

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

І.Ф.СКІЩЬКО, Є.Г. КОРНІЄНКО

**ФІЗИКА**

**Вивчення законів постійного струму на прикладах містка  
Уїтстона та компенсаційної схеми**

**Інструкція  
до лабораторної роботи**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для студентів,  
які навчаються за спеціальністю 125 "Кібербезпека" спеціалізації "Без-  
пека державних інформаційних ресурсів" та спеціальністю 172 "Теле-  
комунікації та радіотехніка" спеціалізації "Спеціальні телекомуніка-  
ційні системи"*

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2022

Рецензент: Ужва В.І., доцент кафедри загальної фізики та фізики твердого тіла фізик-математичного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор: Лінчевський І.В., професор кафедри загальної фізики КПІ ім. Ігоря Сікорського, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 125 "Кібербезпека" спеціалізації "Безпека державних інформаційних ресурсів" та спеціальністю 172 "Телекомунікації та радіотехніка" спеціалізації "Спеціальні телекомунікаційні системи" (*протокол №6 від 24.06.2022 р.*) за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету (*протокол №3 від 16.06.2022 р.*)

Електронне мережне навчальне видання

Скіцько Іван Федорович, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Корнієнко Євгенія Геннадіївна, канд. фіз.-мат. наук, старший викладач

## ФІЗИКА

### Вивчення законів постійного струму на прикладах містка

#### Уїтстона та компенсаційної схеми

##### *Інструкція до лабораторних робіт*

Фізика: Вивчення законів постійного струму на прикладах містка Уїтстона та компенсаційної схеми: Інструкція до лабораторних робіт [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спец. 125 "Кібербезпека", 172 "Телекомунікації та радіотехніка" / І. Ф. Скіцько, Є. Г. Корнієнко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,34 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 60 с. С.

<https://ela.kpi.ua/handle/123456789/48715>

Посібник забезпечує проведення лабораторних робіт: 1. "Вивчити метод вимірювання опору за допомогою мостової схеми і навчитися вимірювати опір містком постійного струму"; 2. "Вивчити компенсаційний метод вимірювання електрорушійної сили (далі е.р.с.) і виміряти значення невідомої е.р.с. цим методом" за програмою навчальної дисципліни "Фізика". Детально розглядається теорія лабораторних робіт, методика проведення дослідження і обробки результатів вимірювань.

Призначений для студентів-здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 125 "Кібербезпека" спеціалізації "Безпека державних інформаційних ресурсів" та спеціальністю 172 "Телекомунікації та радіотехніка" спеціалізації "Спеціальні телекомунікаційні системи" буде корисним і для студентів інших технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

© І.Ф.Скіцько, Є.Г.Корнієнко, 2022

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

## ІНСТРУКЦІЯ

до лабораторних робіт по вивченню законів постійного струму на прикладі містка Уїтстона та компенсаційної схеми

### Мета робіт:

1. Вивчити метод вимірювання опору за допомогою мостової схеми і навчитися вимірювати опір містком постійного струму.

2. Оцінити невизначеність значення визначеного невідомого опору та записати кінцевий результат вимірювання.

3. Вивчити компенсаційний метод вимірювання електрорушійної сили (далі е.р.с.) і виміряти значення невідомої е.р.с. цим методом.

4. Оцінити невизначеність значення визначеної невідомої е.р.с. та записати кінцевий результат вимірювання.

5. Зробити висновки по роботах.

### 1.Вимірювання опору за допомогою містка постійного струму

#### Теоретична частина

#### Електрорушійна сила і закони Ома

Для того, щоб в провіднику існував струм необхідно підтримувати в ньому електричне поле, тобто підтримувати різницю потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Якщо цього не робити, то електрони, рухаючись до торця 1 (рис.1), будуть понижувати його потенціал  $\varphi_1$ , підвищувати потенціал торця 2 і з часом різниця  $\varphi_1 - \varphi_2$  стане дорівнювати нулю, поле всередині провідника зникне і струм перестане існувати. Щоб підтримувати сталою різницю потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2 \neq 0$ , необхідно елект-

рони від торця 1 переносити до торця 2 за напрямком напруженості поля  $\vec{E}$ . Іншими словами, електрони необ-

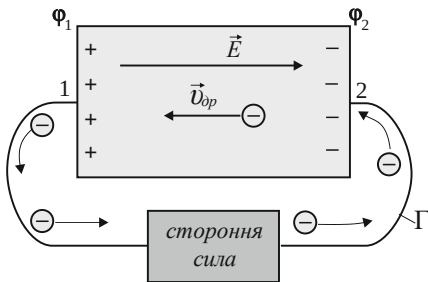


Рис.1.

хідно переміщувати від позитивних зарядів до негативних, тобто виконувати роботу переміщення, витрачаючи при цьому енергію. Таке переміщення можна здійснювати тільки за допомогою *сторонніх сил*. Ці сили можуть бути обумовленні хімічними процесами в гальванічних елементах і акумуляторах; дифузією носіїв струму в неоднорідному середовищі; електричними полями, які створюються магнітними полями, що змінюються з часом. Сторонні сили виникають в генера-

торах за рахунок механічної енергії обертання ротора генератора. Сторонні сили не можуть бути кулонівськими силами. Кулонівські сили є потенційними і робота таких сил по переміщенню зарядів по замкнутому контуру (колу) дорівнює нулю. Під дією кулонівських сил заряди можуть тільки перерозподілятися поверхнею провідника, яка зразу ж стає екіпотенційною. Отже, на певних ділянках кола (ділянка 1-2 на рис.1) сили, що діють з боку електричного поля  $\vec{E}$  на носії заряду, не є єдиною причиною струму.

Сторонні сили, які діють на заряди, разом із силами поля  $\vec{E}$  зумовлюють постійний струм. Щоб врахувати дію сторонніх сил, вводять поняття вектора *напруженості поля сторонніх сил*  $\vec{E}_{ст}$ , який за визначенням числово дорівнює силі, яка діє на одиничний позитивний заряд.

Сторонні сили, переміщуючи електричні заряди, виконують роботу. Тому фізична величина, що чисельно дорівнює роботі, яка виконується сторонніми силами під час переміщення одиничного позитивного заряду, називається електрорушійною силою (е.р.с), що діє в колі:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{cm}}{q}, \quad (1.1)$$

де  $A_{cm}$ - робота сторонніх сил по переміщенні заряду  $q$  в колі.

Стороння сила  $\vec{F}_{cm}$ , що діє на заряд  $q$ , дорівнює

$$\vec{F}_{cm} = q\vec{E}_{cm}.$$

На електричних схемах сторонню силу зображують так, як показано на рис.2.

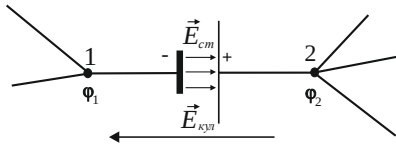


Рис.2.

Напруженість поля сторонніх сил  $\vec{E}_{cm}$  діє в межах пристрою (джерела струму) і направлена від "мінуса" до "плюса" (див. додаток 2).

Робота сторонніх сил по переміщенню в напрямі струму заряду  $q$  вздовж усього замкнутого кола  $\Gamma$  (рис.1) дорівнює

$$A_o = \oint_{\Gamma} \vec{F}_{cm} d\vec{l} = q \oint_{\Gamma} \vec{E}_{cm} d\vec{l}.$$

Тоді

$$\mathcal{E} = \frac{A_o}{q} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_{cm} d\vec{l}. \quad (1.2)$$

Е.р.с., що діє в замкнутому колі, визначається циркуляцією вектора напруженості сторонніх сил  $\vec{E}_{cm}$ .

Е.р.с., яка діє на якійсь ділянці кола 1-2 (рис.2), дорівнює

$$\mathcal{E} = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l}. \quad (1.3)$$

Результуюча сила, що діє в колі на заряд:

$$\vec{F} = \vec{F}_{cm} + \vec{F}_{кул} = (\vec{E}_{cm} + \vec{E}_{кул}). \quad (1.4)$$

Робота, яка виконується результируючою силою над зарядом  $q$  на ділянці кола 1-2 (рис.3) дорівнює:

$$A_{12} = q\mathcal{E} + q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.5)$$

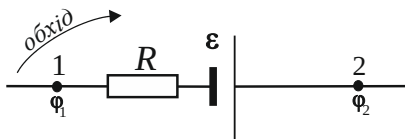


Рис.3.

Ця робота проявляється у виділенні тепла на цій ділянці кола. Згідно закону збереження енергії вираз (1.5) можемо переписати так:

$$\begin{aligned} A_{12} &= Q_{12} = I^2 R_{12} \Delta t = \\ &= q I R_{12} = q U_{12} = q \mathcal{E} + \\ &+ q(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (1.6)$$

При цьому враховано, що  $q = I \Delta t$ .  $R_{12}$  – опір ділянки кола 1 – 2.

Напругою  $U_{12}$  на ділянці кола 1-2 (рис.3) називається фізична величина, що визначається роботою, яка виконується сумарним полем електростатичних і сторонніх сил при переміщенні одиничного позитивного заряду на даній ділянці кола. Отже із (1.6) отримаємо, що

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}. \quad (1.7)$$

Поняття напруги є узагальненим поняттям різниці потен-

ціалів: напруга на кінцях ділянки кола дорівнює різниці потенціалів в тому випадку, якщо на цій ділянці не прикладена е.р.с.

Ділянка кола, на якій на носії струму діють сторонні сили, називається неоднорідною. Ділянка кола, на якій не діють сторонні сили, називається однорідною. Для однорідної ділянки кола

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

і тоді, враховуючи, що із (1.6) витікає співвідношення  $I R_{12} = U_{12}$ , струм на однорідній ділянці кола буде визначатись за формулою

$$I = \frac{U_{12}}{R_{12}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_{12}}. \quad (1.8)$$

Формула (1.8) це є **закон Ома для однорідної ділянки кола**.

Враховуючи співвідношення (1.6), рівняння (1.7) перепишемо так:

$$I R_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}, \quad (1.9)$$

де  $\mathcal{E}_{12}$  позначено сумарну е.р.с., яка діє на ділянці кола 1–2.

Поділивши (1.9) на  $R_{12}$  отримаємо математичний вираз **закону Ома для неоднорідної ділянки кола**:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R_{12}}. \quad (1.10)$$

При користуванні законом (1.10) необхідно користуватись певними *правилами*:

1. Вибрати довільно обхід на ділянці кола 1–2 (рис.3).

2. Вибрати довільно напрям струму на цій ділянці. Якщо напрямок струму і напрям обходу співпадають, то силу струму треба приймати, як позитивну величину ( $I > 0$ ). Якщо напрям струму і напрям обходу на ділянці 1-2 протилежні, то ( $I < 0$ ).

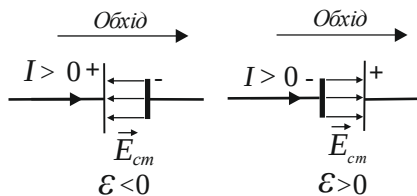


Рис.4.

3. Е.р.с.  $\mathcal{E}$  є теж величина алгебраїчна. Вважається, що дія  $\mathcal{E}$  має напрям, що

співпадає з напрямком поля  $\vec{E}_{cm}$  (рис.4.). Якщо напрям  $\vec{E}_{cm}$  співпадає із напрямком обходу на ділянці 1–2, то  $\mathcal{E} > 0$ . Якщо напрям поля  $\vec{E}_{cm}$  і напрям обходу протилежні, то  $\mathcal{E} < 0$  (рис. 4.). Закон Ома (1.10) для першого випадку запишеться так:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - \mathcal{E}}{R_{12}},$$

а для другого випадку

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R_{12}}.$$

Якщо електричне коло замкнуте, то точки 1 и 2 ділянки кола (рис.3) співпадають. Це означає, що  $\varphi_1 = \varphi_2$  і  $R_{12} = R$ , де  $R$  - загальний опір кола. Тому **закон Ома для замкнутого кола** має такий вигляд:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad (1.11)$$

де  $\mathcal{E}$  – алгебраїчна сума всіх е.р.с., які діють у цьому колі.

## Розрахунок розгалужених електричних кіл за допомогою правил Кірхгофа

За допомогою закону збереження заряду і закону Ома (1.10) для неоднорідної ділянки кола можна розрахувати будь-яке складне електричне коло. Такий розрахунок значно полегшується, якщо застосувати два правила Кірхгофа.

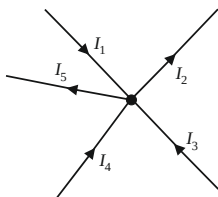


Рис.5.

**Перше правило Кірхгофа** встановлює взаємозв'язок між струмами в провідниках, що сходяться у вузлі. **Вузлом** розгалуженого кола називають точку, в якій сходяться три і більше провідників (рис.5). Нехай постійні струми  $I_1, I_3, I_4$  входять у вузол, а струми  $I_2, I_5$  виходять із нього. Так як у вузлах заряди

не накопичуються, то кількість заряду, що приносять струми  $I_1, I_3, I_4$  до вузла дорівнює кількості заряду, що виносять струми  $I_2, I_5$  з вузла. Тому на основі *закону збереження заряду* можна записати, що

$$I_1 + I_3 + I_4 - I_2 - I_5 = 0, \quad (1.12)$$

або

$$-I_1 - I_3 - I_4 + I_2 + I_5 = 0, \quad (1.13)$$

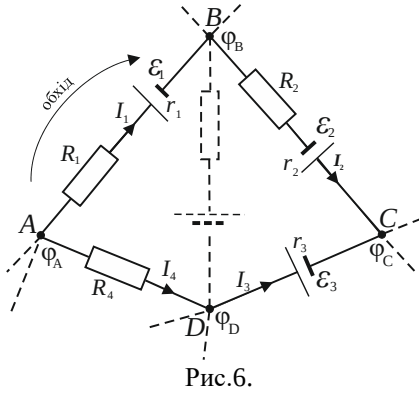
Рівняння (1.12) або (1.13) виражають перше правило Кірхгофа. Для зручності користування цими рівняннями струмам, що входять у вузол, надають один знак, а струмам, що виходять – протилежний. Так, якщо вважати струм, що входить у вузол, додатним, а струм, що виходить із вузла, – від'ємним, то перше правило Кірхгофа можна сформулювати так: *алгебраїчна сума усіх сил струмів, що сходяться в будь-*



якому вузлі розгалуженого кола, дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^m I_i = 0. \quad (1.14)$$

**Друге правило Кірхгофа.** Виділимо в розгалуженому колі простий замкнутий контур, наприклад  $ABCD$  (рис.6).



Застосуємо закон Ома (1.10) до кожної ділянки кола цього контуру, виконуючи правила для використання закону Ома (1.10). Тоді згідно рис.6 запишемо такі рівняння:

$$\begin{aligned} I_1 R_1 + I_1 r_1 &= \varphi_A - \varphi_B - \varepsilon_1; \\ I_2 R_2 + I_2 r_2 &= \varphi_B - \varphi_C + \varepsilon_2; \\ -I_3 r_3 &= \varphi_C - \varphi_D + \varepsilon_3; \\ -I_4 R_4 &= \varphi_D - \varphi_A. \end{aligned}$$

Додамо почленно ліві і праві частини цих рівностей. Тоді отримаємо, що

$$I_1 R_1 + I_1 r_1 + I_2 R_2 + I_2 r_2 - I_3 r_3 - I_4 R_4 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (1.15)$$

Аналогічні співвідношення отримується для будь-якого простого замкнутого контуру. Узагальнюючі співвідношення (1.15), запишемо, що

$$\sum IR + \sum Ir = \sum \varepsilon. \quad (1.16)$$

Співвідношення (1.16) виражає **друге правило Кірхгофа**: у будь-якому простому замкнутому контурі, довільно обраному у розгалуженому електричному колі, алгебраїчна сума добутків сил струмів на опори відповідних ділянок цього контуру дорівнює алгебраїчній сумі е.р.с., що діють у контурі.

