього значення повної енергії \tilde{E}_{SM} від інтервалу усереднення

$$\frac{\partial \tilde{E}_{\rm SM}}{\partial \gamma} = 0.$$
 (8.53)

Співвідношення (8.53) називається умовою існування плато. Рівність нулю першої похідної $\tilde{E}_{\rm SM}$ від γ означає, що обчислена за формулою (8.47) енергія справді є середнім плавним значенням енергії, яке за визначенням не має залежати від інтервалу усереднення. При довільному розподілі умова (8.53) може й не виконуватися, але при реалістичних розподілах одночастинкових рівнів завжди можна знайти такі значення γ і M, для яких рівність (8.53) буде виконуватися хоча б наближено.

Згідно з (8.46) і (8.50) для гладкого компонента густини (8.46) маємо такий вираз:

$$\tilde{g}(\varepsilon) = \sum_{i} \frac{1}{\gamma} f_M(\frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{\gamma}) \equiv \tilde{g}_M(\varepsilon, \gamma) .$$
(8.54)

Умова (8.48) того, що згладжений спектр належить даному ядру, визначає хімічний потенціал $\tilde{\lambda}$ згладженого спектра. З урахуванням (8.54) нелінійне рівняння (8.48) для визначення $\tilde{\lambda}$ при фіксованому A набуває вигляду

$$A = \sum_{i} \int_{-\infty}^{t_{i}} f_{M}(x) dx \equiv \tilde{A}_{M}(\tilde{\lambda}, \gamma), \quad t_{i} = (\tilde{\lambda} - \varepsilon_{i}) / \gamma, \quad (8.55)$$

або

$$A = \sum_{i} \tilde{n}_{i} , \quad \tilde{n}_{i} \equiv \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} f_{M} \left(\frac{\varepsilon' - \varepsilon_{i}}{\gamma} \right) d\varepsilon' \quad = \int_{-\infty}^{t_{i}} f_{M}(x) dx \quad , \quad (8.56)$$

де величини \tilde{n}_i можна інтерпретувати, як деякі узагальнені числа заповнення *i*-го стану. Формулу (8.47) для обчислення енергії $\tilde{E}_{\rm SM}$ можна подати у вигляді

$$\tilde{E}_{\rm SM} = \sum_{i} \varepsilon_i \, \tilde{n}_i + F \,, \qquad (8.57)$$

де F дорівнює

$$F = \sum_{i} \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{i}}{\gamma} \right) f_{M} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{i}}{\gamma} \right) d\varepsilon =$$

$$= \sum_{i} \int_{-\infty}^{t_{i}} x f_{M} (x) dx \equiv F_{M} (\tilde{\lambda}, \gamma).$$
(8.58)

Користуючись (8.57), (8.58), умову наявності плато (8.53) можна переписати як

$$\frac{\partial E_{\rm SM}}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \sum_{i} \varepsilon_{i} \tilde{n}_{i} + \frac{1}{\gamma} F + \sum_{i} t_{i} f(t_{i}) \frac{\partial t_{i}}{\partial \gamma} =$$

$$= \frac{1}{\gamma} F + \tilde{\lambda} \frac{\partial}{\partial \gamma} \tilde{A}_{M} (\tilde{\lambda}, \gamma) = \frac{1}{\gamma} F + \tilde{\lambda} \frac{\partial}{\partial \gamma} A = \frac{1}{\gamma} F.$$
(8.59)

Звідки знаходимо, що умова плато (8.53) еквівалентна рівності нулю функції (8.58) $F \equiv F_M$:

$$F_M(\tilde{\lambda}, \gamma) = 0, \qquad (8.60)$$

тобто плавний компонент енергії дорівнює $\tilde{E}_{SM} = \sum_{i} \varepsilon_i \tilde{n}_i$ і вираз

(8.41) для оболонкового доданка до енергії з урахуванням (8.45) набуває вигляду

$$\delta E_{\text{shell}} = E_{\text{SM}} - \tilde{E}_{\text{SM}} = \sum_{i} \varepsilon_i \,\delta n_i \,, \quad \delta n_i = n_i - \tilde{n}_i \,, \tag{8.61}$$

де *n_i* – числа заповнення незбуджених одночастинкових станів оболонкової моделі

$$n_i = \begin{cases} 1, & \varepsilon_i \le \varepsilon_F , \\ 0, & \varepsilon_i > \varepsilon_F . \end{cases}$$
(8.62)

При обчисленнях оболонкових ефектів враховується різниця між нейтронами й протонами. Повний оболонковий додаток $\delta E_{\text{shell}} \in \text{сумою внесків оболонкових компонентів нейтронів}$ $\delta E_{\text{shell}}(N)$ і протонів $\delta E_{\text{shell}}(Z)$:

$$\delta E_{\text{shell}} = \delta E_{\text{shell}}(N) + \delta E_{\text{shell}}(Z) . \qquad (8.63)$$

Для обчислення оболонкового доданка до енергії в методі Струтинського необхідно виконати такі кроки:

1) обчислити одночастинковий спектр ε_i у потенціалі середнього поля і знайти енергію Фермі ε_F для даного ядра з $\overline{A} = \{N, Z\}$ нуклонами цього типу;

2) при фіксованому значенні 2M степеня корегувального полінома треба розв'язати систему нелінійних рівнянь (8.55), (8.60):

$$\begin{cases} \tilde{A}_{M}(\tilde{\lambda},\gamma) \equiv \sum_{i} \int_{-\infty}^{(\tilde{\lambda}-\varepsilon_{i})/\gamma} f_{M}(x) dx = \overline{A}, \\ F_{M}(\tilde{\lambda},\gamma) \equiv \sum_{i} \int_{-\infty}^{(\tilde{\lambda}-\varepsilon_{i})/\gamma} x f_{M}(x) dx = 0 \end{cases}$$

$$(8.64)$$

відносно хімічного потенціалу згладженого спектра $\tilde{\lambda}$ та інтервалу усереднення γ . Після цього обчислити $\tilde{E}_{\rm SM}$ та $\delta E_{\rm shell}$ згідно з (8.62). Як початкові значення можна використати значення $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_0 = \varepsilon_F$ та $\gamma = \gamma_0 = \Delta E$, де ΔE – середня відстань між оболонками, яка дорівнює $\hbar\omega_0 \simeq 41 \cdot A^{-1/3}$ для потенціалу гармонічного осцилятора та $\Delta E \sim 4 \div 6$ МеВ для потенціалу Вудса– Саксона.

Зазначимо, що відповідно до методу (8.49) побудови корегувального полінома $p_M(x)$ система (8.64) може мати точний розв'язок лише у тому випадку, коли усереднений компонент густини (8.54) можна наблизити на інтервалі усереднення поліномом степеня 2M:

$$\tilde{g}_M(\varepsilon,\gamma) \equiv \sum_i \frac{1}{\gamma} f_M(\frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{\gamma}) = \text{const} \cdot \varepsilon^{2M} .$$
(8.65)

До початку обчислень зазвичай невідомо, наскільки виконується така умова, тому при обчисленнях перебирають різні значення M і знаходять таке $M = M^*$, для якого існує розв'язок системи (8.64). У практичних розрахунках $\tilde{\lambda}$, γ , M^* використовують метод послідовних наближень: спочатку задають деякі значення порядку M та інтервалу $\gamma_0 > \Delta E$; з умови фіксації кількості нуклонів знаходять хімічний потенціал $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_0$; далі перевіряють умову плато, а потім процедуру повторюють аж до виконання всіх рівнянь;

3) після знаходження величин $\tilde{\lambda}$, γ , M^* обчислюються відповідні узагальнені числа заповнення \tilde{n}_i (8.56) і за формулою (8.61) оболонковий доданок $\delta E_{\text{shell}}(\overline{A})$ для даного типу нуклонів. Перевіряють коректність вибору інтервалу і додатково розраховують $\delta E_{\text{shell}}(\overline{A})$ за різних значень γ в околі величини, отриманої як розв'язок (8.64). Із фізичних міркувань випливає, що при правильному значенні γ оболонковий доданок не має бути малочутливим до ширини інтервалу усереднення γ .

Поведінку $\delta E_{\text{shell}}(N)$ залежно від параметрів γ і M у випадку сферичного та деформованого потенціалів гармонічного осцилятора показано на рис. 8.10, 8.11. Як бачимо, у потенціалах гармонічного осцилятора завжди можна знайти значення корегувального полінома M і проміжок інтервалів усереднення, для яких величина осцилюючого компонента енергії стала (тобто виконується умова плато (8.53)), а тому її можна інтерпретувати як оболонковий додаток до енергії.

Оболонковий доданок як функція кількості нуклонів має осцилюючий вигляд з мінімальними значеннями при магічних числах нуклонів для даного потенціалу (рис. 8.12). Таким чином, метод Струтинського точно відтворює періодичні зміни енергії ядер, що відповідають появі магічних ядер.

Метод Струтинського був узагальнений для визначення оболонкових доданків у збуджених ядрах (В. Рамамурші, С. Капур, С. Катаріа (1970, 1972); А. Йенсен, Й. Дамгаард (1973); В. М. Коломієць (1974)). Слід очікувати, що зі зростанням енер-

гії збудження спектр станів стає більш однорідним, і тому вплив оболонкових ефектів зменшується. Розрахунки підтвердили зменшення оболонкового доданка зі зростанням температури Т

(енергії збудження ядра $U \simeq (A/8 \div A/13) \cdot T^2$).



Рис. 8.10. Залежність осцилюючого компонента енергії від інтервалу усереднення і показника М степеня корегувального полінома

системи з N = 70 нейтронами у сферичному гармонічному

осциляторі, $\hbar w_0 = 6$ MeB



Рис. 8.11. Залежність осцилюючого компонента енергії від інтервалу усереднення і показника М степеня корегувального полінома. Система з N = 70 нейтронами в деформованому гармонічному осциляторі з деформацією $\varepsilon = 0, 6$



Рис. 8.12. Залежність оболонкового доданка від кількості нейтронів у потенціалах Нільссона та гармонічного осцилятора

Обчислення підтверджують майже зникнення δE_{shell} у середніх і важких ядрах за температур $T \ge 2 \div 2,5$ MeB (рис. 8.13). Такі температури в ядрі з A = 140 відповідають досить великим значенням енергії збудження $U \sim 50 \div 100$ MeB.

Зазначимо, що важливу роль у ядрах відіграє внесок P до повної енергії від кореляційного спарювального потенціалу, що приводить до об'єднання нуклонів у пари (див. підрозд. 1.4, 3.6). Значення внеску парних кореляцій P залежить від густини одночастинкових станів. Тому він складається із двох компонентів – плавного \tilde{P} та осцилюючого δP , що обумовлений неоднорідною частиною одночастинкового спектра з густиною $\delta g = g - \tilde{g}$. Плавна частина, як у формулі Вайзцекера (див. підрозд. 1.4), ураховується у вигляді деякого середнього компонента, а осцилюючу частину δP обчислюють за методом Струтинського. Тоді повний оболонковий доданок до енергії від неоднорідного одночастинкового спектра складатиметься із внесків від варіацій суми одночастинкового вих енергій і парних кореляцій

$$\delta E_{\text{shell}} = \delta E_{\text{osc}} + \delta P . \qquad (8.66)$$



Рис. 8.13. Залежність оболонкового доданка від температури ядра (А. Йенсен, Й. Дамгаард, 1973)

Метод оболонкового доданка теоретично обгрунтували Г. Г. Бунатян, В. М. Коломієць та В. М. Струтинський (1972). Вони довели, що всі оболонкові ефекти в повній енергії можна врахувати, обчислюючи тільки варіацію $\delta E_{\rm osc}$ суми енергій одночастинкових станів (одноквазічастинкових за умови врахування спарювання) відносно її плавного значення. Це твердження отримало назву *енергетична теорема Струтинського*. Теорема Струтинського виконується тому, що: по-перше, оболонкові неоднорідності формуються у відносно вузькій області одночастинкових станів в околі енергії Фермі, яка визначає границю заповнення одночастинкових станів; по-друге, у цій області доданок до $\delta E_{\rm shell}$ від урахування залишкової кореляційної взаємодії між квазічастинками виявився малим.

Спосіб обчислення повної енергії ядра E у вигляді суми її значення E_{LDM} за моделлю краплини ядерної рідини (від англ. *liquid drop model*, LDM) та оболонкового доданка δE_{shell} :

$$E = E_{\rm LDM} + \delta E_{\rm shell} \tag{8.67}$$

отримав назву макроскопічно-мікроскопічній підхід.

