



# Дискретна математика

## Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

### Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	<i>10 – Природничі науки</i>
Спеціальність	<i>104 Фізика та астрономія</i>
Освітня програма	<i>Комп'ютерне моделювання фізичних процесів</i>
Статус дисципліни	<i>Нормативна</i>
Форма навчання	<i>очна(денна)/змішана</i>
Рік підготовки, семестр	<i>1 курс, осінній семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>5 кредитів ЄКТС; 150 годин (36 лекційних, 36 практичних, 78 СРС)</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>Залік / контрольна робота, домашня контрольна робота</i>
Розклад занять	<i>rozklad.kpi.ua</i>
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	<i>Лектор: Д.ф.-м.н. Василик Ольга Іванівна, vasylyk.olga@iil.kpi.ua, vasylyk@matan.kpi.ua, Д.ф.-м.н. Нестеренко Марина Олександрівна, maryna.nesterenko@gmail.com</i> <i>Практичні: ас. Юськович Віктор Костянтинович, viktyusk@gmail.com</i>
Розміщення курсу	<i>campus.kpi.ua</i>

### Програма навчальної дисципліни

#### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Класична, неперервна математика розвивалась в процесі вивчення та розв'язання природничих задач, головним чином фізичних. Однак в процесі розвитку виникає необхідність розв'язання задач іншого типу, наприклад вивчення законів та правил мислення, методів підрахунку кількості об'єктів різноманітних типів, задачі, пов'язані з обчислювальною технікою та програмуванням.

**Метою** навчальної дисципліни є формування у студентів здатностей:

- до логічного мислення, формування особистості студентів, розвиток їх інтелекту і здібностей;
- до необхідної інтуїції та ерудиції у питаннях застосування математики, виховання у студентів прикладної математичної культури;
- використовувати математичні методи в інженерних розрахунках;
- доводити розв'язок задачі до практично прийнятого результату – числа, графіка, точного якісного висновку із застосуванням для цього адекватних обчислювальних засобів, таблиць і довідників;
- уміння аналізувати одержані результати, самостійно використовувати і вивчати літературу з математики.

**Предметом** дисципліни є основні методи дискретної математики, теорія відношень, комбінаторний аналіз та основи математичної логіки.

**Результатами** вивчення дисципліни є:

Загальні компетентності:

- ЗК1. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- ЗК2. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях

Фахові компетентності:

- ФК2. Здатність використовувати на практиці базові знання з математики як математичного апарату фізики і астрономії при вивченні та дослідженні фізичних та астрономічних явищ і процесів.
- ФК10. Здатність самостійно навчатися і опановувати нові знання з фізики, астрономії та суміжних галузей.
- ФК17. Здатність використовувати спеціалізоване програмне забезпечення для аналізу будь-яких фізичних процесів.

Програмні результати навчання:

- ПРН9. Вміти застосовувати базові математичні знання, які використовуються у фізиці та астрономії: з аналітичної геометрії, лінійної алгебри, математичного аналізу, диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії груп, методів математичної фізики, теорії функцій комплексної змінної, математичного моделювання.
- ПРН16. Вміти самостійно навчатися та підвищувати рівень своєї кваліфікації.

## **2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)**

Пререквізити: Шкільний курс математики

Постреквізити: «Основи векторного та тензорного аналізу»

## **3. Зміст навчальної дисципліни**

### Розділ 1. Вступ до дискретної математики

#### **Тема 1.1. Алгебра висловлень.**

Початкові поняття математичної логіки. Операції над висловленнями. Основні логічні закони.

#### **Тема 1.2. Множини та відношення.**

Початкові поняття теорії множин. Операції над множинами. Закони алгебри множин. Прямий добуток множин.

Означення відношення, приклади. Властивості відношень: рефлексивність, іррефлексивність, симетричність, антисиметричність, транзитивність, зв'язність. Операції над відношеннями.

Область визначення та область значень відношення. Обернене відношення. Відношення еквівалентності. Класи еквівалентності. Фактор-множина.

Означення відношення порядку. Приклади. Частковий та лінійний порядок. Діаграма Хассе. Функція як відношення. Різні типи функцій. Композиція функцій. Обернена функція.

### Розділ 2. Елементи комбінаторики.

#### **Тема 2.1. Основні принципи комбінаторики.**

Предмет комбінаторики. Скінчені множини та їх нумерація. Правила суми та добутку. Обчислення кількості перестановок, розміщень та комбінацій.

Трикутник Паскаля. Біном Ньютона. Властивості біноміальних коефіцієнтів.