У сумі (1.16) знаки струмів і е.р.с.  $\varepsilon$  (див.правила на стор.5) беруть згідно вибраного обходу по контуру (рис.6). Обхід для всіх за-

мкнутих контурів розгалуженого кола треба здійснювати в одному напрямку. Найчастіше обхід контура вибирають за стрілкою годинника.

### **Правила при використанні правил Кірхгофа до розрахунку розгалужених електричних кіл:**

1) визначити вузли та замкнуті контури електричних кіл;

2) вибрати (довільно) напрямки струмів на всіх ділянках замкнутого контуру позначивши їх стрілочками;

3) записати перше правило Кірхгофа (1.14) для всіх незалежних вузлів. Вважати струми, що входять у вузол – додатними, а струми, що виходять із вузла, – від’ємними. Число незалежних рівнянь складених за (1.14) на одиницю менше числа вузлів;

4) вибрати напрям обходу замкнутого контуру (за годинниковою стрілкою чи проти);

5) при складанні рівнянь за другим правилом Кірхгофа

(1.16) знаки струмів і е.р.с. на ділянках замкнутого контуру вибирати згідно правил користування законом Ома для неоднорідної ділянки кола (стор. 5);

6) щоб усі рівняння, які складені на основі другого правила Кірхгофа, були незалежними, необхідно кожен раз розглядати контури, що містять хоча б одну ділянку кола, що не входила у вже розглянуті контури;

7) якщо деякі розв’язки складених рівнянь на основі правил Кірхгофа є від’ємними, то це означає, що напрямки струмів на ділянках кола, або полярність включення цих е.р.с. треба змінити на протилежні.

Якщо при розв’язуванні системи рівнянь, складених на основі (1.14) і (1.16), сили струмів виявились додатними, то це означає, що напрямки їх обрано правильно. У противному разі дійсний напрямок струму протилежний до обраного нами.

## Вимірювання опору за допомогою містка постійного струму

Мостовим називають електричне коло, в якому можна виділити два розгалуження опорів, значення опору між якими дорівнює нескінченності при відповідному співвідношенні параметрів елементів кола, і скінченному значенню опору, якщо це співвідношення не виконується.

Класичним методом вимірювання опору є метод містка постійного струму (міст Уїтстона). **Вимірювальний міст Уїнстона** - пристрій для вимірювання електричного опору, запропонований в 1833 році Самуелем Хантером Крісті, а в 1843 році удосконалене Чарльзом Уїтстоном. Електричний аналог важільних аптекарських ваг. Принцип виміру заснований на взаємній компенсації опорів двох ланок, одне з яких включає опір, який вимірюється. Як індикатор зазвичай використовується чутливий гальванометр, показання

якого мають дорівнювати нулю в момент рівноваги моста.

Класична схема містка постійного струму (міст Уїтстона), яка представлена на рис.7, складається з відомих рів  $R_m, R_1, R_2$ , невідомого опору  $R_x$ , нуль-гальванометра  $G$  і джерела е.р.с.  $\mathcal{E}$ . Опори  $R_x, R_m, R_1, R_2$  складають так звані плечі містка.  $R_m$  - це магазин опорів.

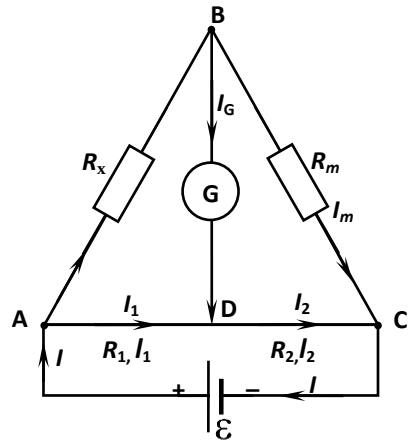


Рис.7. Схема містка постійного струму (міст Уїтстона)

В найпростішому виконанні частина схеми  $AC$  є натягнутий однорідний провід (реохорд) із контактом  $D$ , який може ковзати вздовж реохорда  $AC$ , змінюю-

чи таким чином співвідношення між опорами  $R_1$ ,  $R_2$  ділянок про-  
воду  $AD$  і  $DC$ . До точки з'єднання двох опорів  $R_x$  і  $R_m$  (точка  $B$  на рис.7) і до рухомого контакту  $D$  під'єднується гальванометр  $G$ , а до точок схеми  $A$  і  $C$  вмикається джерело е.р.с.  $\mathcal{E}$ .

При довільному співвідношенні опорів, які складають місткову схему через гальванометр протікає струм, тому що між точками  $B$  і  $D$  є різниця потенціалів і струм через гальванометр буде:

$$I_G = \frac{\varphi_B - \varphi_D}{R_G},$$

де  $R_G$  – опір гальванометра.

Однак, переміщуючи контакт  $D$ , можна зробити так, щоб сила струму через гальванометр дорівнювала нулю. Це буде відповідати тому, що  $\varphi_B - \varphi_D = 0$ , або опір між точками  $B$  і  $D$  **не-скінченно** великий.

Тоді між опорами  $R_x$ ,  $R_m$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  має місце співвідношення:

$$\frac{R_x}{R_m} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (1.17)$$

Дійсно, коли струм через гальванометр не протікає, то потенціали точок  $B$  і  $D$  однакові. А це означає, що згідно другого правила Кірхгофа (1.16) для кола  $A$ - $B$ - $D$ - $A$

$$I_x R_x - I_1 R_1 = 0,$$

або

$$I_x R_x = I_1 R_1. \quad (1.18)$$

Так само для кола  $B$ - $C$ - $D$ -

$B$

$$I_m R_m - I_2 R_2 = 0,$$

тобто

$$I_m R_m = I_2 R_2. \quad (1.19)$$

Розділивши ліві і праві частини співвідношень (1.18) і (1.19), отримаємо

$$\frac{I_x R_x}{I_m R_m} = \frac{I_1 R_1}{I_2 R_2}. \quad (1.20)$$

Якщо струм через гальванометр не протікає, то  $I_x = I_m$ ,  $I_1 = I_2$  і тоді

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_m. \quad (1.21)$$

Сам процес вимірювання невідомого опору  $R_x$  за допомогою місткової схеми полягає в тому, що на магазині опорів виставляється опір  $R_m$  по можливості близький за значенням до неві-

домого опору. Потім за допомогою рухомого контакту  $D$  знаходимо на реохорді положення, при якому сила струму через гальванометр дорівнює нулю (така операція знаходження положення рухомого контакту називається врівноваженням містка).

Добившись рівноваги містка, за співвідношенням (1.21) визначаємо величину невідомого опору  $R_x$ , якщо відомі три інші опори.

Оскільки для однорідного проводу опори окремих ділянок реохорда відносяться один до одного як їхні довжини, то відношення  $\frac{R_1}{R_2}$  у формулі (1.21) можна замінити відношенням довжин  $\frac{l_1}{l_2}$ , де  $l_1$ ,  $l_2$  – відповідно довжини ділянок  $AD$  і  $DC$  (рис.7). Отже, формулу (21) можна переписати як  $\frac{R_x}{R_m} = \frac{l_1}{l_2}$ ; звідки знаходимо робочу формулу для визначення  $R_x$ :

$$R_x = R_m \frac{l_1}{l_2}. \quad (1.22)$$

Відзначимо, що точність  $R_x$  буде тим кращою, чим ближчим до одиниці буде співвідношення  $l_1/l_2$  (див. додаток 1). Тому при вимірюванні за допомогою містка Уїтстона невідомого опору  $R_x$  бажано, щоб опір  $R_m$  не дуже відрізнявся від  $R_x$ . У зв'язку з цим порядок знаходження  $R_x$ , може бути наступним: встановити контакт  $D$  посередині реохорда ( $l_1 = l_2$ ) і за допомогою магазину опорів підібрати  $R_m$  так щоб струм через гальванометр не протікав. Тоді згідно з (1.22)  $R_x = R_m$ .

## 2. Визначення невідомої е.р.с. методом компенсації

Електрорушійна сила (е.р.с.) гальванічного елемента числово дорівнює роботі сторонніх сил по переміщенню одиничного позитивного заряду на ділянці дії цих сил. При розімкнутому колі е.р.с. гальванічного елемента дорівнює різниці потенціалів, яка виникає на його полюсах.

Якщо різниця потенціалів  $U$  вимірюється при наявності струму, то вона завжди є меншою за е.р.с.  $\mathcal{E}$  через падіння

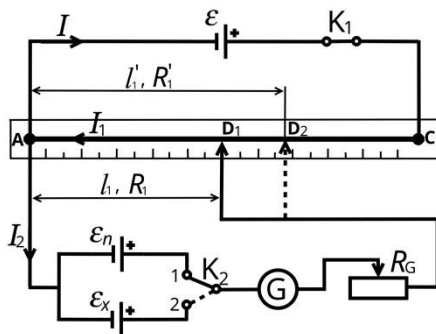


Рис.8. Компенсаційна схема для вимірювання невідомої е.р.с. Тут  $\mathcal{E}_n$  - нормальний елемент Вестона,  $\mathcal{E}_x$  - джерело живлення з невідомою е.р.с.,  $\mathcal{E}$  - джерело сталого струму,  $R_G$  - додатковий опір для обмеження струму через гальванометр  $G$  при відсутності компенсації.

напруги на внутрішньому опорі елемента  $r$ , тобто

$$U = \mathcal{E} - I \cdot r, \quad (1.23)$$

де  $I$  - струм через елемент,  $r$  внутрішній опір елемента. Тому звичайні вольтметри, дія яких пов'язана з протіканням електричного струму через рамку

приладу, не застосовуються для точного вимірювання е.р.с., особливо малих значень е.р.с. Ви-

значення е.р.с. елементів виконується шляхом порівняння з е.р.с. еталонного, так званого «нормального» елемента, який має відоме і стабільне значення е.р.с. протягом значного проміжку часу ( $\mathcal{E}_n = 1,01860$  В). Це робиться за допомогою компенсаційної схеми з реохордом  $AC$ , яка представлена на рис.8. На схемі  $\mathcal{E}_n$  - е.р.с. «нормального» елемента (елемент Вестона, додаток 2),  $\mathcal{E}_x$  - невідома е.р.с.;  $G$  - нуль-гальванометр;  $AC$  - реохорд з рухомих контактом  $D$ ;  $K_1$  - ключ для увімкнення допоміжної батареї  $\mathcal{E}$ ;  $K_2$  - ключ для почергового увімкнення в коло «нормального» елемента  $\mathcal{E}_n$  і елемента з невідомою е.р.с.  $\mathcal{E}_x$ ;  $R_G$  - додатковий опір для обмеження струму через гальванометр. «Нормальний» елемент  $\mathcal{E}_n$ , невідома е.р.с.  $\mathcal{E}_x$  і додаткова батарея  $\mathcal{E}$  вмикається в коло в точці  $A$  однаковими полюсами.

Гальванометр  $G$  показує силу струму, який протікає через «нормальний» елемент  $\mathcal{E}_n$  або

невідоме джерело е.р.с.  $\mathcal{E}_x$ , в залежності від положення ключа  $K_2$ .

Знайдемо робочу формулу для даного лабораторного завдання. Якщо джерело невідомої е.р.с. не ввімкнуте в схему (ключ  $K_2$  в положенні (1)), то згідно з першим правилом Кірхгофа (1.14) для вузла  $A$  можемо записати, що

$$I = I_1 + I_2, \quad (1.24)$$

де  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  – струми, протікання яких показано на рис.8. За другим правилом Кірхгофа (1.16) для контура  $AD_1R_G\mathcal{E}_nA$  отримаємо рівняння:

$$I_2R_G - I_1R_1 = -\mathcal{E}_n, \quad (1.25)$$

де  $R_G$  – опір ділянки кола з гальванометром.

Переміщуючи контакт  $D$ , можна добитись, щоб струм  $I_2$ , дорівнював нулю, що фіксується по відсутності відхилення стрілки гальванометра  $G$  (положення контакту  $D_1$ ). При  $I_2 = 0$ ,  $I = I_1$  із рівнянь (1.24) і (1.25) отримаємо:

$$I_1R_1 = \mathcal{E}_n. \quad (1.26)$$

Таким чином спад напруги  $I_1R_1$  на ділянці кола  $AD_1$  за величиною дорівнює е.р.с. «нормального» елемента  $\mathcal{E}_n$ . Вони компенсують одне одного так, що струм через нормальний елемент дорівнює нулю. Далі замість «нормального» елемента  $\mathcal{E}_n$  за допомогою ключа  $K_2$  (положення (2)) вмикаємо елемент з невідомою е.р.с.  $\mathcal{E}_x$ . Переміщуючи рухомий контакт  $D$ , знову добиваємось, щоб струм через гальванометр не протікав. При цьому положення контакту  $D$  буде іншим (положення  $D_2$  на рис.8), ніж у випадку з «нормальним» елементом і опір ділянки  $AD_2$ , буде мати інше значення. Позначимо цей опір  $R'_1$ . Однак і в цьому випадку при відсутності струму через гальванометр, тобто  $I_2 = 0$  ( $I_1 = I'_1 = I$ ) повинна виконуватися умова, аналогічна до попередньої (1.26), тобто

$$I_1R'_1 = \mathcal{E}_x. \quad (1.27)$$

Із співвідношень (1.26) і (1.27) отримуємо, що

$$\frac{R_1}{R'_1} = \frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{E}_x}, \quad (1.28)$$

або

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_n \frac{R'_1}{R_1}. \quad (1.29)$$

Таким чином, якщо відома е.р.с.  $\mathcal{E}_n$  «нормального» елемента і відношення  $\frac{R'_1}{R_1}$ , то за формулою (1.29) знаходимо невідому е.р.с.  $\mathcal{E}_x$ . Компенсаційний метод вимірювання невідомої е.р.с. не вимагає знання самих значень опорів  $R_1$  і  $R'_1$ , а лише їх відношення, яке може бути встановлене за допомогою рухомого контакту  $D$ . Як уже відомо із завдання 1 для однорідного проводу, з якого виготовлений реохорд  $AC$ , опори окремих його ділянок відносяться між собою як їхні довжини. Тому відношення опорів в рівнянні (29) можна замінити відношенням довжин ділянок реохорда  $AD_2$  і  $AD_1$ , тобто

$$\frac{AD_2}{AD_1} = \frac{R'_1}{R_1} = \frac{l'_1}{l_1}.$$

Тоді робоча формула для визначення невідомої е.р.с. буде мати вигляд:

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_n \frac{l'_1}{l_1}. \quad (1.30)$$

### Переваги методу компенсації для вимірювання е.р.с.

1. Сила струму, що протікає через елементи, електрорушійні сили яких порівнюються між собою, близька до нуля. Тому спад напруги всередині елемента, який знижує значення різниці потенціалів на полюсах елемента, практично відсутній.

2. При компенсаційному методі вимірювання гальванометр працює як нульовий прилад (його кількісні покази в результат вимірювання не входять).

3. Величина е.р.с. допоміжної батареї  $\varepsilon$  теж не входять в формулу (1.30). Необхідно тільки, щоб її значення під час вимірювання було сталим. Таку роль може з успіхом виконувати батарея акумуляторів або інше джерело е.р.с.