У методі Струтинського для обчислення оболонкового доданка використовуються феноменологічні середні ядерні потенціали, що описують експериментальний спектр одночастинкових станів в околі енергії Фермі. Такі потенціали не самоузгоджені з густиною розподілу нуклонів (див. підрозд. 3.4). Їхні параметри визначаються з умови опису експериментального одночастинкового спектра в околі енергії Фермі й не можуть точно відтворити спектр глибоких одночастинкових станів. Окрім того, у моделях незалежних частинок нехтують залишковою взаємодією між нуклонами, тому плавний компонент суми одночастинкових енергій, що обчислюються з використанням емпіричних середніх потенціалів, не збігається з експериментальним значенням, яке описується краплинною моделлю ядра.

Мікроскопічні середні ядерні потенціали при відомій парній взаємодії між нуклонами можна обчислити за методом Хартрі-Фока (HF) (див. підрозд. 3.4). Такі потенціали самоузгоджені з густиною розподілу нуклонів у ядрі, тому можна сподіватися, що з їхнім використанням можна коректно розрахувати і спектр глибоких одночастинкових станів. У 1975 р. М. Брак і Р. Квентін уперше показали, що середнє значення суми одночастинкових енергій методу Хартрі-Фока з ефективними парними силами Скірма (див. підрозд. 2.6) збігається з плавним компонентом повної енергії, що описується краплинною моделлю ядра. Тому такий метод, який зазвичай називають методом Хартрі-Фока-Скірма (або Хартрі-Фока-Боголюбова-Скірма, у випадку, коли враховуються парні кореляції) дає змогу обчислити повну енергію ядра без додаткового використання спеціального способу визначення оболонкового доданка. Порівняння розрахунку плавного компонента енергії методом Хартрі-Фока-Скірма з енергією за моделлю краплини ядерної рідини E_{LDM} демонструється на рис. 8.14, де наведено результати обчислень енергії деформа-

ції ядра ¹⁶⁸₇₀Yb залежно від значень власного квадрупольного моменту, який обрано за міру деформації ядра (оскільки його величина пропорційна деформації ядра (див. підрозд. 1.7). Видно, що середня енергія за методом Хартрі–Фока–Скірма з великою точністю збігається зі значеннями, отриманими за допомогою краплинної моделі.



Рис. 8.14. Енергія деформації ядра ¹⁶⁸70 Ур у методі Хартрі-Фока-Скірма. Криві: суцільна – точне значення енергії за методом Хартрі-Фока *E_{HF}*;

штрихова – середнє значення енергії моделі Хартрі–Фока \tilde{E}_{HF} ; пунктир – енергія за моделлю ядерної рідкої краплини

Однак метод Хартрі-Фока-Скірма не можна вважати більш загальним, ніж макроскопічно-мікроскопічний підхід, тому що останній базується на меншій кількості припущень про фізичні процеси, які відбуваються в ядрі. Таким чином, у методі Хартрі-Фока з ефективною взаємодією вважається, що повну хвильову функцію ядра завжди можна подати у вигляді антисиметризованого добутку одночастинкових хвильових функцій, а параметри ефективної парної взаємодії можна вибрати такими, що дозволяють знехтувати залишковою взаємодією. Макроскопічномікроскопічний підхід таких припущень не використовує. Водночас у методі Хартрі-Фока середній потенціал повністю самоузгоджений із густиною, що дає змогу точніше обчислити обо-

лонковий доданок δE_{shell} . Оболонкові доданки, які обчислені різними методами для ядра $^{168}_{70}$ Yb, для порівняння наведено на рис. 8.15.



Рис. 8.15. Енергія деформації в методах Хартрі–Фока–Скірма та Струтинського. Криві: осцилюючі – повні енергії; плавні – їхні середні значення; Суцільні криві – метод Хартрі–Фока; штрихові – метод Струтинського

Метод Струтинського виявився дуже вдалим для визначення внеску оболонкових ефектів у маси та енергії деформації ядер. Він уперше дав змогу кількісно описати бар'єри поділу ядер E_f . Як було зазначено, до значень E_f дуже чутливий період піврозпаду $T_{1/2}$ за каналом спонтанного поділу (величини $T_{1/2}$ визначаються процесом тунелювання й експоненціально залежать від висоти бар'єра). Важливим результатом теорії Струтинського є встановлення того факту, що оболонкові ефекти не обов'язково мають бути пов'язаними зі сферичністю ядер, а спостерігаються також у сильно деформованих ядрах. Наприклад, для ядер з області актиноїдів ($N \sim 144 \div 148$) теоретично знайдено, що ядерний потенціал має два горби (рис. 8.16). Зауважимо, що в моделі рідкої краплини цей потенціал має одногорбу форму.

Важке ядро з двогорбим бар'єром у процесі поділу може потрапити в другу потенціальну яму, що відповідає другому мінімуму енергії деформації, затриматися на деякий час у такому ізомерному сильно деформованому проміжному стані (із часом

життя від 10^{-17} до 10^{-3} с) і потім поділитися. Користуючись такими уявленнями, вдалося пояснити процес ізомерного поділу, відкритий під керівництвом С. М. Поліканова в 1963 р. Це явище отримало назву *ізомерія форми атомних ядер*.



Рис. 8.16. Бар'єр поділу та оболонкові доданки нейтронів і протонів в ядрі ²⁴² Ри залежно від деформації

Потенціальна енергія певних ядер може мати ще одну (або й більше) яму, що розташована зазвичай поблизу середини другого горба, і тому мати три максимуми. Третя яма відповідає втраті симетрії ядром, яке перестає бути еліпсоїдом обертання й має грушоподібну форму. Ядро з такою формою ділиться асиметрично на два уламки різної маси. Саме врахування оболонкових ефектів дало змогу описати бар'єри асиметричного поділу ядер.

Сучасні досягнення (див. підрозд. 3.5, 5.1) в області синтезу трансфермієвих елементів і дослідження надобертових ядер з ве-

ликими значеннями спінів (див. підрозд. 3.10) також базуються на методі оболонкового доданка Струтинського та його узагальненнях. За методом Струтинського А. Собічевськи, Ф. А. Гареєв і Б. Н. Калінкін (1966) показали, що амплітуда оболонкового доданка максимальна для ядра з кількістю протонів Z = 114 (а не 126, як у випадку нейтронів) і N = 184, що стимулювало пошук і знаходження в околі цього ядра "острова стабільності" надважких ядер. Застосування і розвиток методу Струтинського в задачах з обертання ядер започаткували В. В. Пашкевич, С. Фрауендорф, К. Неергорд (1974, 1975) і Р. Бенгстон, С. Ларссон, Дж. Ліндер, П. Меллер, С. Нільссон, С. Оберг, З. Шиманскі (1975). Ці дослідження продемонстрували можливість значного впливу оболонкових ефектів на енергії супердеформованих ядер зі співвідношенням півосей еліпсоїда ≈2, що мають великі обертальні моменти. Вони, зокрема, показали можливість значного пониження повної енергії таких ядер через δE_{shell} , і тим самим збільшення часу їхнього життя порівняно з моделлю рідкої краплини. Теоретичні дослідження були підтверджені відкриттям супердеформованих ротаційних станів у ядрі ¹⁵²₆₆Dy (П. Твін та ін., 1986).

Таким чином, усі сучасні досягнення ядерної фізики демонструють необхідність урахування оболонкових ефектів при будь-яких спробах кількісного аналізу властивостей середніх і важких ядер.

8.3. Вимушений поділ ядер

Як вже зазначалось, при кожному акті спонтанного поділу виділяється значна енергія (≈ 200 MeB для $A \approx 240$), але цей процес надзвичайно рідкісний. До того ж, він має випадковий неконтрольований характер, а тому не може використовуватися як джерело енергії. Із практичної точки зору незрівнянно більшу зацікавленість викликає вимушений поділ важких ядер під дією нейтронів, тобто реакція (n, f). Інтенсивність такої реакції залежить від характеристик бар'єра поділу ядер, що діляться, і від

енергії нейтронів E_n . У нейтроній фізиці зазвичай використовують таку класифікацію за енергіями нейтронів:

- ▶ 0,005 ÷ 0,5 еВ теплові нейтрони;
- ▶ 0,5 eB ÷ 10 кеВ резонансні нейтрони (надтеплові);
- ▶ 10 keB ÷ 100 кеВ проміжні нейтрони;
- ≻ >100 кеВ швидкі.

Нейтрони з енергіями, що менші від 1 кеВ (тобто теплові та резонансні нейтрони), називають повільними, а з енергіями, що більші за енергію швидких нейтронів, – надшвидкими. За енергій нейтронів, менших від 0,005 еВ, розрізняють холодні ней-

трони та ультрахолодні ($E_n < 10^{-6} \,\mathrm{eB}$). Останні мають цікаві властивості: оскільки довжина хвилі таких нейтронів дуже велика (напр., $\lambda \cong 5 \,\mathrm{\AA}$ при $E_n \le 10^{-7} \,\mathrm{eB}$), то вони зазнають повного зовнішнього відбиття від межі вакуум–середовище при всіх кутах падіння (Я. Б. Зельдович, 1956) і можуть накопичуватися в замкнених порожнинах макроскопічних розмірів. Перші експерименти зі спостереження та зберігання ультрахолодних нейтронів виконали Ф. Л. Шапіро зі співробітниками в 1968 р. (Об'єднаний інститут ядерних досліджень, ОІЯД, м. Дубна).

Повільні нейтрони поділяють на теплові, холодні та ультрахолодні. *Тепловими* називають такі нейтрони, які перебувають у стані динамічної рівноваги з тепловим рухом молекул. Якщо середовище, у якому досягається ця рівновага, охолоджується, то такі нейтрони називають *холодними*.

А середня енергія (0,025 eB) приблизно збігається з тепловою

енергією kT за кімнатної температури $\approx 17^{\circ}$ C $\approx 300^{\circ}$ K ($k = 0.8617 \cdot 10^{-4}$ eB / K; 0° C = 273,15° K). Теплові нейтрони перебувають у термодинамічній рівновазі з навколишнім середовищем; їхній розподіл за швидкостями (як і у випадку ідеального газу) описується розподілом Максвелла. *Резонансними нейтронами* називаються тому, що в енергетичній області, яка їм відповідає, повний переріз реакцій з нейтронами має резонансний вигляд. Значення $E_n = 0.5$ eB обрано за максимальну граничну енергію теплових

нейтронів через те, що воно є граничною енергією поглинання нейтронів кадмієм: ядра кадмію внаслідок реакції (n, γ) поглинають майже всі нейтрони з енергіями, меншими за 0,5 eB, але є практично прозорими для нейтронів більших енергій. Цей ефект дуже широко використовується в нейтронній спектрометрії.

Поглинання повільного нейтрона важким ядром приводить до його збудження в середньому на енергію ~ 7 МеВ, яка відповідає середньому значенню енергії відриву нейтрона від утвореної системи ядро + нейтрон. Для важких ядер ця енергія може перевищувати висоту бар'єра поділу, тому такі збуджені ядра будуть миттєво ділитися. Енергія збудження $E_{\rm nop}$, при якій спостерігається вимушений поділ, називається критичною, або граничною енергією поділу. Енергію $E_{\rm nop}$ також називають порогом поділу, тому що вона відповідає порогу реакції поділу під дією γ -квантів, тобто порогу фотоподілу (γ , f), не збудженого до опромінення ядра. Значення $E_{\rm nop}$ збігається з висотою бар-'єра поділу E_f утвореного ядра, а саме, з його енергією деформації в сідловій точці (остання величина також називається енергією активації).

Проаналізуємо можливість вимушеного поділу під дією повільних нейтронів двох основних ізотопів природного урану: $^{235}_{92}$ U (поширеність 0,72 %); $^{238}_{92}$ U (99,27 %). При поглинанні нейтрона ядром $^{235}_{92}$ U утворюється ядро $^{236}_{92}$ U ($n + ^{235}_{92}$ U $\rightarrow ^{236}_{92}$ U) з енергією збудження $\approx 6,8$ MeB. Енергія порогу поділу утвореного ядра $^{236}_{92}$ U дорівнює $E_{nop} \approx 6,5$ MeB і менша від його енергії збудження, унаслідок чого ядро буде миттєво ділитися. У випадку поглинання нейтрона ізотопом $^{238}_{92}$ U утворюється ядро $^{239}_{92}$ U з енергією збудження $\approx 5,5$ MeB, меншою від енергії порогу поділу $E_{nop} \approx 7,5$ MeB ядра $^{239}_{92}$ U; тому ймовірність поділу цього ізотопу урану є досить малою величиною.