#### **Тема 2.2. Вибірki та розбиття.**

Обчислення числа розміщень та перестановок з повтореннями. Поліноміальна теорема. Впорядковані розбиття. Комбінації з повтореннями.

Різні види формули включень та виключень. Застосування до теорії чисел. Розв'язки рівнянь в цілих числах.

### Розділ 3. Аналітичні методи комбінаторики.

#### **Тема 3.1. Метод твірних функцій.**

Поняття числового ряду. Приклади: геометричний та гармонічний ряд. Степеневі ряди та дії над ними. Елементарні розклади в степеневий ряд. Біноміальний ряд.

Означення твірної функції (генератриси) числової послідовності. Властивості генератрис. Генератриса згортки двох послідовностей. Приклади.

Експоненціальні генератриси та їх властивості. Застосування до розв'язання комбінаторних задач.

### **Тема 3.2. Рекурентні співвідношення.**

Розв'язання лінійних однорідних рекурентних співвідношень. Приклади: Ханойська башта, числа Фібоначчі. Розв'язання комбінаторних задач за допомогою рекурентних співвідношень.

## Розділ 4. Булеві функції.

### **Тема 4.1. Основні принципи комбінаторики.**

Елементарні булеві функції. Операція суперпозиції. Означення, формули. Розклад булевої функції по заданому числу змінних.

Зведення довільної булевої функції до диз'юнктивної та кон'юнктивної нормальної форми. Приклади двоїстості.

Основні функціонально замкнені класи булевих функцій. Критерій Поста повноти системи. Базиси.

### **Тема 4.2. Мінімізація булевих функцій.**

Побудова скороченої ДНФ та тупикової ДНФ. Алгоритм Куайна

## Розділ 5. Основи теорії графів.

### **Тема 5.1. Графи.**

Поняття графу, класифікація графів. Основні операції на графах. Ойлерові та Гамільтонові графи. Плоскі та планарні графи. Задача фарбування.

## **4. Навчальні матеріали та ресурси**

### **Основні:**

1. Моклячук О.М. Конспект лекцій з дискретної математики. Видання друге. К.: НТУУ «КПІ», 2016, 122 с.
2. Темнікова О. Л., Дискретна математика. Конспект лекцій частина 1, К.: НТУУ «КПІ», 2021. — 154 с.
3. Ядренко М.Й. Дискретна математика. К.: “ТВІМС”, 2004, 245 с.
4. В.А. Жук, А.Б. Ільєнко, О.М. Моклячук, І.В. Орловський. Практикум з розв'язування задач з дискретної математики: множини, відношення, комбінаторика, булеві функції. – К.:НТУУ «КПІ», 2013.

### **Додаткові:**

5. Johnsonbaugh R., Discrete Mathematics Eighth Edition, NY: Pearson, 2018, 768 p.
6. Levin O. Discrete Mathematics: An Open Introduction. 3rd Edition, 1/7/2021, ISBN: 978-1792901690. <http://discrete.openmathbooks.org/dmoi3.html>
7. Rosen K., Discrete Mathematics and Its Applications Eighth Edition, Mc Graw Hill; 2018, 1120 p.
8. Гнатів Б., Гнатів Л., Гладун В., Дискретна математика, Львів: Вид-во Львівська політехніка, 2021, 400 с.
9. Балого С.І., Дискретна математика. Навчальний посібник, Ужгород: ПП «АУТДОРШАРК», 2021, 124 с.
10. Кузьменко І.М., Теорія графів, К.: НТУУ «КПІ», 2020. — 71 с.

## 5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

### Лекції:

1. Елементи математичної логіки. Початкові положення математичної логіки. Операції над висловлюваннями. Основні логічні закони.

Рекомендована література: [1] л. 1.

2. Множини та операції над ними. Початкові поняття теорії множин. Операції над множинами. Закони алгебри множин. Прямий добуток множин.

Рекомендована література: [1] л. 2., [3] розділ 1

3. Відношення та їх властивості. Означення відношення, приклади. Властивості відношень: рефлексивність, іррефлексивність, симетричність, антисиметричність, транзитивність, зв'язність. Операції над відношеннями.

Рекомендована література: [1] л. 3. , [3] розділ 7

4. Відношення та їх властивості (продовження). Відношення еквівалентності. Область визначення та область значень відношення. Обернене відношення. Відношення еквівалентності. Класи еквівалентності. Фактор-множина.

Рекомендована література: [1] л. 4.