4. *Зауваження.* Для компенсації необхідно, щоб  $\mathcal{E}$  була більшою за  $\mathcal{E}_n$  і  $\mathcal{E}_x$ .



## Лабораторна робота 2-1

### Визначення опору провідника за допомогою моста сталого струму (містка Уїтстона)

#### Прилади і пристрої

1. Відомі опори  $R_1, R_2$ .
2. Магазин опорів  $R_m$ .
3. Невідомі опори  $R_x$  (5 штук).
4. Нуль-гальванометр  $G$ .
5. Джерело живлення сталого струму на 6 В.
6. Ключ.
7. З'єднувальні проводи.

#### Установка

Принципова схема методу моста Уїнстона в лабораторній роботі зображена на рис.9. Опори  $R_x, R_m, R_1, R_2$  утворюють собою плечі моста з'єднані так, щоб утворити замкнутий чотирикутник  $ABCD$ , а гальванометр з нульовою точкою посередині шкали під'єднаний у його діагональ. Опір  $R_x$  - це невідомий опір, його потрібно визначити. Опором  $R_m$  служить магазин опорів, який підбирається таким чином, щоб

струм через гальванометр  $G$  був відсутній.

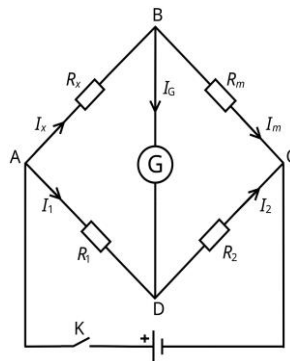


Рис.9 Електрична схема моста сталого струму.

Тоді за формулою (1.21) розрахуємо невідомий опір  $R_x$ :

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_m.$$

Для того, щоб при вимірюваннях отримати достовірні дані для невідомих опорів, потрібно ключ  $K$  замикає на короткий час і тільки під час зняття вимірів. Це пов'язане з тим, що під час протікання струму по провідниках вони нагріваються, а їхній опір збільшується. Недоліком методу містка Уїнстона є те, що до опорів зображених на схемі додається

ще опір з'єднувальних проводів, що зменшує точність вимірів.



Рис.10 Лабораторна установка. Тут 1 - підключення до мережі, 2 - гальванометр, 3 - вмикання в схему невідомих опорів  $R_x$ , 4 - магазин опорів  $R_m$ , 5 - ключ  $K$ .

### Порядок виконання

В установку по черзі вмикаються 5 невідомих опорів  $R_x$ . Потрібно їх визначити, користуючись методом містка Уінстона.

Порядок зняття вимірів:

1. Увімкнути джерело живлення постійного струму (6 В).
2. Перемикачем на установці увімкнути у електричне коло перший невідомий опір  $R_x$ .
3. На магазині опорів виставити довільне значення опору  $R_m$  і на короткий час замкнути ключ  $K$  (див. рис.10). Змінюючи  $R_m$  домогтися,

щоб при замиканні ключа  $K$  стрілка гальванометра залишалася на нулі. Це свідчитиме про те, що плечі моста врівноважені.

4. Записати значення опору  $R_m$  у таблицю 1.
5. Увімкнути у коло наступний невідомий опір і повторити вимірювання пунктів 3 і 4.
6. Повторити вимірювання для всіх невідомих опорів  $R_x$ .
7. Переписати з установки значення відомих опорів  $R_1$ ,  $R_2$  та клас точності  $K$  магазину опорів. **Увага!** Позначення опорів на схемі у різних лабораторіях можуть відрізнятися, тому переписуючи значення опорів звіряйте правильність позначення за їхнім розташуванням у схемі лабораторної установки.

### Обробка результатів вимірювань

1. За формулою (1.21) розрахувати значення невідомих опорів  $R_x$  та занести до таблиці 1.

2. Ознайомитися з теорією обробки результатів фізичних вимірювань в додатку 3 або за посібником [2]. Для одного з знайдених опорів порахувати сумарну невизначеність типу В. За формулою (3.41) додатку 3:

$$U_B(R_x) = \sqrt{\sum_{i=1,2,m} \left( \frac{\partial R_x}{\partial R_i} U_B(R_i) \right)^2}$$

Вважаючи відносну похибку стандартних заводських опорів  $\delta_R = 5\%$ , знайти невизначеності опорів  $R_1$  і  $R_2$ . За формулою (3.38) додатку 3

$$U_B(R_1) = \frac{\delta_R R_1}{\sqrt{3}} = \frac{0,05 R_1}{\sqrt{3}} \text{ Ом}$$

та

$$U_B(R_2) = \frac{\delta_R R_2}{\sqrt{3}} = \frac{0,05 R_2}{\sqrt{3}} \text{ Ом.}$$

Невизначеність опору  $R_m$  з магазину опорів визначити за формулою (3.38) додатку 3:

$$U_B(R_m) = \frac{K_m R_N}{100\sqrt{3}},$$

де  $K_m$  – клас точності магазину опорів,  $R_N = R_{m \max}$  - нормуюча величина (визначається максимальним опором, який можна виставити тими ж ручками на магазині опорів, які застосовувались для підбору

опору  $R_m$ ). Записати отриману невизначеність у таблицю 2.

Таблиця 1

|                    |  |  |  |  |  |
|--------------------|--|--|--|--|--|
| $R_1 =$<br>$R_2 =$ |  |  |  |  |  |
| $R_m$              |  |  |  |  |  |
| $R_x$              |  |  |  |  |  |

Таблиця 2

|                                                                                     |                                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $R_x =$                                                                             | Клас точності магазину опорів<br>$K_m =$<br>Нормуюча величина<br>$R_N =$<br>Сумарна невизначеність типу В<br>$U_B(R_x) =$ |
| Відповідь: $R = R_x \pm U(R_x)$<br>=<br>$\delta = \frac{U(R_x)}{R_x} \cdot 100\% =$ |                                                                                                                           |

3. Знайти розширену невизначеність за формулою (3.43) додатку 3:

$$U(R_x) = k U_B(R_x),$$

де коефіцієнт охоплення  $k$

прийняти рівним 2, що відповідає рівню довіри  $P = 0,95$ . Записати кінцевий результат у таблицю 2. Див. приклад 1 обробки даних вимірювань.

4. Написати висновок по роботі.

### Контрольні запитання

1. Сформулюйте закон Ома для однорідної ділянки кола, неоднорідної ділянки кола та повного кола.
2. Сформулюйте правила Кірхгофа.
3. Що називається вузлом в електричному колі?
4. У чому полягає мостовий метод вимірювання опору?
5. За яких умов плечі мостової схеми (містка Уїтстона) врівноважені?
6. Виведіть робочу формулу (1.21).
7. Що впливає на точність методу вимірювання невідомого опору за допомогою містка сталого струму? Проаналізуйте відповідь.

## Лабораторна робота 2-2 Вимірювання електрорушійної сили методом компенсації

### Прилади та пристрої

1. Нормальний елемент Вестона.
2. Елемент з невідомою е.р.с.
3. Джерело сталого струму УІП-
4. Нуль-гальванометр Г.
5. Реохорд.
6. Обмежувальний опір.
7. Ключі.
8. З'єднувальні проводи.
9. Лінійка.

### Установка

Схема установки для вимірювання електрорушійної сили е.р.с. джерела струму методом компенсації зображена на рис.8, а лабораторна установка на рис.11.

Як джерело  $\mathcal{E}$  сталого струму використано стабілізоване електронне джерело на 3-9 В (універсальне джерело УІП-2). За еталонне джерело струму  $\mathcal{E}_n$  з відомою е.р.с. використовується нормальний елемент Вестона (додаток 2). Електрорушійні сили  $\mathcal{E}_n$  та  $\mathcal{E}_x$  компенсуються падінням напруги на ділянці  $AD$

реохорда  $AC$ . Ключ  $K_2$  використовується для замикання кола гальванометра  $G$  на нормальний елемент  $\mathcal{E}_n$  (позиція 1) або елемент з невідомою е.р.с.  $\mathcal{E}_x$  (позиція 2).

Щоб уникнути протікання великого струму через чутливий гальванометр  $G$  за відсутності компенсації в коло введено обмежувальний опір  $R_G$ .

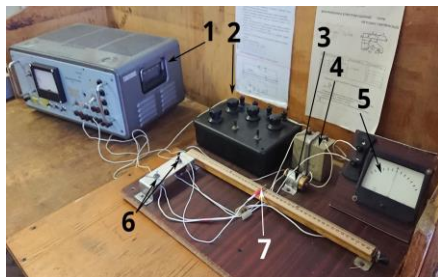


Рис. 11. Лабораторна установка. Тут 1 - джерело сталого струму УІП-2, 2 - додатковий опір  $R_G$ , 3 - джерело живлення з невідомою е.р.с ( $\mathcal{E}_x$ ), 4 - нормальний елемент Вестона ( $\mathcal{E}_n$ ), 5 - гальванометр  $G$ , 6 - ключі для підключення е.р.с  $\mathcal{E}_x$  та  $\mathcal{E}_n$ , 7 - повзунок реохорда  $D$ .

### Порядок виконання роботи

1. Поставити ключ  $K_2$  у нейтральне положення.
2. Встановити повзунок реохорда  $D$  приблизно

посередині.

3. Ввести обмежувальний додатковий опір  $R_G$  і замкнути ключ  $K_1$ .

4. Поставити ключ  $K_2$  у положення 1 (замкнути у коло гальванічний елемент  $\mathcal{E}_n$  з відомою е.р.с.). Переміщуючи повзунок реохорда  $D$  знайти таке його положення, при якому струм у колі гальванометра буде дорівнювати нулю.

Таблиця 3

| $n$                                                                                                                               | $l_1, \text{см}$ | $l'_1, \text{см}$ | $\mathcal{E}_x, \text{В}$                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|-------------------|-----------------------------------------------------|
| 1                                                                                                                                 |                  |                   |                                                     |
| 2                                                                                                                                 |                  |                   |                                                     |
| 3                                                                                                                                 |                  |                   |                                                     |
| 4                                                                                                                                 |                  |                   |                                                     |
| 5                                                                                                                                 |                  |                   |                                                     |
| $\mathcal{E}_n = 1,0186 \text{ В}$<br>Невизначеності:<br>$U_A(\mathcal{E}_x) =$<br>$U_B(\mathcal{E}_x) =$<br>$U(\mathcal{E}_x) =$ |                  |                   | $\langle \mathcal{E}_x \rangle =$<br><br>$\delta =$ |

5. Поставити ключ  $K_2$  у нейтральне положення і

зменшити опір  $R_G$  до нуля. Потім поставити  $K_2$  у положення 1 і переміщенням повзунка  $D$  реохорда  $AC$  остаточно встановити стрілку гальванометра на нуль. Визначити довжину ділянки реохорда  $AD_1 = l_1$  та записати її в таблицю 3. Повторити вимірювання 5 разів та занести результати в таблицю.

6. Поставити ключ  $K_2$  у положення 2 (замкнути у коло елемент  $\mathcal{E}_x$  з е.р.с., яку потрібно визначити). Провести вимірювання аналогічні пунктам 4 та 5 і визначити довжину ділянки реохорда  $AD_2 = l'_1$ . Повторити вимірювання 5 разів та записати отримані дані у таблицю 3.

### Обробка результатів вимірювань

1. За формулою (1.30) знайти невідому електрорушійну силу  $\mathcal{E}_x$ .
2. За формулою  $\langle \mathcal{E}_x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n \mathcal{E}_{xi}}{n}$  знайти середнє значення е.р.с. невідомого елемента.

3. Розрахувати сумарну стандартну невизначеність типу А за формулою

$$U_{CA}(\mathcal{E}_x) = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial l_1} U_A(l_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial l'_1} U_A(l'_1)\right)^2},$$

де стандартні невизначеності типу А довжин  $l_1$  та  $l'_1$  знаходяться за формулою (3.31) додатку 3. Тоді

$$U_A(l_1) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l_{1i} - \langle l_1 \rangle)^2}{n(n-1)}},$$

$$U_A(l'_1) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l'_{1i} - \langle l'_1 \rangle)^2}{n(n-1)}}.$$

4. Розрахувати сумарну стандартну невизначеність типу В за формулою (3.41). Тоді

$$U_{CB}(\mathcal{E}_x) = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \mathcal{E}_n} U_B(\mathcal{E}_n)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{l'_1}{l_1} U_B(\mathcal{E}_n)\right)^2} = \left|\frac{l'_1}{l_1} U_B(\mathcal{E}_n)\right|,$$

де  $U_B(\mathcal{E}_n)$  визначається за формулою (3.36) додатку 3.

5. Порахувати розширену невизначеність за формулою (3.43) додатку 3, тобто

$$U = k U_C(\mathcal{E}_x),$$

де

$$U_c(\mathcal{E}_x) = \sqrt{U_{CA}^2(\mathcal{E}_x) + U_{CB}^2(\mathcal{E}_x)}$$

- це сумарна невизначеність (формула (3.42) додатку 3), а  $k$
  - коефіцієнт охоплення (або коефіцієнт Стюдента) див. додаток 3.
6. Занести всі отримані дані розрахунків в таблицю 3.
  7. Зробити висновок про те, які фактори мали більш суттєвий вплив на точність вимірів і про точність методу вимірювання е.р.с. методом компенсації.

### Контрольні запитання

1. Сформулюйте закон Ома для однорідної ділянки кола.
2. Сформулюйте закони Ома для неоднорідної ділянки кола та повного кола.
3. Сформулюйте правила Кірхгофа.
4. Що називається е.р.с. джерела струму та яке її призначення?
5. Яка роль сторонніх сил у електричному колі? Чому ці сили називають сторонніми?
6. З якою метою всі елементи

е.р.с. в компенсаційній схемі лабораторної роботи з'єднуються одноіменними полюсами?

7. Навіщо у коло гальванометра  $G$  на схемі рис.8 підключається додатковий опір  $R_d$ ?
8. Яка роль нормального елементу Вестона у даній роботі?
9. Які переваги компенсаційного методу вимірювання невідомої е.р.с. у порівнянні з безпосереднім її вимірюванням вольтметром? Відповідь пояснити.
10. Вивести робочу формулу (1.30).

### ДОДАТКИ

**Додаток 1. Умова мінімальної невизначеності при визначенні невідомого опору за допомогою містка постійного струму**

Невідомий опір визначається за формулою (1.21):

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_m.$$

Тоді згідно формули (3.41) додатку 3 сумарна невизначеність типу В невідомого опору буде визначатись за формулою:

$$U_B(R_x) = \sqrt{L + M + N}, \quad (1.1)$$

де

$$L = \left(\frac{R_m}{R_2} U_B(R_1)\right)^2, \quad (1.2)$$

$$M = \left(\frac{R_1 R_m}{R_2^2} U_B(R_2)\right)^2, \quad (1.3)$$

$$N = \left(\frac{R_1}{R_2} U_B(R_m)\right)^2. \quad (1.4)$$

Тут в цих формулах:

$U_B(R_1)$  і  $U_B(R_2)$  - невизначеність типу В опорів  $R_1$  і  $R_2$  визначається за їхніми технічними паспортами,  $U_B(R_m)$  - невизначеність типу В опору магазину опорів, яка визначається через клас точності приладу за формулою (3.38) додатку 3.