Окрім ${}^{235}_{92}$ U, при взаємодії з тепловими нейтронами миттєво діляться ядра ${}^{233}_{92}$ U і ${}^{239}_{94}$ Pu, а також деякі трансуранові елементи. За винятком ${}^{235}_{92}$ U, миттєво подільні ізотопи не зустрічаються в земних умовах. Їх отримують штучним шляхом у ланцюгах перетворень, які, наприклад для ${}^{233}_{92}$ U і ${}^{239}_{94}$ Pu, мають вигляд

$${}^{232}_{90}\text{Th} + n \rightarrow {}^{233}_{90}\text{Th} \frac{\beta^-}{22,3\,\text{xB}} > {}^{233}_{91}\text{Pa} \frac{\beta^-}{27\,\text{g}} > {}^{233}_{92}\text{U} ,$$

$${}^{238}_{92}\text{U} + n \rightarrow {}^{239}_{92}\text{U} \frac{\beta^-}{23,5\,\text{xB}} > {}^{239}_{93}\text{Np} \frac{\beta^-}{2,4\,\text{g}} > {}^{239}_{94}\text{Pu} .$$

Торій і ${}^{238}_{92}$ U, що використовують для отримання миттєво подільних ізотопів називають ядерною сировиною. Ізотопи ${}^{235}_{92}$ U, ${}^{233}_{92}$ U і ${}^{239}_{94}$ Pu нестабільні й мають такі характеристики:

$${}^{235}_{92} U(T_{1/2}(\alpha) \approx 7, 0.10^{8} \text{ p}; T_{1/2}(\text{sf}) \approx 1, 9.10^{17} \text{ p}; 0, 72\%),$$

$${}^{233}_{92} U(T_{1/2}(\alpha) \approx 1, 6.10^{5} \text{ p}; 0, 0\%), \qquad (8.68)$$

$${}^{239}_{94} Pu(T_{1/2}(\alpha) \approx 2, 4.10^{4} \text{ p}; T_{1/2}(\text{sf}) \approx 5, 5.10^{15} \text{ p}; 0, 0\%),$$

де в дужках вказано періоди піврозпаду ядер за каналами α розпаду і спонтанного поділу (у роках), а також їхня поширеність у природних умовах. При взаємодії з повільними нейтронами ці ядра мають великі ефективні перерізи поділу. На рис. 8.17 показано залежність перерізів їхнього поділу від енергії теплових нейтронів. Із рис. 8.17 видно, що за енергій нейтронів порядку 0,01еВ перерізи поділу можуть сягати великих значень (~1000 барн). Окрім того, ядра цих елементів діляться під дією швидких нейтронів, але величина відповідних перерізів мала і не перевищує 2 барн для енергій, вищих за 1 МеВ (рис. 8.18).



Рис. 8.18. Перерізи поділу ізотопів урану ²³⁵ U, ²³⁸ U під дією швидких нейтронів

Відносна кількість нейтронів у важких ядрах біля лінії стабільності помітно більша, ніж у середніх ядрах (рис. 8.19; див. підрозд. 1.4), тому первинні уламки поділу сильно перевантажені нейтронами, і через це в процесі поділу ядра вилітають вторинні нейтрони. Їхня кількість зростає з енергією збудження та зарядом первинного ядра поділу. Наприклад, при вимушеному поділі ізотопів $^{235}_{92}$ U, $^{233}_{92}$ U і $^{239}_{94}$ Pu тепловими нейтронами в середньому вилітає від двох до трьох нейтронів. Середню кіль-

кість вторинних нейтронів, що вилітають в одному акті поділу, також називають *множинністю нейтронів* (від англ. *neutron multiplicity*) і позначають літерою \overline{v} . Значення \overline{v} для різних ядер поділу представлені на рис. 8.29 наведено !(Табл.8.1 пересена до підр.8.4 після ф.(8.71))!



на лінії β -стабільності

При поділі розрізняють нейтрони, що вилітають у момент поділу, так звані миттєві нейтрони (вони вилітають протягом часу $\sim 10^{-21} \div 4 \cdot 10^{-14} c$) і запізнілі нейтрони, що випромінюються уламками поділу після β -розпаду. Виліт запізнілих нейтронів затриманий порівняно з миттєвими нейтронами в середньому на час (0,08 ÷ 60) с. Миттєві нейтрони становлять понад 99 % вторинних нейтронів. Оскільки кулонівське відштовхування в ядрі біля сідлової точки призводить до сильного виштовхування протонів з області шийки, а тому до значного збагачення цієї області нейтронами, то можна очікувати, що деяка частина миттєвих нейтронів також вилітає з областей ядер-уламків, що були розташовані біля шийки материнського ядра.



Рис. 8.20. Середня кількість вторинних нейтронів

Незважаючи на виліт миттєвих нейтронів, первинні уламки мають надлишок нейтронів порівняно з ядрами на лінії βстабільності, і тому зазнають β⁻-розпаду (або з вильотом електронів і електронних антинейтрино, або з поглинанням електронів). Деякі із вторинних уламків, що утворюються після в-розпаду, мають енергію збудження, що перевищує енергію відриву нейтрона, і тому розпадаються не тільки з вильотом уквантів, але й запізнілих нейтронів. Такі нейтрони становлять менше 1 % від загальної кількості вторинних нейтронів. Час появи запізнілих нейтронів зумовлений періодом піврозпаду уламків-попередників ядер, з яких вони вилітають. За цією ознакою запізнілі нейтрони розбиваються на групи. Наприклад, при вимушеному поділі ²³⁵₉₂U запізнілі нейтрони поділяють на шість груп із середніми інтервалами затримки в часі (середніми періодами піврозпаду) (0,2÷55,7) с. Кожна із груп має фіксовану кінетичну енергію, що не перевищує 0,62 МеВ.

Енергетичний спектр миттєвих нейтронів є неперервним з максимумом близько 0,7104 MeB. Більшість із них вилітає з енергією в інтервалі до 2 MeB, але вилітають і нейтрони з енергією до 20 MeB. Середня енергія нейтронів поділу близька до 2 MeB. Загальний вигляд енергетичного спектра нейтронів поділу ядер (8.68) показано на рис. 8.21.



Рис. 8.21. Енергетичний спектр вторинних нейтронів реакції поділу

У середньому при кожному акті поділу важкого ядра виділяється енергія $\approx 200 \,\text{MeB}$. Наприклад, при вимушеному поділі ядра $^{235}_{92}$ U під дією теплових нейтронів ця енергія дорівнює $(202,8 \pm 0,6)$ MeB. Вона розподіляється між різними частинками приблизно таким чином:

- кінетична енергія уламків поділу 166 MeB;
- кінетична енергія нейтронів 5 MeB ;
- миттєве γ-випромінювання при поділі 8 МеВ;
- β та γ -випромінювання уламків поділу 14 МеВ;
- енергія, яку вносить антинейтрино 10 МеВ.

Більша частина енергії поділу вивільнюється майже миттєво, 3/4 цієї енергії є кінетичною енергією уламків, які повністю зупи-

няються, пройшовши в урані шлях у декілька мікронів. Таким чином, їхня кінетична енергія поглинається майже на місці і перетворюється на тепло. Розподіл енергії поділу інших ядер, що діляться, подібний.

Вимушений поділ ядер може відбуватися під дією не тільки нейтронів, але й довільних частинок (фотонів, протонів тощо), які збуджують ядро до енергій, що перевищують їхні бар'єри поділу. Після створення прискорювачів важких іонів з пучками великої інтенсивності, значна увага приділяється дослідженню поділу ядер під дією важких іонів, тобто реакції (HI, f). Такі реакції зазвичай приводять до утворення складених систем із високими енергіями збудження (>50 MeB) і великими кутовими моментами (I <100). Порівняно з низькоенергетичним поділом вплив оболонкових ефектів у цьому випадку зазвичай незначний, тому можна дослідити еволюцію у часі плавної частини потенціальної енергії деформації ядер, стабільність ядер відносно деформацій різного типу, залежність від кутового моменту. Зокрема, експериментальні дані з множинності вилітаючих нейтронів у реакціях (HI, f) вказують на те, що процес такого поділу відбувається значно повільніше, ніж це передбачається рівноважними статистичними моделями (Дж. Ньютон, 1990). Тому для його опису необхідно застосовувати динамічні теорії процесу поділу з урахуванням релаксації колективних ступенів свободи, що характеризують поділ (Г. Д. Адеєв, І. І. Гончар, В. В. Пашкевич, Н. І. Пісчасов, О. І. Сердюк, 1988; П. Фрьобліх та І. І. Гончар (1998)).

8.4. Ланцюгова ядерна реакція поділу. Принцип дії ядерних реакторів на теплових нейтронах

Виліт миттєвих і запізнілих нейтронів у процесі поділу ядер, які, у свою чергу, також здатні викликати поділ, уможливлює здійснення ланцюгової ядерної реакції поділу (n, f) із саморозвитком у середовищі на ядрах, що діляться. Нехай таке середовище (яке називають середовищем з ядерним паливом) містить

²³⁵₉₂U, і в ньому за деяких причин зазнало поділу одне ядро. Згідно з рис. 8.20 і табл. 8.1 після такого поділу вивільняються від двох до трьох додаткових нейтронів. Припустимо, що в середньому два нейтрони з трьох можуть викликати нову реакцію (n, f). Останнє знову приведе до поділу двох нових ядер урану та вильоту чотирьох нейтронів, що можуть викликати поділ тощо. Іншими словами, можна очікувати лавиноподібний процес поділу із саморозвитком, який і називається *ланцюговою ядерною реакцією*. Після зміни N поколінь нейтронів у середовищі, що складається тільки з ядерного палива, виникнуть ~ 2^{N+1} нейтронів, які можуть поділити ядра. Таку ідеалізовану картину ланцюгової реакції поділу зображено на рис. 8.22.



Рис. 8.22. Ідеалізована схема розмноження нейтронів у ланцюговій реакції поділу

У середовищі із чистим ядерним паливом завдяки ланцюговій ядерній реакції поділу майже миттєво виділяється велика енергія. Оцінимо енергію, що виділяється при вимушеному поділі 2 г чистого урану $^{235}_{92}$ U, і середній час протягом якого відбувається поділ усіх ядер урану $^{235}_{92}$ U. Уран масою 2 г складається із 2,0·6,02·10²³ / 235 ≈ 5,2·10²¹ ядер. При поділі такої кількості ядер урану виділиться енергія, яка дорівнює $200 \cdot 5, 2 \cdot 10^{21} \text{ MeB} \simeq 10^{24} \cdot 1, 6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} \simeq 1, 6 \cdot 10^{-11} \text{ Дж},$ тобто така, що відповідає виробленню протягом години енергії ~44 МВт. Кількість нейтронів *n*, що утворюються в ідеалізованій ланцюговій реакції (рис. 8.22) після зміни Ν поколінь:
$n = 1 + 2 + 2^{2} + ... + 2^{N} = 2^{N+1} - 1 \approx 2^{N+1}$, тому 5,2·10²¹ ядер урану поділяться після зміни $N = (21 - \log 5, 2) / \log 2 - 1 \approx 71$ поколінь $(5, 2 \cdot 10^{21} \approx 2^{71+1})$. Якщо врахувати лише миттєві нейтрони, то час життя одного покоління становить приблизно $(10^{-7} \div 10^{-8})$ с, тоді виділення енергії, яка відповідає розщепленню 2 г урану (~10¹¹ Дж) триватиме $71 \cdot (10^{-7} \div 10^{-8}) \sim 10^{-5} \div 10^{-6}$ с, тобто майже миттєвий. У такій ситуації ланцюгова реакція поділу завершиться вибухом колосальної потужності, що й було реалізовано при створенні ядерної зброї. Для використання ланцюгової реакції поділу з метою отримання енергії необхідно уповільнити процес виділення енергії поділу.