5. Відношення порядку. Функціональні відношення. Означення відношення порядку. Приклади. Частковий та лінійний порядок. Діаграма Хассе. Функція як відношення. Різні типи функцій. Композиція функцій. Обернена функція.

Рекомендована література: [1] л. 5.

6. Скінченні множини. Основні правила комбінаторики. Предмет комбінаторики. Скінчені множини та їх нумерація. Правила суми та добутку. Обчислення кількості перестановок, розміщень та комбінацій.

Рекомендована література: [1] л. 6., [3] розділ 3.

7. Біноміальні коефіцієнти та їх властивості. Трикутник Паскаля. Біном Ньютона. Властивості біноміальних коефіцієнтів.

Рекомендована література: [1] л. 7., [4] розділ 4.

8. Перестановки з повтореннями. Розбиття. Обчислення числа розміщень та перестановок з повтореннями. Поліноміальна теорема. Впорядковані розбиття. Комбінації з повтореннями.

Рекомендована література: [1] л. 8., [3] розділ 5.

9. Формула включень та виключень. Різні види формули включень та виключень. Застосування до теорії чисел. Розв'язки рівнянь в цілих числах.

Рекомендована література: [1] л. 9., [3] розділ 6.

10. Числові та степеневі ряди. Генератриса. Поняття числового ряду. Приклади: геометричний та гармонічний ряд. Степеневі ряди та дії над ними. Елементарні розклади в степеневий ряд. Біноміальний ряд.

Рекомендована література: [1] л. 10., [3] розділ 9.

11. Твірні функції. Означення твірної функції (генератриса) числової послідовності. Властивості генератрис. Генератриса згортки двох послідовностей. Приклади.

Рекомендована література: [1] л. 10., [3], розділ 10.

12. Рекурентні співвідношення. Розв'язання лінійних однорідних рекурентних співвідношень. Приклади: Ханойська башта, числа Фібоначчі. Розв'язання комбінаторних задач за допомогою рекурентних співвідношень.

Рекомендована література: [1] л. 11., [3] розділ 11.

13. Початкові поняття теорії булевих функцій. Елементарні булеві функції. Операція суперпозиції. Означення, формули. Розклад булевої функції по заданому числу змінних.

Рекомендована література: [1] л. 12.

14. Нормальні форми булевих функцій. Зведення довільної булевої функції до диз'юнктивної та кон'юнктивної нормальної форми. Приклади двоїстості.

Рекомендована література: [1] л. 13.

15. Повнота і замкненість. Основні функціонально замкнені класи булевих функцій. Критерій Поста повноти системи. Базиси.

Рекомендована література: [1] л. 13.

16. Методи мінімізації булевих функцій. Побудова скороченої ДНФ та тупикової ДНФ. Алгоритм Куайна.

Рекомендована література: [1] л. 14.

17. Графи: основні означення та властивості. Основні поняття теорії графів. Класифікація графів. Операції над графами; ізоморфізми.

Рекомендована література: [1] л. 16.

18. Ойлеровість та гамільтоновість графів. Проблеми розфарбування.

Рекомендована література: [1] л. 16.

### **Практичні заняття:**

1. Елементи алгебри висловлювань. Логічні закони.

Завдання на СРС: [4], Заняття 1

2. Алгебра множин.

Завдання на СРС: [4], Заняття 2

3. Відношення та дії над ними.

Завдання на СРС: [4], Заняття 3

4. Функціональні відношення.

Завдання на СРС: [4], Заняття 4

5. Основи комбінаторики.

Завдання на СРС: [4], Заняття 5

6. Перестановки з повтореннями та розбиття.

Завдання на СРС: [4], Заняття 6

7. Формула включення та виключення.

Завдання на СРС: [4], Заняття 7

### **8. МКР-1.**

9. Генератриси та їх застосування.

Завдання на СРС: [4], Заняття 8

10. Експоненційні генератриси.

Завдання на СРС: [4], Заняття 9

11. Рекурентні співвідношення.

Завдання на СРС: [4], Заняття 10

12. Алгебра логіки. Нормальні форми

Завдання на СРС: [4], Заняття 11

13. Булеві функції. Досконалі форми

Завдання на СРС: [4], Заняття 12

14. Повні системи булевих функцій.

Завдання на СРС: [4], Заняття 13

### **15. МКР-2.**

16. Методи мінімізації булевих функцій.

Завдання на СРС: [4], Заняття 14

17. Основи теорії графів.

Завдання на СРС: [4], Заняття 15

18. Основи теорії груп.