Відносна невизначеність визначення невідомого опору  $R_x$  буде:

$$\delta(R_x) = \frac{U_B(R_x)}{R_x} = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_m^2}, \quad (*)$$

$$\text{де } \delta_1 = \frac{U_B(R_1)}{R_1}, \quad \delta_2 = \frac{U_B(R_2)}{R_2},$$

$$\delta_m = \frac{U_B(R_m)}{R_m} - \text{відносні невизна-}$$

ченості опорів  $R_1$ ,  $R_2$  і  $R_m$ . Так як  $R_1 = \rho \frac{l_1}{S}$ ,  $R_2 = \rho \frac{l_2}{S} = \rho \frac{l-l_1}{S}$ , то формула із (\*) перепишеться так:

$$\delta = \sqrt{\frac{a}{l_1^2} + \frac{b}{(l-l_1)^2}} + \delta_m^2, \quad (**)$$

$$\text{де } a = \left(\frac{U_B(R_1)S}{\rho}\right)^2, \quad b = \left(\frac{U_B(R_2)S}{\rho}\right)^2$$

є постійними величинами. Дослідимо формулу (\*\*) на екстремум. Прирівняємо до нуля першу похідну  $\frac{d\delta}{dl_1}$  до нуля і отримуємо

таке рівняння:

$$al_1(l-l_1)^4 = b(l-l_1)l_1^4.$$

З цього рівняння отримаємо, що  $l-l_1 = l_1$ . При умові, що  $a = b$  (це має місце, тому що використовується однорідний провідник у вигляді натягнутого дроту), отримаємо, що  $l_1 = l/2$ . Друга похідна  $\frac{d^2\delta}{dl_1^2} > 0$  при  $l_1 = l/2$ , а це означає, що відносна невизначеність визначення невідомого опору  $R_x$   $\delta$  (формула (\*\*)) буде мінімальна. Значить, для досягнення максимальної точності вимірювання невідомого опору мостовою схемою необхідно



брати однакові опори  $R_1$ ,  $R_2$  і бажано високого класу точності.

## Додаток 2. Гальванічний елемент

У звичайних батареях (акумуляторах) переміщення носіїв заряду в області, де електричне поле протилежне струму, відбувається за допомогою хімічної енергії. За рахунок цієї енергії позитивний заряд може рухатись до місця з більш високим електричним потенціалом, якщо він при цьому приймає участь в хімічній реакції, яка дає йому більше енергії, ніж потрібно для того, щоб подолати силу кулонівського відштовхування. За рахунок цієї енергії негативні заряди рухаються до місця з більш меншим електричним потенціалом, якщо вони беруть участь в хімічній реакції.

Щоб розглянути, як цей механізм працює, дослідимо це на прикладі нормального елемента Вестона, який має велике значення в лабораторії, тому що

є еталоном при точних вимірюваннях напруги (рис.12.). Він складається із Н подібної скляної посудини, яка наповнена розчином сульфату кадмію,  $\text{CdSO}_4$ .

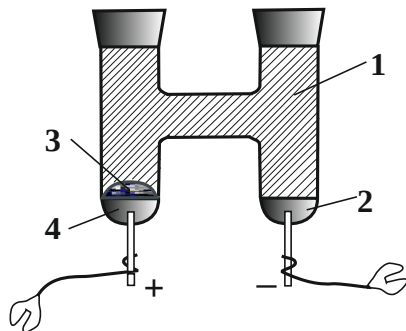


Рис.12. 1-водний розчин сульфату кадмію  $\text{Cd}^{++}\text{SO}_4^{--}$  (електроліт); 2- амальгама кадмію (кадмій, розчинений у ртуті); 3-сульфат ртуті ( $\text{Hg}_2\text{SO}_4$ ) (дуже слабо розчинний); 4-чиста ртуть. Це “ненасичений” елемент .

У дно кожного плеча впаяні зовнішні виходи, які здійснюють контакти із внутрішніми електродами. Лівим внутрішнім електродом є рідка чиста ртуть (4), а правим — та ж ртуть, в якій розчинений металічний кадмій (2). (В ртуті розчиняється багато металів: такий розчин називається амальгамою). Зліва над поверхнею ртуті знаходиться декілька кристалів сульфату

ртуті,  $\text{Hg}_2\text{SO}_4(3)$  — сполука, яка дуже слабо розчиняється у воді. Між зовнішніми виходами існує різниця потенціалів причому лівий вихід позитивний по відношенню до правого. (Абсолютна величина потенціалу не має значення; тут важлива тільки різниця).

Ось як працює такий елемент: частина іонів елементу кадмію переходить із амальгами (2) у водний розчин (1) (рис.13,б), причому кожний іон кадмію залишає після себе два електрони і

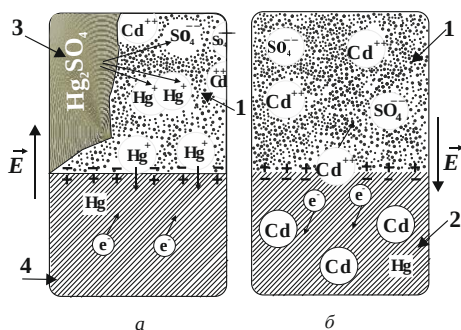


Рис.13. Тут схематично показано, що відбувається на поверхні позитивного електроду (а) і на поверхні негативного електроду (б), коли елемент Вестона підключають до зовнішнього навантаження.

амальгамний електрод (2) набуває значний негативний заряд. Однак цей процес зупиняється, як тільки в електроді накопичується стільки електронів, що їхня сила притягання іонів  $\text{Cd}^{++}$  перешкоджає подальшому їхньому виходу у водний розчин (1). Якщо тепер з'єднати виводи елемента провідним опором, то електрони потечуть від негативного електроду до позитивного. Це дозволить новій порції іонів  $\text{Cd}^{++}$  перейти в розчин (1), а залишені ними електрони просто поповнять негативний заряд цього електроду. В колі буде протікати стаціонарний струм, який супроводжується міграцією іонів, які замикають коло всередині водного розчину (1). Тим часом дещо відбувається і на другому електроді (рис.13,а). Іони ртуті  $\text{Hg}^+$  покидають розчин (3), зустрічаються з електронами, які приходять зовні, і стають

нейтральними атомами ртуті. В розчині нові іони  $\text{Hg}^+$  виникають при розчиненні  $\text{Hg}_2\text{SO}_4$ , причому одночасно в електроліт (1) добавляються нові сульфатні іони  $\text{Hg}^+$ . Тим часом, як показано на рис.13,б, неперервно йде дисоціація атомів кадмію, які поступають в електроліт (1) уже у вигляді іонів  $\text{Cd}^{++}$ .

*В результаті, по суті, відбувається вилучення електронів від атомів кадмію і приєднання їх до іонів ртуті. Хімік сказав би, що кадмій окислюється, а ртуть відновлюється. Елемент працює тому, що цей обмін енергетично вигідний. Відносна сила зв'язку електронів в структурі атома кадмію і атома ртуті така, що, виражаючись фігурально, намагання атомів ртуті приєднати електрони переважає бажання атомів кадмію утримувати їх. Зауважимо, що на кожній із поверхонь розділу іони  $\text{Cd}^{++}$*

(рис.13,б) і іони  $\text{Hg}^+$  (рис.13,а) рухаються проти сил  $q\vec{E}$  електричного поля.

Розглянемо тепер зміну електричного потенціалу у всій системі як при протіканні струму, так і при його відсутності.

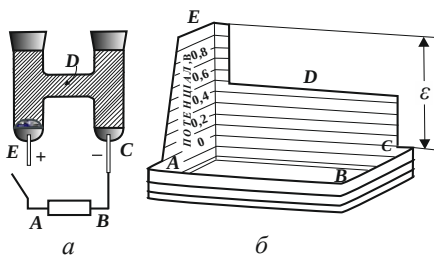


Рис.14. Розподіл в розімкнутому колі (а) потенціалу (б). Потенціал правого затискача С прийнятий за нульове значення.

На рис.14,б по вертикалі відкладено зміну потенціалу вздовж кола, яке розімкнуте в одній точці. Різниця потенціалів на затискачах при розімкнутому колі є е.р.с. елемента, яка позначена як  $\mathcal{E}$ . Електричне поле дорівнює градієнту потенціалу з оберненим знаком. Як і в будь-якому

електростатичному полі лінійний інтеграл  $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ .

На рис.15,б показаний розподіл потенціалу в тому випадку, коли по зовнішньому опору протікає струм. Всередині електроліту є електричне поле, яке направлене в ту ж сторону, що і струм. Розчин сульфату кадмію веде

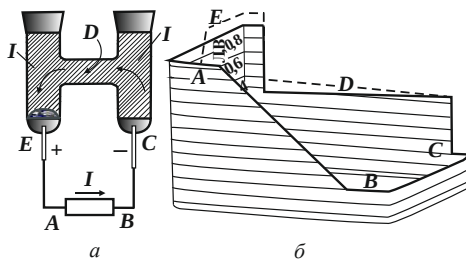


Рис.15. Розподіл потенціалу (б) у випадку, коли по зовнішньому опору протікає струм (а). Зверніть увагу на спад потенціалу всередині електроліту. Цей розгляд не придатний для елемента Вестона, який використовується як еталон. Еталонний елемент застосовується в умовах, коли протікає дуже малий струм.

себе як звичайний омичний опір. Тепер різниця потенціалів на затискачах менша  $\mathcal{E}$  із-за наявності внутрішнього

спаду напруги на електроліті, а також, можливо, із-за додаткового опору перехідних шарів. Лінійний

рал  $\oint \vec{E} d\vec{l}$  по всьому колу, як і раніше, дорівнює нулю. Нехай в результаті протікання струму через кожний переріз кола пройшов заряд  $q$ , тоді  $\mathcal{E}q$  є енергія, яка розсіяна у зовнішньому колі і всередині елемента. Ця енергія отримана із хімічної енергії елемента, яка є джерелом існування сторонньої сили  $\vec{E}_{cm}$ .

Ланцюжок реакцій в елементі оборотний. Це означає, що якщо включити в коло назустріч елементу інше джерело з більшою е.р.с., то струм потече в оберненому напрямку і описані процеси будуть протікати в оберненому порядку. Саме це відбувається при зарядці батареї акумуляторів.

Е.р.с. елемента залежить від властивостей атомів. Її значення близьке до 1В, тому

що енергія зв'язку зовнішніх електронів в атомі лежить в діапазоні декількох електрон-вольт, а в е.р.с. проявляється, по суті, різниця цих енергій зв'язку.

Сам елемент Вестона використовується не як джерело електричної енергії, а швидше, як еталон різниці потенціалів. Тому ситуація, яка показана на рис.15, коли протікає досить значний струм і вихідна напруга падає приблизно на 10 % , є грубим зловживанням до такого елемента. Е.р.с. елемента Вестона відтворювана у високій степені. Якщо водний розчин (1) (рис.12) насичений надлишком сульфату кадмію в області обох електродів, то е.р.с. при 20°C дорівнює (1,018800-1,019600)В з похибкою до 0,002 % і стабільністю ( за 1 рік до 20 мкВ). При цьому допускається протікання струму (0,5-10 мкА). Використовуючи, як еталон,

елемент Вестона і відповідний потенціометр, можна надійно вимірювати різницю потенціалів з точністю до  $10^{-6}$ В.

### **Додаток 3. Обробка результатів фізичних вимірювань. Короткі теоретичні відомості з теорії похибок. Основні поняття про невизначеності**

Класичний підхід в оцінюванні якості результатів вимірювання ґрунтується на понятті "похибка". Згідно такого підходу стверджується, що величина, яка вимірюється, зрештою може бути охарактеризована єдиним, істинним значенням, але через похибки (систематичні та випадкові) вимірювальних пристроїв і методів вимірювання, воно не може бути визначене.

З середини 70-х років минулого сторіччя було підняте дискусійне питання про наявність або відсутність істинного значення фізичної величини, яка вимірюється. Стверджувалось,

що істинне значення завжди залишається невідомим, а результат вимірювання необхідно виражати значенням, яке одержалось, з оцінкою не похибки, а невизначеності результатів вимірювання, яка прийнятна для задачі, що вирішується.

Вважається, що термін “невизначеність вимірювання” прийшов на заміну терміну “похибка вимірювань”. **Однак поняття “похибка” теж має право на існування.** Похибка може бути визначена у тих випадках, коли є визначене значення величини, спираючись на яке можна обчислити похибку, а також коли опорне значення є умовним значенням величини (“Опорне значення величини” – значення величини, що використовується як основа для порівняння із значенням величини такого ж роду. Опорне значення величини може бути істинним значенням величини, яке є невідомим, або умовним значенням величини, яке є відомим). У випадку, якщо за опорну величину приймається істинне значення величини, тоді

обчислити похибку неможливо. В концепції невизначеності застосування похибки досить обмежене і може використовуватися тільки при проведенні спеціальних метрологічних робіт (при порівнянні вимірювальних еталонів, визначенні компетентності лабораторії, тощо). Похибкою, як і раніше, називають відхилення виміряного значення від дійсного чи стандартного.

В загальному випадку при виконанні звичайних вимірювань, коли опорне значення величини є невідомим, для оцінки величини, яка вимірюється, потрібно використовувати невизначеність.

### **Основні поняття. Класифікація похибок**

Вимірювання – це знаходження фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів.

Вимірювання діляться на прямі і опосередковані. При прямих вимірюваннях числове значення фізичної величини отримують прямим порівнянням невідомої

величини з мірами або за допомогою вимірювального приладу, який проградуйований в одиницях вимірювання. Опосередковані вимірювання – це вимірювання, при яких невідоме значення величини знаходять за допомогою відомої залежності між цією величиною і іншими величинами, в тому числі величинами, які знайдені за допомогою прямих вимірювань. При опосередкованих вимірюваннях невідоме значення величини отримують шляхом розрахунку за формулами. Більшість вимірювань – опосередковані.

### **Похибки вимірювань**

Похибка вимірювання (англ. *measurement error*) – відхилення результату вимірювання від істинного значення фізичної величини, яку вимірюють.

Мета вимірювання – отримання числового значення величини, яка вимірюється. Однак досвід показує, що всяке вимірювання, як би ретельно воно не виконувалось, які б точні прилади і надійні методи не застосо-

увались містить помилки, які називають похибками. Похибки не мають значення чогось неправильного. Вони у вимірюваннях неминучі. Основні причини їх появи – це недосконалість методу вимірювання та вимірювального приладу, обмежені можливості експериментатора, нестабільність умов експерименту.

Тобто уникнути від похибок неможливо, але врахувати їх необхідно. Тому завжди крім числового значення величини, яка виміряна, необхідно вказувати величину можливої похибки, яка супроводжує цей результат. Аналіз і оцінка похибок – одна із основних задач метрології (наука про вимірювання з високою точністю). Результат всякого вимірювання малоцінний, якщо не вказана похибка, з якою він отриманий. Розрізняють абсолютні і відносні похибки.

**Абсолютна похибка** вимірювання (англ. *absolute error of measurement*, нім. *absoluter Messfehler*) — абсолютна різниця між результатом вимірювання  $x$  та умовно істинним  $x_{\text{іст}}$

значенням величини, яку вимірюють:

$$\Delta = x - x_{\text{іст}}. \quad (3.1)$$

Розмірність абсолютної похибки є такою ж, як і у вимірюваної величини. Вона є ознакою якості вимірювання величини  $x$ . Абсолютна похибка може бути як додатною, так і від'ємною. Сама по собі вона не дає повної характеристики точності вимірювання. По одному її значенню не можна судити про точність вимірювання. Для цього необхідно знати і значення величини, яку вимірюємо. Тому використовується відносна похибка  $\delta$ .