Зазначимо, що на практиці здійснити ланцюгову реакцію досить складно. По-перше, на ядрах, що діляться, одночасно відбуваються й інші реакції, які приводять до зменшення кількості актів поділу; по-друге, імовірність вимушеного поділу залежить від енергії нейтронів, а вторинні нейтрони вилітають з різними енергіями. Окрім того, розмноження нейтронів в окремих актах поділу в середовищі, що складається тільки з ядерного палива, не рівнозначно їхньому розмноженню в реальному фізичному середовищі. У реальній системі існують фактори, що призводять до додаткових втрат нейтронів поділу і їхній вихід із ланцюга. Зокрема, через скінченні розміри системи і досить велику проникну здатність нейтронів багато з них вилітає за межі середовища, де відбувається поділ ядер, раніше, ніж вони поглинаються ядром поділу. Реальне середовище не моноізотопне, а містить домішки ядер, що поглинають нейтрони без поділу. Наприклад, у природному урані міститься 99,3 % урану 238. Цей ізотоп поглинає теплові нейтрони без поділу, і тому для реалізації самопідтримуючої ланцюгової реакції поділу використовують ядерне паливо, збагачене ізотопами ${}^{233}_{92}$ U, ${}^{235}_{92}$ U, ${}^{239}_{94}$ Pu.

Установка, що дозволяє використовувати ядерну енергію, яка вивільнюється при поділі, називається *ядерним реактором*, а енергія – *атомною енергією*. Перший експериментальний ядерний реактор був побудований у США в 1942 р. під керівництвом

Е. Фермі. Перший у Європі ядерний реактор введено в дію в СРСР у 1946 р. під керівництвом І. В. Курчатова.

Очевидно, що для отримання максимальної енергії внаслідок поділу необхідно насамперед, щоб якомога більша кількість нейтронів була задіяна в поділі, тобто треба звести до мінімуму кількість нейтронів, які втрачаються через наявність інших реакцій. Наприклад, у випадку середовища, що складається із ізотопу $^{235}_{92}$ U, в області повільних нейтронів основною конкуруючою реакцією до поділу (n, f) є радіаційне поглинання (n, γ). Тому для $^{235}_{92}$ U умова вибування нейтронів з процесу поділу характеризується відношенням відповідних перерізів, а саме, функцією

$$\alpha = \frac{\sigma(n,\gamma)}{\sigma(n,f)}.$$
(8.69)

Чим менше значення α, тим більша частина ядерного палива ділиться. Величина α істотно залежить від енергії нейтронів.

Із рис. 8.23 видно, що для збільшення ймовірності поділу $^{235}_{92}$ U слід оминати область енергій нейтронів від ~ 5 еВ до ~ 10 кеВ, де вибування нейтронів із каналу поділу через їхнє радіаційне поглинання значне. Очевидно, що відносна ймовірність того, що взаємодія нейтрона з ядром приводить до поділу, дорівнює відношенню P_{α} перерізу поділу $\sigma(n, f)$ до перерізу повного поглинання нейтронів $\sigma_{abs}(n) = \sigma(n, f) + \sigma(n, \gamma)$:

$$P_{\alpha} = \frac{\sigma(n, f)}{\sigma_{abs}(n)} = \frac{1}{1 + \alpha}.$$
(8.70)

тому середньою кількістю η нейтронів, що виникає після поглинання ядром одного нейтрона, є

$$\eta = \overline{\nu} \cdot P_{\alpha} \,, \tag{8.71}$$

де \overline{v} визначає, як і раніше, середню кількість вторинних нейтронів, що вилітають з ядра при його поділі (тобто реакції (n, f)). Ланцюгова реакція може відбуватися лише за умови

 $\eta > 1$. Швидкість лавиноподібного процесу зростає зі збільшенням значення η .



Рис. 8.23. Залежність параметра α від енергії первинних нейтронів у ядрі ²³⁵ U

Величини η і $\overline{\nu}$ для моноізотопних середовищ, які складаються із важливіших ізотопів, що діляться, наведено в табл. 8.1

Ядро	²³³ ₉₂ U	²³⁵ ₉₂ U	²³⁹ ₉₄ Pu
Теплові нейтрони	$\tilde{v} = 2,52$	$\overline{v} = 2,47$	$\overline{v} = 2,91$
$(E_n = 0,025 \mathrm{eB})$	$\eta = 2,28$	$\eta = 2,07$	$\eta = 2,09$
Швидкі нейтрони	$\overline{v} = 2,7$	$\overline{v} = 2,65$	$\overline{v} = 3,0$
$(E = 1 \mathrm{MeB})$	$\eta = 2,45$	$\eta = 2, 3$	$\eta = 2, 7$

Таблиця 8.1. Середня кількість випромінених нейтронів $\bar{\mathcal{V}}$ та середня кількість нейтронів η , які здатні ділити ядро

Видно, що у випадку $^{235}_{92}$ U значення η можуть бути досить великими в області теплових нейтронів і швидких нейтронів з енергі-

єю, що приблизно дорівнює 1 MeB. При поділі ядер $^{235}_{92}$ U швидкими нейтронами вилітає навіть більша кількість нейтронів, ніж при поділі тепловими, але їхній переріз поділу значно менший, ніж у випадку теплових нейтронів (рис. 8.17).

У середовищі, що складається із суміші ядер різних ізотопів урану і різних елементів, відносна частка P_{α} нейтронів, що приводять до поділу, визначається макроскопічними перерізами $\Sigma_{M,j}(i)$ реакцій різного типу при взаємодії нейтронів з різними ядрами (див. підрозд. 6.3). Наприклад, макроскопічний переріз реакції (n, *j*) на ядрі *i*-го типу дорівнює

$$\Sigma_{M,j}(i) \equiv \sigma_i(\mathbf{n}, j) \cdot N_i, \qquad (8.72)$$

де N_i – кількість ядер даного типу в см³, яка пропорційна вмісту концентрації даного елемента в суміші. Величина P_{α} , що визначає частку нейтронів, які приводять до поділу ядер-палива (f), має вигляд

$$P_{\alpha} = \frac{\Sigma_{M,f}(f)}{\Sigma_{M,abs}} = \frac{\sigma_f(\mathbf{n}, f) \cdot N_f}{\sigma_f(\mathbf{n}, f) \cdot N_f + \sum_{i,j}' \sigma_i(\mathbf{n}, j) \cdot N_i}, \qquad (8.73)$$

де $\Sigma_{M,abs} = \sum_{i,j} \Sigma_{M,i}(j)$ – повний макроскопічний переріз погли-

нання нейтрона середовищем. Підсумовування в знаменнику формули (8.73) не включає лише каналу поділу ядра-поділу f. Співвідношення (8.73) описує вплив домішок елементів і реакцій різного типу на відносну кількість нейтронів, що приводять до подальшого поділу.

Максимальна кількість вторинних нейтронів із поділу ізотопів урану й плутонію (8.68) вилітає з енергією $E_n = 0,7$ MeB (див. рис. 8.21) і розташована в області резонансних нейтронів. Згідно з рис. 8.17 переріз поділу $\sigma(n, f)$ резонансними нейтронами, що визначає ймовірність виникнення вторинних нейтронів при поділі, значно менший, ніж тепловими. Виявляється, що для здійснення реакції, яка могла б самопідтримуватись, необ-

хідно сповільнити нейтрони до теплових енергій (<0,5 еВ), де переріз $\sigma(n, f)$ досить великий. Цю функцію в реакторах виконують сповільнювачі нейтронів. Речовина, що використовується як сповільнювач, повинна мати малий переріз радіаційного поглинання нейтронів і одночасно бути такою, щоб при зіткненні з нею нейтрон міг передати їй значну частину кінетичної енергії і сповільнитися. Зокрема, можна показати (див. задачу 6.3), що максимальна енергія, яку може втратити нейтрон з кінетичною енергією E_n при його лобовому зіткненні з ядром із масовим числом A дорівнює

$$\Delta E_{\rm n} = \frac{4A}{(A+1)^2} E_{\rm n} \,. \tag{8.74}$$

Звідси видно, що сповільнювач з меншою масою ядра краще сповільнює нейтрони, ніж з більшою. Якісним сповільнювачем міг би бути водень, але його використовувати небезпечно. Одним із найкращих сповільнювачів є важка вода D2O. У цьому випадку нейтрони сповільнюються переважно дейтронами, які їх слабо поглинають. Якісними сповільнювачами є вуглець (у вигляді реакторного графіту) і берилій. Незважаючи на досить сильне поглинання нейтронів воднем, звичайна вода H₂O також використовується як сповільнювач. Реактори за геометричним розташуванням сповільнювача поділяють на гомогенні та геторогенні. У гомогенному реакторі ядерне паливо і сповільнювач становлять однорідну суміш (розчин або суспензію). У гетерогенному реакторі ядерне паливо в активній зоні, де відбувається поділ, розташовується дискретно у вигляді вертикальних стрижнів, що називаються тепловиділяючими елементами (ТВЕЛами). Зазвичай ТВЕЛи в перерізі утворюють правильну гратку, а між ними міститься сповільнювач.

Як це було продемонстровано у випадку ідеалізованої ланцюгової реакції в моноізотопному ядерному паливі (рис. 8.22), виділення ядерної енергії залежить від відношення кількості нейтронів в одиниці об'єму, тобто концентрації нейтронів, що утворюються в одному поколінні (n_{i+1}) до концентрації нейтронів (n_i) у попередньому. Таке відношення концентрацій нейтронів,

що взяті на послідовних етапах їхньої еволюції в часі, називається коефіцієнтом ефективного розмноження нейтронів $k_{\rm eff}$:

$$k_{\rm eff} = \frac{n_{i+1}}{n_i} = \frac{n_2}{n_1}, \quad i \ge 1.$$
(8.75)

В ідеалізованому випадку, зображеному на рис. 8.22, значення $k_{\text{eff}} = 2$. Якщо в першому поколінні концентрація нейтронів дорівнювала n_1 , то в N-му вона буде дорівнювати

$$n_{N} = n_{N-1} \cdot k_{\text{eff}} = n_{1} \cdot k_{\text{eff}}^{N-1} = n_{0} \cdot k_{\text{eff}}^{N}$$
, (8.76)

де n₀ – початкова концентрація нейтронів.

Формули (8.75) і (8.76) дозволяють знайти співвідношення, що описує еволюцію концентрацій нейтронів із часом. Справді, нехай середній час життя одного покоління дорівнює τ , тоді кількість поколінь у момент часу t становить $N = t/\tau$ і згідно з (8.76) маємо для концентрацій нейтронів у моменти часу t та $t + \tau$: $n(t) \equiv n_N = n_0 \cdot k_{eff}^{t/\tau}$, $n(t + \tau) \equiv n_{N+1} = n_0 \cdot k_{eff}^{(t+\tau)/\tau} = n(t) \cdot k_{eff}$, (8.77)

тобто за умови швидкої неперервної зміни поколінь маємо таке рівняння для зміни концентрації нейтронів у ядерному середовищі

$$dn(t) / dt = \frac{n(t+\tau) - n(t)}{\tau} = n(t) \cdot \frac{(k_{\text{eff}} - 1)}{\tau}.$$
 (8.78)

Звідки залежність від часу кількості нейтронів в одиницю об'єму ядерного середовища має вигляд

$$n(t) = n_0 \cdot \exp(\frac{k_{\text{eff}} - 1}{\tau} \cdot t) \equiv n_0 \cdot \exp(t / T),$$

$$T = \tau / (k_{\text{eff}} - 1).$$
(8.79)

Параметр T у (8.79) називається *періодом реактора* і, очевидно, визначає час, за який кількість нейтронів поділу зміниться в e разів.

Оскільки концентрація нейтронів n(t) визначає енергію, яка виділяється в ядерному паливі, то зміна потужності виділення енергії в системі з ядерним паливом також описується рівнянням, аналогічним (8.79), а саме, $P(t) \sim n(t)$:

$$P(t) = P_0 \cdot \exp(t/T), \quad T = \frac{\tau}{k_{\text{eff}} - 1},$$
 (8.80)

Зі співвідношень (8.79) і (8.80) видно, що за $k_{\rm eff} = 1$ концентрація нейтронів і потужність не змінюються із часом, а ланцюгова реакція відбувається в стаціонарному режимі (робочий режим реактора), з $k_{\rm eff} > 1$ кількість нейтронів і потужність зростають (режим розгону реактора або вибух – для ланцюгової реакції у атомній бомбі), а з $k_{\rm eff} < 1$ реакція загасає (режим зупинення реактора або взагалі відсутність ланцюгової реакції). Система з $k_{\rm eff} = 1$ називається критичною, при $k_{\rm eff} > 1$ – надкритичною, при $k_{\rm eff} < 1$ – підкритичною.