Завдання на СРС: [4], Заняття 16

## **6. Самостійна робота студента/аспіранта**

### **Розділ 1.**

Зв'язок між логічними операціями.

*Рекомендована література: [6], розділ 3.*

Доведення основних законів алгебри множин за допомогою законів алгебри висловлювань.

*Рекомендована література: [2], тема 1.1*

Сумісність різних властивостей відношень.

*Рекомендована література: [2], тема 1.2.*

### **Розділ 2.**

Обчислення кількості відображень різних типів скінченних множин.

*Рекомендована література: [3], розділ 7*

Додаткові властивості біноміальних коефіцієнтів.

*Рекомендована література: [3], розділ 4.*

Числа Стірлінга та числа Белла.

*Рекомендована література: [3], розділ 14.*

Розв'язання рівнянь в цілих числах з обмеженнями.

*Рекомендована література: [3], розділ 6.*

### **Розділ 3.**

Множення та ділення степеневих рядів.

*Рекомендована література: [3], розділ 9.*

Генератриса числа комбінацій з необмеженими повтореннями.

*Рекомендована література: [3], розділ 10.*

Формула обертання для біноміальних коефіцієнтів.

*Рекомендована література: [3], розділ 8.*

Числа Каталана.

*Рекомендована література: [3], розділ 12*

### **Розділ 4.**

Виразення довільної булевої функції через елементарні.

*Рекомендована література: [5], розділ 11, [7] розділ 11.*

Реалізація булевих функцій схемами.

*Рекомендована література: [5], розділ 11.*

Різні приклади замкнених класів булевих функцій.

*Рекомендована література: [7], розділ 11.1.*

Різні алгоритми мінімізації.

*Рекомендована література: [7], розділ 11.4.*

## **Політика та контроль**

### **7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)**

**Рекомендовані методи навчання:** вивчення основної та допоміжної літератури за тематикою лекцій, розв'язування задач на практичних заняттях та при виконанні домашніх робіт.

Студенту рекомендується вести докладний конспект лекцій. Важливим аспектом якісного засвоєння матеріалу, відпрацювання методів та алгоритмів вирішення основних завдань дисципліни є самостійна робота. Вона містить читання літератури, огляд літератури за темою, підготовку до занять, виконання домашньої контрольної роботи, підготовку до МКР та іспиту.

#### **Академічна доброчесність**

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

#### **Норми етичної поведінки**

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

Поточний контроль на заняттях відбувається оцінюванням роботи студентів біля дошки.

На занятті схвалюється пошук додаткової інформації та активна участь у обговоренні.

Розрахункові роботи перестають прийматись на перевірку за тиждень до заліку. До того студент має право перескладати їх довільну кількість разів.

Атестація виставляється за модульними контрольними роботами, за результатом першої спроби. Всі інші спроби на результат атестації не впливають.

Модульні контрольні роботи можливо переписувати, проте сумарний бал за них в такому випадку зменшується. Подробиці вказано в наступному розділі.

## 8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

### 1. Поточний контроль – робота на практичному занятті

За умови гарної підготовки і активної роботи на практичному занятті студент отримує 1 умовний бал. Студент, який набрав більше всього умовних балів **Kmax**, отримує максимальну кількість балів – 10. Бали всіх інших студентів розраховуються за формулою:

$$U_s = 10 * ( K / K_{max} ),$$

де **K** – кількість умовних балів, які набрав студент протягом семестру.

### 2. Модульний контроль

Модульну контрольну роботу розбито на 2 контрольні роботи:

- МКР-1: ваговий бал – 25 балів;
- МКР-2: ваговий бал – 25 балів;

Максимальна кількість балів за всі контрольні роботи дорівнює

$$U_k = 25 \text{ балів} \times 2 = 50 \text{ балів.}$$

Кожна контрольна робота складається з 5 задач. Ваговий бал кожної задачі – 5 балів. Розв'язок задачі оцінюється в 0-5 балів наступним чином:

- якщо задача повністю розв'язана, то студент отримує 5 балів;
- якщо відповідь правильна, але у розв'язку є неточності, або ж задача розв'язана частково, студент отримує кількість балів, що розраховується за формулою:

$$N_i = 5 * P_i / 100,$$

де **Pi** – відсоток виконання певної задачі;

- якщо відповідь незадовільна, метод розв'язування задачі неправильний – 0 балів.

### 3. Домашня контрольна робота

Ваговий бал: **Ur** = 40 балів.