Відносна похибка – відношення модуля абсолютної похибки до істинного значення величини, яку вимірюємо:

$$\delta = \frac{|\Delta|}{x_{\text{іст}}} \cdot 100\%. \quad (3.2)$$

*Примітка.* За істинне значення  $x_{\text{іст}}$ , як буде показано в подальшому, будемо брати середньоарифметичне значення результатів багатьох вимірювань.

Причини прояви похибок бувають суб'єктивні і об'єктивні. Тому:

– суб'єктивні похибки – похибки, які залежать від особистих якостей експериментатора;

– об'єктивні похибки – похибки, які виникають через недосконаlostі вимірюваної апаратури і методу вимірювання, а також впливу зовнішніх завад.

В залежності від закономірності появи похибки діляться на три групи: 1) випадкові, 2) промахи (грубі похибки), 3) систематичні.

**1. Випадкові похибки** – похибки, невизначені відносно величини і знаку, які при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини при незмінних умовах мають різні додатні і від'ємні значення, які не залежать одне від одного.

Випадкові похибки – результат великого числа малих і незалежних одне від одного випадкових впливів на результат вимірювання. Проявляються випадкові похибки в тому, що при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини з однаковою старанністю отримуються трохи відмінні числові значення. При-



чини появи випадкових похибок можуть бути як об'єктивні (наприклад, коливання напруги в мережах), так і суб'єктивні (наприклад, недостатня чутливість людини, яка виконує вимірювання, до тих чи інших відчуттів). Значить, випадкові похибки – похибки, причини яких невідомі і не ясні. Ці похибки непостійні і внаслідок випадкових обставин можуть збільшувати або зменшувати числове значення величини, яку вимірюємо. Їх не можливо виключити, однак можна оцінити за допомогою теорії випадкових похибок, яка створена на основі теорії ймовірності.

**2. Промахи (грубі похибки)** – похибки, які суттєво перевищують похибки, яких очікують, при даних вимірюваннях. Промахи – як правило значні за величиною похибки, які спотворюють результат вимірювання. Промахів можна уникнути за допомогою підвищення уважності в роботі і перевірки вимірювання. Результати вимірювань, які містять промахи, значно від-

різняються від правильних і повинні бути відкинуті.

**3. Систематичні похибки** – похибки, які залишаються постійними або закономірно змінюються при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж фізичної величини. До них відносяться, наприклад, похибки, які викликані неправильним градуванням вимірювального приладу, зміщенням його шкали, впливом температури оточуючого середовища на вимірювальні прилади і міри.

Якщо систематичні похибки виявлені, то їхнього впливу на результати вимірювань можна уникнути або врахувати введенням поправок. Наприклад, щоб переконатись у відсутності систематичних похибок, проводять вимірювання іншим способом при інших умовах. Співпадання результатів вимірювань, отриманих двома методами, є гарантія їх правильності. Хоч вимірювання двома методами теж можуть мати одну і ту ж систематичну похибку. Історія фізики показує, що систематичні похибки мо-

жуть містити навіть дуже добре виконані вимірювання. Їх містять і деякі фізичні константи, значення яких були переглянуті в останні роки. Широко зустрічаються похибки відомого походження, але невідомої величини. До них відносяться похибки вимірювальних приладів (*інструментальні похибки*). Ці похибки оцінюються шляхом порівняння (перевіркою) показів приладу з показами іншого приладу, більш точного.

**Інструментальна похибка** — максимальна розбіжність (у відносних, або абсолютних одиницях) з істинним значенням величини, яка вимірюється, в сторону більших, або менших значень. Другими словами — це максимальна абсолютна похибка приладу.

Результат перевірки приводиться або в паспорті приладу, або вказується клас точності приладу на його шкалі або панелі.

**Клас точності електровимірювального приладу дорівнює його відносній приведеній**

**(максимальній) похибці, яка виражена у відсотках.** Клас точності позначається буквою *K*. Приведена похибка *K* електровимірювального приладу — це відношення модуля максимальної (інструментальної) абсолютної похибки  $\Delta_{\text{пр}}$  приладу до значення нормуючої величини  $X_N$ :

$$K = \frac{|\Delta_{\text{пр}}|}{X_N} \cdot 100\%. \quad (3.3)$$

Нормуючою величиною  $X_N$  може бути:

- а) крайнє значення шкали приладу, якщо нульова відмітка знаходиться на початку шкали;
- б) сума крайніх значень шкали приладу (без урахування знаків), якщо нульова відмітка знаходиться посередині шкали;
- в) різниця кратного (кінцевого) і початкового значень робочої частини шкали приладу, якщо шкала не має нульової відмітки;
- г) довжина шкали, якщо шкала нерівномірна і має поділки, які звужуються (логарифмічна, гіперболічна або степенева шкала);

д) номінальне значення величини, яка вимірюється, якщо воно визначене.

Для електровимірювальних приладів встановлено вісім класів точності: **високі** – **0,05; 0,1; 0,2; 0,5**; **низькі** – **1; 1,5; 2,5; 4,0**.

За допомогою формули (3.3) визначається максимальна абсолютна систематична (інструментальна) похибка приладу, яка дозволяє оцінити область, в межах якої знаходиться істинне значення  $x_{\text{іст}}$ .

$$\Delta_{\text{пр}} = \pm \frac{K \cdot x_N}{100}, \quad (3.4)$$

де  $K$  – один із восьми класів точності, що вказується на приладі.

Визначена таким способом  $\Delta_{\text{пр}}$  однакова для всіх показів приладу  $x$ .

Тому відносна похибка

$$\delta = \frac{|\Delta_{\text{пр}}|}{x_{\text{іст}}} \cdot 100\% \approx \frac{|\Delta_{\text{пр}}|}{x} \cdot 100\% \quad (3.5)$$

залежить від показів приладу і вона тим більша, чим менше  $x$ . Так як істинне значення  $x_{\text{іст}}$  величини, яку вимірюємо, завжди невідоме, то замість  $x_{\text{іст}}$  для досить правильної оцінки  $\delta$  в (3.5)

використовують виміряне значення  $x$  (як правило  $x$  не дуже відрізняється від  $x_{\text{іст}}$ ). Тому для отримання більш точних результатів (отримання менших  $\delta$ ) при використанні електровимірювальних приладів необхідно добиватись достатньо великого відхилення стрілки приладу, не менше, ніж на половину шкали приладу, тобто необхідно вибирати прилади відповідної чутливості.

Таким чином, систематичні похибки електровимірювальних приладів не можуть бути повністю виключені, але можна визначити їхню найбільшу величину.

Цифрові електровимірювальні прилади, як правило мають систематичну похибку в одну, дві одиниці останньої значущої цифри, якщо в паспорті приладу не вказана інша величина.

Максимальні похибки вимірювальних лінійок, мікрометрів та інших приладів деколи наносяться на приладі або приводяться в його паспорті. Вказується максимальна систематична

абсолютна похибка, яка вважається сталою по всій шкалі приладу, якщо відсутня таблиця поправок.

### **Оцінка похибок прямих вимірювань при нормальному розподілі**

Будемо вважати, що систематичні похибки і промахи із результатів вимірювання виключені. Вимірювання рівноточні, тобто такі, що проводились при однакових умовах одним і тим же експериментатором, одними і тими ж приладами. Тоді при повторних вимірюваннях деякої фізичної величини  $x$  отримані різні значення  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , що викликано існування випадкових похибок.

#### **Абсолютні похибки**

$\Delta_i = x_i - x_{\text{іст}} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$   
бувають різної величини і появляються з різною ймовірністю, тому вводять поняття густини ймовірності (тобто ймовірності, що приходить на одиничну похибку):

$$f(\Delta) \cong \frac{\Delta p_k}{\Delta_k},$$

де  $\Delta_k$  — якась  $k$ -та абсолютна похибка, імовірність появи якої  $\Delta p_k$ , або в загальному випадку

$$f(\Delta) = \frac{dp(\Delta)}{d\Delta}, \quad (3.6)$$

де  $dp(\Delta)$  — ймовірність того, що абсолютна випадкова похибка знаходиться в інтервалі  $d\Delta$  між похибками  $\Delta$  і  $\Delta + d\Delta$ . Функцію  $f(\Delta)$  називають функцією розподілу густини ймовірності.

Для випадку, коли виконуються умови:

1) випадкові похибки вимірювання можуть приймати неперервний ряд значень ( $n$  дуже велике);

2) випадкові похибки, однакові за модулем, але різні за знаком, зустрічаються майже однаково часто;

3) частота появи випадкових похибок зменшується із збільшенням її модуля. Другими словами, великі випадкові похибки зустрічаються рідше, ніж малі.

Тоді при цих умовах функція (3.6) має вид:

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (3.7)$$

яка носить назву закону *нормального розподілу*, або закону Гаусса. У формулі (3.7):  $\Delta = x - x_{\text{ист}}$  – випадкова абсолютна похибка – похибка одиничного вимірювання;  $x$  – числове значення величини, яка отримана при будь-якому одиничному вимірюванні ряду повторних вимірювань;  $x_{\text{ист}}$  – істинне значення величини, яка вимірюється;  $e = 2,71828 \dots$  – основа натуральних логарифмів;  $f(\Delta)$  – густина ймовірності, яка визначає ймовірність того, що абсолютна випадкова похибка попадає в одиничний інтервал похибок біля значення похибки  $\Delta$ ;  $\sigma$  – характерний параметр даного розподілу, який називається середньою квадратичною похибкою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}}, \quad (3.8)$$

де  $n$  – велике число, а  $\Delta_i$  визначаються співвідношеннями (3.1).

На рис.16 приведені графіки функції (3.7) для двох параметрів  $\sigma$ . Тут  $\sigma_1 < \sigma_2$ . Із графіків видно, що чим менша  $\sigma$ , тим крутіший хід кривої  $f(\Delta)$  і тим більше значення  $f(\Delta)$  при  $\Delta = 0$ . Це означає, що менша ймовірність появи достатньо великих за модулем похибок і більша ймовірність появи достатньо малих за модулем похибок, тобто вища точність вимірювань.

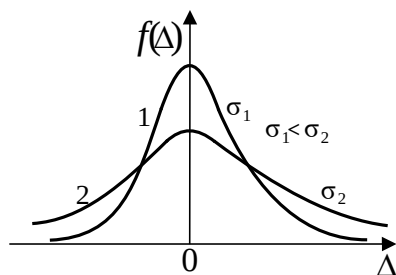


Рис.16

**Таким чином  $\sigma$  характеризує точність цих вимірювань.** Тому бажано, щоб крива  $f(\Delta)$  була як можна гостріша (мале значення  $\sigma$ ).

Крива  $f(\Delta)$  симетрична відносно  $\Delta = 0$ . Це означає, що ймовірність появи будь-яких аб-

солотних похибок  $+\Delta_k$  і  $-\Delta_k$  є однаковою.

Ймовірність  $dP = f(\Delta) \cdot d\Delta$  (рис.17) числово дорівнює площі заштрихованої фігури. Це означає, що  $P = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta) \cdot d\Delta = 1$  і умовна площа під кривою  $f(\Delta)$  завжди дорівнює одиниці, якою б крива  $f(\Delta)$  не була.

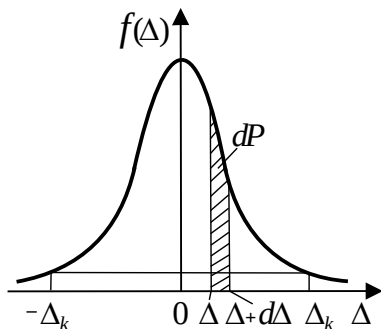


Рис.17

Ймовірність того, що випадкові абсолютні похибки вимірювань за модулем не перевищують яке-небудь граничне (допустиме) значення  $\Delta_{гр}$  (границя довіри похибок), називається **надійністю** або **ймовірністю довіри** цього граничного (допустимого) значення. Тобто, надійність (або ймовірність довіри)  $P$  – це ймовірність того,

що випадкова абсолютна похибка лежить в межах від  $-\Delta_{гр}$  до  $+\Delta_{гр}$  (рис.18). При цьому результат вимірювання відрізняється за модулем від істинного значення не більше, ніж на  $\Delta_{гр}$ , із заданою ймовірністю  $P$ . Відповідний інтервал значень похибок  $2\Delta_{гр}$  називається *інтервалом довіри*. Чим ширший інтервал довіри, тим більша надійність (ймовірність довіри) того, що похибки результату вимірювань не вийдуть за межі цього інтервалу.

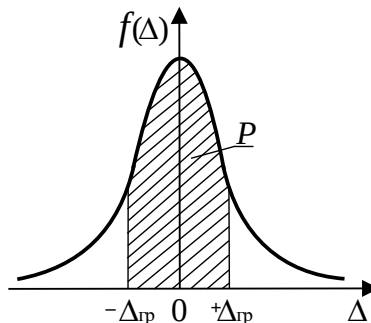


Рис.18

Ймовірність довіри (надійність)  $P$  можна розрахувати за допомогою формули (3.7):

$$P(|\Delta| \leq \Delta_{гр}) = \int_{-\Delta_{гр}}^{+\Delta_{гр}} f(\Delta) \cdot d\Delta =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{\varepsilon_{\text{гр}}} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2}\right\} d\varepsilon, \quad (3.9)$$

де  $\varepsilon = \Delta/\sigma$ ,  $\varepsilon_{\text{гр}} = \Delta_{\text{гр}}/\sigma$ .

Середня квадратична похибка (3.8) буде найменша, а крива  $f(\Delta)$  найбільш гостра, коли за істинне значення невідомої величини  $x$  прийняти

$$x_{\text{іст}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \langle x \rangle, \quad (3.10)$$

яке називається **середнім арифметичним**. Чим більше число вимірювань  $n$  проведено, тим менше значення  $\bar{x}$  відрізняються одне від одного. Середнє арифметичне дає найкраще наближення до істинного значення величини, яка вимірюється, яке тільки ми можемо отримати із існуючих експериментальних даних.

Якщо прийняти, що  $x_{\text{іст}} = \langle x \rangle$ , тоді середня квадратична похибка буде:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n-1}}, \quad (3.11)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= x_1 - \langle x \rangle, \\ \Delta_2 &= x_2 - \langle x \rangle, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta_n &= x_n - \langle x \rangle, \end{aligned}$$

абсолютні похибки вимірювання. Формула (3.11) називається **формулою Бесселя**.

Теорія випадкових похибок дає і іншу формулу для розрахунку  $\sigma$ , яка не вимагає розрахунку квадратів абсолютних похибок:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}} \cdot \sum_{i=1}^n |\Delta_i| = \\ &= \frac{1,2533}{n-0,5} \cdot \sum_{i=1}^n |x_i - \langle x \rangle|. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Ця формула носить назву **формули Петерса** і вона *справедлива для закону нормального розподілу випадкових похибок*. В той же час формула Бесселя (3.11) справедлива для будь-якого закону розподілу похибок, тому якщо розрахунок  $\sigma$  за формулами (3.11) і (3.12) дають результати, які сильно відрізняються, то це свідчить про те, що дійсний закон розподілу похибок відрізняється від нормального і його не можна застосовувати для обробки результатів вимірювань.

*Середня квадратична похибка ряду вимірювань — основна і вихідна величина при обробці даних повторних вимірювань, яким би способом їх не обробляти.*

На практиці використовують середню квадратичну похибку середнього арифметичного, яку розраховують за формулою:

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n(n-1)}}, \quad (3.13)$$

де  $\Delta_i = x_i - \langle x \rangle$  — абсолютні похибки ряду вимірювань  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а  $\langle x \rangle$  — середньоарифметичне значення величини  $x$  для цього ряду вимірювань. Так як  $\sigma_{\langle x \rangle} < \sigma$ , то крива нормального розподілу похибок  $f(\Delta)$  для  $\sigma_{\langle x \rangle}$  є більш гострою і вузькою.