Коефіцієнт $k_{\rm eff}$ розмноження нейтронів у фізичній системі зазвичай подають у вигляді

$$k_{\rm eff} = k_{\infty} \cdot \chi \,, \tag{8.81}$$

де k_{∞} – коефіцієнт, який визначає коефіцієнт розмноження нейтронів у нескінченному середовищі. Співмножник χ визначає ймовірність того, що нейтрони не вилетять з активної зони розміщення ядерного палива. Ця величина завжди менша від одиниці і залежить від маси та розмірів системи, геометрії розміщення ядерного палива та сповільнювачів, якості відбивачів, які оточують зону, де відбувається ланцюгова реакція.

Зауважимо, що відбивачі нейтронів є одним з базових елементів реактора. Наприклад, періодична надкритичність на імпульсному ядерному реакторі ІБР-2 в ОІЯД (м. Дубна, Росія) створювалася завдяки періодичному наближенню відбивача до активної зони.

Розмір і масу активної зони, а також ймовірність $\chi = \chi_{\text{кр}}$, що визначає випадок, коли система стає критичною, тобто, коли стає можливою ланцюгова реакція із самопідтримкою зі сталим виділенням енергії (тобто за $k_{\text{eff}} = 1$), називають критичними;

$$\chi_{\rm KD} = 1/k_{\infty} \,. \tag{8.82}$$

За малих розмірів активної зони з ядерним паливом втрати нейтронів завдяки їхньому вильоту за межі зони великі. Зі збільшен-

ням розмірів відношення поверхні до об'єму в середньому зменшується, а тому і втрати нейтронів зменшуються. Для зменшення таких втрат (тобто збільшення χ) активна зона з ядерним паливом має сферичну геометрію або близьку до сферичної (напр., у вигляді куба або циліндра з висотою порядку його діаметра), тому що для тіл такої геометрії відношення площі поверхні до об'єму мінімальне чи близьке до мінімального.

Якщо маса активної зони значно перевищує критичну, то ланцюгова реакція має характер вибуху. На такому принципі базується дія атомної бомби. Критична маса шматка урану $^{235}_{92}$ U у вигляді кулі дорівнює 50 кг, а її радіус становить близько 9 см. Сповільнювач нейтронів і зовнішня оболонка із берилію дозволяють зменшити критичну масу до 250 г.

Коефіцієнт розмноження нейтронів у нескінченному середовищі k_{∞} пропорційний середній кількості η нейтронів, що народжуються після поглинання ядром урану одного нейтрона (див. (8.71) і (8.73)). Для реакторів на теплових нейтронах із паливом UO₂ (діоксид урану) коефіцієнт k_{∞} має вигляд (т. зв. правило чотирьох співмножників):

$$k_{\infty} = p \cdot \varepsilon \cdot f \cdot \eta , \qquad (8.83)$$

де співмножники p, ε і f характеризують відмінність реального середовища з ядерним паливом від ідеалізованого моноізотопного середовища, що вміщує тільки $^{235}_{92}$ U. Коефіцієнт p (імовірність уникнути резонансного поглинання) є внеском швидких нейтронів, яким вдається сповільнитися до теплових без їхнього поглинання ядрами, що відрізняються від ядер основного ізотопу ядерного палива ($^{235}_{92}$ U); ε – коефіцієнт розмноження на швидких нейтронах, який визначає збільшення кількості нейтронів даного покоління внаслідок поділу швидкими нейтронами, які відрізняються від $^{235}_{92}$ U; f – коефіцієнт використання теплових нейтронів, що визначає ймовірність поглинання теплового нейтрона ядрами урану, а не ядрами сповільнювача чи іншими конструкційними матеріалами реактора.

Важливо не лише вміти здійснити реакцію із саморозвитком і виділенням великої кількості енергії, але й мати можливість керувати нею. У реальній фізичній системі середній час життя одного покоління миттєвих нейтронів з тепловими енергіями $\tau = 10^{-3}$ с, тому, якщо внаслідок деяких причин значення ефективного коефіцієнта розмноження зросте, наприклад до значення $k_{\rm eff} = 1,005$, то згідно з (8.79), (8.80) концентрація нейтронів n(t) та енергетична потужність системи P(t) за 1 с збільшуються в $n(t = 1c) / n_0 = P(t = 1c) / P_0 = \exp(5) \approx 150$ разів.

Зрозуміло, що в такому випадку ніяка механіка не дозволяє надійно керувати реакцією поділу. Контролювати швидкість реакції дозволяє наявність запізнілих нейтронів. Хоча внесок запізнілих нейтронів дорівнює $\beta = 0,0075$ (тобто приблизно 0,7%) від загальної кількості нейтронів, що вилітають під час поділу, але вони відіграють фундаментальну роль для керування ланцюговою реакцією. За наявності запізнілих нейтронів ефективний коефіцієнт розмноження нейтронів $k_{\rm eff}$ складається із двох компонентів

$$k_{\rm eff} = k_{\rm MMT} + k_{\rm 3am} \,, \tag{8.84}$$

де доданки $k_{\text{мит}}$ і $k_{\text{зап}}$ зумовлені миттєвими та запізнілими нейтронами, відповідно. Припустимо, що значення загального коефіцієнта розмноження k_{eff} трохи більше за одиницю: для визначеності знову вважаємо, що $k_{\text{eff}} = 1,005$, тоді коефіцієнт розмноження з урахуванням лише для миттєвих нейтронів, що дорівнює $(1-\beta)k_{\text{eff}}$, може бути меншим від одиниці (для нашого прикладу $k_{\text{мит}} = 0,9975$). У такому випадку одні миттєві нейтрони не забезпечують здійснення ланцюгової реакції, і вона відбувається завдяки наявності запізнілих нейтронів $k_{\text{eff}} > 1$. При цьому середній час життя одного покоління визначається середнім часом запізнілих нейтронів, який значно більший, ніж для миттєвих нейтронів, і в реальних системах становить ~ 0,1 с. Як наслідок, інтенсивність розвитку ланцюгової реакції стає значно повільнішою: за 1 с потужність збільшується лише на 5 %, що робить

можливим керування ланцюговою реакцією. Таке керування можна вже здійснити механічно, опускаючи чи піднімаючи стрижні-поглиначі нейтронів, виготовлені зазвичай із карбіду бору, кадмію тощо.

Зауважимо, що рівняння (8.79) може лише якісно описати перебіг ланцюговою реакції в ядерному паливі, оскільки воно не враховує деталі процесів утворення і розпаду уламків поділу, зокрема вплив запізнілих нейтронів, що вилітають з бетаактивних ядер-фрагментів. У наближенні точкової моделі ядерного реактора система рівнянь, яка безпосередньо враховує розпад ядер-фрагментів і динаміку зміни концентрацій запізнілих нейтронів та внесок у поділ, має вигляд

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{k_{\text{eff}} - 1}{\tau_0} \cdot n(t) - \frac{k_{\text{eff}} \cdot \beta}{\tau_0} \cdot n(t) + \sum_{i=1}^{N_G} \lambda_i c_i(t),$$

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = -\lambda_i c_i(t) + \frac{k_{\text{eff}} \cdot \beta_i}{\tau_0} n(t), \quad \beta = \sum_{i=1}^{N_G} \beta_i. \quad (8.85)$$

Тут $c_i(t)$ – концентрація ядер-фрагментів поділу *i*-ї групи, що розпадаються з вильотом нейтронів із внеском β_i від запізнілих нейтронів (підрозд. 8.3); β – загальний внесок запізнілих нейтронів, що розділені на N_G груп; $\lambda_i c_i$ – концентрація запізнілих нейтронів від розпаду ядер в *i*-й групі; λ_i – середня стала розпаду ядер в *i*-й групі з вильотом нейтронів; τ_0 – середній час генерації нейтронів одного покоління (його значення може відрізнятися від значення часу τ у формулі (8.79)).

Слід зазначити, що спрощені рівняння (8.78), (8.79) в ідеалізованому ядерному паливі дають змогу визначити ефективний коефіцієнт розмноження як відношення кількості нейтронів наступного покоління в результаті поділу ядер до кількості нейтронів попереднього покоління в усьому об'ємі розмножувального середовища

$$k_{\rm eff} = n(t+\tau) / n(t),$$
 (8.86)

але це співвідношення не виконується при більш детальному аналізі зміни концентрації нейтронів за допомогою системи рівнянь (8.85).

Сьогодні спрощений аналіз динаміки процесів у ядерних реакторах базується на системі рівнянь типу (8.85).

Існують класифікації ядерних реакторів за різними ознаками. Зокрема, залежно від складу ядерного палива, яке використовується, розрізнюють реактори, що працюють на природному урані або на урані, збагаченому ізотопами 235 U, 239 Pu, 233 U. За енергією нейтронів, що викликають поділ, реактори розрізнюють на теплові, проміжного типу та швидкі. Окрім того, реактори групують залежно від типу сповільнювача (вода, важка вода, графіт чи органічні сполуки) або охолоджувача. Наприклад, у водно-водному реакторі (ВВР), який працює в Інституті ядерних досліджень НАН України (м. Київ) охолоджувачем і сповільнювачем нейтронів є дистильована вода.

За призначенням реактори поділяють на реактори для отримання корисної енергії (т. зв. енергетичні реактори); науководослідницькі; для отримання нових ізотопів, що діляться (напр., ²³⁹Ри і ²³³U утворюються із ланцюгів перетворень ізотопів торію й урану (підрозд. 8.3); для отримання додаткових нейтронів з метою синтезу ізотопів різних елементів. Ядерний реактор є основним елементом атомних електростанцій. Ядра-уламки реакції поділу мають дуже високу кінетичну енергію і сильно розігрівають реактор. Тепло від реактора відводять теплоносієм (вода, газ, натрій тощо), що постійно в ньому циркулює. На атомних електростанціях (АЕС) і транспортних енергетичних установках це тепло використовують для отримання водяної пари, яка приводить у дію турбогенератори електричної енергії. Першу у світі АЕС побудували в СРСР у 1954 р. (м. Обнінськ, потужність 5 МВт); у 1957 р. у СРСР введено в експлуатацію перший у світі криголам з ядерною енергетичною установкою.

Саме швидкий розвиток робіт зі створення ядерної зброї та ядерної енергетики, що настав після відкриття поділу атомних ядер, значно стимулював нові дослідження фундаментальних проблем фізики ядра та елементарних частинок.

Підсумовуючи зазначимо, що створення керованих ядерних реакторів стало можливим завдяки трьом фізичним процесам, що були відкриті в ядерній фізиці:

1) поділу ядер ${}^{235}_{92}$ U нейтронами;

- 2) появі в процесі поділу нових нейтронів;
- 3) наявності запізнілих нейтронів.

Окрім того, створення ядерних реакторів потребує розвинених технологій у галузі збагачення ядерного палива; отримання сповільнювачів і конструкційних матеріалів; систем автоматизованого керування; забезпечення біологічного захисту та контролю радіаційної безпеки, підготовки кваліфікованих спеціалістів у галузі ядерної фізики та енергетики тощо. Під час роботи ядерного реактора відбувається накопичення продуктів поділу та утворення трансуранових елементів, головним чином плутонію. Накопичення радіоактивних продуктів, що поглинають нейтрони, називається отруєнням реактора, а накопичення стабільних елементів - зашлаковуванням. Трансуранові елементи, що утворюються в реакторах, радіоактивні, мають великі періоди піврозпаду, а тому дуже небезпечні для людини. На сьогодні багато зусиль прикладається для їхнього безпечного захоронення і переробки в стабільні ізотопи. Для реалізації останнього розробляються спеціальні системи із прискорювачів (англ. accelerator driven systems, ADS) і швидких реакторів для опромінення трансуранових елементів потоками частинок з метою їхнього перетворення на стабільні ізотопи.

Задачі та завдання для самостійної роботи

8.1. Навести ланцюжок радіоактивних перетворень ядер $^{238}_{92}$ U на ізотоп $^{234}_{92}$ U і знайти відносну частку (поширеність) ізотопу $^{234}_{92}$ U у природному урані.