**Семестровий рейтинг** складається з балів поточного контролю, модульного контролю та балів за розрахункову роботу.

### Штрафні та заохочувальні бали:

- переписування МКР: у випадку незадовільної оцінки з МКР виділяється до 2х спроб перездачі кожної МКР в кінці семестру. Перша спроба оцінюється в 20 балів, друга – в 15 балів.
- призові місця у факультетських та інститутських олімпіадах з вищої математики; підготовка та захист рефератів, виконання завдань з удосконалення дидактичних матеріалів з кредитного модуля; виконання індивідуального семестрового завдання – до 5 балів.

### Умови допуску до семестрового контролю:

Семестровий рейтинг не менше 50 балів.

**Загальний рейтинг** підраховується за формулою:

$$R_s = U_s + U_k + U_r = 10 + 50 + 40 = 100 \text{ балів}$$

### Залікова робота

Рейтинговий бал, отриманий студентом протягом семестру, виставляється як залікова оцінка за курс.



У разі, якщо студент не згодний зі своєю семестровою оцінкою, і має допуск до семестрового контролю, він має право виконати письмову залікову роботу. У такому разі семестровий рейтинг на залікову оцінку не впливає, а залікова оцінка виставляється за результатом залікової роботи. Кожен білет залікової роботи складається з 1 теоретичного питання та 4 задач. Перелік теоретичних питань наведений у методичних рекомендаціях до кожного модуля, а також видається екзаменатором на останньому занятті з дисципліни. Відповідь на кожне питання оцінюється у 20 балів.

Крім того, на перескладанні заліку студент має право написати «Критичний тест», який, у разі успішного виконання, дає можливість отримати 60 балів.

**Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:**

<i>Кількість балів</i>	<i>Оцінка</i>
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено

**9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)**

*У випадку дистанційної форми навчання організація освітнього процесу здійснюється з застосуванням електронної пошти, Telegram, відео-конференцій в Zoom.*

**Перелік питань до заліку**

1. Висловлювання, операції над ними. Таблиці істинності. Основні логічні закони.
2. Множина, основні поняття. Булеан. Операції над множинами, їх властивості.
3. Відношення, основні поняття. Операції над відношеннями.
4. Відношення еквівалентності. Класи еквівалентності. Теорема про класи еквівалентності (з доведенням). Фактор-множина.
5. Відношення порядку. Принцип двоїстості для відношень (з доведенням). Діаграма Хасса.
6. Функціональне відношення. Типи функціональних відношень. Властивості (без доведення).
7. Правило суми та добутку. Перестановки і розміщення.
8. Комбінації без повторень. Біноміальні коефіцієнти.
9. Властивості біноміальних коефіцієнтів. Графічна інтерпретація.
10. Теорема про розбиття на типи (з доведенням). Теорема про число перестановок елементів різного типу.
11. Поліноміальна теорема (з доведенням). Поліноміальні коефіцієнти.
12. Формула включень та виключень (з доведенням).
13. Комбінації з повтореннями. Діофантові рівняння. Приклад розв'язку діофантового рівняння з обмеженнями знизу.
14. Числові ряди. Генератрис.
15. Сума генератрис та множення на константу
16. Поліноміальні множник та дільник генератрис
17. Добуток генератрис. Згортка.
18. Типи рекурентних співвідношень. Теорема про розв'язок ЛОРС (без доведення). Загальний член послідовності Фібоначчі (з доведенням).
19. Булева алгебра: означення, наслідки.
20. Двоїсті функції. Принцип двоїстості для булевих функцій (з доведенням).
21. ДНФ та КНФ. Алгоритми побудови.
22. ДДНФ та ДКНФ. Теорема про існування ДДНФ (з доведенням).
23. ДДНФ та ДКНФ. Теорема про єдиність ДДНФ (з доведенням) та наслідок з неї.
24. Основні класи булевих функцій. Повнота системи булевих функцій. Критерій Поста.

25. Основні етапи мінімізації булевих функцій. Теорема Квайна.
26. Поняття групи та суміжні поняття. Таблиця Келі.
27. Мультиграф і граф. Методи задання графа. Операції над графами.
28. Ойлерові та напівойлерові графи. Критерій ойлеровості.
29. Гамільтонові графи. Необхідні умови, достатні умови.

**Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):**

**Складено:**

Професор кафедри МАтаТЙ, д-р. фіз.-мат. наук Василик О.І., д-р. фіз.-мат. наук Нестеренко М.О.

**Ухвалено** кафедрою МАтаТЙ (протокол № 16 від 8.07.22.)

**Погоджено** Методичною комісією ФМФ (протокол № 8 від 11.07.22)