Підкреслимо ще раз різницю між середньою квадратичною похибкою одиничного вимірювання і середньою квадратичною похибкою середнього арифметичного. Середня квадратична похибка середнього арифметичного  $\sigma_{\langle x \rangle}$  використовується для характеристики похибки кін-

цевого результату  $\langle x \rangle$ , який отримується в результаті всіх виконаних вимірювань. Середня квадратична похибка одиничного вимірювання  $\sigma$  використовується для характеристики точності способу вимірювання, який використовується. В науковій літературі при описанні методу вимірювання часто вказують саме середню квадратичну похибку  $\sigma$ .

### **Виключення промахів. Приклади обробки результатів прямих вимірювань**

Абсолютну похибку  $\Delta_{\text{гр}} = 3\sigma$  називають граничною (максимальною) абсолютною похибкою. Їй відповідає ймовірність довіри  $P=0,99730$ . Це означає, що в інтервалі довіри, який знаходиться між  $\langle x \rangle - 3\sigma$  і  $\langle x \rangle + 3\sigma$  знаходиться 99,7% результатів всіх вимірювань  $x_i$ . Похибки  $|\Delta_{\text{гр}}| > 3\sigma$  — малоімовірні. Тому абсолютна похибка  $|\Delta_{\text{гр}}| > 3\sigma$  є критерієм для виявлення промахів. Якщо в ряді повторних вимірювань виявляється абсолютна похибка, яка переви-



щує за модулем  $3\sigma$ , то її вважають промахом і результат, який містить таку похибку, виключають із розгляду (правило "трьох сигма").

В практиці лабораторних досліджень деколи за граничну абсолютну похибку приймають  $\Delta_{\text{гр}} = 2\sigma$ , ймовірність довіри якої згідно формули (3.9) є  $P = 0,95$ .

Деколи використовують за граничну абсолютну похибку середню арифметичну модуля абсолютних похибок:

$$\Delta_{\text{гр}} = \frac{\sum_{i=1}^n |\Delta_i|}{n}, \quad (3.14)$$

для якої має місце співвідношення

$$\Delta_{\text{гр}} \approx 0,8\sigma, \quad (3.15)$$

яка виконується тим краще, чим більше  $n$  у формулах (3.14) і (3.15). Для середньої арифметичної похибки (3.11)  $\varepsilon_{\text{гр}} = 0,8$  і згідно формули (3.9) їй відповідає ймовірність довіри  $P = 0,58$ . Переваги середньої арифметичної похибки тільки в тому, що її простіше розраховувати.

Нехай  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}$ , —результати вимірювань величини  $x$ . Результат  $x_{n+1}$

різко відрізняється від інших. Чи відкинути  $x_{n+1}$  як промах, чи залишити для опрацювання показує різниця  $|x_{n+1} - \langle x \rangle|$ , де  $\langle x \rangle$  — середнє арифметичне значення  $x$  розраховане для  $n$  результатів вимірювань за формулою (3.10).

Результат вимірювання  $x_{n+1}$  є промахом і виключається із ряду результатів повторних вимірювань, якщо

$$|x_{n+1} - \langle x \rangle| > 3\sigma. \quad (3.16)$$

Результат вимірювання  $x_{n+1}$  відкидається із міркувань практичної неможливості малої ймовірної події ( $P < 0,27\%$ ).

Для випадків, коли число вимірювань дуже велике (порядку декількох сотень і тисяч), використовується більш строгий критерій, ніж правило "трьох сигма", відомий як правило Шовене (тут не розглядається).

В лабораторному практикумі часто використовують *критерій Романовського*

$$|x_{n+1} - \langle x \rangle| > \gamma\sigma \quad (3.17)$$

для малого числа вимірювань  $n < 20$ . Нижче приведена табл. 4 для значень коефіцієнта

у. В таблиці 4 приведені значення коефіцієнта  $\gamma$  у формулі (3.17) як функція від числа вимірювань  $n$ . В таблиці 4  $P$  – ймовірність того, що при виконанні умови (3.17)  $x_{n+1}$  є промахом, а  $\langle x \rangle$  розраховується для попередніх  $n$  результатів вимірювання. Взявши необхідне значення  $P$

**Таблиця 4**

Значення коефіцієнта  $\gamma$  для виявлення промахів за критерієм Романовського

| $n$ | $P$ , відн.од. |      |      |      |       |
|-----|----------------|------|------|------|-------|
|     | 0,9            | 0,95 | 0,98 | 0,99 | 0,999 |
| 2   | 6,3            | 12,7 | 31,8 | 63,7 | 636,6 |
| 3   | 2,9            | 4,3  | 7,0  | 9,9  | 31,6  |
| 4   | 2,4            | 3,2  | 4,5  | 5,8  | 12,9  |
| 5   | 2,1            | 2,8  | 3,7  | 4,6  | 8,7   |
| 6   | 2,0            | 2,6  | 3,4  | 4,0  | 6,9   |
| 7   | 1,9            | 2,4  | 3,1  | 3,7  | 6,0   |
| 8   | 1,9            | 2,4  | 3,0  | 3,5  | 5,4   |
| 9   | 1,9            | 2,3  | 2,9  | 3,4  | 5,0   |
| 10  | 1,8            | 2,3  | 2,8  | 3,3  | 4,8   |

для відповідного числа вимірювань  $n$  визначаємо за табл.4 величину  $\gamma$ . Підставивши це значення  $\gamma$  у формулу (3.17), вирішують, чи можна довіряти вимірюванню, результат якого  $x_{n+1}$  перевіряється.

### Оцінка похибок результату при малому числі вимірювань

Застосування табл.4 коректне тільки при дуже великому числі вимірювань. Практично оцінку точності результатів вимірювання можна виконати за допомогою кривої нормального розподілу Гаусса (3.7) при досить великому числі вимірювань (хоч би при  $n > 30$ ). В протилежному випадку похибки, визначені вказаним способом, будуть суттєво спотворені.

Якщо число вимірювань  $n$  знаходиться в межах між 10 і 50, то середню похибку результату вимірювань (квадратичну, граничну) можна виправити, помноживши її на поправочний коефіцієнт

$$m = 1 + \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \quad (3.18)$$

де  $n$  – число вимірювань.

Якщо число вимірювань  $n < 10$ , то при визначенні похибки результату вимірювань за допомогою нормального розподілу Гаусса (3.7), навіть з поправкою  $m$  на мале число вимірювань за формулою (3.18), отри-

муються дуже спотворені значення похибок.

На практиці (особливо в учбових лабораторіях) дуже часто через нестачу часу та із-за інших причин приходить ся обмежуватись невеликим числом вимірів  $n < 10$ . В цих випадках замість нормального розподілу випадкових похибок (3.7) використовують закон розподілу Стюдента (Студент – псевдонім англійського вченого Госсета):

$$f(t_p; v) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{\pi v} \Gamma(\frac{v}{2})} \cdot (1 + \frac{t_p^2}{v})^{-\frac{v+1}{2}}, \quad (3.19)$$

де  $\Gamma$  – гамма – функція (для цілого додатнього числа  $b$  значення гамма-функції можна вираховувати за формулою  $\Gamma(b) = (b-1)!$ ,  $t_p = \Delta_{гр}/\sigma_{(x)}$  – коефіцієнт довіри,  $\sigma_{(x)}$  – визначається за формулою (3.13),  $\Delta_{гр}$  – границя довіри абсолютної похибки середнього арифметичного,  $v$  – число ступеней вільності (в загальному випадку  $v = n - 1$ , де  $n$  число значень випадкових похибок).

Графік розподілу Стюдента нагадує за формою нормальний розподіл і із збільшення  $n$  наближається до нього все більше (можна вважати, що при  $n > 30$  обидва графіки практично співпадають). Коефіцієнт довіри  $t_p$  (при  $n > 30$ ) практично не залежить від  $n$ . Згідно розподілу Гауса (3.7), (3.9) для ймовірності  $P=0,95$  можна вважати  $t_p \cong 2$ . Для малих  $n$  цей коефіцієнт залежить і від  $n$ , і від  $P$ . Знаходять його за таблицями, які складені на основі розподілу Стюдента (3.19).

**Таблиця 5**

Коефіцієнти Стюдента  $t_{p,n}$

| $n$ | $P$ , відн.од. |      |      |      |       |
|-----|----------------|------|------|------|-------|
|     | 0,9            | 0,95 | 0,98 | 0,99 | 0,999 |
| 2   | 6,3            | 12,7 | 31,8 | 63,7 | 636,6 |
| 3   | 2,9            | 4,3  | 7,0  | 9,9  | 31,6  |
| 4   | 2,4            | 3,2  | 4,5  | 5,8  | 12,9  |
| 5   | 2,1            | 2,8  | 3,7  | 4,6  | 8,7   |
| 6   | 2,0            | 2,6  | 3,4  | 4,0  | 6,9   |
| 7   | 1,9            | 2,4  | 3,1  | 3,7  | 6,0   |
| 8   | 1,9            | 2,4  | 3,0  | 3,5  | 5,4   |
| 9   | 1,9            | 2,3  | 2,9  | 3,4  | 5,0   |
| 10  | 1,8            | 2,3  | 2,8  | 3,3  | 4,8   |
| 11  | 1,8            | 2,2  | 2,8  | 3,2  | 4,6   |
| 12  | 1,8            | 2,2  | 2,7  | 3,1  | 4,5   |
| 13  | 1,8            | 2,2  | 2,7  | 3,1  | 4,3   |
| 14  | 1,8            | 2,2  | 2,7  | 3,0  | 4,2   |
| 15  | 1,8            | 2,1  | 2,6  | 3,0  | 4,1   |

В табл.5, яка відповідає розподілу Стюдента, роль  $\epsilon_{гр}$  (формула (3.9)) відіграє параметр  $t_{p,n}$ . Це коефіцієнт Стюдента – функція ймовірності довіри  $P$  і числа вимірювань  $n$ . Порівняння табл.5 з формулою (3.9) дає можливість зробити висновок, що при великих  $n$  значення  $t_{p,n}$  наближаються до відповідних значень  $\epsilon_{гр}$  (при одних і тих же  $P$ ).

Це природньо, так як при  $n \rightarrow \infty$  розподіл Стюдента прямує до розподілу Гаусса. Практично розподіл Стюдента переходить в розподіл Гаусса при досить (але не надто) великих значеннях  $n$  ( $n > 100$ ).

За допомогою таблиці 5 розв'язують задачі двох типів:

1) визначають границю довіри

$$\Delta_{гр} = t_{p,n} \cdot \sigma_{\langle x \rangle} \quad (3.20)$$

для даного числа вимірювань  $n$  і заданої ймовірності довіри  $P$ ;

2) визначають ймовірність довіри  $P$  для даних  $n$  і  $\Delta_{гр}$ .

### Оцінка похибок опосередкованих вимірювань

Якщо є функція  $y = f(x)$ , то приріст функції  $dy$  біля якоїсь точки  $x = x_0$ , при прирості аргументу на величину  $dx$  буде (рис.19):  $dy = \tan \alpha \cdot dx$ , або

$$dy = \frac{df(x)}{dx} (x = x_0) \cdot dx, \quad (3.21)$$

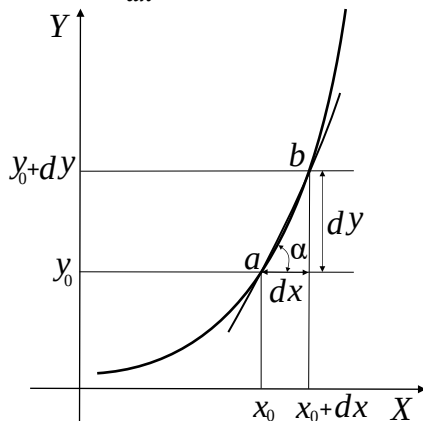


Рис.19

де  $\tan \alpha = \frac{df(x)}{dx} (x = x_0)$  – похідна від функції  $f(x)$ , яка розрахована для  $x = x_0$ . Формула (3.21) справедлива для випадку, коли приріст аргументу  $dx$  є нескінченно мала величина (достатньо мала величина).

Якщо функція  $y = f(x_1, x_2)$ , де  $x_1, x_2$  – змінні величини, то приріст  $dy$  функції  $y$  біля точки  $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}$

при приростах аргументів  $dx_1, dx_2$  буде:

$$dy = \sqrt{\sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} \cdot dx_i \right)^2}. \quad (3.22)$$

Якщо функція  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то приріст  $dy$  біля точки з координатами  $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \dots, x_n = x_{n0}$  можна знайти аналогічно формулі (3.22), а саме:

$$dy = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20} \\ \dots \\ x_n=x_{n0}}} \cdot dx_i \right)^2}. \quad (3.23)$$

Ще раз зауважимо, що формула (3.22) справедлива тоді, коли прирости  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  достатньо малі.

У формулах (3.22), (3.23)  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  – частинна похідна функції  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , по аргументу  $x_1$ , тобто похідна, при знаходженні якої всі інші аргументи ( $x_2, x_3, \dots, x_n$ ) крім  $x_1$  вважаються постійними. Аналогічний смисл мають похідні  $\frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ .

Нехай формула зв'язку між невідомою величиною  $y$  і величинами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , які отримуються при прямих вимірюваннях, а також і при інших опосередкованих вимірюваннях, має вид:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.24)$$

Найбільш ймовірне значення результату опосередкованого вимірювання, або середньоарифметичне  $\langle y \rangle$ , знаходиться за формулою

$$\langle y \rangle = f(\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \dots, \langle x_n \rangle), \quad (3.25)$$

де  $\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \dots, \langle x_n \rangle$  – найбільш ймовірні (середньо арифметичні) значення величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Для середньої квадратичної похибки результату опосередкованого вимірювання, аналогічно формулі (3.23), отримаємо, що

$$\sigma_{\langle y \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \Big|_{\substack{x_1=\langle x_1 \rangle \\ \dots \\ x_n=\langle x_n \rangle}} \cdot \sigma_{\langle x_i \rangle} \right)^2}. \quad (3.26)$$

В цій формулі члени  $\frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \sigma_{\langle x_i \rangle}$  при  $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$  називається частинними середніми квадратичними похибками

результату опосередкованого вимірювання.

В загальному випадку будь-яка абсолютна похибка результату опосередкованого вимірювання буде:

$$\Delta\langle y \rangle = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \Big|_{\substack{x_1=\langle x_1 \rangle \\ \dots \\ x_n=\langle x_n \rangle}} \cdot \Delta\langle x_i \rangle \right)^2}, \quad (3.27)$$

де  $\Delta\langle x_i \rangle$  – однотипна з нею середня похибка вимірювання величини  $x_i$ . При прямих вимірюваннях величини  $x_i$ , якщо число вимірювань невелике, використовується метод Стюдента для знаходження ймовірності довіри і границі довіри. Тому часто  $\Delta\langle x_i \rangle = \Delta_{\text{гр}}(\langle x_i \rangle)$ .