Розв'язання: із таблиць характеристик атомних ядер отримусмо такий ланцюжок перетворень:

$$\sum_{92}^{238} U \frac{\alpha}{4,5 \cdot 10^9 \text{ c}} > \sum_{90}^{234} Th \frac{\beta}{24,1 \text{ дi6}} >$$
$$> \sum_{91}^{234} Pa \frac{\beta^-}{6,7 \text{ год}} > \sum_{92}^{234} U(T_{1/2}^{234} = 2,48 \cdot 10^5 \text{ років})$$

Порівняно з ізотопами урану час життя ядер $^{234}_{90}$ Th і $^{234}_{91}$ Pa малий, тому можна наближено вважати, що ізотоп $^{238}_{92}$ U одразу перетворюється на ізотоп $^{234}_{92}$ U, минаючи проміжні ступені розпаду. Тоді, з урахуванням великою різниці їхніх періодів піврозпаду, ці ізотопи будуть перебувати в детальній рівновазі, а відношення ядер урану 234 (N(234)) до урану 238 (N(238)) буде обернено пропорційним відношенню швидкості їхнього розпаду або пропорційним відношенню періодів їхнього розпаду

$$\frac{N(234)}{N(238)} \cong \frac{T_{1/2}(234)}{T_{1/2}(238)} = 0,55 \cdot 10^{-4}.$$

Оскільки поширеність ізотопу $^{238}_{92}$ U більша за 99 %, то отримане значення й є оціненою часткою ізотопу урану 234 у природному урані. Зазначимо, що знайдена величина майже збігається з експериментальним значенням 0,0054 % поширеності в земних умовах.

8.2. Користуючись моделлю рідкої краплини, обчислити мінімальне значення (X_{\min}) параметра поділу $X = \frac{Z^2}{A}$, що відповідає умові енергетичної можливості поділу ядра з масовим числом A на два уламки з масовими числами kA та (1-k)A і зарядами kZ та (1-k)Z. При обчисленні енергії зв'язку використати модель рідкої краплини.

Розб'язання: згідно з (8.28) і (8.29) умова енергетичної можливості процесу поділу на два уламки означає, що енергії зв'язку ядер-уламків мають задовольняти умову B(kZ,kA) + B((1-k)Z, (1-k)A) > B(Z, A), де для моделі рідкої краплини енергія зв'язку має такий вигляд, як у розд. 1 (див. (1.17)). Таким чином, поділ стане можливим, якщо буде виконуватися така нерівність:

$$a_2 A^{2/3} + a_3 Z^2 A^{-1/3} > a_2 (kA)^{2/3} + a_3 (kZ)^2 (kA)^{-1/3} + a_2 ((1-k)A)^{2/3} + a_3 ((1-k)Z)^2 ((1-k)A)^{-1/3}.$$

Звідки з урахуванням визначень (8.27) $X = \frac{Z^2}{A}$ $X_{\rm kp} \equiv 2\frac{a_2}{a_3}$ для

параметра поділу та його критичного значення, знаходимо умову (8.30) енергетичної можливості поділу

$$X = \frac{Z^2}{A} > X_{\kappa p} \frac{1}{2} \frac{(1-k)^{2/3} + k^{2/3} - 1}{1 - k^{5/3} - (1-k)^{5/3}}$$

8.3. Оцінити повну кількість антинейтрино в секунду (швидкість утворення, повний потік) Φ , що виникає під час роботи ядерного реактора атомної електростанції на повільних нейтронах із рівнем теплової потужності P = 3000 MBT, припустивши, що на один поділ припадає приблизно п'ять β^- -розпадів ядеруламків. Обчислити потужність P_v , яка втрачається в такому ядерному реакторі через вилітання антинейтрино.

Розв'язання: при наближеному обчисленні вважатимемо, що теплова енергія, яка виділяється за один акт поділу $^{235}_{92}$ U, дорівнює Q = 200 MeB, тому кількість актів поділу в одиницю часу (швидкість поділу) буде дорівнювати P/Q, а повний потік антинейтрино буде в п'ять разів більше цієї величини:

$$\Phi = 5\frac{P}{Q} = 5\frac{3000 \cdot 10^6 \,\mathrm{Jm} \,\mathrm{/c}}{200 \cdot 10^6 \cdot 10^{-19} \,\mathrm{Jm}} = 4,7 \cdot 10^{20} \,\mathrm{c}^{-1}$$

Згідно зі спостереженнями середня енергія всіх антинейтрино на один акт поділу приблизно дорівнює $E_v = 10$ MeB, тому енергія, яка в середньому припадає на одне антинейтрино, дорівнює $E_v / 5$ і втрата потужності через вилітання антинейтрино дорівнює

$$P_{\rm v} = \frac{E_{\rm v}}{5} = P \frac{E_{\rm v}}{Q} = \frac{3000 \cdot 10^6 \,\text{Дж} \,/ \,\text{c} \cdot 10 \,\text{MeB}}{200 \,\text{MeB}} = 150 \,\text{MBt}.$$

8.5. Обчислити бар'єр поділу ізотопу $^{232}_{90}$ Th за моделлю рідкої краплини і можливості його миттєвого поділу та поділу тепловими нейтронами.

8.6. Обчислити кінетичні енергії та швидкості уламків з масовими числами 200 і 35, що утворюються при поділі урану $^{235}_{90}$ U, якщо повна кінетична енергія уламків становить 160 MeB.

8.7. Навести детальні ланцюги радіоактивних перетворень ядер 232 Th (до 237 Np) і 238 U (до 241,243 Am) після радіаційного поглинання нейтронів.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна

Блан Д. Ядра, частицы, ядерные реакторы / Д. Блан. – М. : Мир, 1989.

Булавін Л. А. Ядерна фізика / Л. А. Булавін, В.К. Тартаковський. – К. : Знання, 2005.

Ишханов Б. С. Частицы и атомные ядра / Б. С. Ишханов. – М. : МГУ, 2007; http://nuclphys.sinp.msu.ru

Валантен Л. Субатомная физика: ядра и частицы. Т. 1. Элементарный подход / Л. Валантен. – М. : Мир, 1986.

Валантен Л. Субатомная физика: ядра и частицы. Т. 2. Дальнейшее развитие / Л. Валантен. – М. : Мир, 1986.

Маляров В. В. Основы теории атомного ядра / В. В. Маляров. – М. : Наука, 1967.

Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 5. Атомная и ядерная физика / Д. В. Сивухин. – М. : Физматгиз / МФТИ, 2002.

Ситенко А. Г. Теория ядерных реакций / А. Г. Ситенко. – М. : Энергоатомиздат, 1983.

Широков Ю. М. Ядерная физика / Ю. М. Широков, Н. П. Юдин. – М. : Наука, 1980.

Антонова И. А. Задачи по ядерной физике / И. А. Антонова, Н. Г. Гончарова, Ф. А. Живописцев. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1979.

Marmier P. Physics of nuclei and particles / P. Marmier, E. Sheldon. – N.Y.: Acad. Press., 1969. – Vol. I.;– N.Y.: Acad. Press., 1970.– Vol. II.

Nilsson S. G. Shapes and shells in nuclear structure / S. G. Nilsson, I. Ragnarsson. – N.Y. : Cambridge Univ. Press., 1995.

Додаткова

Айзенберг И. Модели ядер. Коллективные и одночастичные явления / И. Айзенберг, В. Грайнер. – М. : Атомиздат, 1975.

Айзенберг И. Механизмы возбуждения ядра. Электромагнитное и слабое взаимодействие / И. Айзенберг, В. Грайнер. – М. : Атомиздат, 1973.

Айзенберг И. Микроскопическая теория ядра / И. Айзенберг, В. Грайнер. – М. : Атомиздат, 1976.

Ахієзер О. І. Теорія ядра / О. І. Ахієзер, Ю. А. Бережной. – К. : Вища шк., 1995.

Ахієзер О. Л. Теорія ядерних реакцій / О. І. Ахієзер, Ю. А. Бережной. – Х. : Основа, 2001.

Блат Дж. Теоретическая ядерная физика / Дж. Блат, В. Вайскопф. – М. : ИЛ, 1954.

Бор О. Структура атомного ядра / *О*. *Бор, Б*. *Моттельсон*. – М. : Мир, 1971. – Т. 1; 1977. – Т. 2.

Вайскопф В. Физика в двадцатом столетии / В. Вайскопф. – М. : Атомиздат, 1977.

Вальтер А. К. Ядерная физика / А. К. Вальтер, И. И. Залюбовский – Х. : Вища шк., 1974.

Варшалович Д. А. Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. – Л. : Наука, 1975.

Висоцький В. І. Квантова механіка та її використання в прикладній фізиці / В. І. Висоцький. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2008.

Гопыч П. М. Ядерная спектроскопия / П. М. Гопыч, И. И. Залюбовский. – Х. : Вища шк., 1980.

Давыдов А. С. Возбужденые состояния атомных ядер / А. С. Давыдов. – М. : Атомиздат, 1967.

Давыдов А. С. Теория атомного ядра / А. С. Давыдов. – М. : Физматгиз, 1958.

Денисов В. Ю. Проблемы физики атомного ядра и ядерных реакций / В. Ю.Денисов, В. А. Плюйко. - К.: ВПЦ "Київський університет", 2013.

Живописцев Ф. А. Модели предравновесных реакций / Ф. А. Живописцев, Э. И. Кэбин, В. Г. Сухаревский. – М. : МГУ, 1987.

Игнатюк А. В. Статистические свойства возбужденных атомных ядер / А. В. Игнатюк. – М. : Энергоатомиздат, 1983.

Симметричное и асимметричное деление ядер легче тория / М. Г. Иткис, В. Н. Околович, А. Я. Русанов, Г. Н. Смиренкин // ЭЧАЯ. – 1988. – Т. 19. – С. 701–784.

Ишханов Б. С. Взаимодействие электромагнитного излучения с атомными ядрами / Б. С. Ишханов, И. М. Капитонов. – М. : МГУ, 1979.

Кадменский С. Г. Альфа-распад и родственные ядерные реакции / С. Г. Кадменский, В. И. Фурман. – М. : Энергоатомиздат, 1985.

Капитонов И. М. Введение в физику ядра и частиц / И. М. Капитонов. – М. : УРСС, 2002.

Клапдор-Клайнгротхаус Г. В. Астрофизика элементарных частиц / Г. В. Клапдор-Клайнгротхаус, К. Цюбер. – М. : УФН, 2000.

К теории оболочечной структуры / В. М. Коломиец, Б. Д. Константинов, В. М. Струтинский, В. И. Хворостьянов // ЭЧАЯ, 1972. – Т. 3. – С. 392–435.

Любимов А. Введение в экспериментальную физику частиц / А. Любимов, Д. Киш. – М. : Физматлит, 2001.

Михайлов В. М. Ядерная физика / В. М. Михайлов, О. Е. Крафт. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1988.

Мухин К. Н. Экспериментальная ядерная физика. Т. І. Физика атомного ядра / К. Н. Мухин. – М. : Атомиздат, 1974.

Мухин К. Н. Экспериментальная ядерная физика. Т. II. Физика элементарных частиц / К. Н. Мухин. – М. : Атомиздат, 1974.

Наумов А. И. Физика атомного ядра и элементарных частиц / А. И. Наумов. – М. : Просвещение, 1984.

Немец О. Ф. Справочник по ядерной физике / О. Ф. Немец, Ю. В. Гофман. – К. : Наук, думка, 1975.

Немец О. Ф. Ядерные реакции / О. Ф. Немец, К. О. Теренецкий. – К. : Вища шк., 1977.

Немировский П. Э. Современные модели атомного ядра / П. Э. Немировский. – М. : Атомиздат, 1960.

Поликапов С. М. Изомерия формы атомных ядер / С. М. Поликапов. – М. : Атомиздат, 1977.

Плюйко В. А. Основи теорії ядра та ядерних процесів. Фізика атомного ядра / В. А. Плюйко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2002.

Плюйко В. А. Основи теорії ядра та ядерних процесів. Ядерні процеси / В. А. Плюйко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2003.

Ситенко О. Г. Теорія розсіяння / О. Г. Ситенко. – К. : Либідь, 1993. Ситенко О. Г. Теорія ядра / О. Г. Ситенко, В. К. Тартаковский. –

К. : Либідь, 2000.

Соловьев В. Г. Теория атомного ядра. Ядерные модели / В. Г. Соловьев. – М. : Энергоатомиздат, 1981.

Уилетс Л. Теория ядерного деления / Л. Уилетс. – М. : Атомиздат, 1967.

Фридлендер Г. Ядерная химия и радиохимия / Г. Фридлендер, Дж. Кеннеди, Дж. Миллер. – М. : Мир, 1967.

Gadioli E. Pre-equilibrium nuclear reactions / E. Gadioli, P. G. Hodgson. – Oxford: Clarendon press, 1992.

Hodgson P. G. Nuclear reactions and nuclear structure / P.G. Hodgson. – Oxford : Clarendon press, 1971.

Microscopic Inertial Functions for Nuclei in the Barium Region/ T. Kaniowska, A. Sobiczewski, K. Pomorski, S. G. Rohozinski // Nucl. Phys., 1974. – Vol. A274. – P. 151–167.

Lodhi M. A. K. Systematics of nuclear single-particle states / M. A. K. Lodhi, B. T. Waak // Phys. Rev. Lett., 1974. – Vol. 33. – P. 431–433.

Droplet model of giant dipole resonance / W. D. Myers, W. J. Swiatecki, T. Kodama et al. // Phys. Rev., 1977. – Vol. C15. – P. 2032–2043.

Particle emission from nuclei. Vol. 1. Nuclear deformation energy / Eds. D. N. Poenaru, M. S. Ivascu. – Boca Raton : CRC Press Inc., 1989.

Physics and chemistry of fission // Proc. Symp. Rochester NT, 13–17 August, 1973. – Vol. 1. – Vienna : IAEA. – 1974.

Ring P. The nuclear many-body problem / P. Ring, P. Schuck. – N.Y. : Springer Verlag, 1980.

Деякі інтернет-ресурси

http://atom.univ.kiev.ua/ http://pdg.lbl.gov/ http://www.webelements.com/ http://nuclphys.sinp.msu.ru/

додатки

Елемент, B, MeB Елемент, B, MeB Α Вміст, % Α Вміст, ізотоп ізотоп % 1 99,985 $_7$ N 15 115,5 0,366 $_{1}H$ 2 2,2 0,015 16 118,0 3 8,5 17 123,9 3 7,7 0,000137 13 77,1 80 $_{2}$ He 99,999863 4 28.3 14 98.7 5 27,3 15 111.9 6 29,3 16 127,6 99,762 5 26,3 17 131,8 0,038 ₃Li 6 7,5 18 139,8 0,200 32,0 7 9,2 92,5 19 143,8 20 8 41,3 151,4 ₉F 26,9 17 128,2 ₄Be 6 7 37,6 18 137,4 8 19 147,8 100 56,5 9 58,2 100 20 145,4 10 21 65,0 163.5 11 65,5 18 131,1 8 37,7 19 143,8 $_{5}B$ 9 20 160,3 90,48 56,3 10 167,4 64,7 21 0,27 11 76,2 19.9 22 177,8 9,25 ₁₀Ne 80,1 23 183,0 12 79,6 13 84,5 24 191,9 $_{6}\overline{C}$ 20 10 60,3 $_{11}$ Na 144,6 73,4 21 163,1 11 98,89 12 92,2 22 174,1 97,1 13 1.11 23 186.6 100 14 105,3 24 193,5 15 25 202,6 106,5 26 209,0 16 110,8 22 $_7$ N 12 73,8 $_{12}Mg$ 168,3 13 94,1 23 181,7 14 104,7 99,634 24 78,99 198,3

ДОДАТОК 1 Енергії зв'язку деяких атомних ядер

Елемент,	А	B, MeB	Вміст,	Елемент,	Α	B, MeB	Вміст,
ізотоп			%	ізотоп			%
$_{12}$ Mg	22	168,3		₃₁ Ga	72	625,8	
	23	181,7			73	634,8	
	24	198,3	78,99		74	640,8	
	25	205,6	10,00	₃₂ Ge	65	557,5	
	26	216,7	11,01		66	568,4	
	27	223,1			67	578,2	
	28	231,6			68	590,2	
₁₃ A1	24	183,4			69	598,9	
-	25	200,5			70	610,5	21,23
	26	211,9			71	617,8	
	27	225,0	100		72	629,0	27,66
	28	232,7			73	635,6	7,73
	29	242,1			74	645,7	35,94
	30	249,1			75	652,2	
₁₄ Si	26	206,0			76	661,6	7,44
	27	219,4			77	667,6	
	28	236,5	92,23		78	676,5	
	29	245,0	4,67	₃₃ As	69	594,2	
	30	255,2	3,10		70	603,2	
	31	262,2			71	615,0	
	32	271,5			76	659,9	
₃₀ Zn	67	585,1	4,1		77	669,6	
	68	595,4	18,8		78	676,6	
	69	601,7			79	685,5	
	70	611,0	0,6		80	691,6	
	71	317,0			81	700,7	
	72	625,0		₃₄ Se	71	609,8	
₃₁ Ga	64	551,2		0.	73	630,9	
01	65	563,0			74	642,9	0,89
	66	572,2			75	650,9	
	67	583,4			76	662,0	9,36
	68	591,7			77	669,5	7,63
	69	601,9	60,108		78	679,9	23,78
	70	609,6			79	686,9	
	71	618,8	39,892		80	696,9	49,61

Елемент,	А	B, MeB	Вміст,	Елемент,	А	B, MeB	Вміст,
ізотоп			%	ізотоп			%
₃₄ Se	81	703,7		₃₈ Sr	84	728,9	0,56
	82	712,9	8,73		85	734,5	
	83	718,8			86	748,9	9,86
₃₅ Br	74	636,1			87	757,3	7,00
	75	647,4			88	768,4	82,58
	76	656,6			89	774,8	
	77	667,3			90	782,6	
	78	675,6			91	788,4	
	79	686,3	50,69		92	795,7	
	80	694,2		39Y	85	733,7	
	81	704,3	49,31		86	742,9	
	82	712,0			87	754,9	
	83	721,5			88	764,0	
	84	728,3			89	775,5	100
	85	735,5			90	782,4	
	87	747,5			91	790,3	
₃₆ Kr	74	631,2			92	796,9	
	77	663,6			93	804,2	
	78	675,6	0,35		94	810,5	
	79	683,9		₄₀ Zr	87	750,6	
	80	695,4	2,25		89	771,9	
	85	739,4			90	783,8	51,45
	86	749,2	17,3		91	791,1	11,22
	87	754,7			92	799,7	17,15
	88	762,0			93	806,4	
₃₇ Rb	80	689,5			94	814,7	17,38
-	81	700,3			95	821,1	
	82	709,3			96	828,9	2,80
	84	728,8			97	834,6	
	85	739,4	72,165	₄₁ Nb	89	767,2	
	86	747,9			90	776,9	
	87	757,9	27,835		91	778,6	
	88	764,0		l	92	796,8	
	89	771,7			93	805,6	100
	90	776,8			94	812,8	

Елемент,	А	B, MeB	Вміст,	Елемент,	А	B, MeB	Вміст,
ізотоп			%	ізотоп			%
₄₁ Nb	95	821,5		44Ru	103	884,7	
	96	828,4			104	893,4	18,7
	97	836,5			105	899,4	
	98	842,3			106	907,7	
	99	850,0		₄₅ Rh	98	840,3	
₄₂ Mo	90	773,6			99	849,6	
	91	783,4			100	857,6	
	92	796,5	14,84		101	867,9	
	93	804,3			102	875,3	
	94	814,2	9,25		103	884,6	100
	95	821,6	15,92		104	891,4	
	96	830,8	16,68		105	900,5	
	97	837,6	9,55		106	907,0	
	98	846,1	24,13		107	915,4	
	99	852,4		₄₆ Pd	99	845,0	
	100	860,4	9,63		100	856,4	
	101	866,2			101	865,4	
	102	874,7			102	975,7	1,02
₄₃ Tc	92	789,3			103	883,3	
	93	800,4			104	893,1	11,14
	94	809,1			105	900,3	22,33
	95	819,2			106	909,7	27,33
	96	827,0			107	916,1	
	98	844,4			108	925,2	26,46
	99	853,0			109	931,4	
	100	859,4			110	940,8	11,72
	101	868,2			111	946,1	
	102	875,1			112	954,0	
44Ru	95	816,2		₄₇ Ag	103	880,3	
	96	826,7	5,52		104	888,0	
	98	845,3	1,88		105	897,9	
	99	852,5	12,7		106	906,0	
	100	862,0	12,6		107	915,4	51,839
	101	869,1	17,0		108	922,6	
	102	878,4	31,6		109	931,8	48,161

Елемент,	Α	B, MeB	Вміст,	Елемент,	Α	B, MeB	Вміст,
ізотоп		, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	%	ізотоп			%
₄₇ Ag	110	938,6		₅₀ Sn	115	979,1	0,34
	111	947,5		00	116	988,6	14,54
	112	953,6			117	995,6	7,68
	113	962,1			118	1005,0	24,22
	114	968,6			119	1011,5	8,58
	115	976,6			120	1020,6	32,59
	116	982,5			121	1026,9	
48Cd	106	905,6	1,25	₅₁ Sb	113	1055,8	
10	107	913,2		01	114	956,1	
	108	923,6	0,89		115	964,3	
	109	930,8			116	975,3	
	110	940,7	12,49		117	983,3	
	111	947,8	12,80		118	993,0	
	112	956,8	24,13		119	1000,3	
	113	963,3	12,22		120	1010,2	
	114	972,4	28,73		121	1017,1	57,21
	115	978,7			122	1026,5	
	116	987,2	7,49		123	1033,3	42,79
	117	993,2			124	1042,3	
49In	108	917,7			125	1048,6	
15	109	928,0			126	1057,3	
	110	935,9			127	1071,9	
	111	946,0		₅₂ Te	116	980,9	
	112	953,4		52	117	988,8	
	113	962,9	4,29		119	1007,5	
	114	970,2			120	1016,8	0,096
	115	979,4	95,71		122	1034,5	2,603
	116	986,1			123	1041,3	0,908
	117	994,9			124	1050,7	4,816
	118	1001,6			125	1057,3	7,139
	119	1010,0			126	1066,4	18,952
₅₀ Sn	111	942,8			127	1072,8	
	112	953,3	0,97		128	1081,2	31,867
	113	961,4			129	1087,5	
	114	971,4	0,65		130	1095,5	33,799

Елемент,	А	B, MeB	Вміст,	Елемент,	А	B, MeB	Вміст, %
ізотоп			%	ізотоп			
₅₂ Te	131	1101,8		₅₅ Cs	135	1134,3	
	132	1109,9			136	1141,2	
53I	122	1029,6			137	1149,5	
00	124	1046,7			138	1154,4	
	125	1056,4			139	1159,7	
	126	1063,5		₅₆ Ba	129	1081,4	
	127	1072,7	100		130	1092,8	0,106
	128	1079,4			132	1110,0	0,101
	129	1088,2			133	1117,6	
	130	1094,7			134	1126,8	2,417
	131	1103,3			135	1133,8	6,592
	132	1109,6			136	1143,0	7,854
	133	1118,1			137	1149,9	11,23
	136	1135,6			138	1158,5	71,70
₅₄ Xe	124	1046,0	0,10		139	1163,2	
	126	1064,0	0,09		140	1169,6	
	127	1071,2			141	1174,6	
	128	1080,7	1,91	₅₇ La	132	1104,4	
	129	1087,6	26,4		133	1114,6	
	130	1096,9	4,1		134	1122,4	
	131	1103,5	21,2		135	1131,9	
	132	1112,4	26,9		136	1139,3	
	133	1119,2			138	1156,0	0,0902
	134	1127,4	10,4		139	1164,8	99,9098
	135	1133,9			140	1169,9	
	136	1141,8	8,9		141	1176,7	
$_{55}$ Cs	126	1058,4			143	1188,1	
	127	1068,3		₅₈ Ce	136	1138,8	0,19
	128	1076,0			138	1156,3	0,25
	129	1085,6			139	1163,8	
	130	1093,1			140	1172,9	88,48
	131	1102,4			141	1178,3	
	132	1109,8			142	1185,5	11,08
	133	1118,8	100		143	1190,6	
	134	1125,6			144	1197,5	