На практиці знаходять спочатку не абсолютну похибку результату опосередкованого вимірювання  $\Delta\langle y \rangle$ , а відносну похибку  $\Delta\langle y \rangle / \langle y \rangle$  величини  $y$ . Із (3.27) можемо отримати, що

$$\left( \frac{\Delta\langle y \rangle}{\langle y \rangle} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} \Big|_{\substack{x_1=\langle x_1 \rangle \\ \dots \\ x_n=\langle x_n \rangle}} \cdot \Delta\langle x_i \rangle \right)^2.$$

Так як  $\frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial \ln y}{\partial x_i}$ , то відносна похибка опосередкованого вимірювання

$$\begin{aligned} \delta &= \Delta\langle y \rangle / \langle y \rangle = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{y} \frac{\partial \ln y}{\partial x_i} \Big|_{\substack{x_1=\langle x_1 \rangle \\ \dots \\ x_n=\langle x_n \rangle}} \cdot \Delta\langle x_i \rangle \right)^2}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Визначивши спочатку за формулою (3.28) відносну похибку опосередкованого вимірювання величин  $y$ , потім визначають абсолютну похибку за формулою

$$\Delta\langle y \rangle = \delta \cdot \langle y \rangle. \quad (3.29)$$

## Засади оцінювання невизначеностей результатів вимірювань

### Поняття невизначеності вимірювання.

Сьогодні для докладного аналізу точності отриманого результату вимірювання використовують дещо інший підхід — не «аналіз похибки», а розрахунок невизначеності вимірювання.

**Невизначеність вимірювання** (*measurement uncertainty, uncertainty of measurement, uncertainty*) — параметр, пов'язаний із результатом вимірювання при певному дослі-

дження — характеризує розкид значень, які з достатньою підставою можуть бути приписані величині, яка вимірюється. Результати вимірів ніколи не бувають точними, тобто абсолютно вільними від сумнівів. Тому невизначеність вимірювання є частиною результату виміру і визначає його точність. Невизначеність вимірювання — це основне поняття, пов'язане з будь-яким виміром. Воно може використовуватися для професійного прийняття рішень, а також для оцінювання властивостей у багатьох галузях як теоретичних, так і експериментальних. Оскільки вимоги до допусків, які застосовуються у промисловому виробництві, стають усе більш суворими, роль невизначеності вимірювання при оцінці якості продукції зростає все більше. Вимірювання допомагає приймати рішення у всіх видах діяльності. Невизначеність вимірювання дозволяє робити порівняння при оцінюванні відповідності, приймати правильне рішення,

засноване на вимірі, і управляти виникаючими ризиками.

*Визначаються три переваги невизначеності:*

- з уведенням поняття невизначеності усувається поняття “істинне значення величини”, яка вимірюється;

- з уведенням поняття невизначеності усувається поняття “абсолютна похибка” вимірювань, яка виражається через істинне значення величини, яка вимірюється;

- усувається розподіл похибок вимірювань на систематичні та випадкові.

*Методи розрахунків невизначеності, так як і методи оцінки характеристик похибок, базуються на основних поняттях класичної метрології, математичної статистики і теорії похибок.*

### **Види невизначеностей у вимірюваннях**

Види невизначеності вимірювань такі:  
—стандартна невизначеність (типи А і В);

—сумарна стандартна невизначеність;

—розширена невизначеність.

*Стандартна невизначеність* — це невизначеність результату прямих вимірювань, яка виражена через середнє квадратичне відхилення.

За методом обчислення розрізняють два типи стандартної невизначеності:

—стандартна невизначеність за типом А;

—стандартна невизначеність за типом В.

**Стандартна невизначеність типу А** — це невизначеність, яка обчислюється *статистичними* методами обробки результатів багаторазових вимірювань (спостережень).

Вихідні дані — результати багатократних вимірювань представлених вибіркою:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  (скорочено  $x_i, i = \overline{1, n}$ ).

а) стандартна невизначеність за типом А окремого результату вимірювання  $x_i, i = \overline{1, n}$  визначається за формулою (3.11):

$$u_{A_x} \equiv u_{A(x)} = \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n-1}}. \quad (3.30)$$

б) стандартна невизначеність за типом А середнього арифметичного результатів багатократних вимірювань  $x_i, i = \overline{1, n}$  визначається за формулою (3.13):

$$\begin{aligned} u_{A\bar{x}} &\equiv u_{A(\langle x \rangle)} = \sigma_{\langle x \rangle} = \\ &= \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

В цих формулах  $\langle x \rangle$  — середнє арифметичне результатів багатократних вимірювань  $x_i, i = \overline{1, n}$  визначається за формулою (3.10).

Більшість вимірювань є одноразовими. Навіть у випадку вимірювань з багаторазовими спостереженнями число повторних вимірювань переважно є відносно невеликим, а отже оцінка стандартної невизначеності за типом А буде ненадійною. В такому разі оцінювати стандартну невизначеність доцільно іншими методами.

**Стандартна невизначеність типу В** — це невизначеність



ність, яка обчислюється за деякою апіорною інформацією:

1. Грунтуючись на рівнянні залежності величини, яка вимірюється від вихідних величин, складають перелік:

—вихідних величин, які вимірюють;

—впливових вихідних величин, які не вимірюються;

—введених поправок на відомі систематичні похибки;

—додаткових похибок, тощо.

2. Як правило, оцінювання стандартної невизначеності за типом В зводиться до застосування апіорного закону розподілу. Наприклад, для результату вимірювання  $x$ , який описується нормальним розподілом, стандартна невизначеність типу В оцінюється за формулою

$$u_B(x) \cong \frac{b-a}{6}, \quad (3.32)$$

де  $a$  і  $b$  ліва та права границі розподілу відповідно. Отже, розрахунок стандартної невизначеності за типом В можливий в разі наявності певної інформації про величину, для якої здійснюється

оцінювання. Такою інформацією є знання закону розподілу та його границь. Їх можна отримати із: 1) попередніх (архівних) або спеціальних додаткових вимірювань; 2) специфікації (документації) виробника на прилади та матеріали, що застосовуються в процесі вимірювання; 3) протоколів чи свідоцтв про перевірку та калібрування засобів вимірювальної техніки; 4) довідкових даних; 5) знань про поведінку і властивості речовин чи приладів.

Досить поширеною є ситуація, коли відомі границі розподілу, а будь-яка інформація про розподіл величини в межах границь відсутня. В такому випадку під час розрахунку стандартної невизначеності виходять із формули для рівномірного розподілу.

**Рівномірний розподіл (неперервний)** - в теорії ймовірностей це розподіл, який характеризується тим, що ймовірність будь-якого інтервалу залежить тільки від його довжини. Кажуть, що випадкова величина  $x$  має рівномірний розподіл на відрізку  $[a, b]$ , де  $a$  і  $b \in$

$\mathbb{R}$ , якщо функція розподілу ймовірності має вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b, \end{cases} \quad (3.33)$$

який показаний на рис.20. В

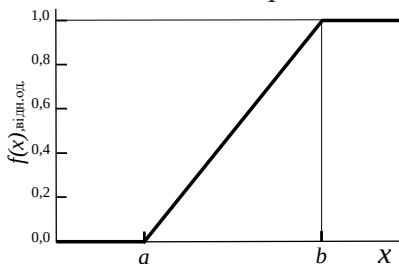


Рис.20

цьому випадку стандартна невизначеність за типом В визначається за формулою:

$$u_B(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \quad (3.34)$$

Нерідко відомо, що значення величини більш ймовірні в центрі розподілу, ніж на краях. Це свідчить про те, що розподіл не є рівномірним.

Якщо не має впевненості в тому, що розподіл нормальний, то слід вибрати компромісний між нормальним та рівномірним. Таким розподілом може бути трикутний. Тоді стандартна невизначеність за типом В визначається за формулою:

$$u_B(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{6}}. \quad (3.35)$$

3. Окремі випадки оцінювання невизначеності:

– Невизначеність констант, коефіцієнтів та поправок для констант і коефіцієнтів, а також поправок, інтервалами розсіяння яких є одиниця найменшого розряду їхніх числових значень. Тоді невизначеність обчислюють за формулою:

$$u_B = \frac{q}{2\sqrt{3}}, \quad (3.36)$$

де  $q$  – одиниця найменшого розряду числового значення.

– Невизначеність зчитування показів з аналогової шкали приладів. Для оцінювання невизначеності зчитування показів аналогової шкали приймають рівномірний закон розподілу і тоді згідно формули (3.34)

$$u_B = \frac{\left(x + \frac{q}{4}\right) - \left(x - \frac{q}{4}\right)}{2\sqrt{3}} = \frac{q}{4\sqrt{3}}, \quad (3.37)$$

де  $b = x + \frac{q}{4}$ ,  $a = x - \frac{q}{4}$ ,  $x$  – виміряне значення величини,  $q$  – ціна поділки шкали приладу.

Якщо шкала нерівномірна, невизначеність оцінюють окремо для кожного діапазону,

для якого визначена ціна поділки.

Для вимірювального приладу, який має клас точності, стандартну невизначеність розраховують за формулою

$$u_B = \frac{\Delta_{\text{пр}}}{\sqrt{3}}, \quad (3.38)$$

де  $\Delta_{\text{пр}}$  — границя основної допустимої (інструментальної) похибки, яка визначається за формулою (3.4).

—Невизначеність заокруглення залежить від кількості значущих цифр, яких залишають.

**4. Правила заокруглення результатів вимірювань:**

- спочатку заокруглюють значення розширеної невизначеності (це поняття розглядається далі) результату випробування (вимірювання). Залишають 1 або 2 значущі цифри, застосовуючи ряд: 0,10; 0,15; 0,20; 0,25; 0,3; 0,4; 0,5; ... ;

- заокруглюють числове значення результату вимірювання, при цьому одиниця найменшого розряду повинна відповідати по порядку величини невизначеності (похибки);

- під час проміжних обчислень залишають на одну значущу цифру більше;

- невизначеність заокруглення визначають аналогічно невизначеності констант за формулою (3.36).

### **Сумарна стандартна невизначеність**

Сумарна стандартна невизначеність — це стандартна невизначеність результату вимірювання, яка представляє суму складових цієї невизначеності. Вона має фізичний зміст дисперсії результату вимірювання і обчислюється через дисперсію (квадрати стандартних невизначеностей) інших фізичних величин (аргументів), через які визначається фізична величина, яка шукається:

**1. Для прямих вимірювань**

$$U_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}. \quad (3.39)$$

**2. Для опосередкованих вимірювань** сумарна стандартна невизначеність типу А визначається, за формулою (3.27), а саме:

$$U_{CA} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u_A^2(x_i)}, \quad (3.40)$$

де  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – залежність величини, яку вимірюють, від вхідних величин (рівняння вимірювання);  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  – коефіцієнт впливу (ваговий коефіцієнт), який визначають, як частинну похідну рівняння залежності величини, яку вимірюють, за однією з вхідних величин. Коефіцієнт впливу (ваговий) відображає як зміна даної вхідної величини може впливати на результат вимірювання.  $u_A(x_i)$  – стандартна невизначеність за типом А вхідної величини  $x_i$ .

**3. Сумарну стандартну невизначеність типу В визначають за формулою (3.27):**

$$U_{CB} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u_B^2(x_i) + u_B^2(z_i)}, \quad (3.41)$$

де  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  – ваговий коефіцієнт впливу величини  $x_i$ ;  $u_B(x_i)$  – стандартна невизначеність за типом В величин, що входять у рівняння  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  залежності величини  $y$ , яка вимірюється;

$u_B(z_i)$  – стандартна невизначеність за типом В величин, що не входять у рівняння залежності величини, яка вимірюється.

Якщо впливовий фактор не входить у рівняння залежності вимірюваної величини, його враховують у невизначеності, але без урахування коефіцієнту впливу  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  (вагового коефіцієнту).

На практиці пошук сумарної невизначеності типу В подібний до знаходження абсолютної похибки і має або такий самий, або дещо модифікований вигляд, зберігаючи в основному фізичний зміст.

#### **4. Сумарна стандартна невизначеність**

$$U_C = \sqrt{u_{CA}^2 + u_{CB}^2}. \quad (3.42)$$

**5. Розширена невизначеність** визначається за наступною формулою:

$$U = k U_C, \quad (3.43)$$

де  $k$  – коефіцієнт охоплення, який залежить від заданого рівня довіри  $P$  і ефективного числа ступенів вільності:

$$k = t_P(v_{\text{eff}}), \quad (3.44)$$

де  $t_P(v_{\text{eff}})$  – коефіцієнт (квантиль) розподілу Стюдента з ефективним числом ступеней вільності  $v_{\text{eff}}$  і ймовірністю довіри (рівнем довіри)  $P$ .

Для обробки результатів вимірювань в лабораторному практикумі часто будемо приймати, що при:

– нормальному законі розподілу можливих значень величини, яка вимірюється, приймають:

$$k = 2 \text{ при } P \cong 0,95 \text{ і}$$

$$k = 3 \text{ при } P \cong 0,99;$$

– рівномірному законі розподілу можливих значень величини, яка вимірюється, приймають:

$$k = 1,65 \text{ при } P \cong 0,95 \text{ і}$$

$$k = 1,71 \text{ при } P \cong 0,99.$$

**Кінцевий результат** обробки результатів фізичних вимірювань, як правило, приводять в такому вигляді:

1. Записується дійсне значення величини  $u$ , яка вимірюється;

2. Приводиться результуюча сумарна невизначеність, яка розраховується за формулою (3.42).

3. Записується розширена невизначеність, яка розраховується за формулою (3.43);

4. Записується відносна невизначеність результату вимірювання;

5. Записується ймовірність довіри  $P$ .

#### **Додатки 4. Приклади обробки результатів вимірювань**

**Приклад 1.** Обробка результатів визначення невідомого опору за допомогою мостової схеми (рис.9).

Схема складається із відомих опорів  $R_1$ ,  $R_2$  і магазину опорів  $R_m$ , невідомого опору  $R_x$ , нуль-гальванометра  $G$  і стабілізованого джерела напруги  $U$ . Опір  $R_1=6,8$  кОм (заводське маркування ОСМЛТ, 6,8 кОм, к 5%),  $R_2=6,2$  кОм (заводське маркування МЛТ-2, 6,2 кОм, к 5%).

Резистори  $R_1$  і  $R_2$  підбираємо близькими за значеннями опорів і мінімальними відносними похибками. Тоді точність визначення невідомого опору  $R_x$  буде найкращою. Магазин опорів  $R_m$  має клас точності  $K_m = 0,2$ . У вимірювальній діагоналі  $BD$  ввімкнений нуль-гальванометр зі шкалою  $\pm 100$  мкА, класу точності  $K_G = 1,0$ . *Вимірювання проводиться один раз.* Струм через гальванометр дорівнює нулю при опорі на магазині опорів  $R_m = 2485$  Ом. Визначити невідомий опір  $R_x$ , його невизначеність  $U(R_x)$  і відносну невизначеність, та записати кінцевий результат вимірювання  $R_x$ .

### Обробка результату експерименту

1. За формулою (1.21) визначаємо невідомий опір  $R_x$ :

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_m = \frac{6,8}{6,2} \cdot 2485 \text{ Ом} = 2725,484 \text{ Ом}.$$

2. Так як  $R_x$  визначається за формулою (1.21), то це опосе-

редковані вимірювання дослід проводиться один раз, то будемо знаходити сумарну невизначеність  $R_x$  за формулою (3.42) додатку 3. Тому невизначеність  $R_x$  буде визначатись формулою (1.1) додатку 1.

$$U_{CB}(R_x) = \sqrt{L + M + N},$$

де  $L, M, N$  визначаються за формулами (1.2), (1.3), (1.4) в додатку 1.