Елемент,	А	B, MeB	Вміст,	Елемент,	А	B, MeB	Вміст,
ізотоп		,	%	ізотоп		,	%
₅₈ Ce	145	1203,0		₆₂ Sm	147	1217,5	15,0
	146	1209,2		01	148	1225,6	11,3
₅₉ Pr	139	1161,0			149	1231,5	13,8
0,5	140	1168,8			150	1239,5	7,4
	141	1178,1	100		151	1245,0	
	142	1184,0			152	1253,3	26,7
	143	1191,3			153	1259,3	
	144	1197,0			154	1267,1	22,7
	145	1204,2			155	1272,6	
	146	1209,4			156	1279,8	
₆₀ Nd	141	1175,5		₆₃ Eu	146	1206,0	
	142	1185,4	27,13		147	1214,9	
	143	1191,4	12,18		150	1236,3	
	144	1199,2	23,80		151	1244,3	47,8
	145	1205,2	8,30		152	1250,7	
	146	1212,8	17,19		153	1259,3	52,2
	147	1217,9			154	1265,6	
	148	1225,4	5,76		155	1273,6	
	149	1230,3			156	1279,9	
	150	1237,6	5,64		157	1287,5	
	151	1242,4			159	1300,8	
₆₁ Pm	141	1171,1		₆₄ Gd	148	1221,1	
-	142	1179,8		-	149	1228,1	
	143	1189,5			150	1236,6	
	145	1204,3			152	1251,7	
	146	1210,3			153	1258,3	
	147	1218,0			154	1266,8	2,18
	148	1223,9			155	1273,1	14,80
	149	1231,2			156	1281,6	20,47
	150	1236,5			157	1288,0	15,65
	151	1244,0			158	1295,9	24,84
₆₂ Sm	143	1185,3			159	1302,2	
	144	1196,0	3,1		160	1309,2	21,86
	145	1202,9			161	1315,2	
	146	1211,0		₆₅ Tb	151	1239,6	

Елемент,	А	B, MeB	Вміст,	Елемент,	А	B, MeB	Вміст,
ізотоп			%	ізотоп			%
₆₅ Tb	152	1247,1		₆₉ Tm	164	1331,6	
	158	1294,2			166	1348,3	
	159	1302,4	100		168	1363,2	
	160	1308,8			169	1371,2	100
	161	1316,4			170	1377,8	
₆₆ Dy	152	1245,6			171	1385,3	
	153	1252,8			172	1391,5	
	154	1261,4			173	1398,0	
	156	1278,5	0,06		175	1410,6	
	158	1294,4	0,10	₇₀ Yb	168	1362,8	0,13
	159	1301,2		-	170	1378,0	3,05
	160	1309,8	2,34		171	1384,6	14,3
	161	1316,2	18,9		172	1392,6	21,9
	162	1324,4	25,5		173	1399,0	16,12
	163	1330,7	24,9		174	1406,4	31,8
	164	1338,3	28,2		175	1412,3	
	165	1343,7			176	1419,1	12,7
	166	1350,7			177	1424,6	
₆₇ Ho	158	1292,4		₇₁ Lu	170	1373,7	
-	162	1321,4			173	1397,6	
	163	1329,9			174	1404,2	
	164	1336,1			175	1412,0	97,41
	165	1344,3	100		176	1418,3	2,59
	166	1350,4			177	1425,2	
	167	1357,8			178	1431,2	
₆₈ Er	162	1320,7	0,14		179	1437,9	
	164	1336,4	1,61	$_{72}$ Hf	174	1403,7	0,162
	165	1343,4			175	1410,6	
	166	1351,5	33,6		176	1418,6	5,206
	167	1358,0	22,95		177	1424,9	18,606
	168	1365,8	26,8		178	1432,6	27,297
	169	1371,6			179	1438,7	13,629
	170	1379,0	14,9		180	1446,0	35,100
	171	1384,6			181	1452,0	
	172	1391,4			182	1458,6	

Елемент,	Α	B, MeB	Вміст,	Елемент,	Α	B, MeB	Вміст,
ізотоп			%	ізотоп			%
$_{72}$ Hf	183	1463,7		₇₈ Pt	190	1509,8	0,01
74W	180	1444,3	0,120		192	1524,6	0,79
	181	1451,3			193	1530,9	
	182	1459,2	26,498		194	1539,4	32,9
	183	1465,4	14,314		195	1545,6	33,8
	184	1472,9	30,642		196	1553,6	25,3
	185	1478,6			197	1559,4	
	186	1485,9	28,426		198	1567,3	7,2
	187	1491,1			199	1572,5	
	188	1498,0		₇₉ Au	192	1520,6	
₇₅ Re	184	1470,5		-	194	1536,1	
	185	1478,3	37,40		195	1544,6	
	186	1484,4			196	1551,3	
	187	1491,7	62,60		197	1559,4	100
	188	1497,6			198	1565,9	
	190	1510,1			199	1573,5	
₇₆ Os	184	1469,8	0,020		200	1579,6	
	185	1476,5			201	1586,7	
	186	1484,7	1,58	₈₀ Hg	194	1535,2	
	187	1490,9	1,6		196	1551,2	0,15
	188	1498,9	13,3		198	1566,5	9,97
	189	1504,9	16,1		199	1573,2	16,87
	190	1512,6	26,4		200	1581,2	23,10
	191	1518,3			201	1587,4	13,18
	192	1526,2	41,0		202	1595,2	29,86
	193	1531,4			203	1601,2	
₇₇ Ir	186	1480,1			204	1608,6	6,87
	188	1495,3			205	1614,2	
	190	1509,8		₈₁ T1	196	1545,8	
	191	1517,8	37,3	01	198	1562,2	
	192	1523,9			199	1571,3	
	193	1531,7	62,7		200	1577,9	
	194	1538,0			201	1586,2	
₇₈ Pt	188	1494,0			202	1593,3	

Елемент,	Α	B, MeB	Вміст,	Елемент,	Α	B, MeB	Вміст,
ізотоп			%	ізотоп			%
₈₁ Tl	203	1600,9	29,524	₈₄ Po	208	1630,6	
01	204	1607,5		01	209	1637,5	
	205	1615,0	70,476		210	1645,5	
	206	1621,6			211	1649,8	
	207	1628,4			212	1655,8	
	208	1632,2			213	1660,1	
	209	1637,2			214	1666,0	
	210	1640,9			215	1670,1	
₈₂ Pb	202	1592,4			216	1675,9	
02	203	1599,1			218	1685,5	
	204	1607,5	1,4	₈₅ At	207	1617,5	
	205	1614,2		00	208	1624,9	
	206	1622,3	24,1		209	1633,3	
	207	1629,0	22,1		210	1640,6	
	208	1636,4	52,4		211	1648,2	
	209	1640,4			213	1659,1	
	210	1645,6			214	1664,2	
	211	1649,3			215	1670,1	
	212	1654,5			216	1674,6	
	214	1663,3			217	1680,6	
₈₃ Bi	203	1595,1			218	1685,1	
00	204	1602,4			219	1690,5	
	205	1610,8		₈₆ Rn	210	1637,5	
	206	1617,9			211	1644,5	
	207	1625,9			212	1652,5	
	208	1632,8			215	1669,3	
	209	1640,2	100		216	1675,9	
	210	1644,8			217	1680,5	
	211	1649,9			218	1687,0	
	212	1654,3			219	1691,4	
	213	1659,5			220	1697,8	
	214	1663,6			222	1708,2	
	215	1668,6		₈₇ Fr	212	1646,7	
₈₄ Po	206	1615,4			217	1678,9	
	207	1622,2			218	1684,5	

Елемент,	Α	B, MeB	Вміст,	Елемент,	Α	B, MeB	Вміст,
ізотоп			%	ізотоп			%
₈₇ Fr	219	1690,9		₉₁ Pd	226	1727,0	
	220	1696,6			227	1734,1	
	221	1702,5			228	1740,2	
	223	1713,4			229	1747,4	
₈₈ Ra	219	1689,4			230	1753,2	
00	220	1696,6			231	1759,8	
	221	1702,0			232	1765,4	
	222	1708,7			233	1772,0	
	223	0713,8			234	1777,1	
	224	1720,3			235	1783,2	
	225	1725,3			237	1794,1	
	226	1731,6		92U	227	1731,4	
	227	1736,1		52	228	1739,1	
	229	1742,3			229	1745,4	
₈₉ Ac	221	1699,5			230	1752,8	
05	222	1705,7			231	1758,6	
	223	1712,4			232	1765,9	
	224	1718,1			233	1771,8	
	225	1724,8			234	1778,6	0,0055
	226	1730,1			235	1783,8	0,720
	227	1736,6			236	1790,2	
	228	1741,6			237	1795,7	
	231	1758,9			238	1801,7	99,2745
₉₀ Th	223	1710,0			239	1806,5	
50	224	1717,6			240	1812,3	
	225	1723,6		₉₃ Np	231	1756,0	
	226	1730,5		<i>y</i> 0 <i>z</i>	233	1770,0	
	227	1735,9			234	1776,0	
	228	1743,0			235	1782,9	
	229	1748,4			236	1788,6	
	230	1755,2			237	1795,4	
	231	1760,2			238	1800,8	
	232	1766,5	100		239	1807,0	
	233	1771,6			240	1812,0	
	234	1777,7			241	1818,2	

Елемент,	А	B, MeB	Вміст,	Елемент,	А	B, MeB	Вміст,
ізотоп			%	ізотоп			%
₉₄ Pu	232	1760,7		₉₆ Cm	245	1841,5	
-	233	1767,3			246	1847,7	
	234	1774,8			249	1864,0	
	235	1781,0		₉₇ Bk	243	1826,8	
	236	1788,4		5.	245	1839,9	
	237	1794,4			247	1852,3	
	238	1801,3			248	1857,7	
	239	1806,9			249	1864,1	
	240	1813,3			250	1868,8	
	241	1818,8		98Cf	244	1831,3	
	242	1825,0		50	245	1837,6	
	243	1830,0			246	1844,8	
	246	1846,6			248	1857,6	
₉₅ Am	237	1792,2			249	1863,5	
50	239	1805,4			250	1869,8	
	241	1818,0			253	1886,2	
	242	1823,5		₉₉ Es	249	1861,3	
	243	1829,8			251	1874,0	
	244	1835,0			252	1879,3	
	245	1814,4			253	1885,7	
	246	1846,2			254	1890,6	
₉₆ Cm	238	1796,5		₁₀₀ Fm	248	1851,5	
50	240	1810,3		100	250	1865,6	
	241	1816,5]	252	1878,7	
	242	1823,4			254	1890,8	
	243	1289,0		₁₀₁ Md	255	1894,8	
	244	1835,7					

Швидкість світла	$2.99792458 \cdot 10^8$ M/c
у вакуумі с	2,7777213010 M/C
Заряд електрона е	1,60217653·10 ⁻¹⁹ Кл
Стала Планка ħ	1,05457168 · 10 ^{−34} Дж·с =
	$= 6,58211915 \cdot 10^{-22} \text{ MeB} \cdot \text{c}$
ħc	197,326968 МеВ·фм
$\frac{\hbar^2}{m_u}$	41,80159 MeB· фм ²
$\frac{\hbar^2}{m_p}$	41,49961962 MeB·фм ²
$\frac{\hbar^2}{m_n}$	41,4424945 MeB·фм ²
Стала тонкої структури $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} (C\Gamma C) =$ $= \frac{e^2}{k_{\varepsilon} \hbar c} (CI)$	1/137,03599911
Стала Больцмана	$8,617343 \cdot 10^{-5} \mathrm{eB} \cdot \mathrm{K}^{-1} =$
k	1,3806505 · 10 ⁻²³ Дж· К ⁻¹
Число Авогадро N_A	6,0221415·10 ²³ моль ⁻¹
Атомна одиниця	931,494043 MeB =
маси (а. о. м.)	=1,66053886·10 ⁻²⁷ кг
1 електронвольт (eB)	1,60217653·10 ⁻¹⁹ Дж

Деякі фізичні константи

Маса електрона <i>m_e</i>	$0,510998918 \text{ MeB} / c^2 =$
	9,1093826 · 10 ⁻³¹ кг
Маса протона <i>т</i> _р	$938,272029 \mathrm{MeB}/c^2 =$
	=1,00727646688 а.о.м. =
	$= 1836, 15267261m_{\rm e} =$
	$=1,67262171\cdot10^{-27}$ κγ
Маса нейтрона <i>m_n</i>	$939,56536 \mathrm{MeB} / c^2 =$
	=1,0086649156 а.о.м. =
	$=1838,68336405 m_{\rm e} =$
	$=1,67492738\cdot10^{-27}$ кг
Різниця мас нейтрона і протона <i>m_n – m_p</i>	1,2933317 MeB/ c ²
Ядерний магнетон $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_pc}$	$3,152451259 \cdot 10^{-14} \text{ MeB} \cdot \text{T}^{-1}$

Навчальне видання

КАДЕНКО Ігор Миколайович ПЛЮЙКО Володимир Андрійович

ФІЗИКА АТОМНОГО ЯДРА ТА ЧАСТИНОК

Підручник

2-ге видання, перероблене і доповнене

(ЕЛЕКТРОННА ВЕРСІЯ)

Редактори Л. П. Львова, В.А.Плюйко