а) Невизначеність опорів  $R_1$  і  $R_2$  розрахуємо за формулою (3.38) додатку 3, врахувавши їхні заводські дані:

$$\begin{aligned} U_B(R_1) &= \frac{R_1 \cdot \delta_1}{100\sqrt{3}} = \frac{6,8 \cdot 10^3 \cdot 5}{100\sqrt{3}} \text{ Ом} = \\ &= 196,3 \text{ Ом}, \\ U_B(R_2) &= \frac{R_2 \cdot \delta_2}{100\sqrt{3}} = \frac{6,2 \cdot 10^3 \cdot 5}{100\sqrt{3}} \text{ Ом} = \\ &= 178,98 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

б) Інструментальну похибку магазину опорів визначимо за формулою (3.4) додатку 3, а невизначеність  $R_m$  за формулою (3.38) додатку 3. Врахуємо, що при  $R_m = 2485$  Ом, за максимальний опір магазину опорів потрібно прийняти  $R_{m \max} = 9999,9$

$\Omega_m \approx 10000 \text{ Ом}$ . Тому невизначеність

$$U_B(R_m) = \frac{R_{m \max} \cdot K_m}{100\sqrt{3}} = \\ = \frac{10^4 \cdot 0,2}{100\sqrt{3}} \text{ Ом} = 11,55 \text{ Ом}.$$

**в)** За формулами (1.2), (1.3), (1.4) додатку 1 знаходимо:

$$L = \left( \frac{R_m}{R_2} U_B(R_1) \right)^2 = \\ = \left( \frac{2,485}{6,2} \cdot 196,6 \right)^2 \text{ Ом}^2 = \\ = 6190,26 \text{ Ом}^2, \\ M = \left( \frac{R_1 R_m}{R_2^2} U_B(R_2) \right)^2 = \\ = \left( \frac{6,8 \cdot 2,485}{6,2^2} \cdot 178,98 \right)^2 \text{ Ом}^2 = \\ = 6190,32 \text{ Ом}^2, \\ N = \left( \frac{R_1}{R_2} U_B(R_m) \right)^2 = \\ = \left( \frac{6,8}{6,2} \cdot 11,55 \right)^2 \text{ Ом}^2 = \\ = 160,47 \text{ Ом}^2.$$

Тоді сумарна невизначеність типу  $B$  для невідомого опору  $R_x$  буде згідно формули (1.1) додатка 1:

$$U_{CB}(R_x) = \sqrt{L + M + N} = \\ = \sqrt{12541,05} = 111,99 \text{ Ом}.$$

**г)** Розширену невизначеність розрахуємо за формулою (3.43) додатку 3, тобто

$$U(R_x) = k U_B(R_x) = 2 \cdot 111,99 \text{ Ом} = \\ = 223,974 \text{ Ом},$$

де  $k$  – коефіцієнт охоплення, який для лабораторних робіт приймаємо  $k = 2$  при рівні довіри  $P = 0,95$ .

Згідно правил заокруглення (див. §1.4 посібника [2]) розширену невизначеність для  $R_x$  приймаємо:

$$U(R_x) = 200 \text{ Ом}.$$

**е)** Тоді цифри 2(десятки), 5, 4, 8, 4 в значенні  $R_x = 2725,484 \text{ Ом}$  є невірними і їх відкидаємо. Цифра 7 сумнівна, цифра 2(тисячі) – вірна. Кінцевий запис результату вимірювання невідомого опору  $R_x$  можемо записати так:

$$R_x = (2700 \pm 200) \text{ Ом}$$

з ймовірністю довіри  $P = 0,95$  і відносною невизначеністю

$$\delta = \frac{200}{2700} \cdot 100\% \approx 7\%.$$

**Висновок.** Як видно із даного розрахунку основний вклад в

невизначеність  $U(R_x)$  вносять невідомості  $U_B(R_1)$  і  $U_B(R_2)$ . Тому для досягнення високої точності вимірювання мостовою схемою значення невідомого опору  $R_x$  необхідно підбирати однакові резистори  $R_1$  і  $R_2$ , з великим значенням опору і з малою невизначеністю.

### Приклад 2. Обробка результатів вимірювання електрорушійної сили методом компенсації

В результаті проведених вимірювань отримані такі дані (табл.6).

**Завдання.** Опрацювати дані результати вимірювання:

1. Визначити за формулою (1.30) значення невідомої  $\mathcal{E}_x$  (прийняти, що е.р.с. нормального елемента  $\mathcal{E}_n=1,0183$  В);

2. Розрахувати невизначеність результату визначення невідомої е.р.с.  $\mathcal{E}_x$ ;

3. Записати кінцевий результат вимірювання;

4. Зробити висновки по роботі і по обробці результатів визначення невідомої е.р.с.  $\mathcal{E}_x$ .

**Таблиця 6**

| n | Довжина плеча реохорда |             | $\mathcal{E}_x$ , В |
|---|------------------------|-------------|---------------------|
|   | $l_1$ , см             | $l'_1$ , см |                     |
| 1 | 19,4                   | 30,6        | 1,6062              |
| 2 | 19,7                   | 30,2        | 1,5610              |
| 3 | 19,1                   | 30,8        | 1,6421              |
| 4 | 19,6                   | 30,6        | 1,5898              |
| 5 | 19,8                   | 30,2        | 1,5532              |

### Обробка результатів вимірювань

1. Невідому е.р.с. розрахувати за формулою (1.30)

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_n \frac{l'_1}{l_1}, \quad (2.1)$$

де замість  $l'_1$  прийняти середнє арифметичне значення, тобто

$$\langle l'_1 \rangle = \frac{30,6+30,2+30,8+30,6+20,2}{5} = 30,48 \text{ см},$$

а

$$\langle l_1 \rangle = \frac{19,4+19,7+19,1+19,6+19,8}{5} = 19,52 \text{ см}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \mathcal{E}_n \frac{\langle l'_1 \rangle}{\langle l_1 \rangle} = \frac{30,48}{19,52} \cdot 1,0183 = \\ &= 1,5905 \text{ В}. \end{aligned}$$



Це означає, що невідому е.р.с.  $\mathcal{E}_x$  ми визначили опосередковано.

2. Для розрахунку невізначеності  $\mathcal{E}_x$  врахуємо, що є статистика вимірювань  $l_1$  і  $l'_1$ . Тому для розрахунку невизначеності типу А використаємо формулу (3.40) додатку 3:

$$U_{CA}(\mathcal{E}_x) = \sqrt{L + M}, \quad (2.2)$$

де

$$L = \left( \frac{\varepsilon_n}{\langle l_1 \rangle} U_A(\langle l'_1 \rangle) \right)^2, \quad (2.3)$$

$$M = \left( \frac{\langle l'_1 \rangle \varepsilon_n}{\langle l_1 \rangle^2} U_A(\langle l_1 \rangle) \right)^2. \quad (2.4)$$

Тут  $U_A(\langle l'_1 \rangle)$  і  $U_A(\langle l_1 \rangle)$  – стандартні невизначеності за типом А середнього арифметичного результатів вимірювання  $l_1$  і  $l'_1$  визначаються за формулою (3.3) додатку 3. Тобто

$$U_A(\langle l_1 \rangle) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (l_{1i} - \langle l_1 \rangle)^2}{n(n-1)}}, \quad (2.5)$$

$$U_A(\langle l'_1 \rangle) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (l'_{1i} - \langle l'_1 \rangle)^2}{n(n-1)}} \quad (2.6)$$

де

$\langle l_1 \rangle = 19,52$  см,  $\langle l'_1 \rangle = 30,48$  см – середні арифметичні значення результатів вимірювання плечей реохорда. Тоді за формулою (2.5) знаходимо:

$$U_A(\langle l_1 \rangle) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{n(n-1)}} = 0,124 \text{ см},$$

де  $a = (19,40 - 19,52)$  см,

$b = (19,40 - 19,52)$  см,

$c = (19,70 - 19,52)$  см,

$d = (19,60 - 19,52)$  см,

$e = (19,80 - 19,52)$  см,

$n = 5$ .

Аналогічно за формулою (2.6) цього прикладу знаходимо, що

$$U_A(\langle l'_1 \rangle) = 0,120 \text{ см}.$$

Після підстановки числових значень у формули (2.3) і (2.4) отримаємо:

$$L = \left( \frac{1,0183}{19,52} \cdot 0,120 \right)^2 = 3,92 \cdot 10^{-5} \text{ В}^2,$$

$$M = \left( \frac{30,48 \cdot 1,0183}{19,52^2} \cdot 0,124 \right)^2 = 1,02 \cdot 10^{-4} \text{ В}^2.$$

Підставивши ці значення  $L$  і  $M$  у формулу (2.2), отримаємо, що

$$\begin{aligned} U_{CA}(\mathcal{E}_x) &= \sqrt{3,92 \cdot 10^{-5} + 1,02 \cdot 10^{-4}} = \\ &= 0,01188 \text{ В}. \end{aligned}$$

Таким чином ми розрахували сумарну невизначеність за типом А невідомої е.р.с.  $\mathcal{E}_x$ , яка визначена опосередковано.

Крім цього, у формулі (2.1) ще є величина є.р.с.  $\mathcal{E}_n$  нормального елемента, яку будемо вважати як константу, так як її значення задається. Тому її невизначеність за типом В розрахуємо за формулою (3.36) додатку 3. Тобто

$$U_B(\mathcal{E}_n) = \frac{q}{2\sqrt{3}} = \frac{0,0001}{2\sqrt{3}} \text{ В.}$$

Невизначеність за типом В невідомої є.р.с.  $\mathcal{E}_x$  визначимо за формулою (3.41) додатку 3, тобто

$$U_{CB}(\mathcal{E}_x) = \frac{\langle l'_1 \rangle}{\langle l_1 \rangle} U_B(\mathcal{E}_n) = \\ = \frac{30,48}{19,52} \cdot \frac{0,0001}{2\sqrt{3}} \text{ В} \cong 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ В.}$$

Сумарну невизначеність невідомої є.р.с.  $\mathcal{E}_x$  розрахуємо за формулою (3.42) додатку 3, а саме:

$U_C(\mathcal{E}_x) = \sqrt{U_{CA}^2(\mathcal{E}_x) + U_{CB}^2(\mathcal{E}_x)}$ . Підставивши числові значення отримаємо, що сумарна невизначеність  $\mathcal{E}_x$  буде:

$$U_C(\mathcal{E}_x) = \\ = \sqrt{0,01188^2 + (4,5 \cdot 10^{-5})^2} \cong \\ \cong 0,01188 \text{ В.}$$

Тобто стандартна невизначеність типу В є.р.с. нормального елемента  $\mathcal{E}_n$  практично не вносить вкладу в сумарну невизначеність невідомої є.р.с.  $\mathcal{E}_x$ .

Розширену невизначеність є.р.с.  $\mathcal{E}_x$  розрахуємо за формулою (3.43) додатку 3.

$$U(\mathcal{E}_x) = k U_C(\mathcal{E}_x) = 2 \cdot 0,01188 \text{ В} = \\ = 0,02376 \text{ В} \cong 0,024 \text{ В.}$$

Тут  $k$  коефіцієнт охоплення, який для обробки результатів вимірювання на лабораторних роботах приймаємо  $k = 2$  при рівні довіри  $P = 0,95$ .

**3. Кінцевий запис результату визначення невідомої є.р.с.:**

$\mathcal{E}_x = \langle \mathcal{E}_x \rangle \pm U(\mathcal{E}_x) = (1,591 \pm 0,024) \text{ В}$   
З відносною невизначеністю  
 $\delta(\mathcal{E}_x) = \frac{U(\mathcal{E}_x)}{\mathcal{E}_x} = \frac{0,024}{1,591} \cdot 100\% = 1,5\%$   
і ймовірністю довіри  $P = 0,95$ .

**4.** Опрацюємо ці результати методом Стюдента (див. §1.6 посібника [2] і стор.40 даної інструкції), вважаючи, що в нас є набір значень є.р.с. невідомої  $\mathcal{E}_x$ , які отримані за допомогою формули (1.30) і приведені в третій

колонці таблиці 6. За формулою (3.10) додатку 3 розрахуємо середнє арифметичне значення  $\mathcal{E}_x$ :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{E}_x \rangle &= \frac{\sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_{xi}}{5} = \\ &= \frac{1,6062 + 1,5610 + 1,6421 + 1,5898 + 1,5532}{5} = \\ &= 1,59045 \text{ В.}\end{aligned}$$

Тоді за формулою (3.13) додатку 3 розрахуємо середню квадратичну похибку середнього арифметичного. Загальна формула така:

$$\sigma_{\langle \mathcal{E}_x \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\mathcal{E}_{xi} - \langle \mathcal{E}_x \rangle)^2}{n(n-1)}}.$$

Підставимо числові значення і отримаємо:

$$\sigma_{\langle \mathcal{E}_x \rangle} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{5(5-1)}},$$

де

$$\begin{aligned}a &= 1,6062 - 1,59045; \\ b &= 1,5610 - 1,59045; \\ c &= 1,6421 - 1,59045; \\ d &= 1,5898 - 1,59045; \\ e &= 1,5532 - 1,59045.\end{aligned}$$

Розрахунок дає, що

$$\sigma_{\langle \mathcal{E}_x \rangle} = 0,0161 \text{ В.}$$

Тоді за формулою (3.20) додатку 3 знаходимо граничну похибку:

$$\Delta_{\text{гр}}(\mathcal{E}_x) = t_{P;n} \cdot \sigma_{\langle \mathcal{E}_x \rangle},$$

де  $t_{P;n}$  Стюдента, який знаходимо із табл.5 додатку 3. Приймаючи ймовірність довіри  $P = 0,95$  і число вимірювань  $n = 5$  із табл.5 знаходимо, що  $t_{0,95;5} = 2,8$ . Тоді

$$\Delta_{\text{гр}}(\mathcal{E}_x) = 2,8 \cdot 0,0161 = 0,045 \text{ В.}$$

**Висновок.** Як видно із розрахунків гранична похибка розрахована за методом Стюдента  $\Delta_{\text{гр}}(\mathcal{E}_x) = 0,045 \text{ В}$  більша сумарної невизначеності  $U(\mathcal{E}_x) \cong 0,024 \text{ В}$ . Це пояснюється тим, що метод Стюдента застосовується для прямих вимірювань невідомої величини. В нашій лабораторній роботі невідому величину знаходимо опосередковано (за формулою). Це означає, що в граничну похибку  $\Delta_{\text{гр}}(\mathcal{E}_x)$  додатково входить похибка у вимірюванні довжин плечей реохорда  $l_1$  і  $l'_1$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Скіцько І.Ф., Скіцько О.І. Фізика (Фізика для інженерів): Підручник /: - Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017.- 513 с. - Назва з екрану. - Доступ: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/19035>
2. Скіцько І.Ф., Скіцько О.І. Обробка результатів фізичних вимірювань. [Електронний ресурс]: навч. посіб./ КПІ ім. Ігоря Сікорського. - 2018.- 88 с.-Доступ: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/25320>
3. Лопатинський Е.С., Зачек І. Р., Ільчук Г. А., Романишин Б.М.. Фізика. Підручник. – Львів: Афіша, 2009.-386 с.
4. Кучерук І.М., Горбачук І.І., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Електрика й магнетизм.- К: Техніка, 2006р.- 452 с.
5. Лисенко О.В.Фізика: Конспект лекцій – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – Ч.1. – 199 с.
6. Бушок Г.Ф., Левандовський В.В., Півень Г.Ф. Курс фізики : навчальний посібник, Книга 1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм. 2 видання К. -Либідь 2001 - 448 с
7. Парселл Э. Берклеевский курс физики. Электричество и магнетизм: Учебное руководство: Пер. с англ./Под ред.А.Н.Шальникова и А.О.Вайсенберга –3-е изд., испр. - Москва: Наука. Гл.ред. физ. -мат. лит., 1983.- 416 с.